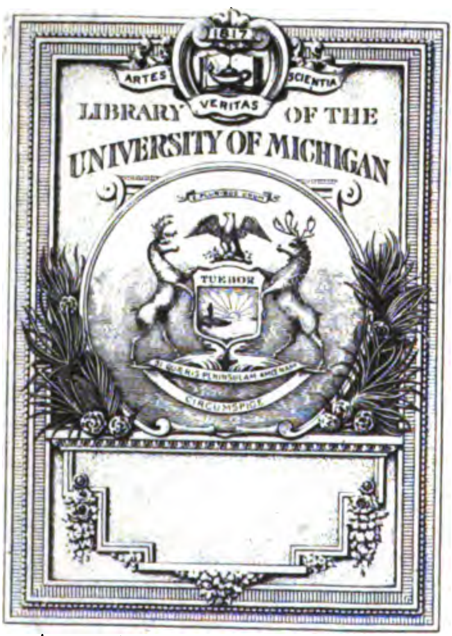

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

BEGINSELEN

DER

MEETKUNST.

BEGINSELEN

DER

MEETKUNST,

ONTWORPEN NAAR HAREN TEGENWOORDIGEN STAAT VAN VORDERINGEN;

INHOUDENDE:

HET EERSTE GEDEELTE

OVER DE

VLAKKE EN LIGCHAMELIJKE FIGUREN,

EN HET TWEEDE GEDEELTE

OVER DE

PLATTE EN BOLVORMIGE DRIEHOEKS-METING.

DOOR

JACOB DE GELDER,

HOOGLEERAAR, TE LEYDEN.

derde geheel omgewerkte en veel vermeerderde druk.

MET PLATEN.

In 's GRAVENHAGE en te AMSTERDAM,

BIJ DE GEBROEDERS VAN CLEEF.

1829.

VOORREDE.

De uitgebreide Voorrede, welke aan het hoofd van den eersten en tweeden druk dezer Beginselen geplaatst was, zoo, door de tijdsomstandigheden, als door den inhoud van latere mijner uitgegevene geschriften (*), *overtollig geworden zijnde, zoo heb ik, bij de derde uitgave, den geëerden Lezer slechts kortelijk het volgende te berigten.*

Deze beginselen zagen voor het eerst het licht, in den jare 1810. *Zij waren niet voortgevloeid uit de zucht, om door schrijven eenen naam te maken; ik mogt dezelve toen reeds als de vrucht beschouwen van eene vijftienjarige ondervinding in het onderwijs en van eene gedurige overpeinzing aangaande de beste manier, om den Leerling den zamenhang en het verband der meetkunstige waarheden, op de klaarste en krachtigste wijze, voor te stellen, en hem, op de geleidelijkste manier, van de eenvoudigste tot de hoogere kundigheden op te leiden. Dit werk was dus geen opstel in haast ontworpen, geene vertaling of zoogenaamde navolging, geen* compendium *in hetwelk (in navolging van den Duitschen smaak,) meer de belezenheid of liever boekenkennis van den schrijver doorstraalt, dan wel een zamenhangend eenvoudig en natuurlijk ta-*

(*) *Inzonderheid, in de* Verhandeling over het verband der wetenschappen, *in* 1826, *bij de uitgevers dezes, in het licht gekomen.*

tafereel van de kunst, eene duidelijke en wel uitgevoerde kaart van de kortste en eenvoudige wegen, die tot de wezenlijkste en nuttigste kundigheden opleiden; benevens een praktische voorstelling van de kunstmiddelen, om met de kundigheden, welke men uit dit Leerboek zou verkregen hebben, op eigen beenen staande, verder voort te gaan.

Eigen nadenken over de bijzondere deelen der Beginselen; als de leer der evenwijdige lijnen, den eigenlijken aard der onderling onmeetbare grootheden, de natuur en eigenschappen der evenredigheden; inzonderheid over de gelijkvormigheid, over de theorie van de ligging en snijding der vlakken, enz. enz. *een onophoudelijk beproeven van de uitkomsten dezer overdenkingen; dat alles waren de bouwstoffen, die tot het opstel van den eersten druk gediend hebben.*

Ik was, zoo als de geëerde Lezer uit de Voorrede van de vorige drukken kan zien, met al mijne aangewende moeite en ondanks die verkregene uitkomsten, welke mij een natuurlijk zelfsgenoegen moesten verschaffen, ver af van te gelooven, dat mijn eerste ontwerp niet vatbaar voor verbetering en beschaving zoude zijn; ik heb zulks destijds zoo uitdrukkelijk verklaard, dat de bedilling en berisping der genen, die wel eens het tegendeel hebben willen beweren, bij den weldenkenden, niet dan tot schande hunner overijling verstrekken kunnen.

In den jare 1817, *moest een tweede druk worden opgelegd. In denzelven bragt ik reeds verscheidene verbeteringen in het ontwerp, welke de ondervinding mij had aan de hand gegeven; doch de geringe tijd, waarover ik toen kon beschikken, en de spoed met welken het afdrukken moest achtervolgd worden, verhinderden mij destijds, er alles in te brengen, wat ik reeds bedacht had; vooral, omdat daartoe een geheel*

nieuw

nieuw ſtel platen zou noodig zijn geweest, hetwelk uit te voeren, mij toen volſtrekt ondoenlijk was.

In den jare 1819, *als Hoogleeraar te* Leyden *beroepen zijnde, was ik, in deze nieuwe betrekking, meer dan immer te voren, in de gelegenheid, om het bedachte verder te herdenken en te beſchaven, en alzoo den derden druk der beginſelen, die thans aan het geëerde Publiek wordt aangeboden, verder te polijsten, gedurig te herzien, en tot dien trap van volkomenheid te brengen, welke ik ſteeds in dezelve meer en meer verlangde.*

Een opſtel van Beginſelen der Meetkunst moet, zal het een goed, nuttig en doelmatig leerboek zijn, de volgende vereischten bezitten. 1°. *Moet het al de voornaamſte eigenſchappen der figuren, die in de toepasſing en alle verder onderzoek van eenig nut zijn, bevatten;* 2°. *moeten de voornaamſte dezer eigenſchappen, die de grond van alle overigen zijn, het meest uitſteken, en op den voorgrond van het geheel uitkomen:* 3°. *moeten de leerſtellingen, zonder eenige ſprongen of gapingen, natuurlijk zamenhangen en de betoogen zuiver, klemmend en overtuigend zijn. Wanneer men nu in ſtaat is, om, in een opſtel, die regels in het oog te houden; dan zal het zekerlijk des te korter en eenvoudiger zijn, naar mate men het in zijne magt zal gehad hebben, die regels naauwkeuriger en ongedwongener te kunnen volgen.*

Dat zulks nu gemakkelijker is te zeggen, dan uit te voeren, heb ik ten nadrukkelijkſte ondervonden: klaarblijkelijke dingen liggen ons dikwijls dagelijks voor oogen, zonder dat wij dezelve gereedelijk opmerken: de manier van leeren, welke ik, in het III. Hoofdſtuk *van het* Verband der Wetenſchappen, *beſchreven heb, heeft mij, in het onderwijs zelve, al de grootere en kleine verbeteringen aan de hand gegeven, die mij,*

 met

met de pen in de hand en de figuur voor mij, waarschijnelijk niet zouden zijn te binnen gekomen.

De aangebragte verbeteringen, bestaan nu niet in eene verandering van het eerst ontworpen plan. Eer ik tot hetzelve besloot, had ik de voornaamste schrijvers gelezen: ik ben blijven lezen; doch, ik heb mij meer en meer overtuigd, dat er geen korter en beter plan bij mogelijkheid kan bestaan, dan hetgene in het wezen der uitgebreidheid zelve gegrond is: en dit heb ik steeds, zoo getrouw mij mogelijk was, gevolgd. Ook moet ik, na herhaald overpeinzen, betuigen, geen beter te hebben kunnen vinden; en het is, om die reden, dat slechts hier en daar (vooral in het VIII, IX en X. Boek, *het X, XI en XII. van den tweeden druk) eene geringe verandering in de schikking der leerstellingen voorkomt, die echter niet het gevolg is van een ander of beter plan, maar van eene bekorting en vereenvoudiging der betoogen.*

De aangebragte verbeteringen bestaan ook niet in eenige verandering in het beloop der betoogen gemaakt; maar in eene meer naauwkeurige en duidelijker voordragt van dezelve. Ik heb ondervonden: hoe eene enkele verschikking van woorden, eene andere zinsnijding, eene enkele bijvoeging van een woord of volzin, hetzelfde betoog krachtiger doet uitkomen, en bij den Lezer een hooger graad van overtuiging uitwerkt. Men neme de moeite, om de betoogen der meeste stellingen, in dezen druk, met die in de voorgaande te vergelijken, en men zal zien, dat dezelfde dingen gezegd, maar duidelijker gezegd zijn. Dit verbeterde opstel zal dan de eigenschap hebben, dat de Lezer, op zijn gemak en zonder te groote inspanning, de lessen, die hij gehoord heeft, zal kunnen volgen, of zich dezelve herinneren: wat zeg ik? zonder hulp van anderen, zich de Meetkunst kunnen eigen maken.

In

In de vorige drukken, had ik te veel toegegeven aan de denkbeelden der genen, die, wel is waar, het onontbeerlijke van de Meetkunst erkennen; doch die, ik weet niet, door welk eenen geest gedreven, een' afkeer betoonen van alle grondig onderwijs, van alle grondige kennis en van de moeite, welke met het verkrijgen van dezelve verknocht is. Niemand meer dan ik zelve, is een grooter voorstander der beknoptheid; maar, wanneer zij het duidelijke en geleidelijke mist, dan is zij geene beknoptheid meer, maar wel een vermoeijend omleiden in een duisteren en verwarden doolhof, in welken men zich zelven niet kan wedervinden. Is het, moet ik vragen, inderdaad beknoptheid, dat men een Leerling een onvolledig en slordig bewerkt compendium in handen geeft, en zich behelpt met te zeggen: naderhand zal men het gebrekkige wel verbeteren? *Zal, moet ik vragen, een Leerling eene wel uitgewerkte demonstratie minder verstaan, dan eene gebrekkige, in welke duisterheden, sprongen, ja, zelfs valsche sluitredenen, voorkomen? Een jeugdig verstand, vertrouwende op de meerdere kunde van zijn Leermeester, kan wel door verkeerde voorbeelden in eenen maalstroom van onzekerheid worden gebragt; doch het zal een goeden en geleidelijken voordragt, zonder moeite volgen; de ondervinding dienaangaande wederlegt alle hoogdravende magtspreuken der genen, welke willen oordeelen over dingen, die zij slechts ten halve kennen, en nimmer dadelijk hebben uitgeoefend.*

Mij dus niet langer door zulke meeningen, welker invloed van dag tot dag afneemt, latende weêrhouden, heb ik de nieuwe redactie van mijn compendium ontworpen, steeds voor oogen houdende de vraag: wat heeft de ondervinding mij als goed en nuttig leeren kennen? *Ik heb dus het geheel tot gemak van den Leeraar en Leerling, daar, waar het noo-*

dig was, uitvoeriger uitgewerkt, en met de noodige toepassingen en voorbeelden verrijkt; en, om nu dit doel zonder bezwaar te bereiken, is deze derde druk met een kleiner letter gedrukt; waardoor, niet tegenstaande het geheel aanmerkelijk is vermeerderd, het leerboek daarom niet omslagtiger noch veel kostbaarder geworden is.

Eene enkele theorie heeft in dezen druk eene aanmerkelijke verbetering ondergaan; namelijk de leer der gelijkvormige figuren. *Het is den Lezer, uit de Voorrede van de twee eerste drukken, bekend: hoe ik over de Euclidiaansche voordracht van dezelve dacht, en welke redenen mij eene andere, algemeenere en meer natuurlijke hadden doen aannemen: evenwel bleef (zoo als ik toen zelf erkende,) in mijne bepaling dit gebrek bestaan, hetwelk in eene bepaling niet bestaan mag; namelijk, dat in dezelve stilzwijgend meer voorwaarden, dan strikt noodig is, liggen opgesloten; en, ten anderen, dat het denkbeeld van gelijkvormigheid in ons eigenlijk door de ervaring ontstaat, en dus eer is dan het denkbeeld van de evenredigheid der afstanden. Wij zien (zonder eens te weten wat evenredigheid is,) dat twee figuren gelijkvormig zijn; maar in te zien, in welke en in hoeveel voorwaarden, het wezen van die gelijkvormigheid bestaat, is het gevolg der overweging: doch, zóó zijn de bedrevenste menschen dikwerf, zonder dat zij het gevoelen, verslaafd aan eens in de vroegere jeugd opgevatte denkbeelden, dat men geene partij weet te trekken van hetgeen men dagelijks voor oogen heeft. De bepaling van* Euclides, *was mij altijd te omslagtig, om niet te zeggen onnatuurlijk, en tevens te bepaald (niet algemeen genoeg) voorgekomen:* gelijkheid der hoeken en evenredigheid der zijden! *ziedaar twee hoofdzaken, waarvan ééne zeker te veel is: in vroeger tijd was ik gekomen op de even-*

re-

redigheid der afstanden, en ik had mij bij de gelijkheid der hoeken moeten bepalen; zoo als ik dan nu in dezen druk heb gedaan, en daardoor het voordeel verkregen, dat, vooreerst mijne nieuwe bepaling, bij de eerste beschouwing van twee gelijkvormige figuren, als van zelf ontstaat: en, ten anderen, dat zij, op eene duidelijke en eenvoudige constructie, gegrond is, en geen ééne voorwaarde meer behelst, dan tot eene echte en naauwkeurige bepaling striktelijk gevorderd wordt. — Hierdoor is nu de geheele theorie der gelijkvormigheid, in het IV en IX. Boek, *op veel hechter grondslagen gevestigd, en heeft zij, in de theorie en praktijk, eene eenvoudigheid verkregen, welke (daaraan twijfelen wij niet) noodzakelijk aan elk zal bevallen.*

Er bestaan twee redenen, waarom thans de beginselen in twee deelen worden uitgegeven: de eerste is gelegen in de aanmerkelijke vermeerderingen en bijvoegselen in dezen derden druk, en de andere is daarin gegrond, dat men nu in het tweede de Goniometrie, de platte- en bolvormige Driehoeksmetingen, van welke, in het IV en VIII. Boek *van dit deel, reeds een voorloopig denkbeeld gegeven is, nu als zaken, die eigenlijk bij elkander behooren, beter uitgewerkt en op meer dingen toegepast, in een afzonderlijk stuk, het tweede deel namelijk, bij elkander, in één enkel boekdeel, vereenigd zijn.*

Een geheel nieuw stel platen, veel beter en naauwkeuriger uitgevoerd, dan de platen der twee eerste drukken, vooral ten aanzien van het naauwkeurig plaatsen der letters, zullen onbegrijpelijk veel tot het gemak der studerende jeugd moeten bijbrengen.

Ik eindig met het slot van de Voorrede, voor de eerste drukken geplaatst.

Steeds geen ander doel, dan de waarheid en het beste, ge-

had

had hebbende, en, om, naar de mate onzer geringe vermogens en talenten, den roem van ons Vaderland, hetwelk steeds zoo vele beroemde mannen in dit vak opleverde, en, in alle vakken van geleerdheid en beschaving, voor deszelfs naburen niet behoeft te wijken, op te houden, en, ware het mogelijk te bevorderen, behoort ook onze arbeid uit geen ander gezigtpunt beschouwd te worden. Zal het ons gelukt zijn, in dezen, eenigermate dit ons doel bereikt te hebben, het zal ons de aangenaamste belooning zijn voor tijd en arbeid, aan de zamenstelling en verdere beschaving van dit Leerboek, voorzeker, in geene geringe mate, te koste gelegd; ja, het zal ons aanmoedigen, om steeds met de beschaving en verbetering van hetzelve te blijven voortgaan.

JACOB DE GELDER.

Leyden,
den 1 October 1827.

BE-

INHOUD

VAN HET EERSTE DEEL.

INLEIDING. . . . . . . *Bladz.* 1

EERSTE BOEK. *Over de regte lijn. Over de hoeken, derzelver maat en verdeeling. Formatie der regtlijnige of veelhoekige figuren. Opgave van de eerste hoofdeigenschappen der driehoeken en van de kenmerken van derzelver gelijk- en gelijkvormigheid. Betoog, dat de som, zoo van de hoeken eens veelhoeks, als van die hunner supplementen, standvastig is. Theorie der loodlijnen en evenwijdige lijnen, als de grondslag van overige deelen der Meetkunst.* . . *Bladz.* 10

TWEEDE BOEK. *Over de voornaamste eigenschappen van de Evenredigheid de meetkunstige uitgebreidheden, op de algemeenste wijze voorgedragen; zoo wel in het onmeetbare, als meetbare geval.* . . . . . . *Bladz.* 40

DERDE BOEK. *Over de Eigenschappen der Parallelogrammen, Regthoeken en Vierkanten. Manier, hoe de inhoud van eenen regthoek met dien van een vierkant, door middel van de verhouding van de zijden dezer figuren tot elkander, vergeleken wordt. Het vierkant op de lengte-maat beschreven, als maat van alle vlakke figuren beschouwd. Gelijkheid van de inhouden der Parallelogrammen en Driehoeken, die op dezelfde basis staan en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen geplaatst zijn. Over de constructie van veelhoekige figuren, welke, onder denzelfden inhoud, minder zijden hebben. Regels, om de inhouden der regtlijnige figuren, uit de gegevene zijden en hoogten te vinden. Het Theorema van* PYTHAGORAS, *deszelfs gebruik, in het onderzoek van de verdere eigenschappen der driehoeken.* . . . . *Bladz.* 59

VIERDE BOEK. *Over het verband tusschen de onderling evenwijdige en onderling evenredige lijnen, als de grond van het verdeelen der regte lijnen in deelen, die in eene gegevene reden staan, of gelijk zijn. Over de* schalen *en den* proportie-passer. *Verdere grondstellingen, aangaande de evenredige lijnen. Iets over de harmonische evenredigheden en reeksen. Ontwikkeling van het denkbeeld der gelijkvormigheid. Over de kenmerken van de gelijkvormigheid der driehoeken. Vervolg van de leer der gelijkvormigheid, en over de* pantographe. *Gebruik der gelijkvormige driehoeken; vooral, in de Drichoeksmeting.* . . . . *Bladz.* 88

VIJFDE BOEK. *Over den Cirkel en deszelfs voornaamste en nuttigste eigenschappen. Inzonderheid wordt de cirkel beschouwd, als het algemeenste hulpmiddel, om de betrekking der hoeken te bepalen. Wijze, hoe de stelkundige vergelijking van eenen cirkel wordt opgemaakt. Andere merkwaardige eigenschappen des cirkels. Over de cirkels, die, in en om eenen driehoek, kunnen beschreven worden. Merkwaardige eigenschap van den vierhoek, in den cirkel beschreven; vergelijkingen over het verdeelen der hoeken, uit dezelve afgeleid.* . *Bladz.* 136

ZESDE BOEK. *Over de regelmatige Veelhoeken; bijzonderlijk den regelmatigen drie, vier, vijf, zes, tienhoek, en de veelhoeken, die van dezelve afhangen. Wat men door de* Quadratuur *van den cirkel verstaat; hoe men dezelve door de theorie van de regelmatige veelhoeken kan uitvinden. Eenige Leerstellingen over de* maxima *en* minima, *en over de* isoperimetrische *figuren.* . . . . . *Bladz.* 169

ZEVENDE BOEK. *Over de oplossing der meetkunstige Werkstukken, in het algemeen. Verzameling van de meest gebruikelijke en dagelijks voorkomende constructien; benevens eene menigte van uitgelezene Vraagstukken, welke zuiver meetkunstig, in den trant der Ouden, worden opgelost.* . *Bladz.* 198

ACHTSTE BOEK. (het X. van den II. druk.) *Over de ligging en den onderlingen stand der lijnen en vlakken, in de onbegrensde ligchamelijke ruimte; inzonderheid over den loodreg-*

reg-

regten, scheven en evenwijdigen stand eener lijn, met betrekking tot een vlak. Over het bepalen van den stand van twee lijnen, die niet in hetzelfde vlak liggen; en over de eigenschappen der evenwijdige vlakken. — Theorie der twee-, drie- en veelvlakkige hoeken. Overeenstemming tusschen dezelve en de bolvormige twee-, drie- en veelhoeken. — Voornaamste gronden en regels van de bolvormige Driehoeksmeting. Bladz. 223

NEGENDE BOEK. (het XI. van den II. Druk.) *Over de* veelvlakkige ligchamen; *inzonderheid over de* prisma's, parallelopipedums, piramiden, *en andere eenvoudige ligchamen, die van dezelve afhangen. Hoe de inhouden der prisma's en piramiden bepaald worden. Over de gelijkvormige ligchamen en de verhouding van derzelver inhouden. Beschrijving en constructie der vijf regelmatige ligchamen.* . . . Bladz. 276

TIENDE BOEK. (het XII. van den II. Druk.) *Over de eenvoudigste ronde ligchamen, de cilinders, kegels en bollen; inzonderheid over den regten cilinder, den regten kegel en den afgeknotten regten kegel; de inhouden en oppervlakken dezer ligchamen. Hoe de kromme lijnen van de eerste orde, de* ellips, parabola *en* hyperbola, *uit de snijding van den regten kegel, ontstaan; voorstelling van derzelver algemeene vergelijkingen en onderlinge verwandschap. Nadere beschouwing van de eigenschappen van den bol. Grondslag van de* stereographische projectie. *Inhouden en oppervlakten van den bol en van deszelfs onderscheidene deelen.* . . . Bladz. 343

BE-

BERIGT AAN DEN BINDER.

De acht platen, tot dit eerste deel behoorende, moeten geplaatst worden, als volgt:

Plaat	I.	tegen over Bladzijde	64
—	II.	—	112
—	III.	—	160
—	IV.	—	208
—	V.	—	224
—	VI.	—	288
—	VII.	—	320
—	VIII.	—	376

en moet het wit aan de platen gelaten worden, zoo dat de figuren geheel buiten het boek uitslaan.

DRUKFOUT.

Bladz. 110, reg. 7 staat $\frac{1}{2} n (n-1)(n-2)$, lees $\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)$

BEGINSELEN

DER

MEETKUNST.

EERSTE DEEL.

OVER DE MEETKUNST DER VLAKKEN.

INLEIDING. *Verklaring van het Onderwerp. Voorafgaande Bepalingen. Algemeene Gronden.*

§. 1. I. BEPALING. De *Meetkunst* is de kunst, om te bepalen, hoe de grootte van elke uitgebreidheid afhangt van de wijze, op welke zij door hare grenzen bepaald is; ten einde, langs dien weg, de regels te vinden, om dezelve met uitgebreidheden van dezelfde soort te vergelijken.

De eigenlijke zin dezer bepaling zal uit de volgende bepalingen en ophelderingen nader kenbaar worden.

§. 2. II. BEPALING. Eene *uitgebreidheid* is eene ruimte, welke, aan alle kanten, binnen zekere grenzen besloten is.

§. 3. Men onderscheidt de ruimte in *onbepaalde* en *bepaalde ruimte*. De eerste, in welke het Heelal bestaat, heeft geene grenzen; de laatste is aan alle kanten begrensd en wordt meestal *uitgebreidheid* genoemd. *De uitgebreidheid moet eigenlijk als eene meer of min uitgebreide plaats, ergens in de onbegrensde ruimte bestaande, beschouwd worden.*

§. 4. III. BEPALING. Men verstaat door de *grenzen* eener uitgebreidheid, in het algemeen, al die plaatsen, welke, noch binnen, noch buiten die uitgebreidheid, gelegen zijn; de plaats, tot zoo verre deze uitgebreidheid strekt, en van de omliggende ruimte is afgescheiden.

§. 5. Er zijn in de ruimte driederlei soorten van uitgebreidheden: 1°. de *ligchamelijke*, 2°. de *vlakte*, 3°. de *lengte-uitgebreidheid*.

§. 6. IV. Bepaling. Eene *ligchamelijke uitgebreidheid*, eenvoudig *Ligchaam* genoemd, is, in alle rigtingen, tot aan hare grenzen uitgestrekt. Men drukt wel eens deze hoedanigheid uit, door te zeggen: *dat zij lengte, breedte en hoogte heeft.*

Opheldering. Eene ligchamelijke uitgebreidheid, een meetkunstig ligchaam, is geheel wat anders dan een natuurkundig (een stoffelijk) ligchaam; een stuk hout, steen, ijzer, enz.: *het meetkunstig ligchaam is de plaats, in welke het natuurkundig ligchaam bestaat; het eerste is de grootte of de uitgebreide vorm van het laatste.*

§. 7. V. Bepaling. *De grenzen eener ligchamelijke uitgebreidheid zijn overal, over den omtrek van dit ligchaam, uitgestrekt;* zij vormen, in haren geheelen zamenhang, eene uitgebreidheid, welke van eenen geheel anderen aard is, dan de ligchamelijke, en alleenlijk over de oppervlakte van dit ligchaam is uitgebreid: men noemt haar *vlakte-uitgebreidheid;* eenvoudig *vlak*, *vlakte* of *oppervlakte*.

Opheldering. Wanneer een ijzeren kogel in een emmer water gedompeld wordt; dan raken de waterdeelen overal den kogel aan; tusschen het water en den kogel bestaat geene ligchamelijke uitgebreidheid meer: *wat nu, noch tot het water, noch tot den kogel behoort, die uitgebreidheid, welke tusschen beide ligt, is eene vlakte-uitgebreidheid, het oppervlak van den kogel.*

§. 8. Gevolg. *De omtrekken der ligchamen, of der ligchamelijke uitgebreidheden, zijn derhalve vlakken; en derzelver onderscheidene deelen raken of sluiten altijd, volgens het beloop van vlakken, aan elkander.*

§. 9. VI. Bepaling. Eene *lengte-uitgebreidheid*, eenvoudig *lijn* genoemd, is alleenlijk in dezelfde of in eene veranderlijke rigting uitgestrekt. — *De lijnen zijn derhalve de grenzen der vlakken, en de deelen eener vlakte raken of sluiten, volgens het beloop van lijnen, aan elkander.*

Opheldering. Stel, dat een gedeelte van een stuk wit papier zwart gemaakt zij; *dan is de afscheiding van het zwart en het wit, of, wat tusschen het wit en het zwart is, eene lengte-uitgebreidheid.*

§. 10. VII. Bepaling. De uiteinden der lijnen zijn *punten*. *Punten hebben geene uitgebreidheid:* zij zijn slechts zekere onuitgebreide plaatsen, welke, in de uitgebreidheid, of in hare grenzen, gedacht kunnen worden.

§. 11. De lijnen of lengte-uitgebreidheden worden in twee groote hoofdsoorten onderscheiden: in *regte* en *kromme*.

§. 12. VIII. Bepaling. Eene *regte lijn*, *Fig.* 1, is eene lijn, welke altijd in *dezelfde rigting voortgaat*, zonder, ter regter- of ter linkerhand, op- noch benedenwaarts, af te wijken.

Een ſtrek geſpannen dunnen draad, bij voorbeeld, een ſpinrag draad, zal het best eene zinnelijke voorſtelling van eene regte lijn geven; mits men de dikte van den draad wegdenke.

§. 13 IX. Bepaling. De *afſtand* van twee punten tot elkander, is de regte lijn, welke, van het eene tot het andere dezer punten, getrokken wordt.

§. 14. X. Bepaling. Eene *kromme lijn*, *Fig* 2, is eene lijn, welke, van elk punt tot het naastvolgende, *onophoudelijk* en *onmerkbaar*, van rigting of ſtreek verandert.

§. 15. XI. Bepaling. Onder de kromme lijnen, is de *cirkel*, wegens deszelfs gebruik en ſchoone eigenſchappen, de merkwaardigſte. Hij is eene kromme lijn (*ABCD*), *fig.* 3, *in dezelfde platte vlakte liggende*, (zie XII. *Bep*) welke in zich zelve terugkeert, en zoodanig bepaald is, dat al derzelver punten (*A*, *B*, *C*, *D*,) even ver van één vast bepaald punt (*M*) afſtaan. — Dit punt (*M*) wordt het *middelpunt* van den cirkel genoemd. — De lijnen (*MA*, *MB*, *MC*, *MD*,) die van het middelpunt (*M*), tot aan de punten (*A*, *B*, *C*, *D*), van den omtrek, worden getrokken, noemt men *ſtralen*. — Elke lijn (*AC*), die, door het middelpunt (*M*) getrokken zijnde, ter wederzijde aan den omtrek (bij *A* en *C*) bepaald is, noemt men eene *middellijn*. — Een gedeelte (*AB*) van den omtrek eenen *cirkelboog*. — De regte lijn (*AB*), die de uiterſte punten van eenen boog (*AB*) vereenigt, noemt men de *koorde* van dien boog. *Alle ſtralen en middellijnen van eenen cirkel zijn even lang*. Zie verder, wegens den cirkel, het V. *Boek*.

§. 16. XII. Bepaling. Eene *platte vlakte* of een *plat vlak* is zulk eene vlakte, over welke eene regte lijn, in alle rigtingen, zoodanig kan bewogen worden, dat alle hare punten altijd in dit vlak blijven. Bij voorbeeld, het oppervlak van een ſtilſtaand water.

Wanneer in eene raam een blad dun papier zeer ſterk geſpannen is; dan zal men, mits de dikte van dit dunne papier wegdenkende, eene zinnelijke voorſtelling van een plat vlak hebben.

§. 17. XIII. Bepaling. Een *gebogen oppervlak* heeft eene tegengeſtelde hoedanigheid: hetzelve zal niet, in alle rigtingen, door eene regte lijn, in al deszelfs punten, kunnen worden aangeraakt.

§. 18. Aanmerking. *De hedendaagsche Meetkunstenaars beschouwen eene regte of kromme lijn, als voortgebragt te worden, door de beweging van een punt; eene vlakte* (platte of gebogene) *door de beweging van eene regte of kromme lijn, en eene ligchamelijke uitgebreidheid door de beweging eener platte of gebogene vlakte.* Alzoo zal eene regte lijn worden voortgebragt door de beweging van een punt, dat steeds, in dezelfde onveranderlijke rigting voorwaarts gaat; en den omtrek (*A B C D*) van eenen cirkel (*fig.* 3,) door het uiterste punt (*A*) van eene bepaalde regte lijn (*M A*), welke, om derzelver andere uiteinde (*M*), in dezelfde vlakte, omdraait; terwijl die lijn (*M A*) zelve, door hare omdraaijing, de vlakte van den cirkel (die bepaalde vlakte namelijk, die binnen deszelfs omtrek begrepen is,) doorloopt. *De lengte-, vlakte- of ligchamelijke uitgebreidheid, welke het punt, de lijn of vlakte voortbrengt, is eigenlijk de weg, in welken die uitgebreidheden bewogen worden.*

§. 19. XIV. Bepaling. De *figuur* of *gedaante* eener uitgebreidheid *is de wijze, waarop zij bestaat,* en door de onderlinge ligging van hare grenzen bepaald is.

§. 20. XV. Bepaling. De uitgebreidheid of ruimte, welke tusschen de grenzen eener figuur bevat is, noemt men den *inhoud* of de *grootte* van dezelve. Die inhoud noemt men *ligchamelijk*, wanneer de figuur ligchamelijk is. Van eene platte of gebogene oppervlakte zegt men, *vlakken inhoud.* Van de grootte of uitgebreidheid eener regte of kromme lijn sprekende, zegt men, *derzelver lengte.*

§. 21. XVI. Bepaling. Twee uitgebreidheden zijn *gelijk-* en *gelijkvormig*, (hebben *denzelfden inhoud* en *dezelfde figuur* of *gedaante*,) wanneer zij zoodanig op elkander gelegd, of in elkander geplaatst, kunnen worden, dat derzelver grenzen overal op of in elkander vallen. Zie verder de XVIII en XX *bepalingen.* Men zegt *gelijk-* en *gelijkvormig;* omdat twee figuren denzelfden inhoud en nogtans ongelijke gedaanten kunnen hebben. Zie de VII, IX en XV *stellingen* van het III *Boek.*

§. 22. XVII. Bepaling. *Gelijkslachtige uitgebreidheden*, of *uitgebreidheden van dezelfde soort*, zijn lengte- en lengte-uitgebreidheden, (zoo wel regte als kromme lijnen,) alle vlakte-uitgebreidheden, hoedanigen vorm of welke gedaante zij ook zouden mogen hebben; dus zoo wel platte als gebogene vlakken; eindelijk alle ligchamelijke uitgebreidheden, onder welke figuur of gedaante dezelve zouden mogen zijn zamengesteld.

§. 23.

§. 23. I. AANMERKING. *Elke uitgebreidheid kan slechts met eene uitgebreidheid van dezelfde soort worden afgemeten*; eene regte of kromme lijn, door eene regte lijn, die men *Meter* noemt (zie *A. G. d. C.* XXVII *Les*); eene platte of gebogene vlakte met den *vierkanten meter* (zie III *Boek*); eene ligchamelijke uitgebreidheid met den *cubieken meter* (zie XI *Boek*). Zie verder het III *Axioma.*

§. 24. II. AANMERKING. *Eene uitgebreidheid te meten, is dezelve in deelen te verdeelen, die aan de maat gelijk zijn, waarmede men meet, en het aantal dezer gelijke deelen te tellen.* In sommige gevallen, kan dit meten gemakkelijk worden bewerkstelligd; in de meeste gevallen echter, moet men, uit de gesteldheid der figuur, naar bijzondere regels zoeken, om hare uitgebreidheid met de maat eener gelijksoortige uitgebreidheid te vergelijken; die regels zijn nu altijd van de gedaante, de ligging en de grootte der grenzen afhankelijk: in die gevallen, wordt derhalve het meten eene kunst; want alles, wat met overleg en door zekere regels moet uitgevoerd worden, is eene kunst. Zie I *Bepaling.*

§. 25. III. AANMERKING. Men verstaat door de *Beginselen der Meetkunst* de verzameling van de eerste en merkwaardigste eigenschappen der eenvoudigste en meest gebruikelijkste figuren, die dienen moeten, om de eigenschappen der meer zamengestelde te onderzoeken. Men onderscheidt de Meetkunst, in de *Meetkunst der Lijnen*, in de *Meetkunst der Vlakken*, en in de *Meetkunst der Ligchamen*, welke drie hoofddeelen, wederom hunne bijzondere onderdeelingen hebben. In de beginselen van de Meetkunst der Vlakken, bepaalt men zich alleenlijk tot de regtlijnige Figuren en tot den Cirkel; en, in die van de Meetkunst der Ligchamen, tot de veelvlakkige Ligchamen, den Cilinder, Kegel en Bol. Van deze bijzondere uitgebreidheden, zullen wij ten tijde, wanneer, en ter plaatse, alwaar het zal te pas komen, de behoorlijke bepalingen geven. De *Leerwijze* nu, welke men, in de Beginselen der Meetkunst, als de geschikste en geleidelijkste, volgt, is de *synthetische*: men draagt de onderscheidene meetkunstige waarheden voor, in den vorm van leerstellingen, welke elkander, in eene aaneengeschakelde en onderling afhankelijke orde, opvolgen, en welke dan betoogd of bewezen worden. *Elke leerstelling bevat zekere eigenschap van eenige figuur.* Door eigenschap van een ding verstaat men alles, wat een noodzakelijk gevolg is van de wijze, op welke dit ding bestaat of zamengesteld is. In elke stelling wordt *iets ondersteld*, of, *als voorwaarde van*

Synthetische leerwijze opbouwend in plaats van de ontbinden

dezelve, aangenomen; en *iets gesteld, hetwelk met dit ondersteld in een noodzakelijk verband staat. Bewijzen* of *betoogen* is nu aan te toonen en klaarblijkelijk te maken: *dat het gestelde een noodzakelijk gevolg is van hetgeen in de stelling wordt aangenomen.*

§. 26. *De grondslagen der betoogen zijn de Bepalingen;* en deze worden in *zakelijke* en *woordelijke Bepalingen* onderscheiden.

Eene *zakelijke Bepaling* is eene volledige en naauwkeurige omschrijving der bepaalde zaak; dus van eene figuur, de wijze, op welke zij bestaat en door hare grenzen bepaald is. Tot de deugd van zulk eene bepaling wordt gevorderd, dat zij het wezen der zaak volkomen omschrijve, en zoo veel zegt, als noodig zij, om deze zaak van anderen te onderscheiden, en, om hare eigenschappen, uit die bepaling alleen, of onmiddelijk, of, met behulp der reeds bekende eigenschappen, te kunnen afleiden; *zij moet bijgevolg niet te weinig en ook niet te veel zeggen:* niet te weinig; omdat zij dan de bepaalde zaak niet volledig leert kennen; niet te veel; omdat zij, in dit geval, meer zou behelzen, dan tot de grondige kennis van het wezen der zake noodig is.

Eene *woordelijke Bepaling* verklaart de beteekenis van eenig woord, van eenige spreekwijs, of van eenig teeken.

§. 27. De *betoogen* (of bewijzen) der stellingen zijn, of *regtstreeksche*, of *betoogen uit het ongerijmde.*

De betoogen zijn *regtstreeksche*, wanneer men, door wettige redenering, uit de bepaling der zake en de bijzondere voorwaarden of onderstellingen van het voorstel, alsmede met behulp van reeds bekende eigenschappen, overtuigend doet zien en gevoelen: *dat het gestelde met de onderstelling of de voorwaarden zoo onafscheidelijk verknocht is, dat hetzelve daaruit niet alleen noodzakelijk volgen moet; maar ook met die voorwaarden staat of valt.* Voorbeelden van zulke betoogen zijn de III, IV, V, IX, X, XI, *enz. Stell.* I *Boek.*

Bij de betoogen uit het ongerijmde, doet men opmerken: dat het tegengestelde van hetgene men bewijzen moet, of met de algemeen erkende gronden strijdt, (zie I en XV *St.* I *B.*) of met de onderstelde voorwaarden der stelling onmogelijk is over een te brengen (zie b. v. XII en XIII *St.* I *B.*)

§. 28. Sommigen houden de eerste soort van betoogen voor beter dan de tweede; om welke reden dan ook, in een synthetisch zamenstel, de betoogen uit het ongerijmde, hoezeer zij anders even zoo over-

overtuigend als de regtstreeksche zijn, zoo veel mogelijk moeten vermeden worden.

§. 29. Het *omgekeerde van eene meetkunstige leerstelling* is zulk eene leerstelling, in welke het gestelde de voorwaarde en de voorwaarde het gestelde dezer omgekeerde stelling wordt. *Het omgekeerde eener bewezene stelling mag, zonder nader onderzoek, voor geene bewezene waarheid gehouden worden.* Velen hebben, door zulks te doen, een gevaarlijk voorbeeld gegeven; wij zullen daarom het omgekeerde der voornaamste en gewigtigste leerstellingen, daar het te pas komt, opzettelijk betoogen.

§. 30. De eigenlijke hulpmiddelen, welke tot het betoog der stellingen moeten dienen, zijn de ontwijfelbare en in zich zelve klaarblijkelijke waarheden, die ons de eenvoudige reden noodzaakt te erkennen: men noemt ze daarom *Axiomata*, of *algemeene Kundigheden.* Zij zijn de volgende.

I. AXIOMA. *De regte lijn, welke twee punten vereenigt, is korter dan eenige kromme lijn, welke van het eene dezer punten tot het andere punt getrokken wordt. Zij is derhalve de kortste weg, om van het ééne dezer punten tot het andere punt te komen.*

II. AXIOMA. *Alle uitgebreidheden, welke zoodanig op elkander gelegd, of in elkander geplaatst kunnen worden, dat derzelver grenzen overal op en in elkander vallen, zijn gelijk of even groot.* Vergelijk de XVI *Bepaling.*

III. AXIOMA. *Geene uitgebreidheid kan een gedeelte van eene andere zijn, indien niet deze uitgebreidheid, een zeker aantal malen genomen zijnde, gelijk of grooter dan die andere uitgebreidheid, dan dit geheel, worden kan.* Zie boven, §. 23.

GEVOLG. Geen punt kan derhalve een deel van eene lijn, een vlak of ligchaam; geene lijn een deel van een vlak of ligchaam, geen vlak een deel van een ligchaam zijn; maar de deelen der lijnen, vlakken en ligchamen zijn insgelijks lijnen, vlakken en ligchamen. Om dezelfde reden, kan geene bepaalde uitgebreidheid, hoe groot zij wezen moge, ooit een gedeelte van de onbegrensde ruimte worden.

IV. AXIOMA. *Het gedeelte is kleiner dan het geheel. — Het geheel,* omgekeerd, *grooter dan één zijner deelen. — Het geheel is gelijk aan de som van al deszelfs deelen.*

V. AXIOMA. *Indien twee dingen, elk in het bijzonder, aan een derde gelijk zijn; dan zijn ook die dingen gelijk, of even groot.*

VI. AXIOMA. *Indien een ding A gelijk aan een ding B; maar het ding B grooter of kleiner is dan een derde ding C; dan zal ook A grooter of kleiner dan C zijn.*

VII. AXIOMA. *Indien A grooter is dan B, en B wederom grooter dan C; dan zal ook A grooter dan C zijn. Of, zoo A kleiner dan B, en B wederom kleiner dan C is; dan zal ook A kleiner dan C zijn.*

VIII. AXIOMA. *Indien men bij gelijke grootheden gelijke of dezelfde grootheden optelt; dan zijn de sommen gelijk.*

IX. AXIOMA. *Indien men van gelijke grootheden gelijke aftrekt; dan zijn de verschillen gelijk.*

X. AXIOMA. *Indien A grooter dan B is; dan zal A, opgeteld met C, grooter zijn dan B, opgeteld met C; en wederom, A min C grooter dan B min C zijn. Of, indien A kleiner dan B is; dan zal de som van A en C ook kleiner dan de som van B en p zijn, en A min C kleiner dan B min C zijn.*

XI. AXIOMA. *Indien A grooter dan B, en C grooter dan D is; dan zal de som van A en C ook grooter dan de som van B en D zijn. En, indien A kleiner dan B en C kleiner dan D is; dan zal ook de som van A en C kleiner zijn dan de som van B en D.*

XII AXIOMA. *Indien van twee gelijke grootheden twee ongelijke afgetrokken worden; dan zullen de verschillen ongelijk zijn, en de grootheid, waarvan het meest is afgetrokken, zal het minst overlaten.*

XIII. AXIOMA. *Dezelfde veelvouden en dezelfde evenmatige deelen van gelijke grootheden zijn gelijk.*

XIV. AXIOMA. *Indien A grooter of kleiner dan B is; dan zal n-maal A ook grooter of kleiner dan n-maal B zijn; en, één- nde gedeelte van A grooter of kleiner dan één- nde gedeelte van B zijn.*

XV. AXIOMA. *Indien twee grootheden uit een bepaald of onbepaald, maar altijd hetzelfde aantal, deelen bestaan; het eerste deel gelijk aan het eerste, het tweede gelijk aan het tweede,* enz.; *dan zijn deze grootheden gelijk.*

§. 31. Nog worden door sommigen, tot het betoog der stellingen, de volgende zaken (*Postulata*, of *Vereischten*,) opgegeven.

I. *Dat, van het eene punt tot het andere, eene regte lijn kan getrokken worden.*

II. *Dat men eene regte lijn, naar welgevallen, naar den eenen of anderen kant, kan verlengen.*

III. *Dat men een punt, in eene regte lijn, zoodanig mag aannemen, dat het die lijn, in twee gelijke deelen, verdeelt.*

IV. *Dat men insgelijks, tusſchen de beenen van eenen hoek, eene lijn, uit deszelfs toppunt komende, zoodanig mag aannemen, dat zij dien hoek, in twee gelijke deelen, verdeelt,* (zie XIX en XX *Bep.* hier onder.)

§. 32. Bij de Meetkunſtenaars zijn nog de volgende *kunsttermen* in gebruik.

Een *Voorſtel* (Propoſitie) is eene ſtelling, welke dan eens een *Theorema*, dan wederom een *Problema* is.

Een *Theorema*, of *Beſchouwing*, is eene eigenlijk gezegde meetkunſtige ſtelling, in welke eene of andere eigenſchap, om te bewijzen, geſteld wordt.

Men noemt *Lemma*, of *Hulpſtelling*, eene ſoortgelijke ſtelling; doch, welke met het onderwerp der onmiddellijk voorgaande ſtellingen geene of weinige gemeenſchap ſchijnt te hebben, en nogtans tot het bewijs van eene of meer volgende ſtellingen dienen moet.

Een *Problema*, of *Werkſtuk*, is een meetkunſtig vraagſtuk, dat, of door conſtructie, of door berekening, opgelost moet worden.

Een *Corrollarium*, of *Gevolg*, is eene waarheid, welke uit eene bewezene ſtelling, of, uit den loop van derzelver betoog, onmiddellijk volgt.

Een *Scholium* is eene *Aanmerking* of *Leerling*, welke uit eenige ſtelling, of derzelver betoog, wordt afgeleid.

BERIGT. *Men onderſtelt, in dit eerſte deel der Beginſelen, ſtilzwijgend: dat alle punten, lijnen en cirkels, welke in eene figuur voorkomen, in dezelfde platte vlakte gelegen zijn.* In het vervolg zal het woord *lijn* altijd *regte lijn* beteekenen.

Verder wordt, in deze Beginſelen, de kennis van de allereerſte gronden der Cijfer- en Stelkunst onderſteld; en dus het gebruik der teekens, de behandeling der eenvoudigſte vergelijkingen, de evenredigheden der getallen, de quadraats- en cubus-worteltrekkingen, benevens de theorie en het gebruik der Logarithmen.

EERSTE BOEK.

Over de regte lijn. Over de hoeken, derzelver maat en verdeeling. Formatie der regtlijnige of veelhoekige figuren. Opgave van de eerste hoofdeigenschappen der driehoeken en van de kenmerken van derzelver gelijk- en gelijkvormigheid. Betoog, dat de som, zoo van de hoeken eens veelhoeks, als van die hunner supplementen, standvastig is. Theorie der loodlijnen en evenwijdige lijnen, als de grondslag van de overige deelen der Meetkunst.

I. Stelling. *Fig.* 4.

§. 33. *Indien twee punten (P en Q) van eene lijn (A B), in eene andere lijn (C D), gebragt worden; dan zullen al de punten van de eerste lijn (A B) in de tweede (C D) vallen.*

Betoog. Nemen wij: dat de punten van de lijn *A B*, na dat hare punten *P* en *Q* in de lijn *C D* gebragt zijn, niet in de lijn *C D* vallen; dan zal die lijn *A B* op de lijn *C D* liggen, zoo als, in de figuur, wordt voorgesteld; en dan zou daaruit volgen: dat de lijn *A B* in haar beloop eene veranderlijke rigting hebben, en (*VIII Bep.*) gevolgelijk geene regte lijn zijn zou. Alle hare punten moeten dan in de lijn *C D* vallen.

§. 34. I. Gevolg. *Men kan dan, van het eene tot het andere punt, slechts ééne regte lijn trekken.*

§. 35. II. Gevolg. *Twee lijnen kunnen dan ook geene van alle kanten begrensde vlakte insluiten.*

§. 36. III. Gevolg. *Eene regte lijn kan slechts, in ééne enkele rigting, verlengd worden.*

§. 37. XVIII. Bepaling. *Fig.* 5. Twee lijnen (*A B* en *C D*) worden gezegd *gelijk* of *even lang* te zijn, wanneer het eene uiteinde (*A*) van de eene lijn (*A B*) in het eene uiteinde (*C*) van de andere lijn (*C D*), en voorts deze lijnen langs elkander gelegd zijnde, het andere uiteinde (*B*) der eerste lijn (*A B*) in het andere uiteinde (*D*) der tweede lijn (*C D*) valt.

§. 38. XIX. Bepaling. *Fig.* 6. Een *regtlijnige hoek*, bij verkorting, *hoek* genaamd, is de onbepaalde vlakte-ruimte (*P*), welke gelegen is tusschen twee lijnen (*A B* en *B C*), die in eenig punt (*B*) zamenkomen, en ondersteld moeten worden, als tot in het oneindige verlengd te zijn. De zamenkomende lijnen (*A B* en *B C*) noemt men

de

top of hoekpunt

de *beenen* of *zijden*, en het punt van zamenkomst (*B*) het *toppunt* of *hoekpunt* van den hoek. Anderen zeggen (doch geheel verkeerdelijk,) dat de *hoek* de *helling* of *neiging* van twee regte lijnen is, die elkander ontmoeten. Hij bepaalt altijd de *ligging*, de *rigting of onderlinge ftelling van twee lijnen, ten opzigte van elkander. Een hoek is dan aan twee kanten, volgens het beloop van deszelfs beenen, begrensd; maar, van deszelfs hoekpunt af te rekenen, naar de tegenovergeftelde zijde, binnen de beenen, onbegrensd. — De hoek kan* (zie §. 18,) *begrepen worden door de omwenteling van de onbepaalde lijn B C, om het hoekpunt B, te zijn voortgebragt;* want zij doorloopt, bij die omwenteling, de onbepaalde vlakte-ruimte, tusfchen de lijnen *A B* en *B C* begrepen zijnde.

§. 39. I. Aanmerking. Indien het geene dubbelzinnigheid kan veroorzaken, drukt men, in eene figuur, eenen hoek door de letter, die aan het hoekpunt ftaat, uit; anders door drie letters; mits men de letter, aan het hoekpunt ftaande, in het midden plaatfe. Men zegt dus: hoek *B*, hoek *A B C* of hoek *C B A*.

§. 40. Gevolg. *De hoegrootheid van eenen hoek hangt niet af van de lengte, welke deszelfs beenen in eene figuur hebben,* (want men kan flechts de rigting dezer beenen aanwijzen; het is dus hetzelfde of deze lang of kort genomen worden); *maar van de grootere of kleinere ruimte, welke tusfchen deze beenen gelegen is.*

§. 41. II. Aanmerking. *Fig. 7. Hoeken (A B C, C B D en D B E,) zijn uitgebreidheden, welke, door de toppunten dezer hoeken in elkander, en derzelver beenen langs elkander te leggen, tot één geheel kunnen vereenigd worden. En elke hoek (A B E) kan, door, uit het hoekpunt (B) binnen den hoek, lijnen (B C, B D, enz.) te trekken, in deelen (A B C, C B D, D B E, enz.) verdeeld worden.*

§. 42. XX Bepaling. *Fig. 8.* Twee hoeken (*A B C* en *D E F*) worden gezegd *gelijk*, of *even groot*, te zijn; indien, het hoekpunt (*B*) van den eerften hoek (*A B C*) in het hoekpunt (*E*) van den tweeden hoek (*D E F*) gebragt zijnde, en een been (*B A*) van den eerften, langs een been (*E D*) van den tweeden; dan ook het andere been (*B C*) van den eerften langs het andere been (*E F*) van den tweeden valt.

§. 43. XXI. Bepaling. *Fig. 9.* Wanneer eene lijn (*C D*) op eene andere lijn (*A B*) zoodanig ftaat, dat de hoeken (*A D C* en *B D C*) aan weêrszijden gelijk zijn; dan wordt deze lijn (*C D*) gezegd *loodregt*, *te lood*, (*perpendiculair*) op de andere (*A B*) te ftaan;

perpendiculair of loodrecht

en

en de hoeken (*ADC* en *BDC*), welke deze lijnen bepalen, worden alsdan *regte hoeken* genoemd. *Een regte hoek is dus een hoek, wiens beenen loodregt op elkander ſtaan. En zulke loodlijnen maken met elkander altijd eenen regten hoek.*

II. Stelling. *Fig.* 10.

§. 44. *Alle regte hoeken, in dezelfde figuur, of in verſchillende figuren, voorkomende, zijn gelijk.*

Opheldering. Laat *CD* loodregt op *AB* en *GH* loodregt op *EF* ſtaan; dan moet bewezen worden: dat *hoek ADC* gelijk aan *hoek EGH* is.

Betoog. Laat het punt *G* in het punt *D* en *GE* langs *DA* gelegd worden; dan zal (*I. Stell.*) *GF* langs *DB* vallen: indien nu *GH* niet langs *DC* valt; dan zal zij ter regter- of linkerzijde van *CD* vallen, en met *CD* eenen hoek *CDH* maken; en dan is

hoek FGH, of *hoek BDH* > *hoek BDC*, *fig.* en IV *Ax.*
maar *hoek BDC* = *hoek ADC*, *onderſt.*
derhalve is *hoek FGH* > *hoek ADC*, VI *Ax.*
nog is *hoek FGH* = *hoek EGH*, of *hoek ADH*, *onderst.*
gevolgelijk is *hoek ADH* > *hoek ADC*, VI *Ax.*

Indien men nu zulks met de figuur vergelijkt; dan zou het gedeelte grooter dan het geheel moeten zijn; de lijn *GH* kan derhalve niet buiten, maar wel langs de lijn *DC* vallen; en de hoek *ADC* moet derhalve, *XX. Bep.* gelijk zijn aan den hoek *EGH*.

§. 45. Gevolg. *Uit een punt* (*D*), *genomen in eene regte lijn* (*AB*), *kan niet meer dan ééne loodlijn* (*CD*) *op dezelve worden opgerigt.*

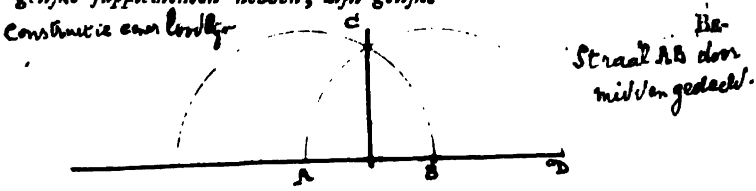
§. 46. XXII. Bepaling. *Fig.* 11. Een hoek (*ABC*), die kleiner dan een regte hoek is, wordt *ſcherpe hoek* genoemd.

§. 47. XXIII. Bepaling. *Fig.* 11. Een hoek (*DBC*), die grooter dan een regte hoek is, wordt *ſtompe* of *plompe hoek* genoemd.

§. 48. XXIV. Bepaling. *Fig.* 11. Indien men het been (*AB*) van eenen hoek (*ABC*) verlengt; dan wordt de hoek (*DBC*), welke door dit verlengde been en het andere been gemaakt wordt, het *ſupplement* of *aanvulſel* van dezen hoek (*ABC*) genoemd. *Op gelijke wijze, is wederkeerig de hoek ABC het ſupplement van den hoek DBC.*

III. Stelling. *Fig.* 10.

§. 49. *De ſupplementen* (*ADC en EGH*) *van gelijke hoeken* (*BDC en FGH*) *zijn gelijk.* — en, omgekeerd. — *De hoeken, welke gelijke ſupplementen hebben, zijn gelijk.*



Betoog. Laat het punt *D* in het punt *G* en de lijn *DB* langs de lijn *GF* gelegd worden; dan zal; (*I. St.*) *DA* langs *GE* vallen; en, omdat (*onderst.*) *hoek BDC* = *hoek FGH* is, zal (XX. *Bep.*) *DC* langs *GH* vallen; volgens de XX. *Bep.* zijn dan de hoeken *ADC* en *EGH* gelijk. — Het omgekeerde wordt op dezelfde wijze betoogd. — Dezelfde hoek (*Fig.* 12. XX. *Bep.*) *ABC* heeft twee gelijke supplementen.

IV. Stelling. *Fig.* 12.

§. 50. *Indien twee lijnen (AB en CD) elkander in een punt (E) doorsnijden; dan zijn de overstaande hoeken (AED en BEC), die aan het punt (E) van doorsnijding gevormd worden, gelijk.*

Betoog. Want de *hoek BED* is het supplement, zoo wel van den *hoek BEC*, als van den *hoek AED*. Volgens de *III. Stelling*, zijn dan de hoeken *BEC* en *AED* gelijk.

§. 51. Gevolg. *Fig.* 13. *Wanneer men derhalve eene loodlijn (CD) naar beneden verlengt; dan ontstaan er, om het punt van ontmoeting (C), vier regte hoeken; en, indien eene lijn (CD) loodregt op eene andere (BC) staat, dan staat deze laatste wederkeerig loodregt op de eerste.*

§. 52. Aanmerking. Om dat alle regte hoeken gelijk zijn; *zullen vier regte hoeken, om één punt, aan elkander sluiten, en de geheele onbepaalde vlakte-ruimte vervullen; zijnde bijgevolg de geheele onbegrensde vlakte-ruimte, in welke eenige figuur gelegen is, gelijk aan vier regte hoeken.*

V. Stelling. *Fig.* 11.

§. 53. *Een hoek (ABC) en zijn supplement (DBC) maken, te zamen genomen, twee regte hoeken.*

Betoog. Laat aangenomen worden, dat *BE* loodregt op de lijn *AD* staat; dan zijn de hoeken *ABE* en *DBE* (*XXI. Bep.*) regte hoeken, en, volgens de figuur, is nu:

hoek DBC = *hoek DBE* + *hoek CBE*, IV *Ax.*

tel bij *hoek ABC* = *hoek ABC*.

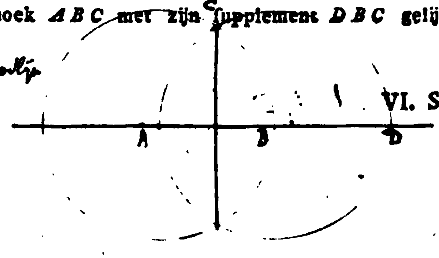
dan is *hoek ABC* + *hoek DBC* = *hoek DBE* + *hoek CBE* + *hoek ABC*, VIII *Ax.*

maar nu is *hoek ABE* = *hoek CBE* + *hoek ABC*, IV *Ax.*

gevolgelijk is *hoek ABC* + *hoek DBC* = *hoek ABE* + *hoek DBE*.

waaruit blijkt: dat de hoek *ABC* met zijn supplement *DBC* gelijk is aan twee regte hoeken.

2 Constructie ter vinding der Loodlijn



VI. Stel-

VI. STELLING. (*Het omgek. der* V. Stell.) *Fig.* 14.

§. 54. *Wanneer twee hoeken* (*ABC en DEF*), *welker som twee regte hoeken bedraagt, tot een' geheelen hoek aan elkander gevoegd worden; dan zijn de uiterste beenen* (*AB en DE*) *dezer hoeken, in dezelfde rigting, dat is, in dezelfde lijn* (*AD*) *gelegen.*

BETOOG. Want, indien *DE* niet het verlengde van *AB* is; dan zal eene andere lijn *BG*, boven of beneden *DE*, het verlengde van *AB* zijn; en dan zal

∴ *hoek ABC* + *hoek CBG* = 2 *R* zijn, V *stell.*

maar *hoek ABC* + *hoek DEF* = 2 *R*, *onderstelling.*

derhalve is *hoek ABC* + *hoek CBG* = *hoek ABC* + *hoek DEF*, V *Ax.*

Indien men hiervan *hoek ABC* = *hoek ABC* aftrekt; dan blijft er

hoek CBG = *hoek DEF*, IX *Ax.*

Zoo men derhalve *BG* als het verlengde van *AB* aanmerkt; dan zal het gedeelte aan het geheel moeten gelijk zijn; en zulks is (IV. *Ax.*) onmogelijk. Men zal in dezelfde ongerijmdheid vervallen, wanneer men de lijn *BG*, beneden de lijn *BD*, aanneemt. Geene andere, dan de lijn *DB*, kan bijgevolg het verlengde van *AB* zijn.

§. 55. GEVOLG. *De twee tegenovergestelde streken BD en BA van eene onbepaalde regte lijn AD, fig.* 11, *maken derhalve met elkander twee regte hoeken;* en *de beenen van een hoek, die gelijk is aan twee regte hoeken, liggen in dezelfde onbepaalde regte lijn.*

§. 56. GEVOLGEN uit de IV. en V. *Stellingen.*

1°. *Indien men, Fig.* 15, *uit eenig punt C, eener lijn AB, eenige andere lijnen, CD, CE, CF en CG, aan denzelfden kant dezer lijn AB, trekt; dan zal de som der hoeken, welke door deze lijnen gevormd worden, gelijk zijn aan twee regte hoeken.* Men drukt dit aldus uit:

hoek BCD + *hoek DCE* + *hoek ECF* + *hoek FCG* + *hoek GCA* = 2 *R.*

2°. *Indien men, Fig.* 16, *uit een punt A, in het ronde, verschei-dene lijnen, AB, AC, AD, AE en AF trekt; dan zal de som der hoeken, welke, om dit punt, aan elkander sluiten, gelijk zijn aan vier regte hoeken:* dat is

hoek BAC + *hoek CAD* + *hoek DAE* + *hoek EAF* + *hoek FAB* = 4 *R.*

De letter R *beteekent, in het vervolg, altijd een regten hoek.*

§. 57. I. AANMERKING. *De regte hoek is de natuurlijke éénheid der hoeken.* Van ouds verdeelde men denzelven in negentig kleinere hoeken, die men *graden* noemt; de graad in zestig kleinere hoeken, die men *minuten* noemt; eene minuut wederom in zestig kleinere hoe-

hoeken, die men *fecunden* noemt; de fecunde in zestig *tertien*, de tertie in zestig *quarten*, *enz.*: doch thans gebruikt men, in deze verdeeling, welke men de *fexagefimale* noemt, niet meer de benaming van tertien; maar men verdeelt de fecunde, in tiende, honderdfte, duizendfte deelen, *enz.*

Volgens de nieuwere verdeeling, verdeelt men den regten hoek in honderd graden; de graad in honderd minuten, de minuut in honderd fecunden. Men noemt deze verdeeling de *decimale verdeeling*.

In beide verdeelingen, wordt het woord *graad* door °, *minuut* door ′ en *fecunde* door ″ uitgedrukt: aldus wordt 73° 18′ 17″, 3 gelezen: 73 graden, 18 minuten, 17 fecunden, en 3 tiende van ééne fecunde. In de decimale verdeeling, laat men nogtans de teekens ′ en ″ weg. Aldus wordt 93°,83 07 gelezen: 93 decimale graden, 83 minuten en 7 fecunden.

Een fexagefimale graad is gelijk aan één-en-één-negende decimale graad; en één decimale graad gelijk aan negen-tiende fexagefimale. Hieruit volgt: *dat men, om fexagefimale graden tot de decimale over te brengen, bij het gegeven getal fexagefimale graden één-negende van hetzelve moet optellen, na vooraf de minuten en fecunden in tiende deelen van fexagefimale graden herleid te hebben. En dat men, om decimale graden in fexagefimale over te brengen, van het gegevene getal decimale graden één-tiende aftrekken, en de tiende, honderdfte,* enz. *deelen van graden tot minuten en fecunden moet herleiden.*

§. 58. II. AANMERKING. In de XVII. en XVIII. *Stellingen* van het V. *Boek*, zal betoogd worden: *dat, wanneer men,* zie *fig.* 17, *uit het hoekpunt B, van eenen hoek ABC, als middelpunt, met eenen ftraal BD, naar welgevallen genomen, eenen cirkel DEF befchrijft, de Cirkelboog DE, die tusfchen de beenen AB en BC van dien hoek begrepen is, tot den geheelen omtrek van dien cirkel zal ftaan, in dezelfde reden, als de hoek ABC tot vier regte hoeken.* Dit fchrijft men aldus:

boog DE : *omtrek DEF* = *hoek ABC* : 4 *R.*

Indien men, met eenen anderen ftraal BD', eenen cirkel $D'E'F'$ befchrijft; dan zal insgelijks

boog $D'E'$: *omtrek* $D'E'F'$ = *hoek ABC* : 4 *R.*

zijn. *Wanneer men derhalve den omtrek van eenigen cirkel, groot of klein, van eenig punt D af te rekenen, in drie-honderd-en-zestig gelijke deelen verdeelt en elk dezer deelen wederom in zestig gelijke dee-*

deelen enz.; *dan zal men, met dien verdeelden cirkel, elken hoek A B C kunnen meten, door het middelpunt van denzelven, in het hoekpunt, en het nulpunt der verdeeling in één der twee beenen te leggen; zoo veel deelen als dan in den boog D E begrepen zijn, zoo veel graden, minuten,* enz. *zal de hoek A B C groot zijn.*

§. 59. III. Aanmerking. *Een hoek A B C, fig. 17, kan dus begrepen worden door de omwenteling van de onbepaalde lijn B C, om het punt B, te zijn voortgebragt, en de boog D E, welke de betrekkelijke maat van dien hoek voorstelt, door het punt E. Loopt de lijn B C met eene eenparige beweging, dan is het punt E insgelijds met zulk eene beweging aangedaan; en worden er, in gelijke tijden, gelijke hoeken en gelijke cirkelbogen voortgebragt.* Hetzelfde geldt van elk ander punt *E'*, in de bewegende lijn *B C* genomen zijnde.

§. 60. XXV. Bepaling. *Om eene platte vlakte, aan alle kanten, in te sluiten, worden ten minste drie lijnen vereischt, welke elkander onderling doorsnijden.* Eene bepaalde vlakte, welke

door	*drie*	lijnen is ingesloten, noemt men	*driehoek*
	vier		*vierhoek*
	vijf		*vijfhoek*
	zes		*zeshoek*
	zeven		*zevenhoek*
	onbepaald getal		*veelhoek*

Onder den naam van *veelhoek*, kan men den *vierhoek*, *vijfhoek*, *enz.* begrijpen. De lijnen, welke eenen drie- of veelhoek bepalen, noemt men de *zijden* des veelhoeks. Alzoo zijn, in *fig.* 20, welke eenen vijfhoek voorstelt, *A B*, *B C*, *C D*, *D E*, *E A*, de zijden; *A*, *B*, *C*, *D* en *E*, de hoekpunten der hoeken; *E A B*, *A B C*, *B C D*, *C D E* en *D E A* de hoeken. Men geeft ook aan den *driehoek* en de *veelhoeken* den naam van *regtlijnige figuren.*

§. 61. Gevolg. *In elke regtlijnige figuur, (drie- of veelhoek,) is altijd het getal der zijden gelijk aan het getal der hoeken.*

§. 62. XXVI. Bepaling. De lijn (*A C*), *fig.* 20, welke twee hoekpunten van eenen veelhoek vereenigt, en geene zijde van den veelhoek zelve is, noemt men eene *diagonaal* of *hoekpuntslijn.*

§. 63 I. Gevolg. Omdat de *n* hoekpunten van eene veelhoekige figuur, op zoo veel onderscheidene wijzen, twee aan twee, kunnen worden vereenigd, als door de bekende formule $\frac{1}{2} n (n - 1)$ wordt voorgesteld, en al die vereenigingen noodzakelijk, al de zijden en

al

tot de diagonalen bevatten; zoo zal, daar het aantal zijden $= n$ is, indien men het getal der diagonalen $= g$ stelt, voor het aantal dezer diagonalen gevonden worden:

$$g = \tfrac{1}{2} n (n - 1) - n = \tfrac{1}{2} n (n - 3)$$

uit welke formule blijkt: dat, voor $n = 3$, $g = 0$; voor $n = 4$, $g = 2$; voor $n = 5$, $g = 5$ is, enz.

§. 64. II. GEVOLG. *Fig.* 20. Wanneer men, uit een enkel hoekpunt C van eenen veelhoek, (bij voorbeeld, eenen vijfhoek.) tot al de overige hoekpunten lijnen trekt; dan zal het aantal driehoeken, in welke de veelhoek verdeeld wordt, (dit is uit de figuur duidelijk te zien,) door $n - 2$ worden voorgesteld.

§. 65. XXVII. BEPALING. Wanneer eene regtlijnige figuur meer dan drie zijden heeft, kunnen één of meer van derzelver hoeken naar binnen staan. Een hoek (B), *fig.* 20, staat naar buiten, wanneer de diagonaal (AC), die de uiteinden van de beenen van dien hoek ABC vereenigt, binnen den veelhoek valt. De hoek CDE staat, zie *fig.* 21, naar binnen, wanneer de diagonaal CE buiten den veelhoek valt. *Alle naar buiten staande hoeken zijn kleiner dan* 180°; *en alle naar binnen staande hoeken zijn altijd grooter dan* 180° *en kleiner dan* 360°.

§. 66. AANMERKING. Onder alle veelhoekige figuren, is de driehoek de eenvoudigste; en, daarom moeten deszelfs eigenschappen dienen, om die van andere figuren te ontdekken.

§. 67. XXVIII. BEPALING. *Fig.* 18. In eenen driehoek ABC, onderscheidt men: de drie *zijden* AB. BC en AC, die zijne grenzen zijn; de *hoeken* ABC, BCA en BAC, welke door de onderlinge ontmoeting der zijden ontstaan; de punten A. B en C, welke de *hoekpunten* genoemd worden. Men noemt voorts de zijde AB, op welke de driehoek staat, de *basis* of *grondzijde*; AC en BC de *opstaande zijden*; de hoeken ABC en BAC de *hoeken aan de basis*; den hoek ACB den *tophoek*. Nogtans kan men, in de beschouwing eens driehoeks, elke zijde als basis aannemen. De hoek, ABC, welke door twee zijden, AB en BC, gemaakt wordt, wordt gezegd *tegen over de derde zijde*, AC, *te staan*. — En, omgekeerd, elke zijde, AB, *tegen over den hoek*, C, welke door de twee andere zijden, AC en BC, bepaald wordt.

§. 68. XXIX. BEPALING. *Fig.* 18. De drie zijden van eenen driehoek kunnen alle in lengte onderscheiden zijn: in dit geval, noemt men den driehoek *ongelijkzijdig*.

§. 69.

§. 69. XXX. Bepaling. *Fig.* 19. Men kan, op de beenen van eenen hoek *A B C*, *A B* gelijk *B C* nemen, en de lijn *A C* trekken; dan heeft de driehoek *A B C* twee gelijke zijden *A B* en *B C*. Men noemt hem, in dit geval, *gelijkbeenig*. Men noemt de zijde *A C*, tegen over den hoek, tusschen de gelijke zijden, of beenen, bij voorkeur, de *basis*.

§. 70. XXXI. Bepaling. *Fig.* 19. Men kan de beenen *A B* en *B C* in zulk eenen stand brengen, dat *A C* gelijk *A B* gelijk *B C* wordt. In dit geval zijn al de zijden gelijk; men noemt zulk eenen driehoek *gelijkzijdig*.

VII. Stelling. *Fig.* 18.

§. 71. *Elke zijde (A B) eens driehoeks (A B C) is korter dan de som zijner twee andere zijden (A C en B C).*

Betoog. Want de zijde *A B* is (*I. Ax.*) de korste weg, om uit het punt *A* in het punt *B* te komen; en is bij gevolg korter dan de som der zijden. *A C* en *B C*.

VIII. Stelling. *Fig.* 22.

§. 72. *Wanneer men uit een punt (D), binnen eenen driehoek (A B C), tot aan de uiteinden van ééne zijner zijden (A B), twee lijnen (A D en B D) trekt; dan is de som dezer lijnen kleiner dan de som zijner twee andere zijden (A C en B C).* — Dat is, $AD + BD < AC + BC$.

Betoog. Men verlenge *A D* tot in *E*; dan ontstaan er in de figuur de driehoeken *B D E* en *A C E*.

1° In den eersten dezer driehoeken *B D E*, is

$BD < DE + BE$, VII *Stell.*

tel bij $AD = AD$.

dan is $AD + BD < AD + DE + BE$, X *Ax.*

of $AD + BD < AE + BE$, volgens de figuur.

2° In den driehoek *A C E*, is

$AE < CE + AC$, VII *Stell.*

tel bij $BE = BE$.

dan is $AE + BE < BE + CE + AC$, X *Ax.*

of $AE + BE < AC + BC$, volgens de figuur.

3° Nu hebben wij bewezen: dat

$AD + BD < AE + BE$.

en $AE + BE < AC + BC$.

derhalve is $AD + BD < AC + BC$, VII *Ax.*

§. 73.

§. 73. LEERING. Men leert hieruit: *dat de som der zijden AC en BC grooter is dan de som der lijnen AE en BE.*

IX. STELLING. *Fig.* 23.

§. 74. *Twee driehoeken zijn gelijk- en gelijkvormig, wanneer eene zijde van den eersten gelijk is aan eene zijde van den tweeden, en wanneer de hoeken, aan deze zijden gelegen, in de wederzijdsche driehoeken, gelijk zijn.*

Opheldering. Indien *AB* = *DE*; *hoek A* = *hoek D*; en *hoek B* = *hoek E* is; dan zal *hoek C* = *hoek F*; *AC* = *DF* en *BC* = *EF* zijn.

BETOOG. Men legge het punt *D* in het punt *A*; de zijde *DE* langs de zijde *AB*; dan zal, omdat *AB* = *DE* is, (volgens XVIII. *Bep.*) het punt *E* in het punt *B* vallen; en, omdat *hoek A* = *hoek D*, en *hoek B* = *hoek E* is, zal, (zie *XX Bep.*) de zijde *DF* langs de zijde *AC*, en de zijde *EF* langs de zijde *BC* vallen: het punt *F* zal dan in het punt *C* vallen; volgens de *XX Bep.* zal de *hoek F* = den *hoek C*, ook zal (*XVIII Bep.*) *DF* = *AC* en *EF* = *BC* zijn; de driehoeken zullen derhalve gelijk- en gelijkvormig zijn.

X. STELLING. *Fig.* 23.

§ 75. *Twee driehoeken zijn gelijk- en gelijkvormig, indien een hoek van den eenen gelijk is aan eenen hoek van den anderen, en de zijden, welke, in de wederzijdsche driehoeken, deze hoeken bepalen, gelijk zijn.*

Opheldering. Indien *hoek A* = *hoek D*; *AB* = *DE* en *AC* = *DF* is; dan zal *BC* = *EF*; *hoek B* = *hoek E*, en *hoek C* = *hoek F* zijn.

BETOOG. Men brenge het punt *D* in het punt *A*, en *DE* langs *AB*; omdat dan *AB* = *DE* is, zal (*XVIII. Bep.*) het punt *E* in *B* vallen; voorts, omdat *hoek D* = *hoek A* is, zoo zal (*XX Bep.*) *DF* langs *AC* vallen, en omdat *DF* = *AC* is, zal het punt *F* in *C* vallen: volgens *XVIII Bep.* zal *BC* = *EF*, en volgens *XX Bep.* zal *hoek B* = *hoek E*, en *hoek C* = *hoek F* zijn; de driehoeken zijn derhalve gelijk- en gelijkvormig.

XI. STELLING. *Fig.* 24, 25 *en* 26.

§. 76. *Wanneer twee zijden* (*AB en AC*) *van eenen driehoek,* (*ABC*) *gelijk zijn aan twee zijden* (*DE en DF*) *van eenen anderen driehoek* (*DEF*); *maar de hoek* (*A*), *welke door deze twee zijden* (*AB en AC*), *in den eersten driehoek, gemaakt wordt, groo-*

ter is dan de hoek (D), welke, door de twee andere zijden (D E en D F), in den anderen driehoek (D E F), gemaakt wordt; dan zal de derde zijde (B C) van den eersten driehoek grooter zijn dan de derde zijde (E F) van den tweeden driehoek.

Betoog. *Fig.* 25 Laat het punt *D* in het punt *A*, en *D E* langs *A B* gelegd worden; omdat dan $DE = AB$ is, zal (*XVIII Bep.*) het punt *E* in het punt *B* vallen; en omdat *hoek* $EDF <$ *hoek* BAC is, zal de zijde *D F* binnen den hoek *B A C* vallen, en nu zal $AF \doteq DF = AC$ en $BF = EF$ zijn. *Het punt F zal dan, 1°. of buiten den driehoek A B C, 2°. of in deszelfs zijde B C, of 3°. binnen den driehoek A B C vallen.*

I. Geval. *Fig.* 25. Valt het punt *F* geheel buiten den driehoek *A B C*; dan is

1°. In driehoek *A C G*, $CG + DG > AC$, VII *Stell.*

2°. In driehoek *B F G*, $BG + FG > EF$, VII *Stell*

Men telle deze ongelijkheden bij elkander; dan is, volgens de figuur, en XI *Ax.*

$$BC + DF > AC + EF.$$

trek af $DF = AC$, *onderst.*

dan wordt $BC > EF$, X *Ax.*

II. Geval. *Fig.* 25. Valt het punt *F* in de zijde *B C*; dan blijkt het van zelf, dat *B C* grooter dan *E F* is.

III. Geval. *Fig.* 26. Valt eindelijk het punt *F* binnen den driehoek *A B C*; dan is

$$AC + BC > DF + EF,$$ VIII *Stell.*

trek af $AC = DF$, *onderst.*

dan is $BC > EF$, X *Ax.*

Het blijkt derhalve: dat, in al de drie mogelijke gevallen, die kunnen plaats hebben, de zijde *B C* grooter dan de zijde *E F* is.

XII. Stelling. (*Het omgek. der XI. Stell.*) *Fig.* 24.

§. 77. *Indien twee zijden (A B en A C) van eenen driehoek (A B C) gelijk zijn aan twee zijden (D E en D F) van eenen anderen driehoek (D E F); maar de derde zijde (B C) des eersten driehoeks (A B C) grooter is, dan de derde zijde (E F) des tweeden driehoeks (D E F); dan zal de hoek (A), welke, in den eersten driehoek (A B C), tegen over die grootere zijde (B C) staat, ook grooter zijn, dan de hoek (D), welke, in den tweeden driehoek (D E F), tegen over de kleinere zijde (E F) staat.*

Betoog. Indien de hoek *A* niet grooter is dan de hoek *D*; dan zal, 1°. de hoek *A* gelijk aan den hoek *D* moeten zijn, of 2°, de hoek *A* zal kleiner dan de hoek *D* moeten zijn. In het eerste geval, zou,

vol-

volgens de *X. Stelling*, $BC = EF$; en, in het tweede geval, zou, naar de *XI. Stelling*, EF grooter dan BC moeten zijn: beide deze gevolgen strijden met de onderstelling; de hoek A kan dan, noch gelijk aan den hoek D, noch kleiner dan dezelve zijn; de hoek A moet derhalve grooter dan de hoek D zijn.

XIII. STELLING. *Fig.* 23.

§. 78. *Wanneer al de zijden van eenen driehoek, elk in het bijzonder, gelijk zijn aan al de zijden van eenen anderen driehoek; dan zullen de hoeken, welke, in deze driehoeken, over de gelijke zijden staan, aan elkander gelijk, en de driehoeken zelve zullen gelijk- en gelijkvormig zijn.*

Opheldering. Indien $AB = DE$; $AC = DF$ en $BC = EF$ is; dan zal moeten bewezen worden: dat ook *hoek* A = *hoek* D; *hoek* B = *hoek* E en *hoek* C = *hoek* F zal zijn, en dat de driehoeken volmaakt op elkander zullen passen.

BETOOG. Indien de hoek A niet gelijk is aan den hoek D; dan zal de hoek A, of grooter, of kleiner dan de hoek D moeten zijn. Omdat nu, volgens de onderstelling, $AB = DE$ en $AC = DF$ is, zoo zal, (*XI Stell.*) in het eerste geval, BC grooter, en, in het tweede geval, kleiner dan EF moeten zijn; daar zulks nu met de onderstelling strijdt, zoo zal de *hoek* A niet grooter noch kleiner dan de *hoek* D kunnen zijn; *hoek* A moet dan gelijk aan *hoek* D zijn; en dan zal (*X. Stell.*) ook *hoek* B = *hoek* E, en *hoek* C = *hoek* F, en de driehoeken zullen derhalve gelijk- en gelijkvormig zijn.

XIV. STELLING. *Fig.* 27.

§. 79. *De hoeken* (A *en* B), *welke, in een gelijkbeenigen driehoek* (ABC), *tegen over de gelijke beenen of zijden* (BC *en* AC) *staan, zijn gelijk.*

BETOOG. Laat de lijn CD den tophoek C in twee gelijke hoeken, ACD en BCD, verdeelen; dan verkrijgt men, in de figuur, de driehoeken ACD en BCD, in welke CD eene gemeene zijde, $AC = BC$ (*onderst.*) en *hoek* ACD = *hoek* BCD is; de driehoeken ACD en BCD zijn dan (*X. Stell.*) gelijk- en gelijkvormig, en *hoek* CAD = *hoek* CBD.

§. 80. I. GEVOLG. *Al de hoeken van elken gelijkzijdigen driehoek zijn gelijk.*

§. 81. II. GEVOLG. *Fig.* 27. Indien men de gelijke beenen AC en BC, tot in E en F, verlengt; dan zijn de hoeken ABF en BAE de supplementen van de gelijke hoeken ABC en BAC, en zijn (*III. Stell.*) derhalve gelijk. *Indien men dus, in een' gelijk-*

beenigen driehoek, de gelijke beenen tot beneden de basis verlengt; dan zijn de hoeken, onder de basis gelegen, ook aan elkander gelijk.

§. 82. LEERING Fig 27. Uit de bewezene gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken *ACD* en *BCD* volgt: 1°. dat *AD* = *BD* is, 2°. dat *hoek ADC* = *hoek BDC* is; de lijn *CD* staat dan (*XXI. Bep.*) loodregt op *AB*. *De lijn derhalve, welke den tophoek van eenigen gelijkbeenigen driehoek, in twee gelijke deelen, verdeelt, staat regthoekig op de basis, en snijdt dezelve nog bovendien in twee gelijke deelen.*

XV. STELLING. (*Het omgek. der XIV. Stell.*) Fig. 28.

§ 83. *Wanneer een driehoek* (*ABC*) *twee gelijke hoeken* (*A en B*), *heeft; dan is die driehoek gelijkbeenig; dat is, de zijden* (*BC en AC*), *tegen over die gelijke hoeken* (*A en B*) *staande, zullen gelijk zijn.*

BETOOG. Want, indien *AC* grooter dan *BC* konde zijn; dan zou men *AD* gelijk *BC* kunnen nemen, en, indien men dan de lijn *BD* trok; dan zouden, in de driehoeken *ABC* en *ABD*, de *hoek ABC* = *hoek BAD* (*onderst.*) zijn; voorts *AB* = *AB* en *BC* = *AD*; deze driehoeken zouden dan (*X. Stell*) gelijk- en gelijkvormig zijn; bijgevolg *hoek ABD* = *hoek BAD* = *hoek BAC* zijn; dat is, het gedeelte gelijk aan het geheel. Het is dan ongerijmd *AC* grooter dan *BC* te stellen. Stelt men *AC* kleiner dan *BC*; dan vervalt men in dezelfde ongerijmdheid; de zijde *AC* kan derhalve niet anders dan gelijk zijn aan de zijde *BC*.

XVI. STELLING. Fig. 29.

§. 84. *In elken driehoek, staat eene grootere zijde tegen over een grooteren hoek: en,* omgekeerd, *een grooter hoek tegen over eene grootere zijde.*

Opheldering. Dat is, indien *hoek BAC* > *hoek ABC* is; dan zal *BC* ook > *AC* zijn, — en, omgekeerd. — Indien *BC* > *AC* is; dan zal ook *hoek BAC* > *hoek ABC* zijn.

BETOOG *van het eerste.* Omdat *hoek BAC* > *hoek ABC* is, zal men, binnen den driehoek, uit het hoekpunt *A*, de lijn *AD* kunnen trekken, zoodanig, dat de *hoek BAD* = *hoek ABD* is; en dan zal (*XV. Stell.*) *AD* = *BD* zijn; bij elk dezer gelijke lijnen dezelfde lijn *CD* tellende, zullen (*VIII. Ax.*) de sommen gelijk zijn; dat is, de som van *AD* en *CD* gelijk aan de som van *BD* en *DC*, gelijk aan de zijde *BC*; maar de som der zijden *AD* en *CD* is (*VII. Stell.*) grooter dan de derde zijde *AC*; derhalve (*VI. Ax.*) is ook de zijde *BC* grooter dan de zijde *AC*.

Betoog *van het omgekeerde*. Stelt men $B C > A C$; dan zal, indien *hoek* $B A C$ niet $>$ *hoek* $A B C$ is, of *hoek* $B A C$ gelijk aan *hoek* $A B C$, of kleiner dan dezelve moeten zijn; in het eerste geval, zou (*XV Stell.*) $B C = A C$, en, in het tweede, (*volgens het bewezene*,) $B C < A C$ moeten zijn: daar nu beide gevallen met de onderstelling strijdig zijn, zoo moet *hoek* $B A C$ grooter dan *hoek* $A B C$ zijn.

§. 85. XXXII. Bepaling. *Fig.* 30 Elke hoek ($A B C$) eens driehoeks ($A B C$), heeft zijn *supplement* of *supplementshoek* ($C B D$ of $A B E$), welke ontstaat, wanneer men ééne van deszelfs zijden ($A B$ of $B C$) naar welgevallen, verlengt, en deze supplementshoeken zijn (*III Stell.*) gelijk. *Deze bepaling geldt voor elken anderen hoek des driehoeks; ja ook, voor al de hoeken van alle veelhoeken, in het algemeen genomen.*

XVII. Stelling. *Fig.* 31.

§. 86. *De som van de supplementen van al de hoeken eens veelhoeks, wiens hoeken alle naar buiten staan, is altijd, hoe groot het aantal van deszelfs zijden zijn moge, gelijk aan vier regte hoeken.*

Betoog. Laat $A B C D E F$ een zeshoek zijn, wiens hoeken alle naar buiten staan. Verleng de zijden $A B$, $B C$, $C D$, $D E$, $E F$ en $F A$. onbepaaldelijk, naar G, H, I, K, L en M; dan zijn de hoeken $M A G$, $G B H$, $H C I$, $I D K$, $K E L$ en $L F M$ de supplementen van de hoeken $F A B$, $A B C$, $B C D$, $C D E$, $D E F$, $E F A$ des veelhoeks. (*XXXII. Bep.*) Alle deze supplementen sluiten aan elkander, volgens het beloop der onbepaald voortloopende lijnen, $A G$, $B H$, $C I$, $D K$, $E L$ en $F M$, en vervullen (*XIX. Bep.*) de geheele onbepaalde vlakte ruimte, welke rondom den veelhoek $A B C D E F$ gelegen is. Het blijkt dus: dat de som van de supplementen van al de hoeken des veelhoeks gelijk is aan de onbegrensde vlakte, in welke de veelhoek ligt, min de uitgebreidheid van den veelhoek; maar, volgens het *III. Axioma*, is de uitgebreidheid van den veelhoek geen gedeelte van de onbegrensde ruimte; zij is bijgevolg, in vergelijking van dezelve, gelijk nul; de veelhoek moge dan, op zich zelven genomen, groot of klein zijn, de som van de supplementen zijner hoeken blijft altijd gelijk aan de onbegrensde vlakte, in welke de figuur gelegen is; maar nu is, zie *Aanm* op de *IV Stell.*, §. 52, de onbegrensde vlakte ruimte gelijk aan vier regte hoeken; derhalve zal (*V. Ax.*) de som van de supplementen van de hoeken van den zeshoek $A B C D E F$ gelijk zijn aan vier regte hoeken. — Hetzelfde bewijs zal gelden voor elken anderen veelhoek, wiens hoeken alle naar buiten staan.

§. 87. Aanmerking. *Het gestelde geldt ook voor elken veelhoek, in welke sommige hoeken naar binnen staan*; want uit de XXVII.

Bep., §. 65, is ligtelijk te zien, *dat de supplementen der naar binnen staande hoeken negatief zijn.*

XVIII. STELLING. *Fig.* 32.

§. 88. *De som van al de hoeken van elken driehoek is altijd gelijk aan twee regte hoeken.*

BETOOG. Men verlenge de zijden van den driehoek *ABC*; *AB* onbepaaldelijk, tot in *D*; *BC* onbepaaldelijk, tot in *E*, en *CA* onbepaaldelijk tot in *F*; dan is *hoek CBD* het supplement van den *hoek ABC*, *hoek ACE* het supplement van den *hoek BCA*, en *hoek BAF* het supplement van den *hoek CAB*; en nu is, zie *V Stell.*

$$\text{hoek } ABC + \text{hoek } CBD = 2R$$
$$\text{hoek } BCA + \text{hoek } ACE = 2R$$
$$\text{hoek } CAB + \text{hoek } BAF = 2R$$

Men telle deze vergelijkingen bij elkander; dan is, volgens het VIII. *Axioma*:

$$\left.\begin{array}{l}\text{hoek } ABC + \text{hoek } BCA + \text{hoek } CAB \\ + \text{hoek } CBD + \text{hoek } ACE + \text{hoek } BAF\end{array}\right\} = 6R$$

maar nu is, volgens de voorgaande stelling,

$$\text{hoek } CBD + \text{hoek } ACE + \text{hoek } BAF = 4R$$

trekt men nu deze laatste vergelijking van de voorgaande af; dan zal men, zie IX. *Axioma*, overhouden:

$$\text{hoek } ABC + \text{hoek } BCA + \text{hoek } CAB = 2R.$$

§. 89. I. GEVOLG. *De som van twee hoeken eens driehoeks is gelijk aan het supplement van den derden hoek; en het supplement van elken hoek eens driehoeks is altijd grooter dan één zijner twee andere hoeken.*

§. 90. II. GEVOLG. Omdat de som van de hoeken eens driehoeks noch grooter noch kleiner dan twee regte hoeken kan zijn, *zoo kan een driehoek geen twee regte hoeken, en nog veel minder twee stompe hoeken hebben.* Op deze waarheid berusten de volgende bepalingen.

§. 91. XXXIII. BEPALING. *Fig.* 33. Een *regthoekige driehoek* (*ABC*) is een driehoek, welke éénen regten hoek (*B*) heeft. Zijne twee andere hoeken (*A* en *C*) zijn scherp. De zijde (*AC*), welke tegen over den regten hoek (*B*) staat, noemt men *hypothenusa* of *schuinsche zijde*; de zijden (*AB* en *BC*), om den regten hoek (*B*) staande, noemt men de *regthoekszijden.*

§. 92. XXXIV. BEPALING. *Fig* 34. Een *stomphoekigen driehoek* (*ABC*) is een driehoek, welke éénen stompen hoek (*B*) heeft. Zijne twee andere hoeken (*A* en *C*) zijn scherp.

§. 93.

§. 93. XXXV. Bepaling. *Fig.* 32. Een *fcherphoekigen driehoek* is een driehoek, welke drie fcherpe hoeken heeft. Men zegt, *welke drie fcherpe hoeken heeft*; om daardoor den fcherphoekigen driehoek van den regthoekigen en ftomphoekigen te onderfcheiden.

§. 94. III. Gevolg. *Fig.* 33. *De fom van de fcherpe hoeken, A en C, eens regthoekigen driehoeks is gelijk aan het fupplement van den regten hoek B; dat is, gelijk aan éénen regten hoek.*

§. 95. IV. Gevolg *Fig* 35. Omdat de hoeken, *A* en *B*, aan de bafis *AB* van elken gelijkbeenigen driehoek *ABC*, gelijk, en de fom dezer hoeken bijgevolg gelijk is aan het dubbel van elk éénen van dezelve, *zoo zal het fupplement BCD van den tophoek C eens gelijkbeenigen driehoeks gelijk zijn aan het dubbel van elk éénen der hoeken aan de bafis. En, elk der hoeken aan de bafis gelijk aan het halve fupplement van den tophoek. Wanneer men dus het fupplement BCD van den tophoek ACB, door eene lijn CE, in twee gelijke hoeken DCE en BCE verdeelt; dan zal elk dezer hoeken gelijk zijn aan éénen der hoeken A en B aan de bafis.*

§. 96. V. Gevolg. *Fig.* 32. *Wanneer twee hoeken, A en B, eens driehoeks, in getallen van graden en derzelver onderdeelen, bekend zijn; dan zal men den derden hoek, zoo als men het noemt, bij gevolgtrekking, vinden kunnen, wanneer men de fom dezer hoeken van twee regte hoeken, of van* 180°, *aftrekt.*

Gegeven *hoek A* =	73° 41′ 33″	*optellen.*
hoek B =	56° 28′ 56″	
hoek A + *hoek B* =	130° 10′ 29″	*aftrekken.*
hoek C + *hoek A* + *hoek B* =	180° 00′ 00″	
hoek C =	49° 49′ 31″	

§. 97. VI. Gevolg. *Fig.* 33 *Insgelijks zal men, wanneer één der fcherpe hoeken A eens regthoekigen driehoeks, in getallen van graden, gegeven is, den anderen fcherpen hoek C, bij gevolgtrekking, kunnen vinden, wanneer men den gegevenen fcherpen hoek A van éénen regten hoek, of van* 90°, *aftrekt.*

Gegeven *hoek A* =	56° 17′ 23″, 5	*aftrekken.*
hoek A + *hoek C* =	90° 00′ 00″, 0	
blijft *hoek C* =	33° 42′ 36″, 5	

§. 98. VII. Gevolg. *De hoeken van éénen gelijkzijdigen driehoek (I. Gev. XIV. Stell.) gelijk, en derzelver fom gelijk aan twee regte hoeken zijnde, zoo zal elk één zijner hoeken gelijk aan één-derde van*

twee regte hoeken, dat is, aan twee-derde van éénen regten hoek, of gelijk aan 60° zijn.

§. 99. VIII. Gevolg. *Wanneer de tophoek van een gelijkbeenigen driehoek gegeven is; dan zal men elk der hoeken aan de basis vinden, door de helft van het supplement des tophoeks te nemen. En, wanneer één der hoeken aan de basis bekend is; dan zal men den tophoek vinden, door het dubbel van dien hoek van 180° af te trekken.*

§. 100. IX. Gevolg. *Fig.* 36. *Wanneer twee hoeken (A en B) van eenen driehoek (ABC), elk in het bijzonder, gelijk zijn aan twee hoeken (D en E) van eenen anderen driehoek (DEF); dan zal men, al zijn de driehoeken niet gelijk, besluiten mogen: dat de derde hoek (C) des eersten driehoeks gelijk is aan den derden hoek (F) des tweeden driehoeks.* Want de som der hoeken *A*, *B* en *C* is gelijk aan de som der hoeken *D*, *E* en *F*; trekt men hiervan af de som der hoeken *A* en *B*, die (*VIII. Ax*) gelijk is aan de som der hoeken *D* en *E*; dan moet (*IX. Ax.*) hoek C = hoek *F* zijn.

§. 101. X. Gevolg. *Fig.* 36. *Wanneer twee regthoekige driehoeken, ABC en DEF, (welke in B en E regthoekig zijn,) twee gelijke scherpe hoeken, A en D, hebben; dan zal men, al is het, dat deze regthoekige driehoeken voor het overige niet gelijk zijn, mogen besluiten: dat de twee andere scherpe hoeken, C en F, insgelijks aan elkander gelijk zullen zijn.*

§. 102. XI. Gevolg. *Fig.* 36. *Indien de som der hoeken A en B gelijk is aan de som der hoeken D en E, zonder dat hoek A = hoek D, en hoek B = hoek E is; dan mag men besluiten: dat de derde hoek C gelijk zal zijn aan den derden hoek F.*

XIX. Stelling.

§. 103. *De som van al de hoeken eens veelhoeks, wiens hoeken alle naar buiten staan, is gelijk aan zoo veelmaal twee regte hoeken, als het getal der zijden min twee bedraagt. Dat is, het aantal der zijden gelijk n en de som der hoeken = S zijnde, zoo zal* $S = (n - 2) \times 2R$ *zijn.*

Betoog. Elke hoek maakt met zijn supplement (*V. Stell.*) twee regte hoeken; de som van al de hoeken met derzelver supplementen is derhalve gelijk aan *n*-maal twee regte hoeken; of $n \times 2R$; hiervan aftrekkende de som van de supplementen der hoeken, welke (*zie XVII. Stell.*) ge-

gelijk is aan vier regte hoeken, of $2 \times 2 R$; dan blijft er voor de som van al de hoeken over, $S = (n - 2) \times 2 R$.

Men behoeft slechts, in deze formule, voor n te stellen 4, 5, 6, *enz.* om te vinden, dat de som van de hoeken van een vierhoek *vier*, van een vijfhoek *zes*, van een zeshoek *acht* regte hoeken is, *enz.*

XX. STELLING. *Fig.* 37 *en* 38.

§. 104. *Wanneer men, op het midden* (C) *van eene lijn* (*A B*), *eene loodlijn* (*C D*), *fig.* 37, *opregt; dan staat elk punt* (D) *dezer loodlijn* (*C D*) *op een gelijken afstand van de uiteinden* (*A en B*) *der lijn* (*A B*), *op welke zij opgerigt is.* — En, omgekeerd. — *Alle punten* (*C*, *D*, *E*, enz.,) *fig.* 38, *welke, boven of beneden eene bepaalde lijn* (*A B*), *op gelijke afstanden*, (*A C* = *B C*, *A D* = *B D*, *A E* = *B E*, enz.) *van de uiterste punten* (*A en B*) *dezer lijn gelegen zijn, liggen in de loodlijn* (*E H*), *welke, uit het midden* (*H*) *dezer lijn* (*A B*), *op dezelve is opgerigt.*

BETOOG *van het eerste. Fig.* 37. Want, wegens den onderstelden loodregten stand van de lijn *CD* op *A B*, hebben (*XXI. Bep.*) de driehoeken *A C D* en *B C D* de gelijke hoeken *A C D* en *B C D*; voorts is (*onderst.*) *A C* = *B C*, en zij hebben de gemeene zijde *C D*: zij zijn dan (*X. Stell.*) gelijk- en gelijkvormig; en *A D* is derhalve gelijk aan *B D*.

BETOOG *van het omgekeerde. Fig.* 38 Laten *C* en *D* twee punten zijn, elk op denzelfden afstand van de punten *A* en *B* verwijderd zijnde; trek dan, door deze punten *C* en *D*, eene onbepaalde lijn *E H*; dan is vooreerst.

In de driehoeken *A C D* en *B C D*, *A C* = *B C* en *A D* = *B D* (*onderst.*) en *C D* = *C D* (*uit de figuur*); derhalve is *hoek A D H* = *hoek B D H* (*XIII. Stell.*)

Voorts is, in de driehoeken *A D H* en *B D H*, *hoek A D H* = *hoek B D H* (*bewezen*), *A D* = *B D* (*onderst.*) en *D H* = *D H* (*uit de figuur*.) en dus is (*X. Stell.*) vooreerst *A H* = *B H*, en ten anderen *hoek A H D* = *hoek B H D*; de lijn, die derhalve, door de punten *C* en *D*, getrokken wordt, gaat midden door *A B* en staat loodregt op *A B*.

Wanneer men eene lijn door de punten *D* en *E* trekt; dan zal die lijn, om dezelfde reden, door het punt *H* gaan; die lijn is dan (*I Stell.*) dezelfde. als de lijn, welke door de punten *C* en *D* wordt getrokken: hetzelfde zal nu ook van alle andere punten gelden, die op gelijke afstanden van de punten *A* en *B* verwijderd zijn; die punten liggen dus alle in de lijn *E H*.

XXI. STELLING. *Fig.* 39.

§. 105. *Wanneer men, uit een punt* (*P*), *buiten eene regte lijn* (*A B*)

(A B) gelegen, tot verscheidene punten (C, D, E, F, enz.) *van die lijn (A B), andere lijnen (P C, P D, P E, P F,* enz.) *trekt; dan zal:* 1°. *onder al die lijnen, slechts ééne lijn (P C) loodregt op gezegde lijn (A B) kunnen staan;* 2°. *die loodlijn zal korter zijn dan eenige andere dezer lijnen (P D, P E,* enz.), *welke men, uit dit punt (P), ter wederzijde van de loodlijn PC), tot eenig punt der voornoemde lijn (A B), zal kunnen trekken;* 3°. *eenige lijn (P E), die met de loodlijn (P C) een grooter hoek (C P E) maakt, dan de hoek (C P D), welke eene andere lijn (P D) met die loodlijn (C P) maakt, zal langer dan deze laatste zijn;* 4°. *lijnen (P D en P G), die, ter wederzijde van de loodlijn (C P), met dezelve gelijke hoeken maken, zullen gelijk zijn;* 5°. *er bestaan, op de voornoemde lijn (A B), wel twee, maar geene drie of meer punten, die denzelfden afstand van het meergemelde punt (P) hebben.*

Betoog *van het eerste.* Men neme, dat *P C* en *P D*, twee onderscheidene loodlijnen zijn; dan zal de driehoek *P C D* (*XXI. Bep.*) twee regte hoeken *P C D* en *P D C* hebben: zulks nu onmogelijk (*II. Gev. XVIII. Stell.*) zijnde, kunnen *C P* en *D P* niet te gelijk loodregt op *A B* staan.

Betoog *van het tweede.* Indien *P C* de loodlijn is; dan is de driehoek *P C D* regthoekig in *C*; de hoek *P D C*, is dan (*XXXIII. Bep.*) scherp en (*XXII. Bep.*) kleiner dan hoek *P C D*; de lijn *P C* is derhalve (*XVI. Stell.*) korter dan de lijn *P D*. Om dezelfde reden, is *P C* korter dan *P E*.

Betoog *van het derde.* Wanneer men van *hoek R* = *hoek R* aftrekt *hoek C P E* > *hoek C P D*, zoo zal men, volgens *XII. Ax.* overhouden, *hoek R* — *hoek C P E* < *hoek R* — *hoek C P D*; dat is, zie *VI. Gev. XVIII. Stell. hoek P E D* < *hoek P D C*; maar, omdat *hoek P D C* scherp is, zoo is *hoek P D E* stomp; en, om die reden, *hoek P D C* < *hoek P D E*; derhalve is, volgens het *VI. Ax.*, *hoek P E D* < *hoek P D E*, of *hoek P D E* > *hoek P E D*, en volgens *XVI. Stell. P E* > *P D*. Om dezelfde reden zal *P F* > *P E* zijn.

Betoog *van het vierde.* In de driehoeken *P C D* en *P C G*, is *hoek C P D* = *hoek C P G* (*onderst.*) *hoek P C D* = *hoek P C G* = *R* (*onderst.*) en *C P* = *C P*; derhalve is (*IX. Stell.*) *P D* = *P G*.

Betoog *van het vijfde.* Wanneer de punten *D* en *G*, bij voorbeeld, even ver van het punt *P* afstaan; dan zal men, uit kracht van het betoogde, noch tusschen die punten, noch buiten dezelve, een ander punt kunnen vinden, dat niet minder of meer van het punt *P* verwijderd is, dan de punten *D* en *G*; behalve die twee punten *D* en *G*, bestaat er dan geen derde (en bijgevolg ook geen vierde) punt, dat van *P* even zoo ver afstaat, als de punten *D* en *G*.

§. 106. XXXVI. Bepaling. *Fig.* 39. *De afstand* van een punt

P

P tot eene regte lijn *AB* is de loodlijn *PC*, welke, uit dit punt *P*, op deze lijn *AB*, valt. *Hij is*, naar het betoogde, in de voorgaande stelling, *de kortste weg*, *langs welken men*, *uit een gegeven punt P*, *in of tot eene gegevene lijn A B*, *kan komen.*

§. 107. XXXVII. BEPALING. Lijnen, welke, het zij aan den eenen, het zij aan den anderen kant, onbepaaldelijk verlengd zijnde, elkander nimmer snijden, of ontmoeten, worden *evenwijdige* (parallelle) *lijnen* genoemd. *De geheele verdere theorie dezer lijnen berust op de twee volgende leerstellingen.*

XXII. STELLING. *Fig.* 40.

§. 108. *Indien*, *uit twee onderscheidene punten* (*A en B*) *eener lijn* (*A B*), *twee loodlijnen* (*A C en B D*) *worden opgerigt: dan zijn deze loodlijnen evenwijdig.*

BETOOG. Want, indien zij elkander ergens, in een punt *P* of *Q* ontmoetten, zouden zij, met de lijn *AB*, eenen driehoek *ABP* of *ABQ* vormen, welke, strijdig met de eigenschap des driehoeks, (*II. Gev. XVIII. Stell.*) in *A* en B, twee regte hoeken zou hebben; deze lijnen kunnen derhalve elkander nergens ontmoeten, en zijn (XXXVII. *Bep.*) diensvolgens evenwijdig.

§. 109. GEVOLG. *Men zal derhalve*, *door eenig gegeven punt*, *eene lijn*, *evenwijdig aan eenige andere gegevene lijn*, *kunnen trekken*; want men late, uit het gegevene punt, eene loodlijn op de gegevene lijn vallen, en rigte uit datzelfde punt eene loodlijn op de laatste op; dan zal deze aan de gegevene lijn evenwijdig zijn.

I. HULPSTELLING. *Fig.* 41 *en* 42.

§. 110. *Wanneer men van eene zekere grootheid R de helft neemt*, *van de overblijvende helft wederom de helft*, *en telkens van hetgeen er overblijft*, *op nieuw de helft*, enz.; *dan zal men daarmede zonder ophouden voortgaan*, *en dit halveren zelfs zoo verre kunnen voortzetten*, *tot dat het laatst overblijvende deel*, (*dat men echter altijd nog zal kunnen halveren*,) *kleiner dan de kleinste gegevene grootheid van dezelfde soort zal zijn: en*, *de som van alle deze deelen*, *te weten:* $\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}R + \frac{1}{32}R + \frac{1}{64}R + \frac{1}{128}R + \frac{1}{256}R +$ enz. *zal*, *op het laatst overblijvende deel na*, *het geheel uitmaken*, *en van datzelfde geheel gevolglijk minder*, *dan de kleinste gegevene grootheid*, *verschillen.*

BE-

Betoog. Zij, *fig.* 41, AB eene regte lijn. Laat dezelve, in C, in twee gelijke deelen, $AC = BC$, gedeeld worden; dan is $AC = BC = \frac{1}{2}AB$. Men deele de helft BC, in D, in twee gelijke deelen, $CD = BD$; dan is $CD = BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}AB$. Men ga op deze wijze voort, met BD in E, BE in F, BF in G, *enz.* in twee gelijke deelen te verdeelen; dan zal $DE = BE = \frac{1}{8}AB$, $EF = BF = \frac{1}{16}AB$, $FG = BG = \frac{1}{32}AB$, $GH = BH = \frac{1}{64}AB$, $HI = BH = \frac{1}{128}AB$ worden: en men zal, omdat alle uitgebreidheid tot in het oneindige deelbaar is, hiermede, zonder ophouden, kunnen voortgaan. Nu is klaarblijkelijk

$$AC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IK + KL + \textit{enz.}$$

of dat, (zie boven,) hetzelfde is,

$$\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{4}AB + \tfrac{1}{8}AB + \tfrac{1}{16}AB + \tfrac{1}{32}AB + \tfrac{1}{64}AB + \tfrac{1}{128}AB + \textit{enz.}$$

op het laatste deeltje BL (bij voorbeeld,) na, gelijk aan de geheele lijn AB; maar, daar men, met het halveren van het laatste deel BL, tot in het oneindige kan voortgaan, zoo zal men eindelijk tot zulk een deeltje komen, dat kleiner zal zijn, dan het kleinste lijntje, dat men zich zal kunnen voorstellen; en de som van $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB +$ *enz.* zal dan van de lijn AB minder, dan dat kleinste lijntje verschillen.

Laat, in *fig.* 42, ABC een regte hoek zijn. Indien dan de lijnen BD, BE, BF, BG, BH, BI, *enz.* de hoeken ABC, DBC, EBC, FBC, GBC, HBC, *enz.* midden door deelen; dan zal *hoek* $ABD = \frac{1}{2}R$, *hoek* $BDE = \frac{1}{4}R$, *hoek* $EDF = \frac{1}{8}R$, *hoek* $FBG = \frac{1}{16}R$, *hoek* $GBH = \frac{1}{32}R$, *hoek* $HBI = \frac{1}{64}R$, *enz.* zijn; en, om dezelfde reden, als in het voorbeeld van de regte lijn, is bijgebragt, zal, indien men met halveren onophoudelijk voortgaat, de som

$$\tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{4}R + \tfrac{1}{8}R + \tfrac{1}{16}R + \tfrac{1}{32}R + \tfrac{1}{64}R + \tfrac{1}{128}R + \tfrac{1}{256}R + \textit{enz.}$$

op het laatst, minder van eenen regten hoek verschillen, dan het kleinste hoekje (bij voorbeeld, van *één-millioenste gedeelte van ééne seconde*.) dat men zich kan voorstellen; zoodat, wanneer men die verdeeling, tot in het oneindige, konde voortzetten, de som van al die deelen eindelijk aan den regten hoek ABC volkomen gelijk zou worden.

XXIII. Stelling. (*Het omgek. der XXII. Stell*) *Fig.* 43.

§. 111. *De lijn* (GH), *welke loodregt op ééne* (CD) *van twee evenwijdige lijnen* (AB *en* CD) *staat, staat ook loodregt op de andere* (AB) *dezer evenwijdige lijnen.*

Betoog. Indien de lijnen AB en CD elkander niet ontmoeten en GH loodregt op CD staat; dan moet hoek HGB regt zijn; en zulks zal bewezen zijn, wanneer men bewijzen kan: *dat, wanneer de hoek* HGB *scherp of stomp is, de lijnen* AB *en* CD *elkander noodzakelijk, het zij aan den éénen, het zij aan den anderen kant, moeten snijden.*

Men make $HI = HG$ en trekke de lijn GI, dan is GHI een gelijkbeenige regthoekige driehoek, en, volgens *IV. Cor. XVIII. Stelling*, zal

hoek

hoek HIG = *hoek* HGI = aan den halven supplementshoek CHG = éénen halven regten hoek = $\frac{1}{2}R$ zijn.

Men neme wederom $IK = IG$ en trekke GK; dan zal, in den gelijkbeenigen driehoek IKG, om dezelfde reden, *hoek* IKG = *hoek* IGK = *halven hoek* HIG = $\frac{1}{4}R$ zijn.

Nemende verder $KL = GK$ en trekkende GL; wederom $LM = GL$ en trekkende GM; dan zal, om dezelfde reden, in de gelijkbeenige driehoeken, CKL en GLM, de *hoek* $KGL = \frac{1}{8}R$ en de *hoek* LGM = $\frac{1}{16}R$ zijn.

Men zal, op dezelfde wijze, met de zamenstelling van volgende gelijkbeenige driekoeken kunnen voortgaan; want men zal, op het verlengde van CD, altijd eene lijn gelijk aan de basis van den laatsten gelijkbeenigen driehoek kunnen uitzetten; en, in de volgorde dezer driehoeken, zullen even, als in het begin, de hoeken aan de basis van elken volgenden gelijkbeenigen driehoek gelijk zijn aan de helft van de hoeken aan de basis van elken voorgaanden.

Men verkrijgt alzoo, op die regelmatige wijze voortgaande, met de volgende gelijkbeenige driehoeken GMN, GNO, GOP, *enz.* te construeren. (welke op de plaat niet kunnen voorgesteld worden,) in de figuur, aan het hoekpunt G, de *hoeken* HGI, IGK, KGL. LGM, MGN, NGO, OGP, *enz.*, die (R altijd een regten hoek bereekenende,) gelijk aan $\frac{1}{2}R$, $\frac{1}{4}R$, $\frac{1}{8}R$, $\frac{1}{16}R$, $\frac{1}{32}R$, $\frac{1}{64}R$, $\frac{1}{128}R$, *enz.* zullen zijn; en, daar de lijn CD, tot in het oneindige, voortloopt; zal het aantal der gelijkbeenige driehoeken, welke men op die wijze verkrijgen kan, oneindig groot zijn; terwijl al hadde men reeds eenige duizenden zulke gelijkbeenige driehoeken geconstrueerd, de basis van den laatsten nog eene lijn zoude zijn, die van G tot eenig ver afgelegen punt van de lijn CD getrokken is.

Onderstellen wij nu: dat de hoek HGB een scherpen hoek zij; doch een scherpe hoek, die, bij voorbeeld, slechts *één-millioenste gedeelte van ééne secunde* van éénen regten hoek verschilt: indien wij dit dan aannemen; dan zal men, met het construeren der gelijkbeenige driehoeken, zoo ver kunnen voortgaan, dat de som der hoeken HGI, IGK, *enz.* of $\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R +$ *enz.* nog minder dan één-millioenste gedeelte van ééne secunde van éénen regten hoek verschilt. Laat GZ de basis van den laatsten gelijkbeenigen driehoek zijn, dien men verkregen heeft; dan zal de lijn GB binnen den *hoek* HGZ moeten vallen; daar nu de lijn GZ, als basis van den laatsten gelijkbeenigen driehoek het verlengde van CD ergens in Z doorsnijdt, zoo zal ook noodzakelijk de lijn AB de lijn CD in een punt, dat nog digter bij H gelegen is, moeten snijden; en bijgevolg, tegen de onderstelling, niet evenwijdig aan CD loopen.

Men kan dus den hoek HGB niet zoo onbegrijpelijk weinig minder dan één regten hoek nemen, of AB zou CD ergens ontmoeten; *de hoek* HGB *kan derhalve niet scherp zijn.*

Stelt men den hoek HGB stomp; dan zal zijn supplement AGH scherp

zijn;

zijn; maar dan zal, volgens het bewezene, de lijn *AB* de lijn *CD*, aan den anderent kant ontmoeten. *De hoek HGB kan dan ook niet flomp zijn.*

Indien dan de hoek *HGB* niet fcherp noch ftomp zijn kan, (omdat, in één van beide gevallen, de lijnen *AB* en *CD* elkander, aan den éénen of aan den anderen kant, zouden moeten fnijden,) moet hij regt zijn: *evenwijdige lijnen moeten, derhalve door eenige derde lijn, onder regte hoeken, worden doorgefneden.*

§. 112. Gevolg. *Door hetzelfde punt kan niet meer dan ééne lijn, evenwijdig aan eene andere lijn, getrokken worden.*

Want, indien *fig.* 43, *GZ* evenwijdig aan *AB* loopt, en de lijnen *CD* en *GZ* gevolgelijk met de derde lijn *GH* regte hoeken maken, zal eene andere lijn, welke door *G* getrokken wordt, met *GH* eenen fcherpen hoek maken, en *CD*, volgens het betoog der voorgaande ftelling, ergens ontmoeten, en gevolgelijk aan *CD* niet evenwijdig kunnen loopen.

XXIV. Stelling. *Fig.* 44.

§. 113. *Twee evenwijdige lijnen (AB en CD) worden door ééne derde lijn (EF), onder gelijke hoeken (EGB) en (EHD), doorgefneden.*

Betoog. Laat, uit eenig punt *E* der fnijdende lijn *EF*, de lijn *EI* loodregt op ééne der evenwijdige lijnen, op *AB*, vallen; dan ftaat derzelver verlengde (*XXIII. Stelling*) ook loodregt op de andere lijn *CD*: de regthoekige driehoeken *EGI* en *EHK*, hebben nu, uit zich zelven, de gelijke fcherpe hoeken, *GEI* en *HEK*; de hoeken *IGE* en *EHK* zijn (*IX. Gev. XVIII. Stell.*) bijgevolg gelijk.

XXV. Stelling. (*Het omgek. der voorg. Stell.*) *Fig.* 44.

§. 114. *Indien twee lijnen (AB en CD), door ééne derde lijn (EF), onder gelijke hoeken (EGB en EHD), worden doorgefneden; dan zijn deze lijnen evenwijdig.*

Betoog. Laat, uit eenig punt *E*, de loodlijn *EK* op *CD* vallen; dan fnijdt deze de lijn *AB* in *I*; de driehoeken *EGI* en *EHK* hebben dan de gelijke hoeken *EGI* en *EHK*, (*onderft.*) en de gelijke hoeken *GEI* en *HEK*, (door de figuur.) de de hoek *GIE* zal dan (*IX. Gev. XVIII. Stell.*) gelijk zijn aan den hoek *HKE*; maar, vermits de hoek *HKE* een regte hoek is, is de hoek *GIE* ook regt; de lijnen *AB* en *CD* ftaan dan regthoekig op dezelfde lijn *EK*, en zijn (*XXII. Stelling*) onderling evenwijdig.

§. 115. XXXVIII. Bepaling. *Fig.* 45. De lijn *EF*, welke twee even-

evenwijdige of niet evenwijdige lijnen, *AB* en *CD*, doorsnijdt, wordt eene *snijlijn* genoemd.

Deze snijlijn maakt, door hare doorsnijding, met de evenwijdige lijnen, acht onderscheidene hoeken; waarvan er *vier naar buiten*, en *vier naar binnen* staan.

De naar buiten staande hoeken, *AGE*, *BGE*, *CHF* en *DHF*, noemt men *uitwendige hoeken*.

Tot de uitwendige hoeken, *AGE*, *BGE*, *CHF* en *DHF*, behooren de inwendige hoeken, *CHG*, *DHG*, *AGH* en *BGH*, welke, ten opzigte van de eerste, *tegenoverstaande inwendige hoeken* genoemd worden.

Twee inwendige hoeken, *AGH* en *DHG*, of *BGH* en *CHG*, aan onderscheidene lijnen en aan tegenovergestelde zijden van de snijlijn gelegen zijnde, noemt men *inwendig verwisselende hoeken*.

Twee inwendige hoeken, *AGH* en *CHG*, of *BGH* en *DHG*, die wel aan onderscheidene lijnen, maar, aan dezelfde zijde van de snijlijn, liggen, noemt men *inwendige hoeken, aan dezelfde zijde van de snijlijn*.

Twee uitwendige hoeken, *AGE* en *DHF*, of *BGE* en *CHF*, aan onderscheidene lijnen en aan tegenovergestelde zijden van de snijlijn liggende, noemt men *uitwendig verwisselende hoeken*.

Twee uitwendige hoeken, *AGE* en *CHF*, of *BGE* en *DHF*, wel aan twee verschillende lijnen, maar, aan dezelfde zijde van de snijlijn, gelegen zijnde, noemt men *uitwendige hoeken, aan denzelfden kant van de snijlijn*.

XXVI. Stelling. *Fig.* 45.

§. 116. *Indien twee evenwijdige lijnen* (*AB en CD*) *door eene derde lijn* (*EF*) *gesneden worden; dan is:*

1°. *Elke uitwendige hoek* (*BGE*, *AGE*, *CHF en DHF*) *gelijk aan zijnen tegenoverstaanden inwendigen hoek* (*DHG*, *CHG*, *AGH en BGH*.)

2°. *De inwendig verwisselende hoeken* (*AGH en DHG gelijk ook BGH en CHG*) *zijn gelijk.*

3°. *De som van twee inwendige hoeken* (*AGH en CHG, of BGH en DHG*), *aan denzelfden kant der snijlijn liggende, is gelijk aan twee regte hoeken, en één dezer hoeken is alzoo gelijk aan het supplement van den anderen.*

4°. *De uitwendig verwisselende hoeken (AGE en DHF, benevens BGE en CHF) zijn gelijk.*

5°. *De som van twee uitwendige hoeken (AGE en CHF, of BGE en DHF), aan dezelfde zijde van de snijlijn liggende, is gelijk aan twee regte hoeken, en de één is alzoo gelijk aan des anderen supplement.*

Betoog *van het eerste.* De lijnen *AB* en *CD*, door de onderstelling, evenwijdig zijnde, is (*XXIV. Stell.*) *hoek BGE* = *hoek DHG*; maar (*III. Stell.*) gelijke hoeken hebben gelijke supplementen; derhalve is, 1°. *hoek AGE* = *hoek CHG*, 2°. *hoek CHF* = *hoek AGH*, en 3°., *hoek FHD* = *hoek BGH*.

Betoog *van het tweede. Hoek AGH* is (*IV. Stell.*) = *hoek BGE*, en *hoek BGE* = *hoek DHG* (*bewezen*); derhalve is *hoek AGH* = *hoek DHG* (*V. Ax.*); en, deze hoeken gelijk zijnde, zoo zijn ook hunne supplementen (*III. Stell.*) gelijk; dat is: *hoek BGH* = *hoek CHG*.

Betoog *van het derde.* De *hoek BGE* is = *hoek DHG*, (*bewezen*); tel, bij elken dezer gelijke hoeken, denzelfden *hoek BGH*; dan is de som der hoeken *BGH* en *DHG* (*VIII. Ax.*) gelijk aan de som der hoeken *BGH* en *BGE*; maar de som dezer laatsten is (*V. Stell.*) gelijk aan twee regte hoeken; derhalve is de som der hoeken *BGH* en *DHG* gelijk aan twee regte hoeken (V. *Ax.*) Op dezelfde wijze betoogt men: dat de som der hoeken *AGH* en *CHG* gelijk aan twee regte hoeken is.

Betoog *van het vierde.* Volgens het betoogde, is *hoek BGE* = *hoek DHG*; maar (*IV. Stell.*) *hoek DHG* is = *hoek CHF*; derhalve (*V. Ax.*) is *hoek BGE* = *hoek CHF*. Derzelver supplementen, namelijk de hoeken *AGE* en *DHF*, zijn dan (*III. Stell.*) ook gelijk.

Betoog *van het laatste.* Tel bij elk der hoeken *BGE* en *DHG*, die (*bewezen*) gelijk zijn, denzelfden hoek *DHF*; dan is de som der hoeken *BGE* en *DHF* gelijk aan de som der hoeken *DHG* en *DHF* (*VIII. Ax.*); gelijk (*V. Stell.*) aan twee regte hoeken. Om dezelfde reden, zal ook de som der hoeken *AGE* en *CHF* insgelijks gelijk aan twee regte hoeken zijn.

XXVII. Stelling. (*Het omgek. der XXVI. Stell.*) *Fig.* 45.

§. 117. *Wanneer eenige lijn (EF) twee andere lijnen (AB en CD) zoodanig snijdt: dat, of de inwendige verwisselende hoeken, gelijk zijn; of, dat de som der inwendige hoeken, aan denzelfden kant van de snijlijn liggende, gelijk is aan twee regte hoeken; of, dat de uitwendige verwisselende hoeken gelijk zijn; of, dat, eindelijk, de som van twee uitwendige hoeken, welke aan denzelfden kant van de snijlijn liggen, gelijk is aan twee regte hoeken; dan zal men, onder elk ééne dezer afzonderlijke omstandigheden, tot de even-*

wij-

wijdigheid der alzoo gesnedene lijnen (*AB*, *en* *CD*) *mogen besluiten.*

BETOOG. 1°. Indien de inwendig verwisselende hoeken *AGH* en *GHD* gelijk zijn; dan zijn ook (*III. Stell.*), de andere inwendige verwisselende hoeken *BGH* en *GHC*, die de supplementen der eerste zijn, gelijk: nu is *hoek AGH* (*IV. Stell.*) = *hoek BGE*; derhalve is (*V. Ax.*) *hoek BGE* = *hoek DGH*.

2°. Indien *hoek BGH* + *hoek DHG* = 2 *R* is; dan zal, omdat (*V. Stell.*) *hoek BGE* + *hoek BGH* = 2 *R* is, (volg. *V. Ax.*) *hoek BGH* + *hoek DHG* = *hoek BGE* + *hoek BGH* zijn; trekt men van deze gelijkheid denzelfden *hoek BGH* af; dan houdt men (*IX. Ax.*) over: *hoek BGE* = *hoek DHG*.

3°. Is *hoek BGE* = *hoek CHF*; dan zal, omdat (*IV. Stell.*) *hoek CHF* = *hoek DHG* is, ook (*V. Ax.*) *hoek BGE* = *hoek DHG* zijn.

4°. Is eindelijk *hoek BGE* + *hoek DHF* = 2 *R*; dan zal, aangezien (*V. Stell.*) *hoek DHF* + *hoek DHG* = 2 *R* is, (volg. *V. Ax.*) ook *hoek BGE* + *hoek DHF* = *hoek DHF* + *hoek DHG* zijn; van deze gelijkheid denzelfden *hoek DHF* afnemende, zoo zal (*IX. Ax.*) *hoek BGE* = *hoek DHG* zijn.

Welke der ondersteelde omstandigheden, bij de doorsnijding van twee lijnen, *AB* en *CD*, door eene derde lijn *EF*, dan plaats hebbe, zal deze derde lijn *EF* dezelve lijnen *AB* en *CD*, onder gelijke hoeken, doorsnijden, en zij zullen (*XXV Stell.*) derhalve evenwijdig zijn.

II. HULPSTELLING. *Fig.* 46.

§. 118. *Twee regthoekige driehoeken* (*ABC en DEF*,) *zijn gelijk- en gelijkvormig, wanneer zij twee gelijke regthoekszijden* (*BC en EF*) *en twee gelijke hypothenusen* (*AC en DF*) *hebben.*

BETOOG. Laat de driehoek *DEF*, na denzelven te hebben omgekeerd, naast den driehoek *ABC* worden gelegd; het punt *E* in *B* en *EF* langs *BC*; dan zal, omdat *EF* = *BC* is (*onderst.*), het punt *F* in *C* vallen; en, omdat *hoek ABC* = *hoek DEF* = *R* is, zoo zal (*VI. Stell.*) *ED* het verlengde van *AB* zijn; de twee nevens elkander geplaatste driehoeken *ABC* en *DEF* zullen dan, te zamen, den geheelen driehoek *ADC* uitmaken. Die driehoek is dan, omdat *AC* = *DF* ondersteld is, gelijkbeenig; derhalve is (*XIV. Stell.*) *hoek A* = *hoek D*, en *IX. Gev. XVIII. Stell.*) *hoek ACB* = *hoek DFE*; en derhalve zijn (*IX. of X. Stell.*) de driehoeken *ABC* en *DEF* gelijk- en gelijkvormig.

XXVIII. STELLING. *Fig.* 47 *en* 48.

§. 119. *Twee punten* (*E en G*) *van ééne* (*AB*) *van twee evenwijdige lijnen* (*AB en CD*) *staan op een gelijken afstand van*

 de

de tweede (CD); en eenig punt (E) van ééne dezer evenwijdige lijnen (AB) heeft tot de tweede (CD) denzelfden afstand, als eenig punt (H) van de tweede (CD) tot de eerste (AB). — En, omgekeerd. — *Wanneer twee punten (E en G) van eenige lijn (AB) tot eene andere lijn (CD) denzelfden afstand hebben; of wel, wanneer eenig punt (E) in eene lijn (AB) van eene andere lijn (CD) zoo ver afstaat, als eenig punt (H) in de laatste (CD) van de eerste (AB); dan zijn deze lijnen (AB en CD) evenwijdig.*

Betoog *van het eerste.* Het eerste gedeelte dezer stelling bestaat uit twee deelen. 1°. Indien de lijnen *AB* en *CD* evenwijdig zijn, en uit *E* en *G* de loodlijnen *EF* en *GH* op *CD* vallen; dan moet men bewijzen: dat deze loodlijnen, welke de afstanden (XXXVI. *Bep.*) der punten *E* en *G* tot *CD* zijn, gelijke lengte hebben. Trek de lijn *FG*; dan zal, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen *AB* en *CD*, (XXIII. en II. *Stell.*) *hoek FEG* = *hoek GHF* = *R* zijn, en (XXVI. *Stell.*) *hoek EGF* = *hoek GFH*; en dan zal ook (IX. *Gev.* XVIII. *Stell.*) *hoek EFG* = *hoek FGH* zijn; de driehoeken, die de gemeene zijde *FG* hebben, zijn dan (IX. *Stell.*) gelijk- en gelijkvormig, en *EF* is derhalve gelijk aan *GH*.

2°. Indien, uit *E*, de lijn *EF* loodregt op *CD*, en, uit *H*, de lijn *GH* loodregt op *AB* valt; dan moet bewezen worden: dat ook, in dit geval, *EF* = *GH* zal zijn. Wederom zal, wegens de onderstelde evenwijdigheid, de driehoek *EFG* gelijk- en gelijkvormig zijn aan den driehoek *FGH*, en gevolgelijk *EF* = *GH*.

Betoog *van het omgekeerde.* 1°. Wanneer de loodlijnen *EF* en *GH*, welke uit de punten *E* en *G* op *CD* vallen, gelijk zijn; dan moet men bewijzen: dat *AB* evenwijdig aan *CD* is. Men trekke de lijn *FG*. Omdat de *hoek GHF* = *hoek HFE* = *R* (XXI. *Bep.*) is, en (III. *Gev.* XVIII. *Stell.*) de som der hoeken *HFG* en *FGH* gelijk aan éénen regten hoek, gelijk aan de som der hoeken *HFG* en *EFG* is, zal, indien men van deze gelijkheid denzelfden *hoek HFG* aftrekt, (IX. *Ax.*) *hoek FGH* = *hoek EFG* overblijven: nu is *EF* = *GH* (*onderst.*) en *FG* = *FG*: de driehoeken *FGH* en *EFG* zijn dan (X *Stell.*) gelijk- en gelijkvorvormig; derhalve *hoek FEG* = *hoek FHG* = *R*: de lijnen *AB* en *CD* worden dan door eene lijn *EF* onder regte hoeken doorgesneden, en zijn (XXIII. *Stell.*) evenwijdig.

2°. Indien, *Fig.* 48, uit *E*, de lijn *EF* loodregt op *CD*, en, uit *H*, de loodlijn *HG* op *AB* valt, en *EF* = *GH* is, zullen (*EH* trekkende,) de twee regthoekige driehoeken *EFH* en *EGH* eene gemeene hypothenuse *EH*, en twee gelijke regtshoekzijden *EF* en *GH* hebben; zij zullen derhalve (II. *Hulpst.*) gelijk- en gelijkvormig zijn; de *hoek FHE* is dan gelijk aan den *hoek HEG*, en de lijnen *AB* en *CD* zijn (XXVII. *Stell.*) evenwijdig.

§. 120. XXXIX. Bepaling. *Fig.* 47. De *afstand* van twee even-

wij-

wijdige lijnen (*AB* en *CD*) is de loodlijn (*EF*), welke, uit eenig punt (*E*) van ééne dezer twee lijnen (*AB*), op de andere (*CD*) valt. *Die loodlijn* (*CD*) *heeft dus* (zie *XXVIII. Stell.*) *overal dezelfde lengte.*

§. 121. Gevolg. Uit het betoogde volgt: *dat evenwijdige lijnen overal even ver van elkander afstaan;* en dat, omgekeerd, *lijnen, die overal even ver van elkander afstaan, evenwijdig zijn.* De Hollandsche benaming van *evenwijdige* (even ver van elkander afstaande,) *lijnen* drukt deze eigenschap zeer eigenaardig uit.

§. 122. Aanmerking. Uit alles, wat, in dit Boek, tot hiertoe is voorgedragen, blijkt nu: dat, wanneer twee regte lijnen in een vlak liggen, dezelve ten opzigte van elkander driederlei stand kunnen hebben; 1°. *den scheven*, 2°. *den regten*, 3°. *den evenwijdigen stand.*

Opheldering. Fig. 49. Men beschouwe de onbepaalde lijnen *XY* en *PBQ*, die elkander, onder den scherpen hoek *YBP*, doorsnijden; dan hebben deze lijnen, ten opzigte van elkander, eenen scheven stand. Laat nu de lijn *PBQ*, om het punt *P*, omdraaijen, naar den kant *Y*; dan zal de hoek *YBP* langzamerhand grooter worden; en, wanneer de bewegende lijn, in den stand *PCQ*, loodregt op *XY*, gekomen is; dan zal zij den loodregten stand hebben verkregen. In den stand *PEQ* zal de hoek *YBP* van scherp stomp zijn geworden, en eindelijk zal zij, in den stand *RPQ*, den evenwijdigen stand hebben verkregen.

§. 123. Gevolg. En hieruit blijkt dan: *dat eigenlijk evenwijdige lijnen geene hoeken met elkander maken;* want, op den oogenblik, dat de lijn *PEQ* in den evenwijdigen stand *RPQ* is gekomen, zal de hoek *XEP* nul geworden of verdwenen zijn. *De ruimte tusschen twee evenwijdige lijnen, RQ en XY, is onbepaald groot; doch een onbepaald oneindig groot van eene andere orde dan de onbegrensde vlakte ruimte, tusschen de beenen van den kleinsten hoek.* Men kan inderdaad gemakkelijk betoogen: *dat de onbepaalde ruimte tusschen twee evenwijdige lijnen, die op een grooten afstand* (*van één millioen meters, bij voorbeeld,*) *van elkander afstaan, geen gedeelte kan zijn van de ruimte, tusschen de beenen van eenen hoek, die een millioenste gedeelte van ééne secunde groot is.* Wij laten het betoog van die schijnbaar tegenstrijdige stelling aan den Leerling over.

XXIX. Stelling. *Fig.* 50.

§. 124. *De lijnen* (*AB en CD*), *welke, elk in het bijzonder, aan eene derde lijn* (*LM*) *evenwijdig zijn, zijn onderling evenwijdig.*

Betoog. Men trekke, door een punt *S* van de lijn *L M*, eene onbepaalde loodlijn *S P*; omdat dan *A B* en *C D*, elk in het bijzonder, evenwijdig aan *L M* loopen, zijn de hoeken, om de punten *Q* en *R*, regte hoeken (zie XXIII. *Stell.*): de lijnen *A B* en *C D* staan, bijgevolg loodregt op dezelfde lijn *P S*, en zijn (zie XXII. *Stell.*) derhalve evenwijdig.

XXX. Stelling. *Fig.* 51 *en* 52.

§. 125. *De hoeken* (*A B C en Q P R*), *welker beenen, beide in dezelfde rigting, evenwijdig aan elkander loopen,* (*A B aan P Q, en B C aan P R,*) *zijn gelijk.*

Betoog. De hoeken liggen in elkander, als in *fig.* 51, of buiten elkander, als in *fig.* 52: in het eerste geval, verlenge men ééne der zijden *P Q* van den binnensten *hoek Q P R* tot in *D*; dan is, in beide figuren, wegens de ondersteelde evenwijdigheid der lijnen, (XXIV. *Stell.*) *hoek A B C* = *hoek Q D C*; en *hoek Q D C* = *hoek Q P R*; derhalve is (V. *Ax.*) *hoek A B C* = *hoek Q P R*.

XXXI. Stelling. *Fig.* 53.

§. 126. *De regte lijnen* (*A D en B C*), *welke de uiteinden van twee gelijke en evenwijdige lijnen* (*A B en C D*) *vereenigen, zijn zelve gelijk en evenwijdig.*

Betoog. Trek de lijn *B D*; dan zijn de driehoeken *A B D* en *B D C* gelijk- en gelijkvormig; want, omdat *A B* evenwijdig aan *D C* is, zijn de verwisselende hoeken *A B D* en *B D C* (XXVI. *Stell.*) gelijk; en voorts zijn de zijden, om deze gelijke hoeken staande, even groot; namelijk *B D* = *B D* en *A B* = *C D*; derhalve is (X. *Stell.*) *A D* = *B C*; *hoek A D B* = *hoek C B D*, en (XXVII. *Stell.*) *A D* evenwijdig aan *B C*.

XXXII. Stelling. *Fig.* 54.

§. 127. *Indien men, uit al de punten* (*A, B, C,* enz.) *van den omtrek eener regte of kromlijnige figuur, gelijke en evenwijdige lijnen* (*A D, B E, C F,* enz.) *trekt* (*namelijk alle naar denzelfden kant*); *dan zijn de uiteinden dezer lijnen gelegen in eene regte of kromlijnige figuur, welke aan de eerste gelijk- en gelijkvormig is.*

Betoog. Vereenig de punten *A*, *B* en *C* door de lijnen *A B*, *B C* en *A C*, en de punten *D*, *E* en *F* door de lijnen *D E*, *E F* en *D F*. Omdat nu, (*onderst.*) *A D* = *B E* = *C F* is, en deze lijnen onderling evenwijdig zijn, zoo is (XXXI. *Stell.*) *A B* = *D E*, *B C* = *E F* en *A C* = *D F*. Indien men nu het punt *A* in *D*, de lijn *A C* langs *D F* past; dan zal,

om-

omdat de driehoeken *ABC* en *DEF* (XIII *Stell.*) gelijk- en gelijkvormig zijn, het punt *C* in *F*, en *B* in *E* vallen. Wanneer dan de punten *A* en *C* van den omtrek der gegevene figuur in den omtrek der voortgebragte figuur *DEF* gebragt worden, zal een derde punt *B* van den omtrek der gegevene figuur in den omtrek der voortgebragte, in *E*, vallen; daar nu hetzelfde, voor alle andere punten *G*, *H*, *enz.* gelden zal, zoo zullen al de punten der gegevene figuur in die der voortgebragte vallen, en de figuren zullen (II *Ax.*) gelijk- en gelijkvormig zijn. — Voor regtlijnige figuren zal men de waarheid dezer stelling, met minder omslag, kunnen betoogen.

XXXIII. STELLING. *Fig.* 55.

§. 128. *Indien men, uit al de punten* (*A*, *B*, *C*, *D*, enz.) *van den omtrek eener regte of kromlijnige figuur* (*ABCDE*), *loodlijnen* (*AF*, *BG*, *CH*, *DI*, *EK*,) *op eene onbepaalde lijn* (*XY*) *laat vallen, en men, deze loodlijnen verlengd hebbende, die verlengden* (*Fa*, *Gb*, *Hc*, *Id*. *Ke*,) *aan dezelve*, (*aan AF*, *BG*, *CH DI*, *EK*), *gelijk maakt; dan zullen de uiteinden* (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*,) *dezer alzoo verlengde loodlijnen, in den omtrek eener figuur* (*abcde*) *liggen, die aan de eerst gestelde figuur* (*ABCDE*) *gelijk- en gelijkvormig zal zijn.*

* BETOOG. Laat de bovenste helft der figuur, om de lijn *XY*, omdraaijen, en op de onderste helft vallen; dan zullen de lijnen *FA*, *GB*, *HC*, *ID*, *KE* langs de lijnen *Fa*, *Gb*, *Hc*, *Id* en *Ke* vallen; omdat, volgens de onderstelling, de hoeken aan de punten *F*, *G*, *H*, *I*, *K* alle regt zijn; daar nu uit de onderstelling $aF = AF$, $bG = BG$, $cH = CH$, $dI = DI$ en $ek = EK$, is, zoo zullen al de punten van de figuur *ABCDE*, in den omtrek van de figuur *abcde* moeten vallen, en dus zullen (II. *Ax.*) deze figuren gelijk- en gelijkvormig zijn.

§ 129. AANMERKING. Figuren, die men door zulk eene constructie verkrijgt, noemt men *symetrieke figuren*; men bedient zich in de nuttigste kunsten onophoudelijk van dezelve.

Betoog. Zij, *fig.* 41, AB eene regte lijn. Laat dezelve, in C, in twee gelijke deelen, $AC = BC$, gedeeld worden; dan is $AC = BC = \frac{1}{2}AB$. Men deele de helft BC, in D, in twee gelijke deelen, $CD = BD$; dan is $CD = BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{4}AB$. Men ga op deze wijze voort, met BD in E, BE in F, BF in G, *enz.* in twee gelijke deelen te verdeelen; dan zal $DE = BE = \frac{1}{8}AB$, $EF = BF = \frac{1}{16}AB$, $FG = BG = \frac{1}{32}AB$, $GH = BH = \frac{1}{64}AB$, $HI = BH = \frac{1}{128}AB$ worden: en men zal, omdat alle uitgebreidheid tot in het oneindige deelbaar is, hier mede, zonder ophouden, kunnen voortgaan. Nu is klaarblijkelijk

$$AC + CD + DE + EF + FG + GH + HI + IK + KL + \textit{enz.}$$

of dat, (zie boven,) hetzelfde is,

$$\tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{4}AB + \tfrac{1}{8}AB + \tfrac{1}{16}AB + \tfrac{1}{32}AB + \tfrac{1}{64}AB + \tfrac{1}{128}AB + \textit{enz.}$$

op het laatste deeltje BL (bij voorbeeld,) na, gelijk aan de geheele lijn AB; maar, daar men, met het halveren van het laatste deel BL, tot in het oneindige kan voortgaan, zoo zal men eindelijk tot zulk een deeltje komen, dat kleiner zal zijn, dan het kleinste lijntje, dat men zich zal kunnen voorstellen; en de som van $\frac{1}{2}AB + \frac{1}{4}AB +$ *enz.* zal dan van de lijn AB minder, dan dat kleinste lijntje verschillen.

Laat, in *fig.* 42, ABC een regte hoek zijn. Indien dan de lijnen BD, BE, BF, BG, BH, BI, *enz.* de hoeken ABC, DBC, EBC, FBC, GBC, HBC, *enz.* midden door deelen; dan zal *hoek* $ABD = \frac{1}{2}R$, *hoek* $BDE = \frac{1}{4}R$, *hoek* $EDF = \frac{1}{8}R$, *hoek* $FBG = \frac{1}{16}R$, *hoek* $GBH = \frac{1}{32}R$, *hoek* $HBI = \frac{1}{64}R$, *enz.* zijn; en, om dezelfde reden, als in het voorbeeld van de regte lijn, is bijgebragt, zal, indien men met halveren onophoudelijk voortgaat, de som

$$\tfrac{1}{2}R + \tfrac{1}{4}R + \tfrac{1}{8}R + \tfrac{1}{16}R + \tfrac{1}{32}R + \tfrac{1}{64}R + \tfrac{1}{128}R + \tfrac{1}{256}R + \textit{enz.}$$

op het laatst, minder van eenen regten hoek verschillen, dan het kleinste hoekje (bij voorbeeld, van *één-millioenste gedeelte van ééne secunde*.) dat men zich kan voorstellen; zoodat, wanneer men die verdeeling, tot in het oneindige, konde voortzetten, de som van al die deelen eindelijk aan den regten hoek ABC volkomen gelijk zou worden.

XXIII. Stelling. (*Het omgek. der XXII. Stell*) *Fig.* 43.

§. 111. *De lijn* (GH), *welke loodregt op ééne* (CD) *van twee evenwijdige lijnen* (AB *en* CD) *staat, staat ook loodregt op de andere* (AB) *dezer evenwijdige lijnen.*

Betoog. Indien de lijnen AB en CD elkander niet ontmoeten en GH loodregt op CD staat; dan moet hoek HGB regt zijn; en zulks zal bewezen zijn, wanneer men bewijzen kan: *dat, wanneer de hoek* HGB *scherp of stomp is, de lijnen* AB *en* CD *elkander noodzakelijk, het zij aan den éénen, het zij aan den anderen kant, moeten snijden.*

Men make $HI = HG$ en trekke de lijn GI, dan is GHI een gelijkbeenige regthoekige driehoek, en, volgens *IV. Cor. XVIII. Stelling*, zal

hoek

hoek HIC = *hoek* HCI = aan den halven supplementshoek CHG = éénen halven regten hoek = $\frac{1}{2} R$ zijn.

Men neme wederom $IK = IG$ en trekke GK; dan zal, in den gelijkbeenigen driehoek IKG, om dezelfde reden, *hoek* IKG = *hoek* IGK = *halven hoek* HIG = $\frac{1}{4} R$ zijn.

Nemende verder $KL = GK$ en trekkende GL; wederom $LM = GL$ en trekkende GM; dan zal, om dezelfde reden, in de gelijkbeenige driehoeken, GKL en GLM, de *hoek* $KGL = \frac{1}{8} R$ en de *hoek* $LGM = \frac{1}{16} R$ zijn.

Men zal, op dezelfde wijze, met de zamenstelling van volgende gelijkbeenige driekoeken kunnen voortgaan; want men zal, op het verlengde van CD, altijd eene lijn gelijk aan de basis van den laatsten gelijkbeenigen driehoek kunnen uitzetten; en, in de volgorde dezer driehoeken, zullen even, als in het begin, de hoeken aan de basis van elken volgenden gelijkbeenigen driehoek gelijk zijn aan de helft van de hoeken aan de basis van elken voorgaanden.

Men verkrijgt alzoo, op die regelmatige wijze voortgaande, met de volgende gelijkbeenige driehoeken GMN, GNO, GOP, *enz.* te construeren. (welke op de plaat niet kunnen voorgesteld worden,) in de figuur, aan het hoekpunt G, de *hoeken* HGI, IGK, KGL. LGM, MGN, NGO, OGP, *enz.*, die (R altijd een regten hoek beteekenende,) gelijk aan $\frac{1}{2} R$, $\frac{1}{4} R$, $\frac{1}{8} R$, $\frac{1}{16} R$, $\frac{1}{32} R$, $\frac{1}{64} R$, $\frac{1}{128} R$, *enz.* zullen zijn; en, daar de lijn CD, tot in het oneindige, voortloopt, zal het aantal der gelijkbeenige driehoeken, welke men op die wijze verkrijgen kan, oneindig groot zijn; terwijl al hadde men reeds eenige duizenden zulke gelijkbeenige driehoeken geconstrueerd, de basis van den laatsten nog eene lijn zoude zijn, die van G tot eenig ver afgelegen punt van de lijn CD getrokken is.

Onderstellen wij nu: dat de hoek HGB een scherpen hoek zij; doch een scherpe hoek, die, bij voorbeeld, slechts *één-millioenste gedeelte van ééne secunde* van éénen regten hoek verschilt: indien wij dit dan aannemen; dan zal men, met het construeren der gelijkbeenige driehoeken, zoo ver kunnen voortgaan, dat de som der hoeken HGI, IGK, *enz.* of $\frac{1}{2} R + \frac{1}{4} R +$ *enz.* nog minder dan één-millioenste gedeelte van ééne secunde van éénen regten hoek verschilt. Laat GZ de basis van den laatsten gelijkbeenigen driehoek zijn, dien men verkregen heeft; dan zal de lijn GB binnen den *hoek* HGZ moeten vallen; daar nu de lijn GZ, als basis van den laatsten gelijkbeenigen driehoek het verlengde van CD ergens in Z doorsnijdt, zoo zal ook noodzakelijk de lijn AB de lijn CD in een punt, dat nog digter bij H gelegen is, moeten snijden; en bijgevolg, tegen de onderstelling, niet evenwijdig aan CD loopen.

Men kan dus den hoek HGB niet zoo onbegrijpelijk weinig minder dan één regten hoek nemen, of AB zou CD ergens ontmoeten; *de hoek* HGB *kan derhalve niet scherp zijn.*

Stelt men den hoek HGB stomp; dan zal zijn supplement AGH scherp

zijn;

zijn; maar dan zal, volgens het bewezene, de lijn *AB* de lijn *CD*, aan den anderen kant ontmoeten. *De hoek HGB kan dan ook niet stomp zijn.*

Indien dan de hoek *HGB* niet scherp noch stomp zijn kan, (omdat, in één van beide gevallen, de lijnen *AB* en *CD* elkander, aan den éénen of aan den anderen kant, zouden moeten snijden,) moet hij regt zijn: *evenwijdige lijnen moeten, derhalve door eenige derde lijn, onder regte hoeken, worden doorgesneden.*

§. 112. Gevolg. *Door hetzelfde punt kan niet meer dan ééne lijn, evenwijdig aan eene andere lijn, getrokken worden.*

Want, indien *fig.* 43, *GZ* evenwijdig aan *AB* loopt, en de lijnen *CD* en *GZ* gevolgelijk met de derde lijn *GH* regte hoeken maken, zal eene andere lijn, welke door *G* getrokken wordt, met *GH* eenen scherpen hoek maken, en *CD*, volgens het betoog der voorgaande stelling, ergens ontmoeten, en gevolgelijk aan *CD* niet evenwijdig kunnen loopen.

XXIV. Stelling. *Fig.* 44.

§. 113. *Twee evenwijdige lijnen (AB en CD) worden door ééne derde lijn (EF), onder gelijke hoeken (EGB) en (EHD), doorgesneden.*

Betoog. Laat, uit eenig punt *E* der snijdende lijn *EF*, de lijn *EI* loodregt op éénc der evenwijdige lijnen, op *AB*, vallen; dan staat derzelver verlengde (*XXIII. Stelling*) ook loodregt op de andere lijn *CD*: de regthoekige driehoeken *EGI* en *EHK*, hebben nu, uit zich zelven, de gelijke scherpe hoeken, *GEI* en *HEK*; de hoeken *IGE* en *EHK* zijn (*IX. Gev. XVIII. Stell.*) bijgevolg gelijk.

XXV. Stelling. (*Het omgek. der voorg. Stell.*) *Fig.* 44.

§. 114. *Indien twee lijnen (AB en CD), door eene derde lijn (EF), onder gelijke hoeken (EGB en EHD), worden doorgesneden; dan zijn deze lijnen evenwijdig.*

Betoog. Laat, uit eenig punt *E*, de loodlijn *EK* op *CD* vallen; dan snijdt deze de lijn *AB* in *I*; de driehoeken *EGI* en *EHK* hebben dan de gelijke hoeken *EGI* en *EHK*, (*onderst.*) en de gelijke hoeken *GEI* en *HEK*, (door de figuur,) de de hoek *GIE* zal dan (*IX. Gev. XVIII. Stell.*) gelijk zijn aan den hoek *HKE*; maar, vermits de hoek *HKE* een regte hoek is, is de hoek *GIE* ook regt; de lijnen *AB* en *CD* staan dan regthoekig op dezelfde lijn *EK*, en zijn (*XXII. Stelling*) onderling evenwijdig.

§. 115. XXXVIII. Bepaling. *Fig.* 45. De lijn *EF*, welke twee even-

evenwijdige of niet evenwijdige lijnen, *AB* en *CD*, doorsnijdt, wordt eene *snijlijn* genoemd.

Deze snijlijn maakt, door hare doorsnijding, met de evenwijdige lijnen, acht onderscheidene hoeken; waarvan er *vier naar buiten*, en *vier naar binnen* staan.

De naar buiten staande hoeken, *AGE*, *BGE*, *CHF* en *DHF*, noemt men *uitwendige hoeken*.

Tot de uitwendige hoeken, *AGE*, *BGE*, *CHF* en *DHF*, behooren de inwendige hoeken, *CHG*, *DHG*, *AGH* en *BGH*, welke, ten opzigte van de eerste, *tegenoverstaande inwendige hoeken* genoemd worden.

Twee inwendige hoeken, *AGH* en *DHG*, of *BGH* en *CHG*, aan onderscheidene lijnen en aan tegenovergestelde zijden van de snijlijn gelegen zijnde, noemt men *inwendig verwisselende hoeken.*

Twee inwendige hoeken, *AGH* en *CHG*, of *BGH* en *DHG*, die wel aan onderscheidene lijnen, maar, aan dezelfde zijde van de snijlijn, liggen, noemt men *inwendige hoeken*, *aan dezelfde zijde van de snijlijn.*

Twee uitwendige hoeken, *AGE* en *DHF*, of *BGE* en *CHF*, aan onderscheidene lijnen en aan tegenovergestelde zijden van de snijlijn liggende, noemt men *uitwendig verwisselende hoeken.*

Twee uitwendige hoeken, *AGE* en *CHF*, of *BGE* en *DHF*, wel aan twee verschillende lijnen, maar, aan dezelfde zijde van de snijlijn, gelegen zijnde, noemt men *uitwendige hoeken*, *aan denzelfden kant van de snijlijn.*

XXVI. Stelling. *Fig.* 45.

§. 116. *Indien twee evenwijdige lijnen* (*AB en CD*) *door eene derde lijn* (*EF*) *gesneden worden; dan is:*

1°. *Elke uitwendige hoek* (*BGE*, *AGE*, *CHF en DHF*) *gelijk aan zijnen tegenoverstaanden inwendigen hoek* (*DHG*, *CHG*, *AGH en BGH.*)

2°. *De inwendig verwisselende hoeken* (*AGH en DHG gelijk ook BGH en CHG*) *zijn gelijk.*

3°. *De som van twee inwendige hoeken* (*AGH en CHG*, *of BGH en DHG*), *aan denzelfden kant der snijlijn liggende, is gelijk aan twee regte hoeken, en één dezer hoeken is alzoo gelijk aan het supplement van den anderen.*

4°. *De uitwendig verwisselende hoeken (AGE en DHF, benevens BGE en CHF) zijn gelijk.*

5°. *De som van twee uitwendige hoeken (AGE en CHF, of BGE en DHF), aan dezelfde zijde van de snijlijn liggende, is gelijk aan twee regte hoeken, en de één is alzoo gelijk aan des anderen supplement.*

Betoog *van het eerste.* De lijnen *AB* en *CD*, door de onderstelling, evenwijdig zijnde, is (*XXIV. Stell'*) *hoek BGE = hoek DHG*; maar (*III. Stell.*) gelijke hoeken hebben gelijke supplementen; derhalve is, 1°. *hoek AGE = hoek CHG*, 2°. *hoek CHF = hoek AGH*, en 3°., *hoek FHD = hoek BGH.*

Betoog *van het tweede. Hoek AGH* is (*IV. Stell.*) *= hoek BGE*, en *hoek BGE = hoek DHG* (*bewezen*); derhalve is *hoek AGH = hoek DHG* (*V. Ax.*); en, deze hoeken gelijk zijnde, zoo zijn ook hunne supplementen (*III. Stell.*) gelijk; dat is: *hoek BGH = hoek CHG.*

Betoog *van het derde.* De *hoek BGE* is *= hoek DHG*, (*bewezen*); tel, bij elken dezer gelijke hoeken, denzelfden *hoek BGH*; dan is de som der hoeken *BGH* en *DHG* (*VIII Ax.*) gelijk aan de som der hoeken *BGH* en *BGE*; maar de som dezer laatsten is (*V. Stell.*) gelijk aan twee regte hoeken; derhalve is de som der hoeken *BGH* en *DHG* gelijk aan twee regte hoeken (V. *Ax.*) Op dezelfde wijze betoogt men: dat de som der hoeken *AGH* en *CHG* gelijk aan twee regte hoeken is.

Betoog *van het vierde.* Volgens het betoogde, is *hoek BGE = hoek DHG*; maar (*IV. Stell.*) *hoek DHG* is *= hoek CHF*; derhalve (*V Ax.*) is *hoek BGE = hoek CHF.* Derzelver supplementen, namelijk de hoeken *AGE* en *DHF*, zijn dan (*III Stell.*) ook gelijk.

Betoog *van het laatste.* Tel bij elk der hoeken *BGE* en *DHG*, die (*bewezen*) gelijk zijn, denzelfden hoek *DHF*; dan is de som der hoeken *BGE* en *DHF* gelijk aan de som der hoeken *DHG* en *DHF* (*VIII. Ax.*); gelijk (*V Stell.*) aan twee regte hoeken. Om dezelfde reden, zal ook de som der hoeken *AGE* en *CHF* insgelijks gelijk aan twee regte hoeken zijn.

XXVII. Stelling (*Het omgek. der XXVI. Stell.*) *Fig.* 45.

§. 117. *Wanneer eenige lijn (EF) twee andere lijnen (AB en CD) zoodanig snijdt: dat, of de inwendige verwisselende hoeken, gelijk zijn; of, dat de som der inwendige hoeken, aan denzelfden kant van de snijlijn liggende, gelijk is aan twee regte hoeken; of, dat de uitwendige verwisselende hoeken gelijk zijn; of, dat, eindelijk, de som van twee uitwendige hoeken, welke aan denzelfden kant van de snijlijn liggen, gelijk is aan twee regte hoeken; dan zal men, onder elk ééne dezer afzonderlijke omstandigheden, tot de evenwij-*

wijdigheid der alzoo gesnedene lijnen (AB en CD) mogen besluiten.

BETOOG. 1°. Indien de inwendig verwisselende hoeken *AGH* en *GHD* gelijk zijn; dan zijn ook (*III. Stell.*), de andere inwendige verwisselende hoeken *BGH* en *GHC*, die de supplementen der eerste zijn, gelijk: nu is *hoek AGH* (*IV. Stell.*) = *hoek BGE*; derhalve is (*V. Ax.*) *hoek BGE* = *hoek DGH*.

2°. Indien *hoek BGH* + *hoek DHG* = 2 *R* is; dan zal, omdat (*V. Stell.*) *hoek BGE* + *hoek BGH* = 2 *R* is, (volg. *V. Ax.*) *hoek BGH* + *hoek DHG* = *hoek BGE* + *hoek BGH* zijn; trekt men van deze gelijkheid denzelfden *hoek BGH* af; dan houdt men (*IX. Ax.*) over: *hoek BGE* = *hoek DHG*.

3°. Is *hoek BGE* = *hoek CHF*; dan zal, omdat (*IV. Stell.*) *hoek CHF* = *hoek DHG* is, ook (*V. Ax.*) *hoek BGE* = *hoek DHG* zijn.

4°. Is eindelijk *hoek BGE* + *hoek DHF* = 2 *R*; dan zal, aangezien (*V. Stell.*) *hoek DHF* + *hoek DHG* = 2 *R* is, (volg. *V. Ax*) ook *hoek BGE* + *hoek DHF* = *hoek DHF* + *hoek DHG* zijn; van deze gelijkheid denzelfden *hoek DHF* afnemende, zoo zal (*IX. Ax.*) *hoek BGE* = *hoek DHG* zijn.

Welke der ondersteide omstandigheden, bij de doorsnijding van twee lijnen, *AB* en *CD*, door eene derde lijn *EF*, dan plaats hebbe, zal deze derde lijn *EF* dezelve lijnen *AB* en *CD*, onder gelijke hoeken, doorsnijden, en zij zullen (*XXV Stell.*) derhalve evenwijdig zijn.

II. HULPSTELLING. *Fig.* 46.

§. 118. *Twee regthoekige driehoeken (ABC en DEF,) zijn gelijk- en gelijkvormig, wanneer zij twee gelijke regthoekszijden (BC en EF) en twee gelijke hypothenusen (AC en DF) hebben.*

BETOOG. Laat de driehoek *DEF*, na denzelven te hebben omgekeerd, naast den driehoek *ABC* worden gelegd; het punt *E* in *B* en *EF* langs *BC*; dan zal, omdat *EF* = *BC* is (*onderst.*), het punt *F* in *C* vallen; en, omdat *hoek ABC* = *hoek DEF* = *R* is, zoo zal (*VI. Stell.*) *ED* het verlengde van *AB* zijn; de twee nevens elkander geplaatste driehoeken *ABC* en *DEF* zullen dan, te zamen, den geheelen driehoek *ADC* uitmaken. Die driehoek is dan, omdat *AC* = *DF* ondersteld is, gelijkbeenig; derhalve is (*XIV. Stell.*) *hoek A* = *hoek D*, en *IX. Gev. XVIII. Stell*) *hoek ACB* = *hoek DFE*; en derhalve zijn (*IX.* of *X. Stell.*) de driehoeken *ABC* en *DEF* gelijk- en gelijkvormig.

XXVIII. STELLING. *Fig.* 47 *en* 48.

§. 119. *Twee punten (E en G) van ééne (AB) van twee evenwijdige lijnen (AB en CD) staan op een gelijken afstand van de*

de tweede (*CD*); *en eenig punt* (*E*) *van ééne dezer evenwijdige lijnen* (*AB*) *heeft tot de tweede* (*CD*) *denzelfden afstand, als eenig punt* (*H*) *van de tweede* (*CD*) *tot de eerste* (*AB*). — En, omgekeerd. — *Wanneer twee punten* (*E en G*) *van eenige lijn* (*AB*) *tot eene andere lijn* (*CD*) *denzelfden afstand hebben; of wel, wanneer eenig punt* (*E*) *in eene lijn* (*AB*) *van eene andere lijn* (*CD*) *zoo ver afstaat, als eenig punt* (*H*) *in de laatste* (*CD*) *van de eerste* (*AB*); *dan zijn deze lijnen* (*AB en CD*) *evenwijdig.*

Betoog *van het eerste.* Het eerste gedeelte dezer stelling bestaat uit twee deelen. 1°. Indien de lijnen *AB* en *CD* evenwijdig zijn, en uit *E* en *G* de loodlijnen *EF* en *GH* op *CD* vallen; dan moet men bewijzen: dat deze loodlijnen, welke de afstanden (XXXVI. *Bep.*) der punten *E* en *G* tot *CD* zijn, gelijke lengte hebben. Trek de lijn *FG*; dan zal, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen *AB* en *CD*, (XXIII. en II. *Stell.*) *hoek FEG* = *hoek GHF* = *R* zijn, en (XXVI. *Stell.*) *hoek EGF* = *hoek GFH*; en dan zal ook (IX. *Gev.* XVIII. *Stell.*) *hoek EFG* = *hoek FGH* zijn; de drieboeken, die de gemeene zijde *FG* hebben, zijn dan (IX. *Stell.*) gelijk- en gelijkvormig, en *EF* is derhalve gelijk aan *GH*.

2°. Indien, uit *E*, de lijn *EF* loodregt op *CD*, en, uit *H*, de lijn *GH* loodregt op *AB* valt; dan moet bewezen worden: dat ook, in dit geval, *EF* = *GH* zal zijn. Wederom zal, wegens de onderstelde evenwijdigheid, de driehoek *EFG* gelijk- en gelijkvormig zijn aan den driehoek *FGH*, en gevolgelijk *EF* = *GH*.

Betoog *van het omgekeerde.* 1°. Wanneer de loodlijnen *EF* en *GH*, welke uit de punten *E* en *G* op *CD* vallen, gelijk zijn; dan moet men bewijzen: dat *AB* evenwijdig aan *CD* is. Men trekke de lijn *FG*. Omdat de *hoek GHF* = *hoek HFE* = *R* (XXI. *Bep.*) is, en (III. *Gev.* XVIII. *Stell.*) de som der hoeken *HFG* en *FGH* gelijk aan éénen regten hoek, gelijk aan de som der hoeken *HFG* en *EFG* is, zal, indien men van deze gelijkheid denzelfden *hoek HFG* aftrekt, (IX. *Ax.*) *hoek FGH* = *hoek EFG* overblijven: nu is *EF* = *GH* (*onderst.*) en *FG* = *FG*: de driehoeken *FGH* en *EFG* zijn dan (X *Stell.*) gelijk- en gelijkvorvormig; derhalve *hoek FEG* = *hoek FHG* = *R*: de lijnen *AB* en *CD* worden dan door eene lijn *EF* onder regte hoeken doorgesneden, en zijn (XXIII. *Stell.*) evenwijdig.

2°. Indien, *Fig.* 48, uit *E*, de lijn *EF* loodregt op *CD*, en, uit *H*, de loodlijn *HG* op *AB* valt, en *EF* = *GH* is, zullen (*EH* trekkende,) de twee regthoekige driehoeken *EFH* en *EGH* eene gemeene hypothenuse *EH*, en twee gelijke regtshoekzijden *EF* en *GH* hebben; zij zullen derhalve (II. *Hulpst.*) gelijk- en gelijkvormig zijn; de *hoek FHE* is dan gelijk aan den *hoek HEG*, en de lijnen *AB* en *CD* zijn (XXVII. *Stell.*) evenwijdig.

§. 120. XXXIX. Bepaling. *Fig.* 47. De *afstand* van twee evenwij-

wijdige lijnen (*AB* en *CD*) is de loodlijn (*EF*), welke, uit eenig punt (*E*) van ééne dezer twee lijnen (*AB*), op de andere (*CD*) valt. *Die loodlijn* (*CD*) *heeft dus* (zie *XXVIII. Stell.*) *overal dezelfde lengte.*

§. 121. GEVOLG. Uit het betoogde volgt: *dat evenwijdige lijnen overal even ver van elkander afstaan*; en dat, omgekeerd, *lijnen, die overal even ver van elkander afstaan, evenwijdig zijn.* De Hollandsche benaming van *evenwijdige* (even ver van elkander afstaande,) *lijnen* drukt deze eigenschap zeer eigenaardig uit.

§. 122. AANMERKING. Uit alles, wat, in dit Boek, tot hiertoe is voorgedragen, blijkt nu: dat, wanneer twee regte lijnen in een vlak liggen, dezelve ten opzigte van elkander driederlei stand kunnen hebben; 1°. *den scheven*, 2°. *den regten*, 3°. *den evenwijdigen stand.*

Opheldering. Fig. 49. Men beschouwe de onbepaalde lijnen *XY* en *PBQ*, die elkander, onder den scherpen hoek *YBP*, doorsnijden; dan hebben deze lijnen, ten opzigte van elkander, eenen scheven stand. Laat nu de lijn *PBQ*, om het punt *P*, omdraaijen, naar den kant *Y*; dan zal de hoek *YBP* langzamerhand grooter worden; en, wanneer de bewegende lijn, in den stand *PCQ*, loodregt op *XY*, gekomen is; dan zal zij den loodregten stand hebben verkregen. In den stand *PEQ* zal de hoek *YBP* van scherp stomp zijn geworden, en eindelijk zal zij, in den stand *RPQ*, den evenwijdigen stand hebben verkregen.

§. 123. GEVOLG. En hieruit blijkt dan: *dat eigenlijk evenwijdige lijnen geene hoeken met elkander maken*; want, op den oogenblik, dat de lijn *PEQ* in den evenwijdigen stand *RPQ* is gekomen, zal de hoek *XEP* nul geworden of verdwenen zijn. *De ruimte tusschen twee evenwijdige lijnen, RQ en XY, is onbepaald groot; doch een onbepaald oneindig groot van eene andere orde dan de onbegrensde vlakte ruimte, tusschen de beenen van den kleinsten hoek.* Men kan inderdaad gemakkelijk betoogen: *dat de onbepaalde ruimte tusschen twee evenwijdige lijnen, die op een grooten afstand* (*van één millioen meters, bij voorbeeld,*) *van elkander afstaan, geen gedeelte kan zijn van de ruimte, tusschen de beenen van eenen hoek, die een millioenste gedeelte van ééne secunde groot is.* Wij laten het betoog van die schijnbaar tegenstrijdige stelling aan den Leerling over.

XXIX. STELLING. *Fig.* 50.

§. 124. *De lijnen* (*AB* en *CD*), *welke, elk in het bijzonder, aan eene derde lijn* (*LM*) *evenwijdig zijn, zijn onderling evenwijdig.*

Betoog. Men trekke, door een punt *S* van de lijn *L M*, eene onbepaalde loodlijn *S P*; omdat dan *A B* en *C D*, elk in het bijzonder, evenwijdig aan *L M* loopen, zijn de hoeken, om de punten *Q* en *R*, regte hoeken (zie XXIII. *Stell.*): de lijnen *A B* en *C D* staan, bijgevolg loodregt op dezelfde lijn *P S*, en zijn (zie XXII. *Stell.*) derhalve evenwijdig.

XXX. Stelling. *Fig.* 51 *en* 52.

§. 125. *De hoeken* (*A B C en Q P R*), *welker beenen, beide in dezelfde rigting, evenwijdig aan elkander loopen,* (*A B aan P Q, en B C aan P R,*) *zijn gelijk.*

Betoog. De hoeken liggen in elkander, als in *fig.* 51, of buiten elkander, als in *fig.* 52: in het eerste geval, verlenge men ééne der zijden *P Q* van den binnensten *hoek Q P R* tot in *D*; dan is, in beide figuren, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen, (XXIV. *Stell.*) *hoek A B C* = *hoek Q D C*; en *hoek Q D C* = *hoek Q P R*; derhalve is (V. *Ax.*) *hoek A B C* = *hoek Q P R*.

XXXI. Stelling. *Fig.* 53.

§. 126. *De regte lijnen* (*A D en B C*), *welke de uiteinden van twee gelijke en evenwijdige lijnen* (*A B en C D*) *vereenigen, zijn zelve gelijk en evenwijdig.*

Betoog. Trek de lijn *B D*; dan zijn de driehoeken *A B D* en *B D C* gelijk- en gelijkvormig; want, omdat *A B* evenwijdig aan *D C* is, zijn de verwisselende hoeken *A B D* en *B D C* (XXVI. *Stell.*) gelijk; en voorts zijn de zijden, om deze gelijke hoeken staande, even groot; namelijk *B D* = *B D* en *A B* = *C D*; derhalve is (X. *Stell.*) *A D* = *B C*; *hoek A D B* = *hoek C B D*, en (XXVII. *Stell.*) *A D* evenwijdig aan *B C*.

XXXII. Stelling. *Fig.* 54.

§. 127. *Indien men, uit al de punten* (*A, B, C,* enz.) *van den omtrek eener regte of kromlijnige figuur, gelijke en evenwijdige lijnen* (*A D, B E, C F,* enz.) *trekt* (*namelijk alle naar denzelfden kant*); *dan zijn de uiteinden dezer lijnen gelegen in eene regte of kromlijnige figuur, welke aan de eerste gelijk- en gelijkvormig is.*

Betoog. Vereenig de punten *A*, *B* en *C* door de lijnen *A B*, *B C* en *A C*, en de punten *D*, *E* en *F* door de lijnen *D E*, *E F* en *D F*. Omdat nu, (*onderst.*) *A D* = *B E* = *C F* is, en deze lijnen onderling evenwijdig zijn, zoo is (XXXI. *Stell.*) *A B* = *D E*, *B C* = *E F* en *A C* = *D F*. Indien men nu het punt *A* in *D*, de lijn *A C* langs *D F* past; dan zal,

om-

omdat de driehoeken *ABC* en *DEF* (XIII *Stell.*) gelijk- en gelijkvormig zijn, het punt *C* in *F*, en *B* in *E* vallen. Wanneer dan de punten *A* en *C* van den omtrek der gegevene figuur in den omtrek der voortgebragte figuur *DEF* gebragt worden, zal een derde punt *B* van den omtrek der gegevene figuur in den omtrek der voortgebragte, in *E*, vallen; daar nu hetzelfde, voor alle andere punten *G*, *H*, *enz.* gelden zal, zoo zullen al de punten der gegevene figuur in die der voortgebragte vallen, en de figuren zullen (II *Ax.*) gelijk- en gelijkvormig zijn. — Voor regtlijnige figuren zal men de waarheid dezer stelling, met minder omslag, kunnen betoogen.

XXXIII. STELLING. *Fig.* 55.

§. 128. *Indien men, uit al de punten* (*A*, *B*, *C*, *D*, enz.) *van den omtrek eener regte of kromlijnige figuur* (*ABCDE*), *loodlijnen* (*AF*, *BG*, *CH*, *DI*, *EK*,) *op eene onbepaalde lijn* (*XY*) *laat vallen, en men, deze loodlijnen verlengd hebbende, die verlengden* (*Fa*, *Gb*, *Hc*, *Id*. *Ke*,) *aan dezelve*, (*aan AF*, *BG*, *CH DI*, *EK*), *gelijk maakt; dan zullen de uiteinden* (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*,) *dezer alzoo verlengde loodlijnen, in den omtrek eener figuur* (*abcde*) *liggen, die aan de eerst gestelde figuur* (*ABCDE*) *gelijk- en gelijkvormig zal zijn.*

BETOOG. Laat de bovenste helft der figuur, om de lijn *XY*, omdraaijen, en op de onderste helft vallen; dan zullen de lijnen *FA*, *GB*, *HC*, *ID*, *KE* langs de lijnen *Fa*, *Gb*, *Hc*, *Id* en *Ke* vallen; omdat, volgens de onderstelling, de hoeken aan de punten *F*, *G*, *H*, *I*, *K* alle regt zijn; daar nu uit de onderstelling $aF = AF$, $bG = BG$, $cH = CH$, $dI = DI$ en $ek = EK$, is, zoo zullen al de punten van de figuur *ABCDE*, in den omtrek van de figuur *abcde* moeten vallen, en dus zullen (II. *Ax.*) deze figuren gelijk- en gelijkvormig zijn.

§ 129. AANMERKING. Figuren, die men door zulk eene constructie verkrijgt, noemt men *symetrieke figuren*; men bedient zich in de nuttigste kunsten onophoudelijk van dezelve.

TWEEDE BOEK.

Over de voornaamste eigenschappen van de Evenredigheid der meetkunstige uitgebreidheden, op de algemeenste wijze voorgedragen; zoo wel in het onmeetbare als meetbare geval.

---

§. 130. Alhoewel wij in deze Beginselen de kennis van de Leer der Evenredigheden, zoowel der grootheden, als der getallen, onderstellen, en wel zoo uitvoerig, als dezelve, in het *tweede deel onzer Allereerste Gronden der Cijferkunst*, is voorgedragen, zoo vordert evenwel de strikte naauwkeurigheid, die in de meetkunstige betoogen vereischt wordt, zoowel als het gewigt zelf van de Leer der Evenredigheden in de Meetkunst, van welke zij de ziel en het leven is, dat wij dezelve, op eene meer algemeene wijze beschouwen, welke tevens in zich begrijpt, het geval, dat wezenlijk bestaan kan, wanneer namelijk de gelijkslachtige uitgebreidheden, die men met elkander vergelijkt, ten opzigte van elkander, onderling onmeetbaar zijn.

§. 131. I. Bepaling. Eene uitgebreidheid wordt door eene andere gelijksoortige uitgebreidheid, als eene *aangenomene maat*, gemeten, wanneer men in dezelve, zoo lang zij strekt, deelen neemt, welke elk, in het bijzonder, aan die maat gelijk zijn.

Opheldering. Indien, *fig.* 56, AB eene grootere en CD eene kleinere lijn is, en men $AE = EF = FG = GH = HI = CD$ neemt en eindelijk het stuk $BI < CD$ overhoudt; en, indien, *fig* 57, ABC een grooter en DEF een kleiner hoek is, en, na *hoek* $ABG =$ *hoek* $GBH =$ *hoek* $HBI =$ *hoek* DEF genomen te hebben, *hoek* $IBC <$ *hoek* DEF overhoudt; dan wordt, in het eerste geval, de lijn AB door de lijn CD, en, in het tweede geval, den *hoek* ABC door den *hoek* DEF gezegd gemeten te worden.

§. 132. II. Bepaling. Eene uitgebreidheid A is een *evenmatig deel* van eene andere andere B, wanneer zij, eenige malen genomen, gelijk aan de uitgebreidheid B, waarvan zij als een gedeelte aangemerkt wordt, worden kan: of, wanneer (n een geheel getal zijnde) $n \times A = B$ is.

§. 133. III. Bepaling. In het tegengestelde geval, wanneer $n \times A < B$ en tevens $(n + 1) \times A > B$ is, zal de uitgebreidheid A een *onevenmatig deel* van de uitgebreidheid B zijn.

§. 134. IV. Bepaling. Eene uitgebreidheid C is eene *gemeene maat* van twee uitgebreidheden A en B, wanneer zij een evenmatig deel

deel van elke dezer uitgebreidheden is. Zie verder *Allereerste Gronden der Cijferk.*, I. D. IX. *Les.*

§. 135. Gevolg. Omdat elk evenmatig deel eener gemeene maat van twee uitgebreidheden insgelijks eene gemeene maat van dezelve is, *zoo bestaat er tusschen deze uitgebreidheden, indien zij slechts ééne gemeene maat hebben, een onnoemelijk aantal van gemeene maten; en onder alle deze gemeene maten, is ééne de* grootste.

§. 136. V. Bepaling. De *betrekking* of *reden* van twee gelijkslachtige uitgebreidheden wordt uitgedrukt door twee getallen, welke te kennen geven, hoeveelmaal eenige gemeene maat van die uitgebreidheden op elke van dezelve verhouden is. *De getallen, welke deze betrekking uitdrukken, zullen de kleinste zijn, indien de grootste gemeene maat dezer grootheden, tot het bepalen dezer verhouding, is aangenomen geworden.*

Opheldering. Wanneer, bij voorbeeld, C in A twintigmaal, en C in B dertienmaal begrepen is; dan zal de betrekking of reden der uitgebreidheden A en B door de getallen 20 en 13 worden uitgedrukt; en men zal zulks, bij verkorting, aldus schrijven:

$$A : B = 20 : 13.$$

Laat, om dit nog duidelijker te maken, in *fig.* 58, de lijn M zevenmaal in de lijn A en viermaal in de lijn B begrepen zijn; dan zal $A : B = 7 : 4$ zijn. En is, *fig.* 59, de *hoek* GHI, zevenmaal in den *hoek* ABC en viermaal in den *hoek* DEF begrepen; dan zal *hoek* ABC : *hoek* $DEF = 7 : 4$ zijn.

§. 137. VI. Bepaling. Eene uitdrukking, als deze

$$\begin{Bmatrix} A, & B, & C, & D, & E, & F, & G \\ 2, & 1, & 4, & 3, & 1, & 2 & \end{Bmatrix}$$

wordt, in het vervolg, aldus gelezen: *de uitgebreidheid B is in de uitgebreidheid A tweemaal met nog eene uitgebreidheid C (kleiner dan B) begrepen; de uitgebreidheid C is in B éénmaal met nog D begrepen; D is in C viermaal met nog E begrepen: E is in D driemaal met nog D begrepen; F is in E éénmaal met nog G; en G is in F juist tweemaal begrepen.* Zulk eene uitdrukking noemt men den *betrekkingswijzer* van de betrekking der grootheden A en B: hij bevat de volgende vergelijkingen, waardoor men de betrekking der grootheden, door denzelven uitgedrukt, in getallen, vinden kan.

$$F = 2\,G$$
$$E = F + G = 2\,G + G = 3\,G$$
$$D = 3\,E + F = 9\,G + 2\,G = 11\,G$$
$$C = 4\,D + E = 44\,G + 3\,G = 47\,G$$
$$B = C + D = 47\,G + 11\,G = 58\,G.$$
$$A = 2\,B + C = 116\,G + 47\,G = 163\,G$$

Men zie, wegens het berekenen van zulk eenen betrekkingswijzer, *Allereerste Gronden der Cijferk.*, *II. Deel*, *XXXVI. Les*

§. 138. Aanmerking. Zulk een betrekkingswijzer van twee gelijkflachtige grootheden, wordt echter gemakkelijker (vooral in het geval der onmeetbare uitgebreidheden) aldus, van voren naar achteren, berekend.

	2	1	4	3	1	2
1	2	3	14	45	59	163
0	1	1	5	16	21	58
+	−	+	−	+	−	

Men zie *Allereerste Gronden der Cijferk.*, *II. Deel*, *II. Bijlage*, en *Beg. Stelk.*, *II Afd.*, *XI Hoofdst.*. als ook *Eersten Curs. Wisk. Lessen*, *XXXIII. Les.* Deze manier van berekenen, welke in eene eigenlijke benadering bestaat, is, in het geval der onmeetbaarheid, de gemakkelijkste.

§ 139. II. Aanmerking Wanneer men twee gelijkflachtige uitgebreidheden, bij voorbeeld, twee lijnen, of twee hoeken, behandelt, zoo als in de voorgaande bepaling beschreven is, en men alzoo derzelver betrekkingswijzer opmaakt; dan zal men altijd derzelver gemeene maat, indien deze namelijk bestaat, ontdekken, en dan zal de berekening van dezen wijzer leeren: hoeveelmaal de gemeene maat *C* in elke der grootheden *A* en *B* begrepen is, waardoor dan (*V. B.p.*) derzelver betrekking, in getallen zal bekend worden. In den bijgebragten wijzer, zal, ingevolge de opgemaakte berekening, $A : B = 163 : 58$ zijn.

§. 140. III. Aanmerking. *Twee gelijkflachtige uitgebreidheden kunnen, ten opzigte van elkander, zulk eene overeenstemming hebben, dat derzelver onderlinge afmeting, op de voorgeschrevene wijze bewerkstelligd, nimmer eene gemeene maat voorbrengt.* Wanneer men derhalve de betrekking van twee grootheden onderzoekt, komen er twee gevallen in aanmerking. 1°. Wanneer de grootheden *meetbaar*, en 2°. wanneer zij *onmeetbaar* zijn.

§. 141. VII. Bepaling. Twee gelijkflachtige uitgebreidheden zijn *onderling meetbaar*, wanneer eenig evenmatig deel van de eerste tevens een evenmatig deel van de tweede is. Zij hebben, in dit geval (*V. Bep.*) eene gemeene maat, welke door het voorschrift der *VI. B p.* zal gevonden worden, *en men zal derzelver betrekking altijd door twee getallen, volkomen en naauwkeurig, kunnen uitdrukken.*

§. 142. VIII. Bepaling. Twee gelijkflachtige uitgebreidheden zijn

onderling onmeetbaar, wanneer geen evenmatig deel van de eerste, als één-half, één-derde, één-vierde, *enz.*, welk het ook zijn moge, en hoe klein ook genomen, tevens een evenmatig deel van de tweede worden kan. *De mogelijkheid van het bestaan van onderling onmeetbare uitgebreidheden is daarop gegrond, dat alle uitgebreidheid tot in het oneindige deelbaar is:* de wezenlijkheid van derzelver bestaan, in de meetkunstige figuren, zal uit de gevolgen van de XVI. en volgende *Stellingen* van het *III. Boek* blijken.

§. 143. Gevolg. *Onmeetbare grootheden hebben derhalve geene gemeene maat;* naar het voorschrift van de *VI. Bepaling*, behandeld zijnde, zal men, bij elke volgende meting, een overschot verkrijgen, en derzelver betrekkingswijzer zal gevolgelijk uit een onnoemelijk of oneindig aantal termen bestaan.

§. 144. Aanmerking. In het geval der onmeetbaarheid, zullen de overschotten, die men bij de uitmeting verkrijgt, weldra zoo klein worden, dat zij niet meer zigtbaar zijn: men zal dan, deze verwaarloozende, of gelijk nul stellende, twee getallen vinden, welke, ten naaste bij, de betrekking dezer twee grootheden uitdrukken: *maar, strikt genomen, kan die betrekking nooit volkomen, zelfs niet, door de grootste getallen, die men zich verbeelden kan, worden voorgesteld;* want, hoe groot men deze getallen nemen moge, onderstellen zij eene gemeene maat, hoedanige twee onmeetbare grootheden, volgens de gegevene bepaling, nooit hebben kunnen.

§. 145. IX. Bepaling. Aangezien *alle evenredigheid in de gelijkheid van twee verhoudingen of redens bestaat*, en deze eigenlijk door derzelver betrekkingswijzers, in hunne geheele uitgestrektheid genomen, worden voorgesteld, zoo kan men van eene evenredigheid deze meer algemeene, tevens het geval der onmeetbaarheid in zich bevattende, bepaling geven. *Twee gelijkslachtige uitgebreidheden A en B, zijn met twee andere gelijkslachtige grootheden P en Q in evenredigheid, wanneer de wijzergetallen van den betrekkingswijzer der twee eersten, namelijk:*

$$\begin{Bmatrix} A, & B, & C, & D, & E, & F, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & enz. \end{Bmatrix}$$

in derzelver volgorde, één voor één genomen, van het begin tot het einde, of tot in het oneindige, dezelfde is, als de wijzergetallen van den betrekkingswijzer van de laatsten, namelijk

$$\begin{Bmatrix} P, & Q, & R, & S, & T, & U, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & enz. \end{Bmatrix}$$

§. 146. Nadere opheldering. Om dan te beoordeelen, of twee gelijkflachtige uitgebreidheden (als twee lijnen of twee hoeken) *A* en *B*, in dezelfde reden zijn, als twee andere gelijkflachtige uitgebreidheden, *P* en *Q*, moet men de twee eersten *A* en *B*, als ook de twee laatsten *P* en *Q*, naar het voorschrift van de *VI. Bepaling*, behandelen; en, wanneer men dan, voor de eerste *A* en *B*, dezelfde wijzergetallen, als voor de twee laatsten, verkrijgt; dan zullen de grootheden *A* en *B* evenredig zijn aan de grootheden *P* en *Q*. Zijn nu de grootheden *A* en *B* onmeetbaar; dan zal derzelver betrekkingswijzer nooit ten einde loopen; zal er derhalve eene evenredigheid bestaan, moet insgelijks de betrekkingswijzer van de twee andere grootheden *P* en *Q* nooit ten einde loopen, en moet men bovendien aannemen: *dat, in beide wijzers, de wijzergetallen, term voor term, dezelfde zijn.* Offchoon nu dit laatste, wegens de bepaaldheid onzer zintuigen, door dadelijke ervaring, niet blijken kan, zal men nogtans tot de evenredigheid dezer grootheden mogen besluiten, al is het, dat de twee eerste grootheden onmeetbaar ondersteld worden, bijaldien zij slechts met de twee andere zoodanig verbonden zijn, dat men, door redenering, kan aantoonen: dat, wanneer men de uitmeting onbepaaldelijk konde voortzetten, de betrekkingswijzer van de twee eerste in alles dezelfde zou moeten zijn, als die van de twee laatste.

§. 147 Aanmerking. Zijn de twee eerste grootheden meetbaar; dan moeten ook de twee laatste meetbaar zijn: de betrekking der twee eerste moet dan door dezelfde getallen, als die der twee laatste, worden uitgedrukt: men kan dan, in het geval der onderlinge meetbaarheid, van de evenredigheid deze meer bijzondere bepaling geven: *vier uitgebreidheden zijn dan evenredig, wanneer de gemeene maat der twee eersten, op elke van de twee eersten, zooveelmaal begrepen is, als de gemeene maat van de twee laatste, op elke van dezelve.* In dien zin, zijn getallen evenredig. Alzoo zal, zie *fig.* 58 en 59, omdat

de lijn A: *de lijn B* $=$ 7 : 4
hoek ABC: *hoek DEF* $=$ 7 : 4 is
lijn A: *lijn B* $=$ *hoek ABC*: *hoek DEF* zijn.

Zie verder *Allereerste Gronden der Cijferk.*, *II. Deel*, *XXXVI Les art.* 514 *en verv.*

§. 148. X. Bepaling. Wanneer twee uitgebreidheden, *A* en *B*, met twee andere uitgebreidheden, *P* en *Q*, evenredig zijn; dan worden

den de uitgebreidheden A, B, P, Q in deze evenredigheid voorkomende, derzelver *termen* genoemd. De uitgebreidheden A en B noemt men dan de *termen der eerste*, de uitgebreidheden P en Q de *termen der tweede reden*.

§. 149 XI. Bepaling. De termen eener evenredigheid worden gezegd *welgeordend* te zijn, wanneer, in elke reden, de grootste op den kleinsten, of de kleinste op den grootsten term volgt.

Indien derhalve A, B, P en Q eene welgeordende evenredigheid uitmaken; dan moet $P >$, $=$ of $< Q$ zijn, wanneer $A >$, $=$ of $< B$ is.

§. 150. XII. Bepaling. Om te kennen te geven, dat de uitgebreidheden A, B, P en Q in eene welgeordende evenredigheid zijn; dan wordt zulks aldus geschreven

$$A : B = P : Q$$

en gelezen: *de uitgebreidheid A staat tot de uitgebreidheid B, in dezelfde reden of, in dezelfde verhouding, als de uitgebreidheid P tot de uitgebreidheid Q.*

§. 151. XIII. Bepaling. De eerste term van elke reden wordt *voorgaande*, de tweede term *volgende* term genoemd. In de redens $A : B$, en $P : Q$, zijn A en P de *voorgaande* en B en Q de *volgende termen*.

§. 152. XIV. Bepaling. Diensvolgens worden, in elke welgeordende evenredigheid, $A : B = P : Q$, de *eerste* en *derde* termen de *voorgaande*, de *tweede* en *vierde* de *volgende termen* genoemd.

§. 153. XV. Bepaling. In eene welgeordende evenredigheid, $A : B = P : Q$, dragen de *eerste* en *vierde* termen den naam van *uiterste*, en de *tweede* en *derde* den naam van *middelste termen*. De vierde term Q wordt *de vierde evenredige tot de drie eerste termen* A, B en P genoemd.

§. 154. XVI. Bepaling. Wanneer de twee middelste termen eener evenredigheid, $A : B = B : C$, gelijk of dezelfde zijn; dan wordt deze evenredigheid eene *gedurige evenredigheid* genoemd. Zulk eene evenredigheid wordt wel eens aldus $::$ A, B, C geschreven. De derde term C wordt de *derde evenredige tot A en B*; en tweede term B de *midden-evenredige tusschen A en C* genoemd.

§. 155. XVII. Bepaling. Wanneer, in eene rij van uitgebreidheden, als, bij voorbeeld, de lijnen of hoeken, A, B, C, D, E, F, *enz*, drie op elkander volgende termen altijd eene gedurige evenredigheid uitmaken, dan wordt zij eene *meetkundige reeks* genoemd. (Zie

Al-

Allereerste Grond. der Cijferk. II. Deel. LIV *Les.*) Bestaat deze reeks uit vier termen, dan heten de twee middelste de *twee middenevenredigen* tusschen de uitersten; bestaat zij uit vijf termen; dan heten de drie middelsten de *drie middenevenredigen tusschen de uitersten*, enz.

§. 156. XVIII. Bepaling. Indien meer dan twee redens aan elkander gelijk zijn; dan maken deze redens eene *aaneengeschakelde evenredigheid.* (Zie *Allereerste Grond. der Cijferk II Deel* XLI *Les.*) Zulk eene is derhalve $A:B=C:D=E:F=G:H$. *Zij kan uit zoo veel redens bestaan, als men goedvindt.* Men pleegt wel te zeggen: *de grootheden A, C, E, G, zijn evenredig met de grootheden B, D, F, H*, en dit is men dan gewoon aldus te schrijven: $(A, C, E, G) :: (B, D, F, H.)$

I. Stelling.

§. 157. *Indien twee redens $A:B$ en $C:D$, elk in het bijzonder, aan eene derde reden $P:Q$ gelijk zijn; dan zijn deze redens onderling gelijk. Of, indien $A:B=P:Q$ en $C:D=P:Q$; dan zal $A:B=C:D$ zijn.*

Betoog. Deze waarheid is eigenlijk van het V. *Axioma* niet onderscheiden.

II. Stelling.

§. 158. *De redens eener evenredigheid, $A:B=C:D$, mogen verplaatst worden*; dat is: *men mag stellen: $C:D=A:B$.*

Betoog. Want, door het verplaatsen der redens, wordt de gelijkheid der verhouding, die het wezen der evenredigheid uitmaakt, niet veranderd.

III. Stelling.

§. 159. *De termen van de redens eener evenredigheid mogen omgekeerd worden*; dat is: *men mag, uit de evenredigheid, $A:B=P:Q$, besluiten: dat $B:A=Q:P$ is.*

Betoog. De betrekking der grootheden A en B kan, of volkomen, of ten naastenbij, door twee getallen p en q worden uitgedrukt. Nu is het klaar: dat men zoo wel zeggen kan; B staat tot A gelijk q tot p, als A staat tot B gelijk p tot q; daar zulks nu, in beide redens, geschieden kan, zoo zal men ook $B:A=Q:P$ kunnen stellen.

IV.

IV. STELLING.

§. 160. *Wanneer de termen van de eerste reden eener evenredigheid gelijk zijn; dan moeten ook de termen van de tweede reden dezer evenredigheid gelijk zijn.*

BETOOG. Deze waarheid is een onmiddelijk gevolg van de bepaling der evenredigheid. Zie IX *Bep.*

§ 161. I. GEVOLG *Twee gelijke grootheden zijn derhalve altijd in dezelfde reden, als twee andere gelijke grootheden.*

§. 162. II. GEVOLG. *Twee ongelijke grootheden kunnen dan ook met twee gelijke grootheden niet evenredig zijn.*

V. STELLING.

§. 163 *Wanneer de betrekking van twee meetbare uitgebreidheden, A en B, door de twee getallen a en b wordt uitgedrukt, en alzoo $A:B=a:b$ is; dan zal de eerste uitgebreidheid A, zooveelmaal genomen, als er eenheden in het tweede getal b zijn, gelijk zijn aan de tweede uitgebreidheid B, zooveelmaal genomen, als er eenheden in het eerste getal a zijn; of $bA=aB$.* En omgekeerd. *Indien eenig veelvoud eener zekere uitgebreidheid A gelijk is aan eenig ander veelvoud eener andere uitgebreidheid B; of $b\times A=a\times B$; dan zullen deze uitgebreidheden tot elkander in reden zijn, als de getallen, waarmede zij vermenigvuldigd zijn, in eene omgekeerde orde genomen: dat is, $A:B=a:b$.*

BETOOG *van het eerste.* De grootheden A en B kunnen niet tot elkander staan, als een getal a tot een getal b, indien zij geene gemeene maat hebben. Stel deze gemeene maat M; dan is $A=aM$ en $B=bM$. Laat deze gelijkheden, de eerste met b, en de tweede met a, vermenigvuldigd worden; dan zullen (*XIII. Ax.*) $bA=abM$ en $aB=abM$ zijn, en derhalve (*V. Ax.*) $bA=aB$.

BETOOG *van het omgekeerde.* Men kan elke grootheid, in zulk een getal evenmatige deelen verdeelen, als men goedvindt. Laat A dan in een aantal van a gelijke deelen verdeeld, en elk dezer deelen M genoemd worden; dan zal $A=aM$ en (*XIII. Ax.*) $bA=abM$ zijn: maar $bA=aB$ (*onderst.*) zijnde, is (*IV. Ax.*) $abM=aB$, en van elk dezer gelijke grootheden een a^{de} deel nemende, is (*XIII. Ax.*) $bM=B$: dat is, wanneer de grootheid A een aantal van a deelen, elk gelijk M, bevat; dan bevat B een aantal van b zulke deelen; derhalve is (*V. Bep.*) $A:B=a:b$.

§. 164. AANMERKING. Deze leerstelling is, in *de Allereerste Grond. der Cijferk. II Deel XXXVI Les, art.* 510–512, uitvoeriger verklaard en

en door voorbeelden opgehelderd. Men vergelijke verder aldaar XXXVII *Les*, *art.* 513 en naderhand de V en VI *stellingen.* IV *Boek.*

VI. STELLING.

§. 165. *In elke evenredigheid*, $A:B=P:Q$, *zijn dezelfde of gelijknamige veelvouden, als ook dezelfde evenmatige deelen van de termen der eerste of tweede reden, met de termen der tweede of eerste reden, evenredig.* Dat is, *n een geheel of gebroken getal zijnde; zal* $nA:nB=P:Q$; *of* $A:B=nP:nQ$ *zijn.*

BETOOG. Laten de betrekkingswijzers der uitgebreidheden A en B en der uitgebreidheden P en Q zijn:

$$\left\{\begin{matrix} A, B, C, D, E, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\} \text{ en } \left\{\begin{matrix} P, Q, R, S, T, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\}$$

bestaande beide uit dezelfde, en het zelfde aantal wijzergetallen, a, b, c, *enz.*, indien de uitgebreidheden meetbaar zijn; maar, indien dezelve onmeetbaar zijn, onbepaald voortloopende, en, in de volgorde, uit dezelfde wijzergetallen bestaande; dan geeft (zie *VI. Bep.*) de eerste wijzer de vergelijkingen, $A=aB+C$; $B=bC+D$; $C=cD+E$, *enz* tot zoo ver de wijzer loopt, en welker aantal oneindig groot is, wanneer de uitgebreidheden A en B, onderling onmeetbaar zijn: wanneer men nu al die vergelijkingen, met n vermenigvuldigt; dan zal men (*XIII. Ax.*) de vergelijkingen, $nA=anB+nC$; $nB=bnC+nD$; $nC=cn+nE$; *enz.*, verkrijgen: maar deze vergelijkingen geven den volgenden betrekkingswijzer:

$$\left\{\begin{matrix} nA, nB, nC, nD, nE, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{matrix}\right\}$$

naardien nu de wijzergetallen van dezen betrekkingswijzer, één voor één en in volgorde, dezelfde zijn, als die van den betrekkingswijzer der uitgebreidheden P en Q; zoo zal (IX. *Bep.*) $nA:nB=P:Q$ zijn.

Men zal op dezelfde wijze betoogen: dat $A:B=nP:nQ$ is.

§. 166. I. GEVOLG. Men heeft bewezen: dat $nA:nB=P:Q$ is; maar, $P:Q=A:B$ zijnde, zal (*I. Stell.*) $nA:nB=A:B$ zijn. Wederom is $A:B=mP:mQ$; derhalve zal ook $nA:nB=mP:mQ$ zijn. Dat is: *gelijke veelvouden van de termen van de eerste reden eener evenredigheid zijn evenredig met gelijke veelvouden van de termen der tweede reden.*

§. 167. II. GEVOLG. Wanneer M en N twee gelijkslachtige grootheden zijn; dan is $M:N=M:N$; volgens het voorgaande gevolg zal nu $pM:pN=qM:qN$ zijn; dat is: *gelijke veelvouden van gelijkslachtige uitgebreidheden zijn evenredig met andere gelijke veelvouden van diezelfde uitgebreidheden.*

VII.

VII. STELLING.

§. 168. *Wanneer al de termen eener evenredigheid*, $A:B=P:Q$, *gelijkflachtige uitgebreidheden zijn; dan zijn (bij verwisfeling der redens) de voorgaanden tot elkander, in dezelfde reden, als de volgenden: of* $A:P=B:Q$.

BETOOG. I. GEVAL. Stel, dat de uitgebreidheden A en B, en bijgevolg ook P en Q, onderling meetbaar zijn; en laat dan M de gemeene maat van A en B, en N de gemeene maat van P en Q, zijn: indien dan M op A en B respectievelijk p en q-maal begrepen is; dan zal (*Aanm.* IX. *Bep.*) N op P en Q insgelijks p en q-maal begrepen zijn. Men zal dan, in plaats van de uitgebreidheden A, B, P en Q, ftellen kunnen, pM, qM, pN, qN; welke, wanneer zij, in de rangorde, pM, pN, qM, qN, gefteld worden (*II Gev. VI. Stell.*), eene evenredigheid maken; te weten: $pM:pN=qM:qN$; of $A:P=B:Q$.

II. GEVAL. Wanneer de uitgebreidheden A en B, en bijgevolg ook P en Q, onderling onmeetbaar zijn; dan loopen de betrekkingswijzers, zonder einde, voort. Wanneer men nu, in beide wijzers, hetzelfde aantal termen neemt; dan zal men altijd twee getallen verkrijgen, welke ten naaste bij de betrekking van A tot B en van P tot Q uitdrukken. Stellen wij, bij voorbeeld: dat, voor honderd wijzergetallen, r en s deze getallen zijn; dan is

$$A:B'=P:Q'=r:s$$

zijnde B' en Q' twee uitgebreidheden, welke tot A en P dezelfde reden hebben, als het getal r tot het getal s. Men zal dan, naar het betoogde, in het eerfte geval, mogen ftellen:

$$A:P=B':Q'$$

vermits nu de getallen r en s zooveel te naauwkeuriger de betrekking van A tot B en van P tot Q zullen uitdrukken, naarmate, uit de betrekkingswijzers, meer termen, tot de zamenftelling der getallen r en s, hebben medegewerkt, zoo zullen de uitgebreidheden B' en Q', die tot A en P, in dezelfde reden, als r tot s, genomen zijn, zeer weinig van de uitgebreidheden B en Q verfchillen; ja, al minder en minder, naarmate men, om nog naauwkeuriger waarden voor r en s te verkrijgen, meer termen uit de wijzers neemt; tot dat eindelijk, indien men de geheele oneindigheid der termen te zamen neemt, $B'=B$ en $Q'=Q$ wordt; als wanneer $A:P=B:Q$ zal zijn.

§. 169. GEVOLG. Omdat dan, uit de evenredigheid, $A:B=P:Q$, (indien alle hare termen gelijkflachtig zijn,) volgt $A:P=B:Q$; zoo zal, wanneer $A=P$ is, ook (*VI. Stell.*) $B=Q$ zijn. *Wanneer dan de voorgaande termen eener evenredigheid gelijk zijn; dan zullen ook de volgende eene gelijke grootte moeten hebben.*

§. 170. AANMERKING. Wanneer de termen van de eerfte reden

uitgebreidheden van eene andere foort zijn, dan die van de tweede reden; dan zal men, in zulk eene evenredigheid, de redens niet kunnen verwisfelen; omdat er tusfchen uitgebreidheden van verfchillende foort geene verhouding (zie III. *Ax.*) kan plaats hebben.

VIII. Stelling.

§. 171. *In elke evenredigheid, het zij de termen van de eerfte reden met de termen der tweede gelijkflachtig of ongelijkflachtig zijn, namelijk: $A:B=P:Q$, is*

1°. *De fom van de termen der eerfte reden tot de fom van de termen der tweede reden, als de voorgaande der eerfte reden tot den voorgaanden der tweede reden; of, als de volgende van de eerfte tot den volgenden term van de tweede reden.*

2°. *Het verfchil van de termen der eerfte reden is tot het verfchil van de termen der tweede reden, als de voorgaande of volgende van de eerfte tot den voorgaanden of volgenden term van de tweede reden.*

3°. *De fom van de termen der eerfte reden ftaat tot de fom van de termen der tweede reden, als het verfchil van de termen der eerfte reden tot het verfchil van de termen der tweede reden.*

Betoog *van het eerfte.* Laten de betrekkingswijzers van de redens van A tot B en van P tot Q zijn:

$$\begin{Bmatrix} A, B, C, D, E, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{Bmatrix} \text{ en } \begin{Bmatrix} P, Q, R, S, T, \text{enz.} \\ a, b, c, d, \text{enz.} \end{Bmatrix}$$

dan is het klaar: dat, vermits B op A begrepen is a maal met nog C, de uitgebreidheid B op de fom van de uitgebreidheden A en B zal begrepen zijn $a+1$ maal met nog C; en dat insgelijks, in den tweeden wijzer, Q op $P+Q$ zal begrepen zijn $a+1$ maal met nog R. Wanneer men dan de betrekkingswijzers van $A+B$ tot B, en van $P+Q$ tot Q opmaakt; dan zullen beider wijzergetallen (namelijk $a+1$, b, c, *enz.*) één voor één, en, in derzelver volgorde, dezelfde zijn, en men zal (IX. *Bep.*) mogen ftellen: $A+B : B = P+Q : Q$; waaruit (VII. *Stell.*) volgt: $A+B : P+Q = B : Q$: maar uit de gesteldе evenredigheid, $A : B = P : Q$, volgt: (VII. *Stell.*) $A : P = B : Q$; derhalve zal (I. *Stell.*) $A+B : P+Q = A : P = B : Q$ zijn.

Betoog *van het tweede.* Uit dezelfde wijzers volgt verder: dat A in $A-B$ zal begrepen zijn $a-1$ maal, met nog C; dat Q in $P-Q$ insgelijks $a-1$ maal, met nog R, zal begrepen zijn. Indien men derhalve de betrekkingswijzers van $A-B$ tot B, en van $P-Q$ tot Q opmaakt, zullen zij uit dezelfde wijzergetallen, $a-1$, b, c, d, *enz.* één voor één, en, in dezelfde volgorde, beftaan, en derhalve gelijk zijn; volgens de

IX.

IX. *Bep.* zal $A - B : B = P - Q : Q$ zijn; en (VII. *Stell.*) $A - B : P - Q = B : Q = A : P$.

BETOOG *van het derde*. In de twee eerste betoogen, is bewezen: dat $A + B : P + Q = A : P$, en $A - B : P - Q = A : P$ is; derhalve (I. *Stell.*) zal $A + B : P + Q = A - B : P - Q$ zijn.

IX. STELLING.

§. 172. *In elke evenredigheid*, $A : B = P : Q$, *welker termen alle gelijkflachtig zijn, is:*

1°. *De som van de voorgaande termen tot de som van de volgende, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden.*

2°. *Het verschil van de voorgaande termen is tot het verschil van de volgende, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden.*

3°. *De som der voorgaanden termen staat tot die der volgenden, gelijk het verschil der voorgaanden tot het verschil der volgende termen.*

BETOOG. Deze stelling is een onmiddellijk gevolg der twee voorgaande stellingen: want, omdat al de termen der evenredigheid gelijkflachtig zijn, zoo volgt uit de gestelde evenredigheid, $A : B = P : Q$, $A : P = B : Q$ (zie VII. *Stell.*), waaruit, naar de VIII. *Stell.* wederom de evenredigheden, 1°. $A + P : B + Q = A : B = P : Q$; 2° $A - P : B - Q = A : B = P : Q$; en 3°. $A + P : B + Q = A - P : B - Q$ zullen volgen.

X. STELLING.

§. 173. *In elke aaneengeschakelde evenredigheid*,

$$A : B = C : D = E : F = G : H = I : K, \text{ enz.}$$

staat de som van al de voorgaande tot de som van al de volgende termen, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden; dat is:

$$A + C + E + G + I : B + D + F + H + K = A : B.$$

BETOOG. Volgens de onderstelling, is $A : B = C : D$; derhalve (IX. *Stell.*) $A + C : B + D = A : B$; maar $A : B = E : F$ zijnde, is (I. *Stell.*) $A + C : B + D = E : F$; in deze laatste evenredigheid is wederom (IX. *Stell.*) $A + C + E : B + D + F = E : F = A : B$; maar $A : B = G : H$ zijnde, zoo zal $A + C + E : B + D + F = G : H$, en (IX. *Stell.*) $A + C + E + G : B + D + F + H = G : H = A : B$ zijn. Op deze wijze voort redenerende, zal men bevinden: dat, hoe vele redens ook mogten aaneengeschakeld zijn, de som der voorgaande tot de som der volgende termen

 al-

altijd in dezelfde reden zal zijn, als een voorgaande tot eenen volgenden term van dezelfde reden.

§. 174. Aanmerking. In deze ſtelling en derzelver betoog hebben wij ſtilzwijgend aangenomen: dat al de termen der aanééngeſchakelde evenredigheid gelijkſlachtige uitgebreidheden ziin; maar men kan zich eene menigte van lijnen A, B, C, D, E, F, *enz.* en eene menigte van boeken P, Q, R, S, T, U, *enz.* bij voorbeeld, voorſtellen, onder die bepaling, dat

$$(A, B, C, D, E, F, \text{enz.}) :: (P, Q, R, S, T, U, \text{enz.})$$

is; en dan wordt die verkorte ſchrijfwijze aldus verklaard:

$A:B=P:Q$	$A:C=P:R$	$A:D=P:S$
$A:E=P:T$	$A:F=P:U$	$B:C=Q:R$, *enz.*

en men zal dan, op dezelfde wijze, kunnen betoogen: dat is

$$A+B+C+D+E+F : A = P+Q+R+S+T+U : P$$

$$A+2B+D+5E+3F : 7A = P+2Q+S+5T+3U : 7P$$

en, indien p, q, r, s geheele of gebrokene getallen zijn,

$$pA-qC+rE:sF=pP-qR+rF:sU$$

Het is nuttig, zich in het opſtellen van zulke afgeleide evenredigheden onophoudelijk te oefenen.

§. 175 Leering. De eigenſchappen der evenredigheden, in de voorgaande ſtellingen betoogd, zijn betrekkelijk tot evenredigheden, welke, uit eenige geſtelde evenredigheid, kunnen worden afgeleid. In alle deze, heeft men de evenredigheden der meetkunſtige uitgebreidheden, op welke de voornaamſte betoogen in het vervolg zullen gegrond zijn, op de algemeenſte wijze, *ja ook zelfs, in het onmeetbare geval*, overwogen: *doch, getallen kunnen ook, als de zigtbare teekens van de hoeveelheden der evenmatige deelen eener uitgebreidheid, evenredig zijn*; en deze evenredigheid, welke van die der grootheden in geenerlei wijze, dan alleen daarin, onderſcheiden is, *dat de termen van derzelver redens, uit zich zelve, (zie Aanm. IX. Bep.) altijd meetbaar zijn*, wordt, in alle goede Rekenboeken, geleerd, en is ook door ons (*Aller. Grond. der Cijferk. II Deel* XXXVI *Les*, behandeld; welker kennis hier derhalve onderſteld wordt. Wanneer men nu aanneemt: *dat eenige uitgebreidheden evenredig zijn; dan zijn ook de getallen, waardoor zij, in hoeveelheden van dezelfde maat worden uitgedrukt, evenredig; en, zijn de getallen, welke gelijkſlachtige uitgebreidheden, twee aan twee vergeleken, onderling evenredig; dan moeten ook, omgekeerd, de grootheden, die zij uitdrukken, zonder bedenking, als evenredig zijnde, beſchouwd worden.*

Of-

Offchoon men nu de evenredigheid der onderling onmeetbare uitgebreidheden niet naauwkeurig, in getallen, kan voorftellen, *neemt men toch meestal, in plaats van de uitgebreidheden, die in eene evenredigheid voorkomen, de getallen, welke derzelver verhouding tot de algemeene maten voorftellen, door welke alle foorten van uitgebreidheden gemeten worden;* en men houdt het alsdan daar voor, dat alles, wat van die getallen evenredigheid bewezen is, ook van de uitgebreidheden zelve, die zij uitdrukken, mag gefteld worden. De voornaamfte eigenfchappen der getallen evenredigheden, waarvan wij het meest gebruik zullen maken, zijn nu de volgende:

I. Eigenschap. *Dat, in elke evenredigheid, het product der uiterfte termen gelijk is aan het product der middelften.*

II. Eigenschap. *Dat de vierde evenredige tot drie getallen gelijk is aan het product der twee laatfte, gedeeld door het eerfte.*

III. Eigenschap. *Dat men de termen der eerfte of tweede reden, of de beide voorgaanden, of de beide volgenden, door hetzelfde getal mag vermenigvuldigen of deelen.*

IV. Eigenschap. *Dat, eindelijk, de producten van de overeenkomftige termen van twee of meer evenredigheden met elkander evenredig zijn;* waaruit dan volgt: *dat de tweede en derde magten van de termen eener evenredigheid insgelijks evenredig zijn;* alle welke dingen, in het meer aangehaalde leerboekje, bewezen en opgehelderd zijn. De volgende ftellingen zijn betrekkelijk tot de zoogenaamde omgekeerde en zamengeftelde evenredigheden.

§. 176. XIX. Bepaling. Eenige uitgebreidheid A is van eene uitgebreidheid P, of van meer andere uitgebreidheden P, Q, R, *enz.*, afhankelijk, wanneer, die uitgebreidheid P, of die uitgebreidheden P, Q en R, waarvan zij afhangt, andere waarden verkrijgende, ook tevens de uitgebreidheid A, volgens eene beftendige wet, eene andere waarde verkrijgt.

§. 177. XX. Bepaling. Wanneer eene uitgebreidheid A van eene andere P zoodanig afhangt, dat twee onderfcheidene waarden, welke aan P gegeven worden, evenredig zijn aan de waarden, welke A daardoor verkrijgt; dan zegt men: *A blijft in dezelfde reden van P; of A is evenredig aan P.*

Opheldering. Omdat, bij voorbeeld, de geldwaarden van twee onderfcheidene hoeveelheden van dezelfde waar met die hoeveelheden, in maten of gewigten uitgedrukt, evenredig zijn, zoo zegt men: *de geldwaarde van eene zekere waar, van dezelfde deugd en hoedanigheid, is evenredig, aan derzelver hoeveelheid.*

§. 178. XXI. Bepaling. Maar hangt de uitgebreidheid A van de uitgebreidheid P zoodanig af, dat twee onderscheidene waarden van P, in eene omgekeerde orde genomen, evenredig zijn aan de overeenkomstige waarden, welke A verkrijgt, (dat is, de tweede waarde van P tot de eerste, gelijk de eerste waarde van A tot de tweede,) dan zegt men: *A staat in de omgekeerde reden van P*; om daardoor te kennen te geven: *dat de waarden van A in eene omgekeerde reden van de overeenkomstige waarden van P zijn.*

Opheldering. Tot het vervaardigen van zeker werk, wordt een zeker aantal arbeiders, en eenen bepaalden tijd, waarin zij hetzelve kunnen volbrengen, vereischt; wordt nu het getal arbeiders grooter genomen; dan zal er in diezelfde reden, minder tijd noodig zijn, om dit werk te volbrengen. Men drukt zulks uit, door te zeggen: *het aantal arbeiders is in de omgekeerde reden van den tijd.* Zie meer voorbeelden, in de *Allereerste Gronden der Cijferkunst.*

§. 179. I. Gevolg. *Elke regte evenredigheid*, $A:B=P:Q$, (want aldus noemen wij, in het vervolg, wanneer het duidelijkshalve noodig zal zijn, eene gewone, en, zoo als in de *XI. Bepaling* gezegd is, welgeordende evenredigheid.) *kan in eene omgekeerde*

$$A : B \text{ omgek.} = Q : P$$

en elke omgekeerde in eene regte veranderd worden, door de termen van ééne der twee redens om te keeren; of, in die reden, den voorgaanden met den volgenden term te verwisselen.

§. 180. II. Gevolg. In de *Allereerste Gronden der Cijferk. I Deel.* XXIII *Les.* art. 285, wordt bewezen: *dat de waarden der breuken, welke de éénheid tot teller hebben, steeds, in dezelfde reden, kleiner of grooter worden, naarmate men den noemer grooter of kleiner stelt:* het is daarom, dat men, de getallen, welke de betrekking van twee grootheden uitdrukken, in plaats van de grootheden zelve nemende, voor de omgekeerde evenredigheid

$$A : B \text{ omgek.} = P : Q$$

schrijven kan de regte evenredigheid:

$$A : B = \frac{1}{P} : \frac{1}{Q}$$

welke laatste dan gewonelijk gelezen wordt: *A is tot B, in de omgekeerde reden van P tot Q;* en dat, om uit te drukken: *dat eene grootheid A in de omgekeerde reden van eene grootheid P is, zulks aldus, door het teeken $A :: \frac{1}{P}$, kan worden te kennen gegeven.*

XI. STELLING.

§. 181. *Wanneer, in twee evenredigheden,* $A:B=C:D$ *en* $A:P=C:Q$, *de voorgaande termen in de eerste, dezelfde zijn als, of gelijk zijn aan, de voorgaande termen in de tweede; dan zullen de volgende termen der eerste evenredigheid evenredig zijn met de volgende termen der tweede; de laatste in dezelfde rangorde, als de eerste, genomen zijnde.* Dat is: $B:D=P:Q$.

BETOOG. Want, uit de gestelde evenredigheden, volgt: (VII. *Stell.*) $A:C=B:D$ en $A:C=P:Q$; derhalve zal (I. *Stell.*) $B:D=P:Q$ zijn.

XII. STELLING.

§. 182. *En, wanneer de volgende termen, in de eerste van dezelfde evenredigheden, dezelfde zijn als, of gelijk zijn aan, de volgende termen der tweede; dan zullen de voorgaande termen der eerste evenredigheid evenredig zijn aan de voorgaande termen der tweede; wel verstaande, in dezelfde rangorde genomen.* Dat is, *wanneer* $A:B=C:D$ *en* $P:B=Q:D$ *is; dan zal* $A:C=P:Q$ *zijn.*

BETOOG. Want (VII. *Stell.*) $A:C=B:D$, en $P:Q=B:D$ zijnde, zal (I. *Stell.*) $A:C=P:Q$ zijn.

XIII. STELLING.

§. 183. *Indien de uiterste termen van eene evenredigheid,* $A:B=C:D$, *gelijk zijn aan de uiterste termen van eene andere evenredigheid,* $A:P=Q:D$; *dan zal de tweede term der eerste evenredigheid tot den tweeden term der tweede, in de omgekeerde reden zijn, als de derde term der eerste tot den derden term der tweede evenredigheid;* dat is: $B:P=\frac{1}{C}:\frac{1}{Q}$.

BETOOG. Want, uit de gestelde evenredigheden, volg.: (II. *Gev.* XXI. *Bep.*)

$$A : B \text{ omgek.} = D : C = \frac{1}{D} : \frac{1}{C}$$

$$A : P \text{ omgek.} = D : Q = \frac{1}{D} : \frac{1}{Q}$$

volgens de XI. *Stelling*, zal uit deze de evenredigheid $B:\frac{1}{C}=P:\frac{1}{Q}$ volgen; en dan zal (VII. *Stell.*) $B:P=\frac{1}{C}:\frac{1}{Q}$ zijn.

XIV. STELLING.

§. 184. *Indien de middelste termen van twee evenredigheden,* $A:B = C:D$ *en* $P:B = C:Q$ *dezelfde, of gelijk zijn; dan staat de eerste term van de eerste evenredigheid tot den eersten term van de tweede, omgekeerd, als de laatste term van de eerste tot den laatsten term van de tweede: dat is,* $A:P = \frac{1}{D} : \frac{1}{Q}$.

BETOOG. Want, uit de gestelde evenredigheden, volgt: (II. *Gev.* XXI. *Bep.*)

$$A : B \text{ omgek} = D : C = \frac{1}{D} : \frac{1}{C}$$

$$P : B \text{ omgek.} = Q : C = \frac{1}{Q} : \frac{1}{C}$$

volgens de XII. *Stelling*, is dan $A : \frac{1}{D} = P : \frac{1}{Q}$, en (VII. *Stell.*) $A : P = \frac{1}{D} : \frac{1}{Q}$.

§. 185. XXII. BEPALING. Wanneer eene uitgebreidheid A van twee andere uitgebreidheden, P en Q, zoodanig afhangt, dat zij, wanneer ééne van beiden, P of Q, dezelfde waarde behoudt, altijd evenredig blijft aan de waardij, welke de andere dezer twee uitgebreidheden, Q of P, verkrijgt; dan zegt men, om deze afhankelijkheid kunstmatig uit te drukken: *de uitgebreidheid A is in de zamengestelde reden van de uitgebreidheden P en Q.*

Opheldering. In gelijke tijden, zijn, bij voorbeeld, de winsten aan de hoofdsommen, en, voor gelijke hoofdsommen, de winsten aan de tijden evenredig: men zal daarom zeggen: *de winsten zijn in de zamengestelde reden van de hoofdsommen en van de tijden.*

§. 186. XXIII. BEPALING. Hangt eene uitgebreidheid A van eenige uitgebreidheden, P, Q, R, *enz.* zoodanig af, dat zij, wanneer alle deze uitgebreidheden P, Q, R, *enz.* tot op ééne na, dezelfde blijven, evenredig is aan de uitgebreidheid, die van waarde verandert; dan zal men deze afhankelijkheid uitdrukken, door te zeggen: *de uitgebreidheid A is in de zamengestelde reden van de uitgebreidheden,* P, Q, R, S, enz. *waarvan zij afhangt.*

§. 187. I. AANMERKING Het product van twee of meer getallen hangt van dezelve zoodanig af, dat het, in dezelfde reden, als één dezer getallen, (alle andere factoren dezelfde blijvende,) grooter of kleiner wordt: men kan dan zeggen: *dat het product van eenige factoren in de zamengestelde van diezelfde factoren is:* daar nu de waarde

de van een product door dadelijke vermenigvuldiging gevonden wordt, is men gewoon, (nemende getallen voor de uitgebreidheden, welker betrekking zij uitdrukken,) om de uitgebreidheden, in welker zamengestelde reden eene andere uitgebreidheid staat, door het teeken van vermenigvuldiging aan elkander te verbinden. Aldus zal $A :: P \times Q$ zeggen: *A is in de zamengestelde reden van P en Q*; dat is: *de waarden, welke A verkrijgt, zijn in de zamengestelde reden van de waarden, welke P, en van de waarden, welke Q verkrijgt.* Op dezelfde wijze zal, $A :: P \times Q \times R \times S$, *enz.* en dergelijken moeten verstaan worden.

§. 188. II. Aanmerking. Uit dit alles blijkt nu: waarom, wanneer de overeenkomstige termen van twee redens, die in getallen gegeven zijn, als $3:5$ en $7:13$, met elkander vermenigvuldigd worden, de producten, 21 en 65, gezegd worden, in de zamengestelde reden van 3 tot 5, en van 7 tot 13 te zijn.

§. 189. XXIV. Bepaling. Wanneer de uitgebreidheid A van de uitgebreidheden P en Q zoodanig afhangt, dat, Q standvastig blijvende, A in de regte reden van P, en, P standvastig blijvende, A in de omgekeerde reden van Q verandert; dan zal men zeggen: *A is in eene reden, welke zamengesteld is uit de regte reden van P en uit de omgekeerde reden van Q.*

§. 190 Aanmerking. Omdat een gebroken in dezelfde reden grooter wordt, indien men zijn teller kleiner neemt, en in dezelfde reden kleiner wordt, indien men zijn noemer grooter neemt, zoo zal men deze verklaarde afhankelijkheid aldus $A :: \frac{P}{Q}$ uitdrukken. Men kan dit alles nog veel verder uitbreiden.

§. 191. XXV. Bepaling. Hangt eene uitgebreidheid A van eene uitgebreidheid P zoodanig af: dat zij altijd in dezelfde reden is, als de tweede magt van het getal, dat de betrekking van P uitdrukt; dan zegt men: *de uitgebreidheid A is in de verdubbelde reden van de uitgebreidheid P.*

§. 192. XXVI. Bepaling. Doch, is deze afhankelijkheid zoodanig gesteld: dat A altijd evenredig is aan de derde magt van het getal, dat de betrekking van P uitdrukt; dan zegt men: *de uitgebreidheid A is in de verdriedubbelde reden van P.* Vergelijk verder, de *All. Gr. der Cijf. II D. XLIII en XLIV Lessen*, alwaar de zoo nuttige theorie der zamengestelde evenredigheden veel uitvoeriger verklaard en door vele voorbeelden uit het gemeene leven is opgehelderd.

XV. STELLING.

§. 193. *Indien* $A : B = P \times R : Q \times S$ *is; of de uitgebreidheden A en B in de zamengestelde reden van P tot Q en van R tot S zijn, en wederom* $P : Q = C : D$ *is; dan zal* $A : B = C \times R : D \times S$ *zijn.*

BETOOG. Want, indien men de termen der evenredigheid, $P : Q = C : D$, met $R : S = R : S$ vermenigvuldigt; dan zal (IV. *Eigenschap*, §. 175, *Bladz.* 53.) $P \times R : Q \times S = C \times R : D \times S$ zijn; nu is $A : B = P \times R : Q \times S$ (*onderst.*); derhalve is ook (I. *Stell.*) $A : B = C \times R : D \times S$.

XVI. STELLING.

$$A : B = P : Q$$
$$B : C = R : S$$
$$C : D = T : U$$
$$D : E = V : W$$

§. 194. *Wanneer, in eenige evenredigheden,* (als hiernevens zijn uitgedrukt,) *de laatste term van de eerste reden van elke evenredigheid gelijk is aan den eersten term van de eerste reden der volgende evenredigheid; dan zal de eerste term van de eerste reden der eerste evenredigheid tot den laatsten term van de eerste reden der laatste evenredigheid, in eene reden zijn, welke zamengesteld is uit al de tweede redens dezer evenredigheden, van de eerste tot de laatste ingesloten.* Dat is:

$$A : C = P \times R : Q \times S$$
$$A : D = P \times R \times T : Q \times S \times U$$
$$A : E = P \times R \times T \times V : Q \times S \times U \times W$$

BETOOG. Want, indien men de overeenkomstige termen van de twee eerste evenredigheden vermenigvuldigt; dan zijn (IV. *Eigenschap*, §. 175, *Bladz* 53.) de producten evenredig: dat is, $A \times B : B \times C = P \times R : Q \times S$: deelt men nu de termen der eerste reden door B; dan zal (III. *Eigenschap*, §. 175.) $A : C = P \times R : Q \times S$ zijn. Op dezelfde wijze betoogt men de volgende evenredigheden. Men zie verder *Allereerste Gr. der Cijferkunst*, II. *Deel*, XLV. *Les*, *art.* 722—747.

DER-

DERDE BOEK.

Over de Eigenſchappen der Parallelogrammen, Regthoeken en Vierkanten. Manier, hoe de inhoud van eenen regthoek met dien van een vierkant, door middel van de verhouding van de zijden dezer figuren tot elkander, vergeleken wordt. Het vierkant op de lengte-maat beſchreven, als maat van alle vlakke figuren beſchouwd. Gelijkheid van de inhouden der Parallelogrammen en Driehoeken, die op dezelfde baſis ſtaan en tusſchen dezelfde evenwijdige lijnen geplaatst zijn. Over de conſtructie van veelhoekige figuren, welke, onder denzelfden inhoud, minder zijden hebben. Regels om de inhouden der regtlijnige figuren, uit de gegevene zijden en hoogten te vinden. Het Theorema van Pythagoras, *deszelfs gebruik, in het onderzoek van de verdere eigenſchappen der driehoeken.*

---

§. 195. I. Bepaling. Een *parallelogram* of *raam* is een vierhoek, welks tegen over elkander ſtaande zijden evenwijdig zijn.

Opheldering. Indien men dus, *fig.* 60, op de beenen AX en AY van eenen hoek XAY, na de punten B en C, naar welgevallen, te hebben aangenomen, door het punt B, de lijn BD, evenwijdig aan AY, en door het punt C, de lijn CD, evenwijdig aan AX, trekt; dan zal de vierhoek $ABDC$ een *parallelogram* zijn. De lijnen AB, BD, DC en CA, zijn deszelfs *zijden*; AB de *baſis*, CD de *bovenzijde*; AC en BD de *opſtaande zijden*. De zijden AB en CD en de zijden AC en BD worden gezegd *tegen over elkander te ſtaan*. De hoeken A en D en de hoeken B en D *ſtaan tegen over elkander*. Voorts liggen

$$\text{aan de zijden} \left\{\begin{matrix} AB \\ BD \\ DC \\ AC \end{matrix}\right\} \text{de hoeken} \left\{\begin{matrix} A \text{ en } B \\ B \text{ en } D \\ D \text{ en } C \\ C \text{ en } A \end{matrix}\right\}.$$

De hoek XAY of BAC, wordt de hoek en de zijden AB en AC, welke om dien hoek ſtaan, de zijden genoemd, onder welke het paparallelogram $ABDC$ is zamengeſteld.

§. 196. Gevolg. *Fig.* 60. Omdat, volgens de conſtructie, BD evenwijdig aan AC en CD evenwijdig aan AB is, zoo is (XXVI. *Stell.* I. *B.*) *hoek* $A +$ *hoek* $B = 2R$; *hoek* $B +$ *hoek* $D = 2R$; *hoek* $D +$ *hoek* $C = 2R$ en *hoek* $C +$ *hoek* $A = 2R$; dat is, *de ſom der hoeken. die aan dezelfde zijde van een parallelogram gelegen zijn, is altijd gelijk aan twee regte hoeken.*

§. 197. II. Bepaling. *Fig.* 61. Een parallelogram $ABCD$ wordt ge-

gezegd *onder twee gegevene lijnen P en Q en een gegevenen hoek R te zijn zamengesteld*; indien men, na *hoek BAD* = *hoek R* gemaakt te hebben, $AB = P$ en $AD = Q$ neemt, en voorts het parallelogram (door BC evenwijdig aan AD en CD evenwijdig aan AB te trekken) verder voltooit.

§. 198. Aanmerking. *Fig.* 60. De hoek (XAT), onder welken een parallelogram is zamengesteld, kan regt, scherp of stomp zijn; en de zijden (AB en AC), om dien hoek staande, kunnen ongelijk, of even lang genomen worden.

§. 199. III. Bepaling. *Fig.* 60. Is de hoek (XAT), onder welken een parallelogram ($ABDC$) is zamengesteld, scherp of stomp; dan wordt het parallelogram *scheefhoekig* genoemd; maar is die hoek (XAT) regt; dan wordt het parallelogram ($ABDC$) een *regthoekig parallelogram* of eenvoudig *regthoek* genoemd. Zulk een regthoek is in *fig.* 63 voorgesteld.

§. 200. IV. Bepaling. *Fig.* 60. Zijn de zijden (AB en AC), om den hoek (XAT) van een parallelogram staande, even lang, zoo noemt men dit parallelogram een *rhombus*.

§. 201. V. Bepaling. Zijn de zijden, om den hoek van eenen regthoek staande, gelijk; dan is die regthoek een *vierkant*. Zie *fig.* 64. *Een vierkant is dus één gelijkzijdig regthoekig parallelogram.*

§. 202. VI. Bepaling. *Fig.* 61. Eén regthoek ($ABCD$) wordt gezegd, *onder twee gegevene lijnen* (P en Q) *te zijn zamengesteld*; wanneer de zijden (AB en AD), om den regten hoek (BAD) staande, aan die lijnen ($AB = P$ en $AD = Q$) gelijk zijn.

§. 203. VII. Bepaling. *Fig.* 64. Een vierkant ($ABCD$) wordt gezegd, *op eene gegevene lijn* (P) *beschreven te zijn*, wanneer één der zijden (AB) van dat vierkant aan die lijn (P) gelijk is.

§. 204. Gevolg. *Regthoeken en vierkanten zijn slechts bijzondere soorten van parallelogrammen, die alle in de constructie van de* I. Bepaling *begrepen zijn.*

§. 205. VIII. Bepaling. *Fig.* 65. Een *trapezium* ($ABCD$) is een vierhoek, in welken slechts twee der overstaande zijden (AB en CD) evenwijdig, maar de twee andere zijden (AD en BC) niet evenwijdig zijn.

I. Stelling. *Fig.* 62.

§. 206. *Elke hoekpuntslijn* (AC *of* BD) *van een parallelogram deelt*

deelt hetzelve in twee gelijke- en gelijkvormige driehoeken (A B C en A C D, of A B D en B C D); en deszelfs overstaande zijden (A B en C D of A D en B C) zijn even lang; en ook zijn deszelfs overstaande hoeken (A en C of B en D) even groot.

Betoog *van het eerste.* Want de hoekpuntslijn *A C* is eene gemeenschappelijke zijde der driehoeken *A B C* en *A D C*; omdat nu (*onderst.*) *C D* aan *A B*, en *A D* aan *B C* evenwijdig zijn, zoo is (XXVI. *St* I. *B.*) *hoek B A C* $=$ *hoek A C D*, en *hoek A C B* $=$ *hoek D A C*; de driehoeken *A B C* en *A D C*, zijn (IX. *Stel.* I. *B.*) derhalve gelijk- en gelijkvormig. Men betoogt, op dezelfde wijze, dat de hoekpuntslijn *B D* het parallelogram in twee gelijke- en gelijkvormige hoeken *A B D* en *B C D* verdeelt.

Betoog *van het tweede.* Zoowel, uit de gelijke- en gelijkvormige driehoeken *A B C* en *A D C*, als uit de gelijke- en gelijkvormige driehoeken *A B D* en *B C D*, volgt: dat *A B* $=$ *C D* en *A D* $=$ *B C* is.

Betoog *van het derde.* Uit het *Gev.* I. *Bep.* blijkt: dat *hoek A* $+$ *hoek B* $= 2$ *R*, en *hoek A* $+$ *hoek D* $= 2$ *R* is; derhalve is V. *Ax. hoek A* $+$ *hoek B* $=$ *hoek A* $+$ *hoek D* is; hiervan *hoek A* $=$ *hoek A* aftrekkende, zoo blijft er, zie IX. *Ax. hoek B* $=$ *hoek D.* — Men betoogt op dezelfde wijze dat *hoek A* $=$ *hoek C* is.

§. 207. I. Gevolg. *In een scheefhoekig parallelogram zijn twee der overstaande hoeken scherp en de twee andere stomp. Eén dezer stompe hoeken is gelijk aan het supplement van den scherpen hoek.*

§. 208. II. Gevolg. *Al de hoeken, zoowel van eenen regthoek als van een vierkant, zijn regt.* Zie *fig.* 63 en 64.

§. 209. Bijvoegsel. De Lezer oefene zich, in het betoogen der volgende bijgevoegde stellingen.

§ 210. Stelling A. *Fig.* 66. *De hoekspuntslijnen (A C en B D) van een parallelogram (A B C D) snijden elkander, in het punt van ontmoeting (M), in twee gelijke deelen (A M* $=$ *C M* en *B M* $=$ *D M).* Ditzelfde geldt van eenen regthoek en vierkant. *Fig.* 63 en 64.

§. 211. Stelling B. *Fig.* 66. *De lijn (E F), getrokken door het punt (M), in hetwelk de hoekpuntslijnen (A C* en *B D) van een parallelogram (A B C D) elkander doorsnijden, wordt door dit punt (M) in twee gelijke deelen (E M* $=$ *F M) verdeeld; en die lijn (E F) verdeelt het parallelogram (A B C D) in twee gelijke- en gelijkvormige trapeziums (A F E D* en *B C E F).*

§. 212. Stelling C. *Fig.* 62, 63 en 64. *In een scheefhoekig parallellogram is de langste der hoekpuntslijnen die hoekpuntslij.., die de hoekpunten der scherpe hoeken vereenigt; maar de hoekpuntslijnen van eenen regthoek en van een vierkant zijn even lang.*

II.

II. Stelling. (*Het omgek. der voorg. Stell.*) *Fig.* 62.

§. 213. *Wanneer, of de overstaande zijden, of de overstaande hoeken van eenen vierhoek* (*ABCD*) *gelijk zijn; dan is die vierhoek noodzakelijk een parallelogram.*

Betoog *van het eerste.* Laat eene hoekpuntslijn *AC* getrokken worden; dan zijn (omdat *AB* = *CD* en *BC* = *AD* gesteld wordt, en *AC* = *AC* is.) de driehoeken *ABC* en *ACD* (XIII. *Stell.* I. *B.*) gelijk- en gelijkvormig; daarom is *hoek BAC* = *hoek ACD*, en *hoek BCA* = *hoek CAD*; de lijnen *AB* en *CD*, alsmede de lijnen *AD* en *BC*, worden dan, door eene derde lijn *AC*, zoodanig gesneden, dat de inwendig verwisselende hoeken gelijk zijn; de zijde *CD* is dan (XXVII. *Stell.* I. *B.*) evenwijdig aan *AB*, en *BC* aan *AD*; de vierhoek *ABCD* is bijgevolg (I. *Bep.*) een parallelogram.

Betoog *van het tweede.* Omdat, uit de onderstelling, *hoek A* = *hoek C*, en *hoek B* = *hoek D* is; zal (VIII. *Ax.*) *hoek A* + *hoek B* = *hoek C* + *hoek D* zijn; hier bij tellende, *hoek A* + *hoek B*; zal (VIII. *Ax.*) tweemaal de som der hoeken *A* en *B* gelijk aan de som van al de hoeken des vierhoeks zijn; dat is, (*Gev.* XIX *Stell* I. *B*) gelijk aan vier regte hoeken: de som der hoeken *A* en *B* is dan (XIII. *Ax.*) gelijk aan twee regte hoeken; de zijde *AD* is dan (XXVII. *Stell* I. *B.*) evenwijdig aan *BC*. Op dezelfde wijze volgt: dat *AB* evenwijdig aan *CD* is; de vierhoek *ABCD* is dan, (I. *Bep.*) ook onder die voorwaarde, een parallelogram.

III. Stelling. *Fig.* 66.

§. 214. *Parallelogrammen* (*ABCD en EFGH*), *welke, onder gelijke zijden* (*AB, AD en EF, EH*) *en gelijke hoeken* (*A en E*), *zijn zamengesteld, zijn gelijk- en gelijkvormig.*

Betoog. Laat het parallelogram *EFGH* gelegd worden op het parallelogram *ABCD*, zoodanig, dat het punt *E* in het punt *A*, en de lijn *EF* langs de lijn *AB* valle; dan zal, omdat *AB* = *EF* is (XVIII. *Bep.* I. *B.*) het punt *F* in het punt *B* vallen; en, omdat *hoek E* = *hoek A* is, zal (XX. *Bep.* I. *B.*) de zijde *EH* langs de zijde *AD* vallen en dewijl ook *EH* = *AD* is, zoo zal het punt *H* in het punt *D* vallen. Nu is (zie *Gev.* I. *Bep.*) *hoek A* + *hoek D* = *hoek E* + *hoek H* = 2 *R*; hiervan aftrekkende *hoek A* = *hoek E* (*onderst.*), blijft er over *hoek D* = *hoek H* en daarom (I. *Stell.*) ook *hoek B* = *hoek F*; de zijden *FG* en *HG* vallen dan (XX. *Bep.* I. *B.*) langs de zijden *BC* en *CD* en het punt *G* in het punt *C*; de parallelogrammen zijn daarom (II. *Ax.*) gelijk- en gelijkvormig.

§. 215. Gevolg. *Alle regthoeken, zamengesteld onder gelijke lijnen, en alle vierkanten, beschreven op gelijke zijden, zijn gelijk.*

Uit

Uit dit laatste kan men betoogen: *dat gelijke vierkanten noodzakelijk gelijke zijden moeten hebben.*

IV. Stelling. *Fig.* 67.

§. 216. *Wanneer ééne der zijden (A B) van een parallelogram, (A B C D) in een zeker aantal gelijke deelen verdeeld is; dan zullen de lijnen (E H, F I, G K), welke door de deelpunten (E, F, G) evenwijdig aan de andere zijden (A D of B C) des parallelograms getrokken worden, hetzelve in even zoo veel gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen (A E H D, E F I H, F G K I, G B C K) verdeelen, als er deelen in deze zijde (A B) genomen zijn.*

Betoog. Want, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen *E H*, *F I*, *G K*, zijn (I. *Bep.*) de deelen der figuur parallelogrammen, welke (I. *Stell.* en *onderst.*) onder gelijke zijden, en (XXVI. *Stell. I. B.*) onder gelijke hoeken zijn zamengesteld; en bijgevolg (III. *Stell.*) gelijken gelijkvormig zijn; zijnde voorts deze gelijke parallelogrammen klaarblijkelijk zooveel in aantal, als er deelen in de zijde *A B* genomen zijn.

V. Stelling. *Fig.* 68.

§. 217. *Wanneer twee aan elkander liggende zijden (A B en A D) van een parallelogram (A B C D); de eerste (A B) in p, en de tweede (A D) in q in gelijke deelen verdeeld is; en, door de deelpunten (E, F, G, H) der ééne zijde (A B), lijnen, evenwijdig aan de andere zijde (A D), en, door de deelpunten (I, L, N) der andere zijde (A D), lijnen, evenwijdig aan de eerste (A B) getrokken worden; dan zal het parallelogram (ABCD) in een aantal van p × q gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen (AEPI, EFQP, enz.) verdeeld zijn.*

Betoog. Want het parallelogram *A B C D* wordt, door de lijnen, welke door *E*, *F*, *enz.* evenwijdig aan *A D* getrokken worden, (IV. *Stell.*) in *p* gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen, en elk dezer wordt wederom, door de evenwijdige *I K*, *L M*, *N O*, in *q* gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen verdeeld: het geheel is derhalve in *p* × *q* (elk aan het parallelogram *A E P I* gelijk zijnde) gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen verdeeld.

VI. Stelling. *Fig.* 69.

§. 218. *Wanneer de lengte (E F) van eenen regthoek (E F G H) tot de zijde (A B) van een vierkant (A B C D), in dezelfde reden staat, als een getal p tot een getal q; en de breedte (F G) van dien-*

dienzelfden regthoek tot de zijde (BC) van datzelfde vierkant, als het getal r tot het getal s; dan zal de inhoud van den regthoek (EFGH) tot dien van het vierkant (ABCD), in dezelfde reden staan, als het product $p \times r$ tot het product $q \times s$.

BETOOG. Want, omdat $EF : AB = p : q$ is, zoo zullen er (*Aanm.* IX. *Bep.* II. *B.*) in EF een aantal van p, en in AB een aantal van q gelijke deelen kunnen genomen worden; en, omdat $FG : BC = r : s$ is, zullen er in FG een aantal van r, en in BC een aantal van s gelijke deelen moeten bestaan. Indien men nu, zoowel in den regthoek, als in het vierkant, door de deelpunten, evenwijdige lijnen aan de zijden trekt; dan zullen er (V. *Stell.*), in den regthoek $EFGH$, een aantal van $p \times r$, en, in het vierkant $ABCD$, een aantal van $q \times s$ regthoeken ontstaan, die in beide figuren gelijk- en gelijkvormig zijn; gevolgelijk (*Aanm.* IX. *Bep.* II *B.*) zal de inhoud van den regthoek $EFGH$ tot den inhoud van het vierkant $ABCD$ zijn, als het getal $p \times r$ tot het getal $q \times s$; of, dat hetzelfde is: *de inhoud van den regthoek EFGH staat tot den inhoud van het vierkant ABCD, in de zamengestelde reden van p tot q en van r tot s.*

§. 219. I. GEVOLG. Men zal dan, wanneer de betrekkingen van elke zijde des regthoeks tot de zijde van het vierkant, in getallen, gegeven zijn, altijd de betrekking van de inhouden dezer figuren tot elkander, in getallen, kunnen bepalen. *Zijn de gegevene betrekkingen meetbaar; dan is ook die der inhouden meetbaar; zoo niet, dan zal de betrekking van den inhoud van den regthoek tot dien van het vierkant slechts ten naaste bij in getallen bepaald kunnen worden.*

§. 220. II. GEVOLG. Omdat

$$regth.\ EFGH : vierk.\ ABCD = pr : qs$$

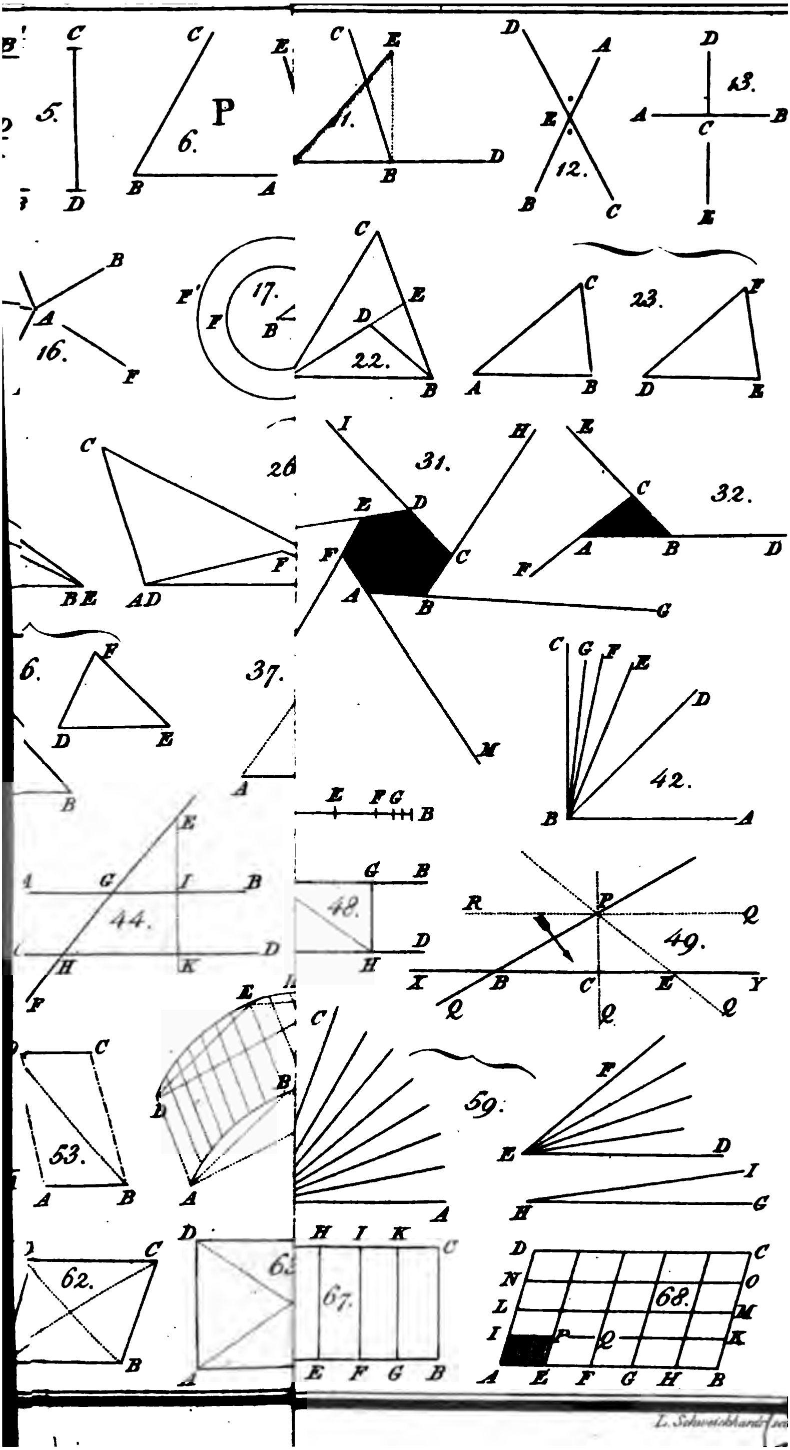
is, zoo zal (V. *Stell* II. *B*)

$$qs \times regth.\ EFGH = pr \times vierk.\ ABCD$$

zijn; en, wanneer men deze vergelijking door het getal qs deelt; dan zal (zie XIII. *Ax.*)

$$regth.\ EFGH = \frac{pr}{qs} \times vierk.\ ABCD$$

zijn. Nu is $\frac{pr}{qs} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s}$; maar de breuken, $\frac{p}{q}$ en $\frac{r}{s}$, zijn eigenlijk de betrekking van de zijden des regthoeks tot de zijde van het vierkant; en deze zijn, of eigenlijke breuken, of geheele getallen, naar dat de zijde van het vierkant een onevenmatig of evenmatig deel van de zijden van den regthoek is; *wanneer men derhalve de geheele of gebrokene getallen, welke de verhouding, of de betrekking, van de zijde eens vierkants op of tot de twee zijden van eenen regt-*


5.
6.
P
11.
12.
13.
16.
17.
22.
23.
31.
32.
6.
37.
42.
44.
48.
49.
53.
59.
62.
67.
68.
L. Schwatchhardt sc

regthoek uitdrukken, met elkander vermenigvuldigt; dan zal het product de verhouding of de betrekking van dit vierkant op of tot dien regthoek bepalen.

§. 221. III. GEVOLG. Omdat dan de betrekking van een gegevenen regthoek tot een gegeven vierkant, door de vermenigvuldiging van geheele of gebrokene getallen, gevonden wordt, zoo zegt men, bij bekorting: *de inhoud van eenen regthoek is gelijk aan deszelfs lengte met deszelfs breedte vermenigvuldigd;* eene fpreekwijs, welke (aangezien geene lijnen, maar wel getallen, met elkander vermenigvuldigd worden,) altijd moet uitgelegd en verftaan worden, als zoo even, in het voorgaande gevolg, verklaard is.

§. 222. IV. GEVOLG. *De inhouden der vierkanten, befchreven op lijnen, welke in reden, als de getallen,* 1, 2, 3, 4, enz. *n, of p, zijn, ftaan tot elkander, als de tweede magten dezer getallen: dat is, als* 1, 4, 9, 16, enz. n^2, *of* p^2.

§. 223. V GEVOLG. *De inhoud van eenen regthoek, in vierkante éénheden, en de lengte van ééne zijner zijden, in lengte-éénheden, gegeven zijnde, zoo zal men de andere zijde des regthoeks, in éénheden der lengte-maat, vinden, wanneer men deszelfs gegevenen inhoud door de gegevene zijde deelt.*

§. 224 VI GEVOLG. *De inhoud van een vierkant, in vierkante éénheden, gegeven zijnde, zoo zal men vinden: hoeveelmaal de éénheid der lengte-maat in de zijde van dit vierkant begrepen is, door uit dit gegeven getal vierkante éénheden den vierkantswortel te trekken.* Zie, wegens deze worteltrekking, *Allereerfte Gronden der Cijferk.*, LI. *Les*, § 823. *en verv.*

§ 225. AANMERKING. *De Meetkunftenaars houden*, omdat gelijke vierkanten, in de lengte en breedte, aan elkander fluiten, *het vierkant als de natuurlijke en eigenaardige maat der vlakken;* en verkiezen, onder alle vierkanten, *het vierkant, op de lengte-maat* befchreven. De thans aangenomen lengte-maat is de METER (*A. G. d. C.* XXXII. *Les*); die der vlakte-maat is derhalve *het vierkant, op den meter befchreven.* Men noemt dit vierkant, *vierkanten meter*, welke in honderd vierkante decimeters; de vierkante decimeter in honderd vierkante centimeters, de vierkante centimeter in honderd vierkante millimeters verdeeld wordt. Laat nu, *fig.* 69, $EF = 17^m, 37$ en $GF = 6^m.83$ zijn; dan zal de inhoud van den regthoek $EFGH = EF \times FG = 17^m, 37 \times 6^m, 83 = 118,6371$ vierkante meters, of 118 vierkante meters, 63 vierkante decimeters en 71 vierkante centimeters zijn.

§. 226. IX. Bepaling. Omdat de inhoud van eenen regthoek, voorgesteld in een aantal vierkanten, op de lengte-maat beschreven, gevonden wordt, wanneer men de getallen, die de verhouding van de lengte-maat op de zijden, (de lengte en de breedte) onder welke hij is zamengesteld; en de inhoud van een vierkant, door de tweede magt van het getal, dat de zijde voorstelt; zoo zal men, in het vervolg, meestal, om den inhoud van den regthoek $ABCD$, *fig.* 63, voor te stellen, schrijven $AB \times BC$, of $AB \times AD$, of $AD \times DC$, of $CD \times BC$; en den inhoud van het vierkant $ABCD$, *fig.* 64, door AB^2 of AD^2, of BC^2 of CD^2. Wanneer, *fig.* 70, in de lijn AB, een punt C genomen is; *dan zal* $AB \times BC$ *beteekenen den inhoud van den regthoek, onder de geheele lijn* AB *en het stuk* BC; $AB \times AC$ *den inhoud van den regthoek, onder de geheele lijn* AB *en het stuk* AC; $AC \times BC$ *den inhoud van den regthoek, onder de deelen van die lijn zamengesteld*; AB^2 *den inhoud van het vierkant, op de lijn* AB *beschreven*; enz.

§. 227. X. Bepaling. De *hoogte* van een parallelogram is de afstand van eenig punt der bovenzijde tot de basis, of derzelver verlengde. Omdat nu (XXXVIII. *Stell.* I. *B.*), waar men, in de bovenzijde van een parallelogram, of derzelver verlengde, een punt aanneemt, de afstand van dit punt tot de basis dezelfde lengte heeft; *zoo kan men, om de hoogte van eenig parallelogram te bepalen, daartoe elk punt in de bovenzijde aannemen. Van eenen regthoek is ééne der opstaande zijden de hoogte van den regthoek.* De *hoogte* van eenen driehoek is de afstand van het toppunt tot de basis, of tot het verlengde van dezelve.

VII. Stelling. *Fig.* 71 *en* 72.

§. 228. *De inhouden van alle parallelogrammen* ($ABCD$ *en* $ABEF$), *welke, op dezelfde basis* (AB) *en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen* (AB *en* DE), *geplaatst zijn, of, zie* X. Bep., *dezelfde hoogte hebben, zijn gelijk.*

Betoog. *Fig.* 71 en 72. Omdat (*onderst.*) de vierhoek $ABCD$ een parallelogram is, zoo is (I. *Bep.*) BC evenwijdig aan AD; en, omdat $ABEF$ een parallelogram is, zoo is, om dezelfde reden, BE evenwijdig aan AF; derhalve is (XXX. *Stell.* I. *B.*) *hoek* CBE = *hoek* DAF. Wij hebben derhalve, in de driehoeken ADF en BCE, vooreerst *hoek* DAF = *hoek* CBE, en volgens I. *Stell.* $AD = BC$ en $AF = BE$; daarom is, zie X. *Stell.* I. *B.*, in *fig.* 71,

drieh.

drieh. *ADF* = *drieh.* *BCE*
tel bij *vierh.* *ABCF* = *vierh.* *ABCF*
dan is *parallgr.* *ABCD* = *parallgr.* *ABEF*, *fig.* en VIII. *Ax.*

Maar, in *fig.* 72, moet men aldus redeneren:

drieh *ADF* = *drieh.* *BCE*, *bewezen.*
neem af, *drieh* *CGF* = *drieh.* *CGF*
dan is, *vierh.* *AGCD* = *vierh.* *BGFE*, *fig.* en IX. *Ax.*
tel bij *drieh.* *ABG* = *drieh.* *ABG*
dan wordt *parallgr* *ABCD* = *parallgr.* *ABEF*, *fig.* en VIII. *Ax.*

§. 229. Aanmerking Wij hebben, in onze *Handleiding tot de Besch. en Werkd. Meetk.* §. 272, aangetoond: hoe men één der twee parallelogrammen in stukken verdeelen kan, welke, door eene geschikte verplaatsing, de ruimte van het andere parallelogram kunnen vervullen. Het is nuttig, dat men de waarheid eener stelling, waarop bijna het geheele zamenstel der Meetkunst berust, ook, op deze wijze, proefmatig aan het verstand van den eerstbeginnenden doe gevoelen.

§. 230. Gevolg. Onder alle parallelogrammen, die gelijke bases en gelijke hoogten hebben, is er één, dat regthoekig is: *in dezen regthoek, wordt de basis de lengte, en de breedte de hoogte.* Omdat nu de inhoud van eenen regthoek (II. *Gev.* VI. *Stell.*) gelijk is aan zijne lengte met zijne breedte vermenigvuldigd, *zoo zal de inhoud van een parallelogram gelijk zijn aan zijne basis, vermenigvuldigd met deszelfs hoogte.*

Voorbeeld. Zij gegeven, de basis *AB* = 18^m,3 en de hoogte = 11^m,3; dan zal de inhoud = 206,79 *vierkante meters* bedragen.

VIII. Stelling. *Fig.* 73.

§. 231. *Wanneer, op dezelfde basis* (*AB*), *een parallelogram* (*ABCD*) *en een driehoek* (*ABE*) *geplaatst zijn, onder die bepaling, dat het toppunt* (*E*) *van den driehoek* (*ABE*) *in de bovenzijde* (*CD*) *van het parallelogram, of in het verlengde van dezelve, valt* (zoodat het parallelogram en de driehoek dezelfde hoogte hebben); *dan zal de inhoud van den driehoek* (*ABE*) *gelijk zijn aan de helft van den inhoud van het parallelogram* (*ABCD*).

Betoog. Men trekke *AF* evenwijdig aan *BE*; dan is (*onderst. en I Bep.*) *ABEF* een parallelogram, hetwelk met het parallelogram *ABCD* op dezelfde basis *AB* staat, en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen *AB* en *DE* geplaatst is; wij hebben derhalve:

parallgr. *ABEF* = *parallgr.* *ABCD*, VII. *Stell.*
½ *parallgr.* *ABEF* = ½ *parallgr.* *ABCD*, XIII. *Ax.*

maar ½ *parallgr.* $ABEF$ = *drieh.* ABE, I. *Stell.*
derh. *drieh.* ABE = ½ *parallgr.* $ABCD$. V. *Ax.*

§. 232. Gevolg. *Fig.* 73. Omdat de inhoud van het parallelogram $ABCD = AB \times EG$ is, zoo zal de inhoud van den driehoek $ABC = \frac{1}{2} AB \times EG$ zijn. *De inhoud van eenen driehoek is dan gelijk aan de helft van zijne basis, vermenigvuldigd met zijne hoogte: of, aan het halve product van de basis, vermenigvuldigd met de hoogte.* Men merke wel op: *dat elke zijde van den driehoek tot basis kan worden aangenomen en de loodlijn, die, uit het overstaande hoekpunt, op die zijde valt, tot hoogte.*

Laat, bij voorbeeld, $AB = 16^m,5$, $EG = 18^m,4$ zijn; dan is inhoud driehoek $ABC = \frac{1}{2} AB \times EG = \frac{1}{2} \times 16,5 \times 18,4 = 151,8$ *vierkante meters.*

IX. Stelling. *Fig.* 74.

§. 233. *De inhouden van alle driehoeken* (ABC *en* ABD), *die op dezelfde basis* (AB) *staan en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen* (AB *en* DE) *liggen, of dezelfde hoogte hebben, zijn gelijk.*

Betoog. Men trekke, uit het punt B, de lijnen BE en BF, evenwijdig aan AC en AD; dan zijn (*onderst.* en I. *Bep.*) de vierhoeken $ABEC$ en $ABFD$ parallelogrammen; wij hebben derhalve:

parallgr. $ABEC$ = *parallgr.* $ABFD$, VII. *Stell.*
en ½ *parallgr.* $ABEC$ = ½ *parallgr.* $ABFD$, XIII. *Ax.*
maar nu is, zie I. *Stell.*
½ *parallgr.* $ABEC$ = *drieh.* ABC
en ½ *parallgr.* $ABFD$ = *drieh.* ABD
derh. wordt *drieh.* ABC = *drieh.* ABD, V. *Ax.*

§. 234. Leering. Uit het betoogde, in de drie laatste stellingen, blijkt (en het zal uit de volgende XV. *Stelling* nog nader blijken), *dat er uitgebreidheden, onder denzelfden inhoud en verschillende gedaanten, kunnen bestaan. Zulke figuren hebben wel denzelfden inhoud, (zijn wel gelijk); maar zij hebben niet dezelfde gedaante (zij zijn niet gelijkvormig).*

X. Stelling. (*Het omgek. van de IX Stell.*) *Fig.* 75.

§. 235. *De toppunten* (C *en* D) *der driehoeken* (ABC *en* ABD), *die op dezelfde basis* (AB) *staan, en gelijke inhouden hebben, liggen in eene lijn* (CD), *die evenwijdig aan de gemeenschappelijke basis* (AB) *loopt.*

Be-

Betoog. Want, indien de lijn CD niet evenwijdig is aan AB; dan zal men door het punt C, eene lijn CE, evenwijdig aan AB, kunnen trekken. Indien men dan de zijde BD tot aan E verlengt, en de lijn AE trekt; dan zal (IX. *Stell.*) *driehoek* ABE = *driehoek* ABC zijn: maar *driehoek* ABC is (*onderst.*) = *driehoek* ABD; derhalve zal (V. *Ax.*) *driehoek* ABD = *driehoek* ABE zijn; dat is, het gedeelte zal aan het geheel gelijk zijn; daar zulks nu (IV. *Ax.*) onmogelijk is, zoo kan de lijn CE, of eenige andere dan de lijn CD, niet evenwijdig aan AB zijn. De lijn CD is derhalve noodzakelijk evenwijdig aan AB.

§. 236. XI. Bepaling. Eene *meetkunstige plaats* is de aaneenschakeling of geregelde zamenhang van alle punten, in eene regte of kromme lijn, en ook in een plat of gebogen vlak gelegen zijnde, die alle, op dezelfde wijze, bepaald zijn; of aan dezelfde voorwaarde voldoen.

Voorbeelden. 1°. *De plaats van alle punten*, A, B, C, D, (fig. 3.) *welke, in eene platte vlakte, van een bepaald punt M even ver verwijderd zijn, is de omtrek van eenen cirkel.* 2°. *De plaats van alle punten, welke, in eenige vlakte, van twee punten* A *en* B, (fig. 37), *in die vlakte gelegen, even ver afstaan, is* (*zie* XX. Stell. I. B), *de onbepaalde lijn* CD, *welke de lijn* AB *midden door deelt en loodregt op dezelve staat.* 3°. *De plaats van alle punten, die, in eenige vlakte, van eenige lijn, in die vlakte gelegen, denzelfden afstand hebben, is eene lijn, die evenwijdig aan die lijn loopt.*

§. 337. Gevolg. Uit deze bepaling, en het betoogde van de X. *Stelling*, blijkt: *dat de plaats van de toppunten van alle driehoeken, die op dezelfde basis staan, en denzelfden inhoud hebben, eene onbepaalde regte lijn is, die aan die gemeenschappelijke basis evenwijdig loopt.*

XI. Stelling. *Fig. 76 en 77.*

§. 238. *De inhouden der parallelogrammen, die gelijke hoogte hebben, staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne bases.* Dat is: zie *fig.* 76.

$$\text{parallgr. } ABCD : \text{parallgr. } EFGH = AB : EF.$$

Betoog. I. Geval. *Fig.* 76. Indien de bases AB en EF onderling meetbaar zijn; dan hebben zij (VII. *Bep.* II *B.*) eene gemeene maat M, welke een evenmatig deel van AB, en tevens een evenmatig deel van EF zal moeten zijn. Laat dit evenmatige deel p-maal in AB, (in de figuur zevenmaal,) en q-maal in EF (in de figuur tienmaal,) begrepen zijn; dan zal men in de basis AB, p; en, in de basis CD, q deelen, elk gelijk aan M, nemen kunnen. Laten nu, in beide parallelogrammen, door de deelpunten der bases, lijnen, evenwijdig aan de opstaande zijden,

in *ABCD*, aan *AD*, en, in *EFGH*, aan *EH* getrokken worden; dan zal (III. *Stell.*) het parallelogr *ABCD* in *p* parallelogr. elk gelijk aan *AIKD*; en het parallelogr. *EFGH* in *q* parallelogr. elk gelijk aan *ELMH* verdeeld zijn; zijnde $AI = EL = M$. De parallelogrammen *AIKD* en *ELMH* hebben nu, met de geheele parallelogrammen, waarvan zij deelen zijn, dezelfde hoogte; doch deze geheele parallelogrammen hebben (*onderst.*) gelijke hoogte; de parallelogrammen *AIKD* en *ELMH* hebben dan gelijke bases en gelijke hoogten; zij hebben derhalve (VII. *Stell.*) een gelijken inhoud: elk dezer parallelogrammen kan dus als eene gemeene maat der parallelogrammen *ABCD* en *EFGH* worden aangemerkt; daar nu blijkt: dat die gemeene maat op elk der parallelogrammen, *ABCD* en *EFGH*, zooveelmaal begrepen moet zijn, als de gemeene maat der bases op elke basis, zoo zijn (*Aanm.* IX. *Bep.* II. *B.*) de inhouden dezer parallelogrammen, in dezelfde reden, als hunne bases.

II. GEVAL. *Fig.* 77. Laten, op twee bases, zijnde de lijnen, *A* en *B*, twee parallelogrammen *P* en *Q*, die gelijke hoogten hebben, (onder gelijke hoeken *A* en *B*) zijn zamengesteld; en stellen wij: dat deze bases onderling onmeetbaar zijn.

Men mete de basis *A* met de basis *B*. Stel: dat *B* in *A* begrepen zij *a* malen, en dat er dan nog de lijn *C*, kleiner dan *B*, overblijve; dan hebben wij: $A = aB + C$. Wanneer men nu op de lijn *A*, *a* deelen heeft genomen, en door de deelpunten lijnen getrokken, die evenwijdig aan de opstaande van het parallelogram *P* loopen; dan zal het parallelogram *P* in *a* parallelogrammen zijn verdeeld, die alle aan het parallelogram *Q* gelijk zijn, en zal er nog van het parallelogram *P* het parallelogram *R* overblijven, hetwelk de lijn *C* tot basis zal hebben. Wij hebben dus: *parallgr.* $P = a \times$ *parallgr.* $Q +$ *parallgr.* R.

Men mete de lijn of basis *B* met de basis *C*. Stel, dat $B = bC + D$ zij; dan zal men, wederom als in de voorgaande uitmeting te werk gaande, vinden: *parallgr.* $Q = b \times$ *parallgr.* $R +$ *parallgr.* S.

Wederom mete men de basis *C* met de basis *D*. Stel, dat men verkrijge $C = cD + E$; dan zal men tevens verkrijgen: *parallgr.* $R = c \times$ *parallgr.* $S +$ *parallgr.* T.

Men ga op dezelfde wijze voort, en mete de basis *D* met de basis *E*; dan zal men verkrijgen: $D = dE + F$; en *parallgr.* $S = d \times$ *parallgr.* T $+$ *parallgr.* U.

Op deze wijze zal men kunnen voortgaan, tot dat, men eindelijk, de basis *A* en *B* onderling meetbaar zijnde, eene gemeene maat van dezelve zal ontdekken. Het parallelogram, dat op de laatste basis staat, zal dan de gemeene maat der twee parallelogrammen *P* en *Q* zijn.

Maar zijn de basis *A* en *B*, zoo als hier wezenlijk onderfteld wordt, onderling onmeetbaar; dan zal men, met die regelmatige uitmeting tot in het oneindige voortgaande, ten klaarste inzien, dat de inhouden der parallelogrammen *P* en *Q* zoo min eene gemeene maat zullen hebben, als hunne bases *A* en *B*.

Uit

Uit den regelmatigen voortgang dezer uitmeting, zal verder van zelf blijken: dat de betrekkingswijzer van de bases

$$\left\{\begin{matrix} A, B, C, D, E, F, G, H, \text{enz.} \\ a, b, c, d, e, f, g, \text{enz.} \end{matrix}\right\}$$

zijnde, de betrekkingswijzer van de inhouden der parallelogrammen, op die bases beschreven, blijkens het reeds verklaarde, noodzakelijk zal zijn:

$$\left\{\begin{matrix} P, Q, R, S, T, U, V, W, \text{enz.} \\ a, b, c, d, e, f, g, \text{enz.} \end{matrix}\right\}$$

In het meetbare geval, zijn dan de wijzergetallen van beide wijzers dezelfde, en even veel in aantal; maar, in het onmeetbare geval, zullen de wijzergetallen, in beide wijzers, tot in het oneindige, dezelfde zijn; volgens VII. *Bep.* II. *B.*, zijn dan ook, in dit geval, de inhouden der parallelogrammen *P* en *Q*, in dezelfde reden, als hunne bases *A* en *B*.

XII. Stelling. *Fig.* 78.

§. 239. *De inhouden der parallelogrammen (ABCD en EFGH), welke gelijke bases (AB en EF) hebben, staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne hoogten (AK en EL).* Dat is:

$$\textit{parallgr. } ABCD : \textit{parallgr. } EFGH = AK : EL.$$

Betoog. Men trekke *AK* en *BI* loodregt op *AB*, en *EL* en *FM* loodregt op *EF*; dan zijn (XXIII. *Stell.* I. *B.* en III. *Bep.*) *ABIK* en *EFML* regthoeken, welke, met de parallelogrammen *ABCD* en *EFGH*, op dezelfde bases en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen staan; *regthoek ABIK* is dan (VII. *Stell.*) gelijk *parall. ABCD*, en *regth. EFML* gelijk *parall. EFGH*. Nu kan men *AK* en *EL* als de bases van de regthoeken *ABIK* en *EFML* aanmerken, welke alsdan (*onderst.*) de gelijke hoogten *AB* en *EF* zullen hebben: men heeft dan (XI. *Stell.*)

$$\textit{regth. } ABIK : \textit{regth. } EFML = AK : EL$$

dat is, wegens de betoogde gelijkheid der regthoeken met de parallelogrammen,

$$\textit{parallgr. } ABCD : \textit{parallgr. } EFGH = AK : EL.$$

XIII. Stelling. *Fig.* 79.

§. 240. *De inhouden der parallelogrammen (ABCD en EFGH), die ongelijke bases en ongelijke hoogten hebben, staan tot elkander, in de zamengestelde reden van hunne bases en hoogten.* Dat is:

$$\textit{parallgr. } ABCD : \textit{parallgr. } EFGH = AB \times CI : EF \times HK.$$

Betoog. Indien men aan de parallelogrammen *ABCD* en *EFGH* dezelfde hoogten *CI* en *HK*, laat behouden; maar hunne bases verandert; dan zullen (XI. *Stell.*) derzelver inhouden in dezelfde reden van de bases grooter of kleiner worden. Laat men daarentegen de bases *AB* en *EF* onveranderd, en verandert men de hoogten; dan zullen (XII. *Stell.*)

Stell.) de inhouden in dezelfde reden als de hoogten veranderen; gevolgelijk zullen (zie XXII. *Bep.* II. *B.*) de inhouden der parallelogrammen in de zaméngestelde reden van de bases en de hoogten zijn.

XIV. Stelling. *Fig.* 79.

§. 241. *De inhouden van twee driehoeken* (*ABC en EFH*) *staan tot elkander, als hunne bases* (*AB en EF*), *indien de hoogten* (*CI en HK*) *gelijk zijn; of, als hunne hoogten* (*CI en HK*), *wanneer de bases gelijk zijn; of, beide ongelijk zijnde, in de zamengestelde reden van hunne bases en hoogten.*

Betoog. Men trekke AD aan BC en CD aan AB evenwijdig; verder FG aan EH en HG aan EF evenwijdig; dan zijn, I *Bepaling*, $ABCD$ en $EFGH$ parallelogrammen; en dan is *parallgr.* $ABCD =$ 2 *drieh.* ABC en *parallgr.* $EFGH = 2$ *drieh.* EFH (I. *Stell.*)

1°. Indien nu $CI = HK$ is; dan is

parallgr. $ABCD$: *parallgr* $EFGH = AB : EF$, XI. *Stell.*

of 2 *drieh.* ABC : 2 *drieh.* $EFH = AB : EF$

derhalve *drieh* ABC : *drieh.* $EFH = AB : EF$, VI. *Stell.* II. *B.*

2°. Indien verder, in de parallelogrammen, $AB = EF$ is; dan is

parallgr. $ABCD$: *parallgr.* $EFGH = CI : HK$, XII. *Stell.*

of 2 *drieh* ABC : 2 *drieh.* $EFH = CI : HK$

derhalve *drieh.* ABC : *drieh.* $EFH = CI : HK$, VI. *Stell.* II. *B.*

3°. Eindelijk is, in het algemeen:

parallg. $ABCD$: *parallgr.* $EFGH = AB \times CI : EF \times HK$, XIII. *St.*

of 2 *drieh.* ABC : 2 *drieh.* $EFH = AB \times CI : EF \times HK$

derh. *drieh.* ABC : *drieh.* $EFH = AB \times CI : EF \times HK$, VI. *St* II. *B.*

§. 242. I Gevolg. *Fig* 80. *Wanneer men, uit het toppunt* (*C*) *van genen driehoek* (*ABC*), *tot aan eenige punten* (*D, E, F*) *van de basis* (*AB*), *lijnen* (*CD, CE, CF*) *trekt; dan zal die driehoek* (*ABC*) *in even zoo veel andere driehoeken* (*ACD, DCE, ECF, FCB*) *worden verdeeld, als er deelen* (*AD, DE, EF, FB*) *in de basis bestaan; en zullen die driehoeken tot elkander in reden, als de deelen dezer basis, zijn:* dat is

(*drieh.* ADC, *drieh.* DCE, *drieh.* ECF, *drieh.* FCB) : :
(AD, DE, EF, FB).

Want al die driehoeken hebben, daar zij, met hunne toppunten, in hetzelfde punt C, zamen komen, dezelfde hoogten, en staan derhalve in dezelfde reden, als hunne bases.

§. 243. II. Gevolg. *Wanneer twee parallelogrammen, of twee driehoeken, een gelijken inhoud hebben; dan zijn hunne bases, in de omgekeerde reden van derzelver hoogten.*

Want, wanneer men de basis van eenen driehoek twee, drie, *n*-maal groo-

grooter maakt; dan moet men, om denzelfden inhoud te behouden, de hoogte in dezelfde reden verminderen; dat is gelijk aan de helft, één-derde, één-n^{de} van die des gegevenen driehoeks nemen; de hoogten zijn dan (XXI. *Bep.* II. *B.*) in de omgekeerde reden van de bases.

XV. STELLING. *Fig* 81.

§. 244. ***Tot elke veelhoekige figuur (ABCDE) kan eene andere (AFDE), van denzelfden inhoud zijnde, en ééne zijde minder hebbende, gevonden worden.***

BETOOG. Want, indien men ééne van de zijden *AB* des gegevenen veelhoeks *ABCDE* verlengt, en, uit het hoekpunt *B* van den hoek, aan deze zijde liggende, éénen hoek *C* tusschen beide latende, de hoekpuntslijn *BD* trekt; en voorts, door het hoekpunt *C* van den tusschen beiden liggenden hoek *C*, de lijn *CF*, evenwijdig aan *BD*; *dan zal*, nadat de lijn *DF* getrokken is, *de vierhoek AFDE gelijk aan den vijfhoek ABCDE zijn.* Want; omdat de driehoeken *BFD* en *BCD* op dezelfde basis *BD* en tusschen dezelfde evenwijdige lijnen *BD* en *CF* staan, zoo zijn (IX. *Stell.*) hunne inhouden gelijk; telt men nu, bij elken dezer gelijke driehoeken, den vierhoek *ABDE*; dan zal (VIII. *Ax.*) de *vierhoek AFDE* = den *vijfhoek ABCDE* zijn.

§. 245. AANMERKING. *Wanneer een veelhoek een grooter aantal zijden en hoeken heeft, zal men denzelven nogtans altijd, op dezelfde wijze, in eenen anderen veelhoek, van denzelfden inhoud en ééne zijde minder hebbende, veranderen kunnen; en, daar men elken nieuw verkregen veelhoek wederom, op dezelfde wijze, zal kunnen behandelen, zoo zal men eindelijk tot eenen driehoek komen, welke met den gegevenen veelhoek denzelfden inhoud zal hebben.* Men zal alzoo, door eene herhaling van dezelfde meetkunstige constructie, den inhoud van eenen veelhoek met dien van eenen driehoek, en eindelijk (*Gev. VIII. Stell.*) met dien van eenen regthoek kunnen vergelijken. *Een veelhoek van n zijden zal eindelijk, op zoo vele onderscheidene wijzen, als door het getal* $8 \times 10 \times 12 \times 14 \times$ *enz.* $2(n-2) \times 2(n-1) \times 2n$ *wordt aangewezen, in eenen driehoek veranderd kunnen worden.* Daar men nu, zoo als verder geleerd zal worden, elken driehoek in eenen regthoek, elken regthoek in een vierkant, *enz.* onder denzelfden inhoud, kan veranderen, *zoo is de transformatie of de gedaante verandering der regtlijnige figuren, met behoud van denzelfden inhoud, in allen opzigte mogelijk.*

§. 246. GEVOLG *Fig.* 82. Wanneer men een trapezium *ABCD*, in hetwelk de zijden *AB* en *CD* evenwijdig zijn, zoo als, in de

voorgaande stelling, is voorgeschreven, behandelt; dan zal, omdat CD aan BF, en BD aan CF evenwijdig is, ook (*I. Stell.*) $BF = CD$ zijn; de driehoek AFD, welke (*XV. Stell.*) aan het trapezium $ABCD$ gelijk is, heeft dan eene basis AF, gelijk zijnde aan de som van de bovenzijde en van de basis des trapeziums; terwijl beide deze figuren dezelfde hoogte DG hebben. Nu is (*Gev. VIII Stell.*) de inhoud van den driehoek $AFD = \frac{1}{2} AF \times DG$; derhalve is:

Inhoud Trap. $ABCD = \frac{1}{2} AF \times DG = \frac{1}{2} (AB + CD) \times DG.$

Voorbeeld. Zij $AB = 27^m,37$; $CD = 20^m,63$ en $DG = 12^m$; dan zal de inhoud van het trapezium $ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD) \times DG = \frac{1}{2} \times (27,37 + 20,63) \times 12 = 288$ *vierkante meters* zijn.

§. 247. Bijvoegsel. *Fig.* 83. Men kan elken veelhoek $ABCDE$, door hoekpuntslijnen te trekken, altijd in een aantal van driehoeken ABE, BCE en CDE verdeelen, welke steeds twee minder zijn, dan het aantal van de zijden dezes veelhoeks. *Wanneer men nu vinden kan: hoeveelmaal de lengte-maat op ééne der zijden van elken driehoek, en op de loodlijn, welke, uit het toppunt van den overstaanden hoek dezes driehoeks, op die zijde valt, begrepen is; dan zal men* (Gev. VIII. Stell.) *ook vinden kunnen: hoeveelmaal de vierkante éénheid op elken driehoek verhouden is? En de som van de inhouden dezer driehoeken zal klaarblijkelijk gelijk zijn aan den inhoud van den geheelen veelhoek.*

Voorbeeld. Laat $BE = 119^m$; $AF = 87^m,5$; verder $CE = 134^m,7$, en $BG = 96^m,3$, en $DH = 51^m,5$ zijn; dan is: (*Gev. VIII. Stell.*)

Drieh. $ABE = \frac{1}{2} BE \times AF = \frac{1}{2} . 119 \times 87,5$	$= 5206,25$	*vierkante meters.*
Drieh. $BCE = \frac{1}{2} CE \times BG = \frac{1}{2} . 134,7 \times 96,3$	$= 6485,805$	
Drieh. $CDE = \frac{1}{2} CE \times DH = \frac{1}{2} . 134,7 \times 51,5$	$= 3468,525$	
Inhoud vijfhoek $ABCDE =$	$15160,58$	*vierkante meters.*

I. Hulpstelling. *Fig.* 84.

§. 248. *Wanneer eene lijn* (AB), *door eenig punt* (C), *in twee gelijke of ongelijke deelen* (AC *en* BC), *verdeeld is; dan is:*

1°. *Het vierkant, op de geheele lijn* (AB), *gelijk aan de som van de regthoeken, onder de geheele lijn* (AB) *en één van derzelver deelen* (AC *of* BC); *dat is:*

$$AB^2 = AB \times AC + AB \times BC \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

2°. *De regthoek, onder de geheele lijn* (AB) *en één van hare deelen*

len (*AC of BC*), *is gelijk aan het vierkant op dit deel* (*AC of BC*), *met den regthoek onder de deelen, te zamen genomen; dat is:*

$$AB \times AC = AC^2 + AC \times BC \quad \ldots \quad (2)$$
$$AB \times BC = BC^2 + AC \times BC \quad \ldots \quad (3)$$

3°. *Het vierkant, op de geheele lijn* (*AB*), *is gelijk aan de som van de vierkanten, op de deelen* (*AC en BC*), *met tweemaal den regthoek, onder die deelen; dat is:*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,AC \times BC \quad \ldots \quad (4)$$

4°. *Tweemaal den regthoek, onder de geheele lijn* (*AB*) *en één van derzelver deelen* (*BC of AC*), *te zamen genomen met het vierkant, op het andere deel* (*AC of BC*), *is gelijk aan het vierkant, op de geheele lijn* (*AB*), *te zamen genomen met het vierkant op het eerst genomen deel* (*BC of AC*); *dat is:*

$$2\,AB \times BC + AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \ldots \quad (5)$$
$$2\,AB \times AC + BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad \ldots \quad (6)$$

BETOOG *van het eerste. Fig.* 85. Laat, op de lijn *AB*, het vierkant *ABDE* zijn beschreven; indien men dan, door het punt *C*, de lijn *CF*, evenwijdig aan *AE*, trekt; dan wordt het vierkant *ABDE* (III *Bep.*) in twee regthoeken *ACFE* en *BCFD* verdeeld. Omdat nu $AE = BD = AB$ (III. *Bep.*) is, zoo is regthoek *ACFE* gelijk aan den regthoek onder *AB* en *AC*, en de regthoek *BCFD* gelijk aan den regthoek onder *AB* en *BC*; aangezien nu deze twee regthoeken *ACFE* en *BCFD* (IV. *Ax.*) te zamen genomen aan het vierkant *ABDE* gelijk zijn, zoo is

$$AB^2 = AB \times AC + AB \times BC \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

BETOOG *van het tweede. Fig.* 86 en 87. Laat, *fig.* 86, op *AB*, een regthoek *ABDE* beschreven worden, welks hoogte $AE = AC$ is; indien men dan, door het punt *C*, de lijn *CF*, evenwijdig aan *AE*, trekt; dan is de regthoek *ABDE* (III. *Bep.*) in twee andere regthoeken *ACFE* en *BCFD* verdeeld, welke (IV. *Ax.*) te zamen genomen, den geheelen regthoek uitmaken; nu is (I. *Stell* en *constr.*) $AE = CF = BD = AC$; derhalve is *regth.* $ACFE =$ *vierk.* op *AC* en *regth.* $BCFD =$ *regth.* onder *AC* en *BC*; dat is

$$AB \times AC = AC^2 + AC \times BC \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Maakt men, in *fig.* 87, op *AB*, eenen regthoek *ABDE*, die $BD = BC$ tot hoogte heeft, en trekt men *CF*, evenwijdig aan *AE*; dan zal het even eens blijken: dat is

$$AB \times BC = BC^2 + AC \times BC \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

BETOOG *van het derde. Fig* 88. Laat, op de lijn *AB*, het vierkant *ABDE* worden beschreven; neem $AF = AC$, en laat, door de punten *C* en *F*, de lijnen *CI* en *FH*, evenwijdig aan *AE* en *AB*, worden getrokken; dan wordt het oppervlak van het vierkant *ABDE* in vier

vier regthoeken $ACGF$, $GHDI$, $BCGH$ en $GIEF$, verdeeld. Uit deze figuur blijkt nu het volgende:

1°. De regthoek $ACGF$ is, omdat $AF = AC$ is, het vierkant op de lijn AC beschreven.

2°. Omdat $AE = AB$ is (*onderst.*) en $AF = AC$ (*constr.*), zoo is (zie IX. *Ax.*) $AE - AF = AB - AC$; of $EF = BC$; maar, volgens de I. *Stell.* is $GI = EF$ en $GH = BC$; derhalve is (V. *Ax.*) $GI = GH = BC$; en de regthoek $GHDI$ gelijk aan het vierkant, op BC beschreven.

3°. Omdat $AF = AC$ is (*constr.*), zoo is (I. *Stell.*) $CG = FC = AC$, en wij hebben gezien: dat $BC = EF$ is; de regthoeken $BCGH$ en $GIEF$ zijn dan, onder gelijke zijden, zamengesteld, en (III. *Stell.*) gelijk- en gelijkvormig; maar elk dezer twee regthoeken is gelijk aan eenen regthoek, die AC tot lengte en BC tot breedte heeft.

Aangezien nu het vierkant $ABDE$ aan de som van de vierkanten $ACGF$ en $GHDI$ met de gelijke regthoeken $BCGH$ en $EFGI$ gelijk is; zoo hebben wij, ingevolge de aangenomene schrijfwijze, en het IV. *Ax.*

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2\,AC \times BC \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Betoog *van het vierde. Fig.* 89 en 90. Laat, in *fig.* 89, welke *fig* 88 afzonderlijk voorstelt, DE en HF zoo ver verlengd worden, dat $ME = NF = EF = DH = GH = BC$ zij; dan is vooreerst $NFEM$ gelijk aan het vierkant op BC beschreven; ten anderen, wanneer men bij $FG = CG$ optelt $NF = GI$, zoo zal (VIII. *Ax.*) $CI = GN = AB$ zijn; de regthoeken $NGIM$ en $BCID$ kunnen derhalve aangemerkt worden, als onder de lijnen AB en BC te zijn zamengesteld, en elk aan $AB \times BC$ gelijk te zijn; nu is, volgens de figuur:

$$\text{regth. } BCID + \text{regth. } GIMN + \text{vierk. } ACGF = \text{vierk. } ABDE + \text{vierk. } FEMN$$

dat is, volgens de aangenomene schrijfwijze, en het zoo even verklaarde:

$$2\,AB \times BC + AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Uit *fig.* 90, zal men, op dezelfde wijze, betoogen: dat is

$$2\,AB \times AC + BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Men zal, indien men voor de deelen van de lijn AB, in getallen, onderscheidene geheele of gebrokene waarden aanneemt, de zes betoogde vergelijkingen, op verschillende wijzen, kunnen beproeven.

II. Hulpstelling. *Fig.* 91.

§. 249. *Het verschil van twee vierkanten is gelijk aan eenen regthoek, welks zijden gelijk zijn aan de som en het verschil van de zijden dezer vierkanten.*

Opheldering. Laten $ABCD$ en $AEFG$ twee vierkanten zijn; dan is derzelver verschil de ruimte, tusschen de lijnen BE, BC, CD, DG, GF en EF begrepen: nu moet men bewijzen: *dat deze ruimte gelijk is*

is aan eenen regthoek, welke de som der zijden, AB en AE, tot lengte, en het verschil dezer zijden, of BE, tot de breedte heeft.

Betoog. Verleng EF tot in H, en verder tot in I; maak $HI = DH = GF = AE$, en trek IK evenwijdig aan AB. Omdat nu (III. *Bep.*) $AB = AD$ en $AE = AG$ is, zoo zal (IX. *Ax.*) $BE = DG$ zijn: maar $BE = CH$ (I. *Stell.*); daar nu (*constr.*) $HI = DH$ is, zoo zal (III. *Stell.*) regthoek $GFHD$ = regthoek $HCKI$ zijn; hierbij tellende regthoek $EBCH$; zoo zal (VIII. *Ax.*) de som der regthoeken $EBCH$ en $GFDH$, (die gelijk aan het verschil der vierkanten op AB en AE is,) gelijk zijn aan den regthoek $EBKI$; dat is, aan den regthoek, welke EI, of de som der zijden AB en AE, tot lengte, en BE, of het verschil der zijden, tot breedte heeft. Men drukt dit aldus uit:

$$AB^2 - AE^2 = (AB + AE) \times (AB - AE).$$

III. Hulpstelling. *Fig.* 92.

§. 250. *Wanneer twee lijnen (AB en AC), elke in een zeker aantal gelijke of ongelijke deelen zijn verdeeld; [de lijn AB, bij voorbeeld. in de deelen AD, DE en EB, en de lijn AC, in de deelen AF, FG, GC], dan is de regthoek onder die lijnen (AB en AC) gelijk aan de som der regthoeken, onder elk deel van de eerste lijn (AB) en elk deel van de andere lijn (AC);* dat is:

$$AB \times AC = \begin{cases} AD \times AF + DE \times AF + BE \times AF \\ AD \times FG + DE \times FG + BE \times FG \\ AD \times CG + DE \times CG + BE \times CG \end{cases}$$

Betoog. Men make, onder de lijnen AB en AC, den regthoek $ABHC$, en trekke, door de deelpunten D, E en F, G, de lijnen DI en EK, evenwijdig aan AC; en FL, GM, evenwijdig aan AB; dan is het oppervlak van den regthoek $ABHC$ in de regthoeken a, b, c, d, e, f, g, h en i, verdeeld, die klaarblijkelijk gelijk zijn aan de regthoeken, $AD \times AF$, $DE \times AF$, $BE \times AF$, $AD \times FG$, $DE \times FG$, $BE \times FG$, $AD \times CG$, $DE \times CG$ en $BE \times CG$; daar nu de som van al die regthoeken aan den geheelen regthoek $ABHC$, of $AB \times AC$, gelijk is, zoo blijkt het gestelde van zelf.

XVI. Stelling. *Fig.* 93.

§. 251. *Het vierkant, op de schuinsche zijde van een regthoekigen driehoek beschreven, is gelijk aan de som van de vierkanten, welke op deszelfs regthoekszijden beschreven zijn.*

Opheldering. Deze stelling is het van ouds beroemde theorema van Pythagoras. Laat, *fig.* 93, ABC een regthoekige driehoek zijn, ABC de regte hoek, AB, BC de regthoekszijden, AC de hypothenusa of schuin-

schuinsche zijde. Laat op *AB* het vierkant *ABDE*, op *BC* het vierkant *BCFG* en op *AC* het vierkant *ACHI* worden beschreven; dan moet men betoogen: *dat de inhoud van het vierkant ACHI gelijk is aan de som van de inhouden der vierkanten ABDE en BCFG;* hetgeen men (zie IX. *Bep.*) aldus uitdrukt: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

BETOOG. Men late, uit het hoekpunt *B* van den regten hoek, eene lijn *BK*, loodregt op de hypothenusa, vallen, en verlenge dezelve tot in *L*, dan is *hoek CKL* = *R* en *hoek CAI* = *R* (*onderst.*); gevolgelijk is de lijn *BKL* (XXII. *Stell.* I. *B*) evenwijdig aan *AI*, en (XXIX. *St.* I *B.* en I. en V. *Bep.*) evenwijdig aan *CH*; die lijn *LK* deelt derhalve (III. *Bep.* en *onderst.*) het vierkant *ACHI* in twee regthoeken, *AKLI* en *CKLH*. Nu zeg ik: dat

1°. *regth. AKLI* = *vierk. ABDE*

2°. *regth. CKLH* = *vierk. BCFG*

zal zijn.

1°. Om het eerste te betoogen, zoo trekke men de lijnen *CE* en *BI*; dan ontstaan er twee stomphoekige driehoeken *BAI* en *EAC*, op welke men hier in het bijzonder moet letten. *Deze stomphoekige driehoeken zijn gelijk- en gelijkvormig;* want

hoek CAI = *hoek BAE* = *R*, II. *St.* I. *B.* en *onderst.*

tel bij *hoek BAC* = *hoek BAC*

dan wordt. *hoek BAI* = *hoek CAE*, VIII. *Ax.*

verder is *AB* = *AE*
en *AI* = *AC* } *onderst.* en V. *Bep.*

derhalve *drieh. BAI* = *drieh. ACE*. X. *Stell.* I. *B.*

en 2 *drieh. BAI* = 2 *drieh. ACE*, XIII. *Ax.*

De driehoek *ABI* en het regthoekige parallelogram *AILK* hebben dezelfde basis *AI*, en het toppunt *B* van den driehoek *ABI* ligt in het verlengde van de bovenzijde *LK* van den regthoek; daarom is

2 *drieh. BAI* = *regth. AILK*, VIII. *Stell.*

maar 2 *drieh. BAI* = 2 *drieh. ACE*, *bewezen.*

derhalve *regth. AILK* = 2 *drieh. ACE*, V. *Ax.*

Nog kan de driehoek *ACE*, en het regthoekig gelijkzijdige parallelogram of vierkant *ABDE* worden aangemerkt, als staande, op dezelfde basis *AE*; terwijl het toppunt *C* van den driehoek *AEC* in het verlengde van de bovenzijde *BD* des vierkants valt; daarom is

2 *drieh ACE* = *vierk ABDE*, VIII. *Stell.*

derhalve is *regth. AILK* = *vierk. ABDE*, V. *Ax.*

2°. Wanneer men de lijnen *AF* en *BH* trekt; dan zal, op dezelfde wijze, worden bewezen: dat *regth. CKLH* = *vierk. BCFG* is; welk betoog uit de figuur op te maken, wij aan den Leerling, tot eigene oefening, overlaten.

3°. Nu is het gestelde klaarblijkelijk; want men telle de vergelijkingen

regth. AKLI = *vierk ABDE*

regth. CKLH = *vierk. BCFG*

dan zal, en uit de figuur, en uit het IV en VIII. *Ax.* volgen: dat

vierk.

vierk. $ACHI$ = vierk. $ABDE$ + vierk. $BCFG$
of $AC^2 = AB^2 + BC^2$ . . . . (1)
zal moeten zijn.

§. 252. Gevolg. *Fig.* 93. Omdat *regth.* $AKLI = AC \times AK$, en *regth.* $CKLH = AC \times CK$ (IX. *Bep.*) is; zoo hebben wij nog deze twee vergelijkingen:

$$AC \times AK = AB^2 \;...\; (2) \quad \text{en} \quad AC \times CK = BC^2 \;...\; (3)$$

dat wil zeggen: *Het vierkant, op elke regthoekszijde van een regthoekigen driehoek, is gelijk aan den regthoek, onder de hypothenusa en het stuk, dat van dezelve wordt afgesneden, door de loodlijn, die, uit het hoekpunt van den regten hoek, op dezelve valt, en hetwelk tusschen die loodlijn en de hypothenusa gelegen is.*

§. 253. I. Bijvoegsel. *Fig.* 93. Men kan, uit dezelfde figuur, bewijzen: *dat het vierkant op de loodlijn* (BK), *die, uit het hoekpunt* (B) *van den regten hoek eens regthoekigen driehoeks, op de hypothenusa valt, gelijk is aan den regthoek, onder de deelen* (AK *en* CK), *in welke zij dezelve verdeelt*; dat is, $BK^2 = AK \times KC$.

Want die loodlijn verdeelt den regthoekigen driehoek ABC in twee andere regthoekige driehoeken, ABK en BCK; derhalve is, volgens het betoogde:

$$AB^2 = AK^2 + BK^2$$
$$BC^2 = CK^2 + BK^2$$

Men telle deze twee vergelijkingen bij elkander; dan zal men vinden:

$AB^2 + BC^2 = AK^2 + CK^2 + 2\,BK^2$, VIII. *Ax.*
maar $AB^2 + BC^2 = AC^2$, *bewezen.*
derhalve is $AC^2 = AK^2 + CK^2 + 2\,BK^2$, V. *Ax.*
nu is $AC^2 = AK^2 + CK^2 + 2\,AK \times CK$, I. *Hulpst.*
diensvolgens $AK^2 + CK^2 + 2\,BK^2 = AK^2 + CK^2 + 2\,AK \times CK$, V. *Ax.*
trek af $AK^2 + CK^2 \;.....\; = AK^2 + CK^2$
dan houdt men over $2\,BK^2 = 2\,AK \times CK$, IX *Ax.*
of eindelijk, $BK^2 = AK \times CK$, XIII. *Ax.*

§. 254. II. Bijvoegsel. *Fig.* 93. *Nog is de regthoek, onder de regthoekszijden* (AB *en* BC), *gelijk aan den regthoek, onder de hypothenusa* (AC) *en de loodlijn* (BK), *die, uit het hoekpunt* (B) *van den regten hoek, op dezelve valt; dat is,* $AB \times BC = AC \times BK$.

Want, volgens het *Gevolg* van de VIII *Stell.* is:

2 *drieh.* $ABC = AB \times BC$
en 2 *drieh.* $ABC = AC \times BK$
derhalve is $AB \times BC = AC \times BK$, V. *Ax.*

§. 255. I. Aanmerking. *Fig.* 94. De eigenschappen van den regthoekigen driehoek ABC, in de stelling en de bijvoegsels betoogd, zijn, in

in alle deelen der Meetkunst, van zoo veel gebruik: dat wij dezelve hier in één tafereel bij elkander zullen voegen, en derzelver gebruik door voorbeelden ophelderen. Indien, in den regthoekigen driehoek ABC, de lijn BD loodregt op de schuinsche zijde staat; dan is betoogd: dat $AC^2 = AB^2 + BC^2$, $AB^2 = AC^2 - BC^2$ en $BC^2 = AC^2 - AB^2$ is, en, wanneer de zijden in getallen gegeven zijn,

$$AC = \sqrt{(AB^2 + BC^2)},\ AB = \sqrt{(AC^2 - BC^2)}$$
$$\text{en } BC = \sqrt{(AC^2 - AB^2)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Voorts is, in dezelfde figuur:

$$\left\{\begin{array}{l} AC \times AD = AB^2 \text{; derhalve } AD = AB^2 : AC \\ AC \times CD = BC^2 \text{; derhalve } CD = BC^2 : AC \end{array}\right\} \ldots (2)$$

$$AC \times BD = AB \times BC \text{; derhalve } BD = AB \times BC : AC \quad (3)$$

$$\text{en } BD^2 = AD \times DC \text{; derhalve } BD = \sqrt{(AD \times DC)} \quad (4)$$

Men berekene nu, om zich te oefenen, de twee volgende voorbeelden.

1. Voorbeeld. *Gegeven zijnde*, $AB = 65$, $BC = 156$; *te vinden de schuinsche zijde* AC, *de deelen van dezelve, namelijk* AD *en* CD, *benevens de loodlijn* BD? Men zal vinden: $AC = 169$, $AD = 25$, $CD = 44$ en $BD = 60$.

2. Voorbeeld. *Gegeven zijnde*, $AB = 175$ en $AC = 625$: *men vraagt als boven?* Men zal vinden: $BC = 600$, $AD = 49$, $BD = 576$ en $BD = 168$.

§. 256. II. Aanmerking. *Uit het theorema van* Pythagoras *blijkt de wezenlijkheid van het bestaan der onderling onmeetbare grootheden.* Zij, in *fig.* 94, $AB = 5$ en $BC = 6$; dan zal $AC = \ldots \sqrt{(AB^2 + BC^2)} = \sqrt{(25 + 36)} = \sqrt{61}$ zijn; maar $\sqrt{61}$ is (zie *Allereerste Gronden der Stelk.*, §. 817,) met betrekking tot de éénheid, en gevolgelijk ook, met betrekking tot de zijden AB en AC, onmeetbaar.

XVII. Stelling. (*Het omgek. van de XVI. St.*) *Fig.* 95, 96 *en* 97.

§. 257. *Wanneer* (zie fig. 95,) *het vierkant, op ééne der zijden* (AC) *van eenen driehoek* (ABC), *gelijk is aan de som der vierkanten, op de twee andere zijden* (AB *en* BC), *beschreven; dan zal die driehoek noodzakelijk regthoekig zijn; dat is, de hoek* (B), *over de grootste zijde* (AC), *zal regt zijn. En, wanneer men* (zie fig. 96), *uit het hoekpunt* (B) *van den hoek* (ABC) *eens driehoeks* (ABC), *eene loodlijn* (BD) *op de overstaande zijde* (AC) *hebbende laten vallen, of de regthoek,* ($AC \times AD$ *of* $AC \times CD$), *onder die overstaande zijde* (AC) *en één van derzelver twee afgesnedene deelen* (AD *of* CD), *gelijk is aan het vierkant van de*

zij-

zijde (AB *of* BC), *aan dit ſtuk gelegen; of het vierkant, op die loodlijn* (BD), *gelijk is aan den regthoek* ($AD \times DC$), *onder de deelen* (AD *en* CD) *van die zijde* (AC); *dan zal, onder elke dezer twee bepalingen, de driehoek* (ABC) *regthoekig zijn, in het punt* (B), *uit hetwelk de loodlijn* (BD) *op de overſtaande zijde* (AC) *valt.*

Betoog *van het eerſte. Fig.* 95. Laat BD regthoekig op BC getrokken en gelijk genomen worden aan AB. Indien men dan de lijn CD trekt; dan is BCD een regthoekige driehoek, en $CD^2 = BC^2 + BD^2$ (XVI. *Stell.*); maar $BD = AB$ zijnde (*conſt.*), zoo is $BD^2 = AB^2$ (III. *Stell.*) en de voorgaande vergelijking wordt dus $CD^2 = CB^2 + AB^2$; maar $AC^2 = BC^2 + AB^2$ (*onderſt.*); derhalve is $CD^2 = AC^2$ (V *Ax.*) en $CD = AC$ (*Gev.* III. *Stell.*). In de driehoeken ABC en BCD, is dan $BC = BC$ (*uit de figuur*) $AB = BD$ (*conſtr.*) en $AC = CD$ *bewezen*); derhalve *hoek* $ABC =$ *hoek* CBD (XIII. *Stell.* I. *B.*); maar *hoek* $CBD = R$ (*conſtr.*); derhalve is *hoek* $ABC = R$ (V. *Ax.*) en de driehoek ABC is derhalve regthoekig in B.

Betoog *van het tweede. Fig.* 96. Bijaldien de hoek ABC geen regte hoek is; dan zal men uit het punt A eene loodlijn AE op BC of derzelver verlengde kunnen laten vallen; en dan zal, omdat dan AEC een regthoekige driehoek is, $AC \times AD = AE^2$ zijn (XVI. *Stell*); maar $AC \times AD = AB^2$ (*onderſt*); gevolgelijk is $AE^2 = AB^2$ (V. *Ax*) en $AE = AB$ (*Gev.* III. *Stell.*). Zulks is nu onmogelijk; omdat, AE loodregt op BC ſtaande, $AB > AE$ (XVI. *Stell.* I. *B*) moet zijn; geene andere lijn dan de lijn AB kan derhalve loodregt uit A op BC vallen; de driehoek ABC is derhalve regthoekig in B.

Betoog *van het derde Fig.* 97. Indien ABC geen regte hoek is; dan zal de lijn BE kunnen getrokken worden, die met BC een regten hoek CBE maakt; en dan zal $BD^2 = CD \times DE$ zijn (I. *Bijv.* XVI. *Stell*), maar $BD^2 = CD \times AD$ (*onderſt*); derhalve is $CD \times DE = CD \times AD$ (V. *Ax*), en $DE = AD$ (*Gev* III. *Stell.*); daar zulks nu (III. *Ax.* onmogelijk is, zoo zal geene andere lijn dan de lijn AB regthoekig op AC kunnen ſtaan; de driehoek ABC is gevolgelijk regthoekig in B.

XVIII en XIX. Stellingen. *Fig.* 98 *en* 99.

§. 258. *Wanneer een driehoek* (ABC) *niet regthoekig is; dan zal het vierkant, op de grootſte zijde beſchreven, niet meer aan de ſom van de vierkanten, op de twee andere zijden, gelijk zijn. In het algemeen, zal het vierkant, op eenige zijde* (AC) *van eenen driehoek* (ABC) *beſchreven, kleiner of grooter zijn dan de ſom der vierkanten, die op de twee andere zijden* (AB *en* BC) *zijn gemaakt, naar dat de hoek* (ABC), *over die eerſte zijde* (AC) *ſtaan-*

staande, scherp of stomp is. Wat nu op het vierkant van de zijde (*AC*), *in het eerste geval* (fig. 98), *te kort komt, en wat, in het tweede geval* (fig. 99), *van dit vierkant moet afgetrokken worden, om de som van de vierkanten der twee andere zijden* (*AB en BC*) *te vinden, wordt aldus bepaald. Men late, uit ééne der hoekpunten* (*C of A*) *van de zijde* (*AC*) (fig. 98 *en* 99), *de loodlijn* (*CD of AE*) *op de overstaande zijde* (*AB of BC*) *vallen, en neme den regthoek, onder die zijde* (*AB of BC*) *en het stuk* (*BD of BE*) *van dezelve, hetwelk tusschen die loodlijn* (*CD of AE*) *en het hoekpunt* (*B*) *van den hoek, tegen over de genoemde zijde* (*AC*) *staande, begrepen is; tweemaal den inhoud van dien regthoek, zal, wanneer de hoek* (*B*), *over meergemelde zijde* (*AC*) *staande, scherp is, bij het vierkant op die zijde* (*AC*) *moeten worden opgeteld, of, in het tweede geval, van dezelve worden afgetrokken, om de som van de vierkanten op de twee andere zijden* (*AB en BC*) *te verkrijgen; dat is, in* fig. 98, *zal*

$$AC^2 + 2AB \times BD = AB^2 + BC^2,$$
$$\text{of } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD$$
$$\text{en } AC^2 + 2BC \times BE = AB^2 + BC^2,$$
$$\text{of } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BE$$

zijn, en in fig. 99, *zal men moeten stellen:*

$$AC^2 - 2AB \times BD = AB^2 + BC^2,$$
$$\text{of } AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BD$$
$$\text{en } AC^2 - 2BC \times BE = AB^2 + BC^2,$$
$$\text{of } AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC \times BE.$$

BETOOG *van het eerste. Fig.* 98. Aangezien de zijde *AB*, in *D*, in twee deelen verdeeld is, zoo is, volgens de I. *Hulpstelling*,

$$AD^2 + 2AB \times BD = AB^2 + BD^2$$
$$\text{tel bij } CD^2 \; \ldots\ldots = \ldots\ldots CD^2$$
$$\text{dan is } AD^2 + CD^2 + 2AB \times BD = AB^2 + BD^2 + CD^2, \text{ VII}^e. \textit{Ax.}$$

Omdat nu *CD* loodregt op *AB* staat, zoo is, in de regthoekige driehoeken *ACD* en *BCD*, als volgt:

$$\left.\begin{array}{r} AD^2 + CD^2 = AC^2 \\ \text{en } BD^2 + CD^2 = BC^2 \end{array}\right\} \text{XVI. } \textit{Stell.}$$

de voorgaande vergelijking wordt derhalve:

$$AC^2 + 2AB \times BD = AB^2 + BC^2$$

of, indien men van dezelve $2AB \times BD = 2AB \times BD$ aftrekt,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD$$

Op dezelfde wijze, zal, met behulp van de deelen van de zijde *BC* en de regthoekige driehoeken *ACE* en *ABE*, de vergelijking:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \times BE$$

betoogd worden.

BE-

Betoog van het tweede. *Fig.* 99 De lijn AD is, in B, in twee deelen verdeeld; daarom is *I. Hulpstelling*,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,AB \times BD$$
tel bij $CD^2 = \ldots\ldots CD^2$

dan is $AD^2 + CD^2 = AB^2 + BD^2 + CD^2 + 2\,AB \times BD$, VIII. *Ax.*

Maar CD staat loodregt op AD; de driehoeken ADC en BDC zijn dus regthoekig;

gevolgelijk is $AD^2 + CD^2 = AC^2$ en $BD^2 + CD^2 = BC^2$ } XVI. *Stell.*

de laatste vergelijking wordt derhalve:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \times AD$$
of $AC^2 - 2\,AB \times AD = AB^2 + BC^2$, IX. *Ax.*

Men zal, op dezelfde wijze, betoogen: dat

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BC \times BE$$
is.

Ander betoog. *Fig.* 100 en 101. Men kan deze Leerstelling ook nog, geheel onafhankelijk van de I. *Hulpstelling* en de XVI. *Stelling*, aldus betoogen.

Men beschrijve (vergelijk altijd de *figuren* 100 en 101 met elkander) op de zijden des driehoeks ABC, de vierkanten $ABGH$, $BCIK$ en $ACLM$. Men late verder, uit de hoekpunten, de loodlijnen CD, AE en BF, op de overstaande zijden AB, BC en AC, vallen, en verlenge dezelve; dan zullen die verlengde loodlijnen, in *fig.* 100, de vierkanten (I. *Bep.*), op de zijden beschreven, in regthoeken verdeelen; het vierkant $ABGH$ in de regthoeken $ADOH$ en $BDOG$, die wij door de enkele letters Q en R zullen aanwijzen; het vierkant $BCIK$ in de regthoeken $BEPK$ en $CEPI$, of S en T; en het vierkant $ACLM$, in de regthoeken $CFNL$ en $AFNM$, of U en V; zoodat, in deze *fig.* 100, zal zijn (III. *Ax.*)

$$AB^2 = Q + R,\quad BC^2 = S + T \text{ en } AC^2 = U + V$$
In *figuur* 101, zal

$$AB^2 = Q - R,\quad BC^2 = T - S \text{ en } AC^2 = U + V$$
moeten zijn

Nu zeg ik: dat, in beide figuren, *regth.* Q = *regth.* V; *regth.* R = *regth.* S, en *regth.* T = *regth* U is.

Het eerste zal, wanneer men, in *fig.* 100 en 101, de lijnen BM en CH trekt, met behulp der driehoeken ABM en ACH, en der regthoeken $AFNM$ en $ADOH$, op dezelfde wijze, als het eerste gedeelte der XVI. *Stell.* worden betoogd; wij herhalen dit dus niet. En de twee andere vergelijkingen worden langs denzelfden weg bewezen.

Nu is, in *fig.* 100, $AC^2 = U + V$; en verder

$$AB^2 = Q + R = V + R = V + S, \text{ betoogd.}$$
$$BC^2 = T + S = U + R = U + S, \text{ betoogd.}$$
derh. $AB^2 + BC^2 = U + V + 2\,R = U + V + 2\,S$, VIII. *Ax.*

maar $U + V = AC^2$, en $R = S = AB \times BD = BC \times BE$

gevolgelijk $AB^2 + BC^2 = AC^2 + 2\,AB \times BD = AC^2 + 2\,BC \times BE$

Op dezelfde wijze, wordt, uit *fig.* 101, de formule voor den stomphoekigen driehoek betoogd.

§. 259. LEERING. Men ziet, uit de naauwkeurige vergelijking der XVI, XVIII en XIX *Stellingen, dat deze alle in dezelfde algemeene stelling begrepen zijn.*

§. 260. GEVOLG. *Fig.* 98 en 99. Wanneer men al de zijden des driehoeks ABC, als bekend, aanmerkt; dan zal men de waarde van BD kunnen oplossen. Men zal namelijk vinden: zie (*V. Gev. VI. St.*)

$$BD = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB} \ldots \text{ in } fig.\ 98, \text{ indien } B \text{ scherp is.}$$

$$BD = \frac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{2AB} \ldots \text{ in } fig.\ 99, \text{ indien } B \text{ stomp is.}$$

wanneer nu BD, door de berekening dezer formulen, is bekend geworden, zal men, met behulp van de *XVI. Stelling*, in den regthoekigen driehoek BCD, de loodlijn CD, uit de bekende zijden BC en BD, door de formule $CD = \sqrt{(BC^2 - BD^2)}$ vinden kunnen; en hieruit eindelijk den inhoud des driehoeks zelven.

VOORBEELD. Gegeven zijnde, $AB = 418$ meters; $BC = 290$ meters en $AC = 480$ meters; dan zal men vinden: $BD = 34$ meters, en $CD = 288$ meters, en de inhoud dezes driehoeks zal gelijk zijn aan 60192 vierkante meters. — Men moet hier bij opmerken: *dat, wanneer men de vierkanten der gegevene zijden berekend heeft, de eerste of tweede formule zal moeten gebruikt worden, naar dat de som der vierkanten, op AB en BC, grooter of kleiner dan het vierkant op BC is.*

§. 261. BIJVOEGSEL. *Fig.* 98. Stellen wij, $AB = a$, $BC = b$ en $AC = c$; voorts $BD = d$ en $DC = p$; dan hebben wij, wegens de eigenschappen des scherphoekigen driehoeks ABC, en des regthoekigen driehoeks BCD, deze twee vergelijkingen:

$$1^o.\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ad; \quad 2^o.\ p^2 = b^2 - d^2$$

de eerste vergelijking geeft: $d = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$; daarom is $d^2 = \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2}$; gevolgelijk is (deze waarde van d^2 in de tweede vergelijking overbrengende,)

$$p^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} = \frac{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2};$$

eene vergelijking, welke ons de waarde van het vierkant van de loodlijn CD, in eene uitdrukking van de zijden des driehoeks, voorstelt. Wanneer men de leden dezer vergelijking met $4a^2$ vermenigvuldigt, en onder het oog houdt: dat (de inhoud des driehoeks $= I$ stellende) $I = \frac{1}{2}ap$, $4I = 2ap$ en $16I^2 = 4a^2p^2$ is; dan verkrijgt men:

$$4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 = a^2p^2 = 16 I^2$$

eene vergelijking, welke aanwijst: hoe de inhoud eens driehoeks van zijne drie zijden afhangt? Het eerste lid dezer vergelijking bestaat uit het verschil van twee vierkanten; dit verschil is (*II. Hulpst.*) gelijk aan de som van de zijden dezer vierkanten, vermenigvuldigd met derzelver verschil; wij hebben dan:

$$(2ab + a^2 + b^2 - c^2) \times (2ab - a^2 - b^2 + c^2) = 16 I^2$$

$$\text{of, } [(a+b)^2 - c^2] \times [-(a-b)^2 + c^2] = 16 I^2$$

Het eerste lid dezer laatste vergelijking bestaat uit het product van twee factoren; en elk één dezer factoren bestaat wederom uit het verschil van twee vierkanten; wij hebben dan, om dezelfde reden:

$$[a+b+c] \times [a+b-c] \times [a-b+c] \times [-a+b+c] = 16 I^2.$$

waarvoor kan geschreven worden:

$$I^2 = \frac{a+b+c}{2} \times \frac{a+b-c}{2} \times \frac{a-b+c}{2} \times \frac{-a+b+c}{2}$$

Stellen wij nu $\frac{1}{2}(a+b+c) = s$; dan is $\frac{1}{2}(a+b-c) = s-c$; $\frac{1}{2}(a-b+c) = s-b$, en $\frac{1}{2}(-a+b+c) = s-a$; en wij verkrijgen dan eindelijk, voor den inhoud des driehoeks, de zeer voortreffelijke uitdrukking:

$$I = \sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]}$$

ons leerende: dat, *wanneer men van de halve som der zijden van eenen driehoek, (van welke gedaante hij ook dan wezen moge,) elk ééne der zijden aftrekt, het gedurige product dezer drie komende verschillen, nog eens met de halve som der zijden vermenigvuldigt, er alsdan een getal ontstaat, welks vierkants-wortel gelijk is aan den inhoud des driehoeks, uitgedrukt in een aantal van vierkanten, die tot zijde hebben de éénheid van de lengte-maat, waarmede de zijden des driehoeks zijn gemeten, en in getal uitgedrukt worden.*
Zij, bij voorbeeld, $a = 418$; $b = 290$ en $c = 480$; dan is, $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 594$; $s-a = 176$; $s-b = 304$; $s-c = 114$; en nu hebben wij:

$$I = \sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]} = \sqrt{(594 \times 176 \times 304 \times 114)}$$
$$= \sqrt{3623076864} = 60192.$$

Is de driehoek gelijkzijdig; dan is $a = b = c$; $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{3}{2}.a = 1\frac{1}{2}a$; $s-a = \frac{1}{2}a$; $s-c = \frac{1}{2}a$; $s-b = \frac{1}{2}a$; en $I = \sqrt{[s.(s-a).(s-b).(s-c)]} = \sqrt{[1\frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{2}a]} = \sqrt{\tfrac{3}{16}}\,a^2 = \frac{1}{4}a^2 \times \sqrt{3}$; dat is, *de inhoud van een gelijkzijdigen driehoek is gelijk aan één-vierde van het vierkant, op ééne zijner zijden beschreven, vermenigvuldigd met den vierkants-wortel uit het getal drie.*

XX. STELLING. *Fig.* 102.

§. 262. *De som van de vierkanten, op twee zijden (AC en BC) eens driehoeks, is gelijk aan de som van tweemaal het vierkant, op de helft van de derde zijde (AB) met tweemaal het vierkant, op de lijn (CD), welke, uit het midden (D) van die derde zijde (AB), tot het hoekpunt van den overstaanden hoek (C) getrokken wordt. Dat is:*

$$AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2.$$

BETOOG. Laat. uit het hoekpunt C, de loodlijn CE op de overstaande zijde AB vallen; dan is vooreerst, in den scherphoekigen driehoek BCD, (XVIII. *Stell.*)

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \times DE$$

en, in den stomphoekigen driehoek ACD, (XIX. *Stell.*)

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \times DE$$

Men telle deze vergelijkingen bij elkander op: dan zal (VIII. *Ax.*)

$$AC^2 + BC^2 = BD^2 + AD^2 + 2CD^2 + 2AD \times DE - 2BD \times DE$$

zijn; maar nu is (*onderst.*) $AD = BD$; derhalve ook $AD^2 = BD^2$, en $2AD \times DE = 2BD \times DE$: men kan dus in de plaats van $BD^2 + AD^2$ schrijven $2AD^2$; en $2AD \times DE - 2BD \times DE$ wordt dan gelijk nul; de laatste vergelijking wordt diensvolgens:

$$AC^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2CD^2.$$

§. 263. I. GEVOLG. Wanneer de drie zijden van den driehoek ABC gegeven zijn; dan zal men de lengte der lijn, die, uit éénen der hoeken, tot het midden van de overstaande zijde, getrokken is, kunnen berekenen; want uit de betoogde vergelijking volgt:

$$CD^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + \tfrac{1}{2}BC^2 - AD^2$$

$$CD = \sqrt{(\tfrac{1}{2}AC^2 + \tfrac{1}{2}BC^2 - AD^2)}$$

VOORBEELD. Zij gegeeven, $AC = 60$, $BC = 66$ en $AB = 54$; dan zal men vinden $CD = 57$.

§. 264. II. GEVOLG. *Fig* 66. Omdat de hoekpuntslijnen van een parallelogram elkander midden door deelen, is, volgens het bewezene,

$$AD^2 + CD^2 = 2DM^2 + 2AM^2$$

$$AB^2 + BC^2 = 2BM^2 + 2CM^2.$$

Indien men deze vergelijkingen optelt; dan zal, omdat $AM = MC$ en $DM = MB$ is, (*VIII. Ax. en IV. Gev. VI. Stell.*)

$$AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$$

zijn. *De som der vierkanten, op de hoekpuntslijnen eens parallelograms, is derhalve gelijk aan de som van de vierkanten, op al deszelfs zijden.*

XXI.

XXI. STELLING. *Fig.* 102.

§. 265. *Wanneer men de basis (AB) van eenen driehoek (ABC), in een punt (D), zoodanig verdeelt, dat de deelen (AD en BD) tot elkander staan, als een getal m tot een getal n; dan zal altijd* $n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AD^2 + m \times BD^2 + (m+n) \times CD^2$ *zijn.*

BETOOG. Volgens de XVIII en XIX. *Stellingen*, is, in de driehoeken ADC en BCD,

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2\,AD \times DE$$
$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2\,BD \times DE$$

Men neme nu het n-voud van de eerste en het m-voud van de tweede dezer vergelijkingen; dan is (XIII. *Axioma*)

$$n \times AC^2 = n \times AD^2 + n \times CD^2 + 2\,n \times AD \times DE$$
$$m \times BC^2 = m \times BD^2 + m \times CD^2 - 2\,m \times BD \times DE$$

en, wanneer men nu deze vergelijkingen optelt; dan zal men (VIII. *Ax.*) verkrijgen:

$$n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AD^2 + m \times BD^2 + (m+n) \times CD^2 + 2\,n \times AD \times DE - 2\,m \times BD \times DE.$$

Nu is (*onderst.*) $AD : BD = m : n$; derhalve zal (V. *Stell.* II. *B.*) $n \times AD = m \times BD$ zijn; en, volgens het XIII. *Axioma*, $2\,n \times AD \times DE = 2\,m \times BD \times DE$: deze twee termen, gelijk zijnde, vernietigen elkander in de voorgaande vergelijking, en deze verandert derhalve in de volgende:

$$n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AD^2 + m \times BD^2 + (m+n) \times CD^2$$

welke moest bewezen worden. — Indien men $m = n$ stelt; dan verandert deze stelling in de voorgaande.

§. 266. AANMERKING. *Fig.* 102. Wanneer men, uit het punt D, met DC als straal, eenen cirkel beschrijft, en elk punt van den omtrek diens cirkels, als het toppunt van den driehoek ABC aanneemt, of liever eene oneindige menigte van driehoeken ABC denkt, die dezelfde basis hebben, en, welker toppen in den omtrek des cirkels, uit D met DC als straal beschreven, gelegen zijn; dan zal voor elk eenen dezer driehoeken, de vergelijking

$$n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AD^2 + n \times BD^2 + (m+n) \times CD^2$$

bestaan; daar nu AD, BD en CD onveranderlijke lijnen en m en n dezelfde getallen zijn; *zoo zal de omtrek des cirkels, uit D met DC beschreven, de plaats van alle punten (C) zijn, welke de eigenschap hebben, dat n-maal het vierkant op AC, met m-maal het vierkant op BC gelijk is eene gegevene vlakte.*

VIERDE BOEK.

Over het verband tusschen de onderling evenwijdige en onderling evenredige lijnen, als de grond van het verdeelen der regte lijnen in deelen, die in eene gegevene reden staan, of gelijk zijn. Over de schalen *en den* proportie-passer. *Verdere grondstellingen aangaande de evenredige lijnen. Iets over de harmonische evenredigheden en reeksen. Ontwikkeling van het denkbeeld der gelijkvormigheid. Over de kenmerken van de gelijkvormigheid der driehoeken. Vervolg van de leer dezer gelijkvormigheid, en over de* pantographe. *Gebruik der gelijkvormige driehoeken; vooral in de Driehoeksmeting.*

I. Stelling. *Fig.* 103 *en* 104.

§. 267. *Elk stelsel van drie evenwijdige lijnen (AB, CD en EF) snijdt van twee andere lijnen (AE en BF), welke, op eenigerlei wijze, naar welgevallen, geplaatst zijn, (mits niet evenwijdig aan de lijnen van dit stelsel loopende,) deelen af, welke aan elkander evenredig zijn. Dat is:* $AC : CE = BD : DF$.

Betoog. Trek de lijnen AD en DE; dan verkrijgt men de driehoeken ACD en CED, die (zie *Gev.* XIV. *Stell.*) wijl zij met hunne toppunten in D zamen komen, dezelfde hoogte hebben; daarom is

$$\text{drieh. } ACD : \text{drieh. } CDE = AC : CE, \text{ XIV. Stell. III. B.}$$

Maar, daar (*onderst.*) AB, CD en EF, onderling evenwijdig zijn; zoo is, zie IX. *Stell.* III. *B.*

$$\text{drieh. } ACD = \text{drieh. } CBD$$
$$\text{en drieh. } CDE = \text{drieh. } CDF$$

De laatste evenredigheid wordt derhalve:

$$\text{drieh. } CBD : \text{drieh. } CDF = AC : CE$$

De laatste driehoeken, CBD en CDF, komen met hunne toppunt in het punt C te zamen; daarom is wederom

$$\text{drieh. } CBD : \text{drieh. } CDF = BD : DF$$

Uit deze evenredigheid en de voorgaande, volgt dan:

$$AC : CE = BD : DF, \text{ I. Stell. II. B.}$$

§. 268 I. Gevolg. *Fig* 105. *Wanneer men lijnen*, GH IK, enz., *evenwijdig aan* AB, CD *en* EF, *aanneemt; dan zal, volgens het bewezene*, $CE : EG = DF : FH$; *wederom* $EG : GI = FH : HK$ *zijn*, enz. *Men zal* (*XVIII. Bep. II. B.*) *dan hebben:*

(*AC*,

$(AC, CE, EG, GI$, enz.$) :: (BD, DF, FH. HK$, enz.$)$
dat wil zeggen: *een ſtelſel van zoo veel evenwijdige lijnen, als men naar welgevallen aanneemt, ſnijdt van twee lijnen, welke, op eenigerlei wijze, aangenomen zijn, deelen af, die met elkander eene aaneengeſchakelde evenredigheid uitmaken.*

§. 269. II. Gevolg. *Fig.* 105. Aangezien nu deze evenredigheden altijd zullen plaats hebben, onder welke ſtelling de ſnijdende lijnen AI en BK de evenwijdige AB, CD, EF, *enz.* doorſnijden, dat is, op welk eene wijze zij, ten opzigte van elkander, geplaatst zijn, zoo zullen die evenredigheden ook nog beſtaan, wanneer de lijn AI (door het punt B gaande,) den ſtand BO aanneemt; want dan zal nog

$(BL, LM, MN, NO$, enz.$) :: (BD, DF, FH, HK$, enz.$)$
blijven; maar, door het verplaatſen van de lijn AL, in den ſtand BO, verkrijgt men eenen driehoek BOK, in welken de lijnen LD, MF en NH, evenwijdig aan de zijde OK loopen. *Indien men dus, in eenen driehoek BOK, lijnen NH, MF, LD, enz. evenwijdig trekt aan ééne der zijden OK; dan zullen de overeenkomſtige deelen van de twee andere zijden BO en BK dezes driehoeks altijd met elkander evenredig zijn.*

§. 270. III. Gevolg. *Fig* 105. Zijn nu de deelen BL, LM, MN, NO, *enz.* gelijk; dan moeten (*IV. Stell. II. B.*) ook de deelen BD, DF, FH, HK, *enz.* gelijk zijn. *Wanneer men dan de zijde BO van eenen driehoek BKO, in gelijke deelen verdeelt, en, door de deelpunten, lijnen, evenwijdig aan ééne der twee andere zijden, trekt; dan zullen deze evenwijdige lijnen de derde zijde des driehoeks insgelijks in gelijke deelen verdeelen.*

§. 271 IV. Gevolg. *Fig.* 106. Wanneer men, in den driehoek ABC, eene lijn DE, evenwijdig aan ééne der zijden AC, trekt; dan is, volgens het betoogde, in het II *Gevolg:*

$$AD : BD = CE : BE$$

maar nu is $AD+BD : CE+BE = AD : CE = BD : BE$, VIII *St.* II. *B.*
dat is $AB : BC = AD : CE = BD : BE$, *volg. de fig.*
Wanneer men derhalve, in eenen driehoek, eene lijn evenwijdig aan ééne der zijden trekt; dan zullen de twee andere zijden des driehoeks evenredig zijn aan elke twee van derzelver overeenkomſtige deelen. Men zal uit den driehoek BOK, *fig.* 105, nog vele andere evenredigheden kunnen opſtellen.

§. 272. Aanmerking. Uit hetgeen in het II en III *Gevolg* dezer

stelling geleerd is, volgt: *hoe eene regte lijn, het zij in gelijke deelen, het zij in deelen, die tot elkander eene gegevene reden hebben, kan verdeeld worden.*

II. Stelling. (*Het omgek. II. Gev. I. St.*) *Fig.* 107.

§. 273. *De lijn* (*DE*), *welke twee zijden* (*AC en BC*) *van eenen driehoek* (*ABC*), *in evenredige deelen, verdeelt,* (*zoo dat* $AD : DC = BE : EC$ *is,*) *loopt evenwijdig aan de derde zijde* (*AB*).

Betoog. Indien *DE* niet evenwijdig aan *AB* is; dan zal men, door het punt *D*, eene lijn *DF*, evenwijdig aan *AB*, kunnen trekken; en dan zal (II. *Gev.* I. *Stell.*) $AD : DC = BF : CF$ zijn; maar nu is (*onderstelling*) $AD : DC = BE : EC$; derhalve zal (I. *Stell.* I. *B.*) $BF : FC = BE : EC$ zijn. Uit deze evenredigheid volgt (VIII. *Stell.* II. *B.*), $BF + FC : BE + EC = BF : BE$; dat is, $BC : BC = BF : BE$. Indien dan eene andere, dan de lijn *DE*, evenwijdig aan *AB*, loopt; dan zal daaruit volgen: dat twee gelijke uitgebreidheden tot elkander in dezelfde reden zijn, als twee ongelijke uitgebreidheden; daar zulks nu (II. *Gev.* IV. *Stell.* II. *B.*) onmogelijk is, zoo blijkt daaruit: dat geene andere, dan de lijn *DE*, evenwijdig aan *AB* kan loopen.

§. 274. I. Gevolg. *Fig.* 108. *Wanneer men dan, op de beenen AB en BC van eenigen hoek ABC, van het hoekpunt B af te beginnen, op één van deszelfs beenen AB, deelen BD, DF, FH, HK,* enz. *naar welgevallen aanneemt; en dan, op het andere been BC,* (insgelijks van het hoekpunt af te beginnen) *deelen BE, EG, GI, IL,* enz., *neemt, evenredig zijnde aan de overeenkomstige deelen, op het eerste been; zoo dat*

(*BD, DF, FH, HK,* enz.) :: (*BE, EG, GI, IL,* enz.)

is; dan zullen de lijnen DE, FG, HI, KL, enz., *welke de overeenkomstige deelpunten, op beide beenen van dien hoek voorkomende, vereenigen, evenwijdig zijn. Het zelfde zal plaats hebben, wanneer, op het been AB, de deelen BD, DF,* enz. *en, op het andere been BC, de deelen BE, EG,* enz. *aan elkander gelijk zijn.*

Want, door de gelijkheid der deelen, is (I. *Gev.* IV. *Stell.* II. *B.*) $BD : DF = BE : EG$; derhalve is (*bewez.*) *DE* evenwijdig aan *FG*. Om dezelfde reden, is *HI* evenwijdig aan *FG*, *enz.*

§. 275. II. Gevolg. *Fig.* 108. Wanneer men, onderstellende, dat de deelen op de beenen van den hoek *ABC* gelijk zijn, door de punten, *E, G, I, L, N*, *enz.*, de lijnen, *EV, GW, IX*, *enz.* evenwijdig aan *BA*, trekt; dan zullen zij (*III. Gev. I. Stell.*) de lijnen *FG, HI*, *enz.* in gelijke deelen verdeelen; en, omdat, wegens de even-

evenwijdigheid dezer lijnen, de vierhoeken, welke, in de figuur, aan elkander sluiten, parallelogrammen zijn, waarvan de overstaande zijden (*I. Stell. III. B.*) aan elkander gelijk zijn; *zoo zal de eerste lijn DE in de tweede FG tweemaal, in de derde HI driemaal, in de vierde KL viermaal, in de vijfde MN vijfmaal, in de zesde OP zesmaal*, enz.; *en, in het algemeen, in de* n^{de} *dezer lijnen n-maal begrepen zijn.*

§. 276. AANMERKING. Op dit beginsel steunt het gebruik van de *lijnen der gelijke deelen* op den *proportie-pasfer*, benevens de constructie der *tien-* en *twaalfdeelige schalen.*

A. De PROPORTIE-PASSER is een eenvoudig werktuig, bestaande uit twee linialen, die om een scharnier draaijen, uit welks middelpunt verscheidene lijnen zijn getrokken; onder anderen (zie *fig.* 109), uit het middelpunt *B*, *de lijnen BA en BC der gelijke deelen*; zoo dat, wanneer men gezegde linialen, om het punt *B*, doet omdraaijen, de hoek *ABC* grooter of kleiner wordt. Die lijnen nu, die even lang zijn, worden, van het middelpunt *B* af te beginnen, in een groot aantal gelijke deelen verdeeld, bij voorbeeld, *twee-honderd* of *duizend* deelen. Laten nu, bij voorbeeld, *BC* = *BD zeven-en-zestig* en *BE* = *BF*, *honderd-en-zeventig* gelijke deelen bevatten; wanneer men dan, in de gedachte, de lijnen *CD* en *EF* trekt; dan zullen die lijnen, hoe groot of klein de hoek *ABC* zij, altijd evenwijdig zijn; en volgens het betoogde, *CD* : *EF* = *BC* : *BE* = 67 : 170. In mijne mondelinge Lessen, leer ik het gebruik van dit werktuig nader kennen.

B. *De constructie der* TIENDEELIGE SCHALEN *berust op hetzelfde beginsel* Wanneer men, *fig.* 110, eene lijn *AB* in *tien* gelijke deelen verdeelt; en, na *BC* loodregt op *AB* geplaatst, *BC* gelijk aan $\frac{1}{10}$ *AB* genomen en de lijn *AC* getrokken te hebben, door de deelpunten, de lijnen, 11, 22, 33, 44, *enz.* evenwijdig aan *BC*, trekt; dan zal *AB* : *BC* = *A*1 : 11 zijn; maar nu is *AB* : *BC* = 10 : 1; dus *A*1 : 11 = 10 : 1; derhalve is de lijn 11 gelijk aan $\frac{1}{100}$ *AB* Om dezelfde reden, zal de lijn 22 *twee-honderdste*, de 33 *drie-honderdste* van *AB* zijn; *enz.* Wanneer, in dezelfde figuur, *AD* een Rijnlandsche voet verbeeldt, die in twaalf duimen verdeeld is, en *DE* = $\frac{1}{12}$ *AD* is; dan zullen de lijnen 11, 22, 33, *enz.* één, twee, drie, *enz.* linien verbeelden. Zulk eene schaal vindt men op meest alle bouwkunstige teekeningen. De constructie van eene gewone tiendeelige schaal wordt nu aldus volbragt.

Zij, *fig.* 111, op de onbepaalde lijn *AX*, genomen *AB* gelijk aan eenen *Centimeter* (*nieuwe Nederlandsche duim*). Neem, van *B* naar *X*, de deelen *B*1, 12, 23, *enz.* = *AB*: verdeel *AB* in tien *millimeters* (*strepen*) en nommer dezelve, van *B* naar *A*, met de cijfers 1, 2, *enz.* Stel *AC* regthoekig op *AX*; en neem, op die lijn, (die gelijk, grooter of kleiner dan *AB* kan genomen worden,) van *A* naar *C*, tien gelijke deelen, welke, van *A* naar *C*, met de cijfers 1, 2, 3, *enz.* worden

aan-

aangeduid. Trek, door C, de lijn CY, en door al de punten 1, 2, *enz.* van AC, lijnen, evenwijdig aan AX Trek verder, door al de deelpunten van de lijn BX, lijnen, evenwijdig aan AC. Deel eindelijk $CD = AB$ in tien millimeters, en trek de lijnen. B 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 96; dan is de tiendeelige fchaal voltooit Indien men nu AB, als de éénheid befchouwt; *dan zijn de lijnen, die evenwijdig aan AX loopen, de lijnen der honderfte deelen, en de lijnen B 1, 12,* enz. *de lijnen der tiende deelen.* Op die fchaal zal, bij voorbeeld, $EF = 3, 67$ centimeters $= 36, 7$ millimeters zijn. *Deelt men AB in twaalf deelen, en neemt men op AC, insgelijks twaalf deelen; dan verkrijgt men eene twaalfdeelige fchaal.*

§. 277. III. Gevolg. *Fig.* 108. Stel, dat er n gelijke deelen, op beide de beenen BA en BC van den hoek ABC genomen zijn; dan is het oppervlak des driehoeks ABC, in een zeker aantal gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen en een zeker aantal gelijke- en gelijkvormige driehoeken verdeeld. Het aantal der parallelogrammen is klaarblijkelijk gelijk aan de fom van de termen der rekenkunftige reeks, $1+2+3+4+enz.+(n-1)=(1+n-1)\times\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$, (zie *Allereerfte Grond. der Cijferk.*, *II. Deel*, §. 872.); en het aantal der driehoeken $= n$. Nu zijn, wegens de gelijkheid der deelen, de bafes der gelijke driehoeken gelijk aan die der parallelogrammen, en de driehoeken hebben met de parallelogrammen gelijke hoogten; wanneer men derhalve gemelde parallelogrammen door hoekspuntslijnen VS, *enz.* in gelijke- en gelijkvormige driehoeken verdeelt; dan zal het oppervlak der figuur, behalve de n driehoeken, die aan de lijn BC liggen, nog in tweemaal zooveel driehoeken, als er parallelogrammen in de figuur voorkomen, dat is, in een aantal van n + tweemaal $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, of $n + n^2 - n$ of n^2 gelijke- en gelijkvormige driehoeken verdeeld zijn. *Wanneer men dan elke zijde van eenen driehoek in een aantal van n gelijke deelen verdeelt, en de deelpunten door lijnen vereenigt; dan wordt het oppervlak des driehoeks in een aantal van n^2, of $n \times n$, gelijke- en gelijkvormige driehoeken verdeeld.*

§. 278. IV. Gevolg. *Fig.* 112. *Wanneer men, op de lijnen PA PB, PC, PD, welke, uit een punt P, tot eenige lijn AD getrokken worden, de punten E, F, G, H, zoodanig neemt, dat de deelen dezer lijnen altijd in dezelfde reden tot elkander ftaan; namelijk,* $PE:EA = PF:FB = PG:GC$, enz; *dan zullen al die punten, E, F, G, H,* enz. *gelegen zijn in eene lijn, welke evenwijdig aan deze eerfte lijn AD loopt.*

Want, omdat $PE : EA = PF : FB$ is, zoo zal EF, volgens het bewezene, evenwijdig aan AB zijn; om dezelfde reden, is FG aan BC en GH aan CD evenwijdig· nu zijn AB, BC, CD, deelen van dezelfde lijn; EF, FG, GH, moeten dan (*Gev* XXXIII. *St.* I. *B.*) insgelijks deelen van dezelfde, en aan AD evenwijdig loopende, lijn zijn.

III. STELLING. *Fig.* 113 *en* 114.

§. 279. *Een stelsel van drie of meer lijnen* (*PA*, *PB*, *PC*, *PD*, enz.), *uit hetzelfde punt* (*P*) *getrokken zijnde, snijdt van twee evenwijdige lijnen* (*AD en EH*), *welke naar welgevallen zijn aangenomen, deelen af, welke met elkander eene welgeordende evenredigheid uitmaken. Dat is:*

$$(EF,\ FG,\ GH,\ \text{enz.}) :: (AB,\ BC,\ CD,\ \text{enz})$$

BETOOG. Trek de lijnen FI en FK, evenwijdig aan de lijnen AP en CP; dan is, vooreerst in den driehoek ABP, volgens IV. *Gev.* I. *St.*

$$AB : AI = PB : PF$$

en, om dezelfde reden, is, in den driehoek BCP

$$BC : CK = PB : PF$$

uit deze twee evenredigheden volgt dan onmiddelijk:

$$AB : AI = BC : CK, \text{ (I. Stell II. B.)}$$

en $AB : BC = AI : CK$, (VI. *Stell* II. *B.*)

maar, omdat (*onderst.* en *constr.*) $AIFE$ en $CKFG$ parallelogrammen zijn, zoo is (I. *Stell.* III. *B.*) $AI = EF$ en $CK = FG$; en daarom wordt de laatste evenredigheid:

$$AB : BC = EF : FG.$$

Om dezelfde reden, is $BC : CD = FG : GH$, *enz.*

§. 280. GEVOLG. Wanneer men, in dezelfde figuren, $AB = BC = CD$ neemt; dan zal ook $EF = FG = GH$ zijn.

De Lezer beproeve, om de volgende stelling te bewijzen.

STELLING. A. *Fig.* 113 en 114. *Indien men, op twee evenwijdige lijnen* (*AD en EH*), *evenredige deelen neemt; op de eerste lijn* (*AB*), *deelen* (*AB*, *BC en CD*), *die evenredig zijn aan de deelen* (*EF*, *FG*, *GH*) *der tweede lijn* (*EH*); *dan zullen de lijnen, die door de overeenkomstige deelpunten* (*A en E*, *B en F*, *C en G*, *D en H*) *getrokken worden, elkander, in hetzelfde punt* (*P*), *ontmoeten; of ten minste evenwijdig zijn.*

IV. STELLING. (zie XIX *Stelling.*)

V. STELLING. *Fig.* 115.

§. 281. *De regthoek, zamengesteld onder de uitersten,* (*A en D*) *van vier evenredige lijnen* (*A*, *B*, *C en D*), *is gelijk aan den regthoek, zamengesteld onder de middelsten* (*B en C*) *dezer lijnen.*

BETOOG. Laten, op de twee eerste lijnen, A en B, twee regthoeken P en Q gemaakt worden, welke de lijn D tot hoogte hebben; dan is (XI. *Stell.* III. *B.*) $P : Q = A : B$; maar $A : B = C : D$ zijnde, (*constr.*)

zoo zal (I. *Stell.* II *B.*) *P* : *Q* = *C* : *D* zijn. Men ſtelle nu, op de lijnen *C* en *D*, de regthoeken *R* en *S*. welke de lijn *B* tot hoogte hebben; dan is (XI. *Stell.* III. *B.*) *R* : *S* = *C* : *D*; maar, *C* : *D* = *P* : *Q* zijnde, (*bewezen*), zoo zal *P* · *Q* = *R* : *S* zijn. Nu hebben de regthoeken *Q* en *S* de lijnen *B* en *D* tot zijden, en zijn (III *Stell.* III. *B.*) gelijk; derhalve zullen (*Gev.* VII. *Stell.* II. *B.*) ook de regthoeken *P* en *Q* gelijk zijn: dat is, de regthoek, onder de uiterſte lijnen, *A* en *D*, gelijk aan den regthoek, onder de middelſte lijnen *B* en *C*.

VI. STELLING. (*Het omgek. der* V. *Stell. Fig.* 116.)

§. 282. *Wanneer twee regthoeken* (*A B C en D E F*) *gelijke inhouden hebben; dan zijn derzelver zijden wederkeerig evenredig; dat is: de zijden* (*A B en B C*) *van den eerſten regthoek, zullen de uiterſte of middelſte, en de zijden* (*D E en F E*) *van den tweeden regthoek, de middelſte of uiterſte termen eener welgeordende evenredigheid uitmaken.*

BETOOG. Indien *D E* tot *A B* niet is, als *B C* tot *E F*; dan zal men eene lijn *E G*, kleiner of grooter dan *E F*, kunnen vinden, die de vierde evenredige tot *D E*, *A B* en *B C* zal zijn. Indien men dan door *G*, eene lijn *G H*, evenwijdig aan *D E*, trekt; dan zal (V. *Stell*) *regth.* *A B* × *B C* = *regth.* *D E* × *E G* zijn: maar, *regth.* *A B* × *B C* = *regth.* *D E* × *E F* zijnde, is (V *Ax*) *regth* *D E* × *E G* = *regth.* *D E* × *E F*: doch zulks is (III. *Ax*) onmogelijk: geene andere, dan de lijn *E F*, kan dan de vierde evenredige tot *D E*, *A B* en *B C* zijn. Men mag dan, uit de gelijkheid dezer regthoeken, tot de evenredigheid *D E* : *A B* = *B C* : *E F* beſluiten.

§. 283. GEVOLG. Wanneer drie lijnen, *A*, *B* en *C* gedurig evenredig zijn, en derhalve (*XVI Bep. II B.*) *A* : *B* = *B* : *C*. is, *dan zal de regthoek, onder de uiterſte lijnen, A en C, gelijk zijn aan het vierkant, op de middelſte lijn B.*

§. 284. AANMERKING. Om nu, uit de zijden der gelijke regthoeken, eene welgeordende evenredigheid op te ſtellen, *moet men de zijden van den eerſten regthoek voor de uiterſte of middelſte, en de zijden van den tweeden regthoek voor de middelſte of uiterſte termen der evenredigheid aannemen;* zonder dat het, voor het overige, noodig is, eenige andere orde, in de rangſchikking der termen, in acht te nemen. *Er kunnen uit de zijden van twee gelijke regthoeken acht onderſcheidene evenredigheden opgeſteld worden.* Vergelijk *All. Grond. der Cijferk. II. Deel.* § 533.

VII. STELLING. *Fig.* 117 *en* 118.

§. 285. *De inhouden der vierkanten, welke op vier evenredige lijnen beschreven zijn, zijn evenredig;* en, omgekeerd; *wanneer de inhouden van vier vierkanten evenredig zijn; dan zijn ook derzelver zijden evenredig.*

BETOOG *van het eerste. Fig.* 117. Wanneer de lijnen A, B, C en D evenredig zijn; dan moet men bewijzen: dat $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$ is. Wanneer men, op de lijnen A en B, twee regthoeken beschrijft, die de lijn A; en, op C en D, twee andere regthoeken, die de lijn C, tot hoogte, hebben; dan zal (XI. *Stell.* III. *B.* en *onderst.*)

$$AA : AB = A : B = C : D$$

$$\text{en } CC : CD = C : D = A : B \text{ zijn}$$

derhalve (I. *Stell.* II. *B.*)

$$AA : AB = CC : CD \quad \ldots\ldots\ldots \quad (N)$$

Beschrijft men, op de twee eerste lijnen A en B, regthoeken, welke de lijn B tot hoogte hebben; en, op C en D, regthoeken, welke dezelfde hoogte D hebben; dan zal wederom (XI. *St.* II. *B.* en *onderst.*)

$$AB : BB = A : B = C : D$$

$$CD : DD = C : D = A : B$$

zijn, en, volgens de *I. Stell.* II. *B.* zal dan

$$AB : BB = CD : DD \text{ zijn.}$$

Nu is, door het omkeeren van de termen van de redens der evenredigheid (N), volgens II. *Stell.* II. *B.*,

$$AB : AA = CD : CC$$

derhalve zal, volgens de XI. *Stell.* II. *B.*,

$$BB : DD = AA : CC$$

$$\text{of, } AA : CC = BB : DD \text{ (II. } Stell. \text{ II. } B.)$$

$$\text{en, } AA : BB = CC : DD \text{ (VII. } Stell. \text{ II. } B.) \text{ zijn.}$$

BETOOG *van het omgekeerde. Fig.* 118. Stel, dat de inhouden der vierkanten P, Q, R en S, die op de lijnen AB, CD, EF en GH, beschreven zijn, evenredig zijn; dat is, $P : Q = R : S$; dan zal moeten bewezen worden: dat $AB : CD = EF : GH$ is. Wanneer deze evenredigheid niet bestaat; dan zal men, tot de lijnen AB, CD en EF, eene vierde evenredige lijn kunnen vinden. Laat de lijn GI die vierde evenredige zijn, en beschrijft dan op GI het vierkant $GIKL$; dan is

$$AB : CD = EF : GI$$

derhalve is $P : Q = R : GIKL$, *bewezen.*

maar nu is $P : Q = R : S$, *onderst.*

gevolgelijk is $R : S = R : GIKL$, I. *Stell.* II. *B.*

en $R : R = S : GIKL$, VII *Stell.* II. *B.*

daar nu $R = R$ is, zoo zal ook $S = GIKL$ (I. *Gev.* II. *Stell* II. *B.*) moeten zijn; daar zulks nu onmogelijk is, zoo zal $AB : CD = EF : GH$ moeten zijn.

§. 286.

§. 286. I. Bepaling. Drie gelijkſoortige uitgebreidheden, bij voorbeeld, drie lijnen (A, B en C) zijn *harmonisch evenredig*, wanneer de eerſte (A) tot de derde (C), in dezelfde reden ſtaat, als het verſchil der twee eerſte ($A-B$ of $B-A$) tot het verſchil der twee laatſten ($B-C$ of $C-B$). Eene geheele onbepaalde rij van gelijkſlachtige uitgebreidheden (A, B, C, D. E *enz.*) maakt eene *harmoniſche rij* of *reeks*, indien elke drie op elkander volgende termen (als (C, D en E), de geheele reeks door, van het begin tot het einde, harmonisch evenredig zijn ($C:D=C-D:D-E$). In elke harmoniſche evenredigheid (A, B, C), wordt de derde term (C) de *derde evenredige* tot de twee eerſte termen, en de tweede term (C) de *middenevenredige* tusſchen de eerſte en derde genoemd.

Men zie *Allereerſte Grond. der Cijferk. II. Deel, eerſte Bijlage, art.* 944 *en verv.* Aldaar is betoogd: dat, wanneer a, b en c, drie willekeurige getallen zijn, de getallen vormen

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{b+c},\ \frac{a}{b+2c}$$

eene harmoniſche evenredigheid, en de getallen vormen

$$\frac{a}{b},\ \frac{a}{b+b},\ \frac{a}{b+2c},\ \frac{a}{b+3c},\ \frac{a}{b+4c},\ \frac{a}{b+5c},\ \frac{a}{b+6c},\ \textit{enz.}$$

eene harmoniſche reeks daarſtellen. Ook is aldaar geleerd: *hoe tot twee getallen een derde harmonisch evenredig getal, en tusſchen twee getallen, een midden harmonisch evenredig getal kan gevonden worden.*

§. 287. II. Bepaling. *Fig* 119. Wanneer, op eene lijn AD, de punten B en C zoo zijn aangenomen, dat, van het punt A af te rekenen, AB, AC en AD harmonisch evenredig zijn; dan wordt de lijn AD gezegd, in de punten B en C. *harmonisch geſneden* te zijn.

§. 288. I. Gevolg. *Fig.* 119. Zijn de lijnen AB, AC en AD harmonisch evenredig; dan is $AB:AD=AC-AB:AD-AC$ (*I. Bep*); of $AB:AD=BC:CD$ (*volgens de figuur*); derhalve is $AD\times BC=AB\times CD$ (V. *Stell.*); waaruit blijkt: *dat, wanneer eene lijn* (AD), *in twee punten* (B *en* C), *harmonisch is geſneden, de regthoek, onder de geheele lijn* (AD) *en het middelſte ſtuk* (BC), *gelijk is aan den regthoek, onder de uiterſte ſtukken* (AB *en* CD).

§. 289. II. Gevolg *Fig.* 119. *Heeft men, op eene lijn* AD, *twee punten* B *en* C *zoodanig aangenomen, dat* $AD\times BC=AB\times CD$ *is; dan zal de lijn* AD. *in de punten* B *en* C. *harmonisch geſneden zijn.* Want, dan is (VI. *Stell*) $AB:AD=BC:CD$, of $AB:AD=AC-AB:AD-AC$; dat is, de lijnen AB, AC en AD zijn harmonisch evenredig.

I.

I. *Over de Gelijkvormigheid, in het algemeen.*

§. 290. Twee uitgebreidheden van dezelfde soort, die met elkander vergeleken worden, kunnen, onder denzelfden inhoud, tevens dezelfde gedaante, denzelfden vorm en omtrek hebben, en daarom op of in elkander passen; men noemt dan zulke uitgebreidheden *gelijk- en gelijkvormig* (zie XVI *Bep.* I. B. *Inl.*). Of zij kunnen, onder denzelfden inhoud, eene ongelijke, ja zelfs zeer onderscheidene gedaante hebben; zoo als, uit de VII, IX en XV *Stell. III. B.* ten klaarste gebleken is; ja zelfs kunnen een driehoek, een vierkant en een cirkel, hoe verschillende van gedaante, nogtans, onder eene gelijke vlakte-uitgebreidheid, bestaan. *Thans moeten wij de eigenschappen der figuren leeren kennen, welke, hoe zeer zij in grootte van elkander verschillen, nogtans, in allen opzigte, zoo naauwkeurig, in vorm en beloop van omtrek, overeenstemmen, dat de eene dezer figuren eene juiste afbeelding van de andere voorstelt.* Hier toe behooren, bij voorbeeld, alle regte lijnen, alle gelijkzijdige driehoeken, alle vierkanten, alle cirkels, *enz.* Zulke figuren noemt men *gelijkvormige figuren; figuren, die dezelfde gedaante, denzelfden vorm hebben;* zoo is, bij voorbeeld, het model van een gebouw of werktuig, zal het wezenlijk dien naam verdienen, gelijkvormig aan het voorwerp, dat het moet afbeelden. Een schilder of beeldhouwer wordt gehouden zijne kunst volkomen meester te zijn, wanneer zijne schilderij of zijn beeld, het zij levensgroot, het zij in het klein, de afgebeelde persoon zoo natuurlijk en naauwkeurig voorstelt, dat elk, uit het portret of afbeeldsel, dadelijk de voorgestelde persoon herkent.

Maar, *waarin bestaat nu die gelijkvormigheid?* Wie een goed oordeel bezit en gezond van zinnen is, zal zich in zijn oordeel over het al of niet wel gelijken niet bedriegen; en nogtans zal hij, onbedreven in de Meetkunst zijnde, niet kunnen verklaren, *waarin eigenlijk wel de gelijkvormigheid bestaat.* Deze vraag kan alleen beantwoord worden, door de figuren, die wij, bij eene naauwkeurige beschouwing, voor gelijkvormig houden, aandachtig te onderzoeken. In dit onderzoek nu zal men het best slagen, wanneer men met de eenvoudigste figuren begint; dat is, wanneer men van de regtlijnige tot de kromlijnige; en, in de regtlijnige figuren, van de driehoekige tot de veelhoekige overgaat.

§. 291. Zij, *fig.* 125, *ABC* een driehoek, genomen, zoo als hij valt. Men trekke de lijnen *DE*, *EF* en *DF*, evenwijdig aan de

zijden *AB*, *BC* en *AC*; dan ziet men: *dat de driehoek DEF naar den driehoek ABC volmaakt gelijkt*; *of*, met andere woorden, *aan denzelven gelijkvormig is*; en dit zal blijven gebeuren, welken vorm men aan den driehoek *ABC* gelieve te geven. Volgens die constructie, zal (zie XXX *Stell.* I. *B.*) *hoek D = hoek A*, *hoek E = hoek B* en *hoek C = hoek F* zijn. Het blijkt hieruit: *dat het onderling gelijkhoekig zijn van twee driehoeken derzelver gelijkvormigheid daarstelt*; doch, wanneer men met eene vier- of veelhoekige figuur op dezelfde wijze te werk gaat; dan zal men niet altijd eene figuur verkrijgen, die aan de gegevene gelijkvormig is; alzoo zijn, in *fig.* 121, de lijnen *ab*, *bc*, *cd*, *de* en *ea* wel evenwijdig aan de zijden *AB*, *BC*, *CD*, *DE* en *EA* van den vijfhoek *ABCDE* getrokken, en evenwel is de vijfhoek *abcde*, alhoewel hij met den vijfhoek *ABCDE* onderling gelijkhoekig is, niet gelijkvormig aan den gegevenen *ABCDE*. Het blijkt dan uit deze proef: *dat voor de vier- en veelhoekige figuren*, *de onderlinge gelijkheid der hoeken*, alhoewel men duidelijk inziet, dat zij een voornaam vereischte tot de gelijkvormigheid is, *nogtans*, *zoo als dit in de driehoeken plaats heeft*, *de eenige voorwaarde niet uitmaakt*, *onder welke de gelijkvormigheid bestaat*; maar, dat er noodzakelijk, voor de vier- en veelhoeken, nog andere voorwaarden moeten bijkomen, om de gelijkvormigheid volledig te bepalen.

§. 292. Die ontbrekende voorwaarden zijn, wanneer men de constructie van *fig.* 121 een weinig anders inrigt, gemakkelijk te ontdekken. Laat, *fig.* 122, *ABCDEFG* eene zevenhoekige figuur zijn. Trek, uit één van hare hoekpunten *A*, al de hoekpuntslijnen *AC*, *AD*, *AE* en *AF*, welke uit dit hoekpunt tot de overige hoekpunten kunnen getrokken worden. Na die hoekpuntslijnen getrokken te hebben, trekke men, uit eenig punt *a*, de onbepaalde lijnen *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *af* en *ag*, evenwijdig aan *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *AF* en *AG*; daarna neme men op *ag* de lijn *ag*, naar welgevallen, (bij voorbeeld kleiner dan *AG*), en eindelijk trekke men *gf* evenwijdig aan *GF*, *fe* aan *FE*, *ed* aan *ED*, *dc* aan *DC* en *cb* evenwijdig aan *CB*; dan blijkt het: dat de figuur *abcdefg*, op die wijze verkregen, gelijkvormig is aan de gegevene figuur *ABCDEFG*.

Men zou insgelijks eene gelijkvormige figuur hebben verkregen, indien men, na eerst *ab* naar welgevallen genomen te hebben, de lijnen *bc*, *cd*, *de*, *ef* en *fg*, evenwijdig aan *BC*, *CD*, *DE*, *EF* en *FG* had getrokken. Nog zou men eene gelijkvormige figuur verkrij-

krijgen, wanneer men, uit het hoekpunt van éénen der andere hoeken, de vier hoekpuntslijnen, die uit dit punt tot de andere hoekpunten kunnen getrokken worden, getrokken had, en, verder op dezelfde wijze, als boven, ware te werk gegaan.

Volgens deze constructie nu, zijn (zie XXX *St.* I. *B.*) al de hoeken van den veelhoek *abcdefg*, één voor één, en, in dezelfde volgorde genomen, gelijk aan de hoeken van den veelhoek *ABCDEFG*. In dit opzigt, komt dan de constructie van *fig.* 121 (die geene gelijkvormige figuren gegeven heeft) met die van *fig.* 122 overeen; maar, in *fig.* 122, is er, om de gelijkvormigheid te verkrijgen, nog bij gekomen het gelijk maken der hoeken, welke de hoekpuntslijnen uit *A* met de zijden *AB* en *AG* en onderling met elkander maken; waaruit dan ligtelijk is op te maken: *dat er, om een n-hoek te construeren, die gelijkvormig aan een n-hoek is, een aantal van niet minder dan* 2 *n* — 3 (dat is, voor eenen driehoek 3, voor eenen vierhoek 5 voor eenen zeshoek 9 enz.) *evenwijdige lijnen moeten getrokken worden.*

Vraagt men nu: *waarom de zoo even opgegevene constructie gelijkvormige figuren voortbrengt?* dan antwoorden wij: omdat twee figuren, op die wijze zamengesteld, in ons die gewaarwording doen ontstaan, die wij *gelijkvormigheid*, *gelijkheid van gedaante*, *wel gelijken* noemen; en derhalve, om geene andere reden, dan om welke twee lijnen, die beide loodregt op eene derde staan, evenwijdig genoemd worden.

Na deze opheldering gegeven te hebben, zijn wij in staat, om naar den regel, in de *Inleiding*, §. 26, opgegeven, de volgende bepalingen, als den eenigen en natuurlijksten grondslag van de theorie der gelijkvormigheid, vast te stellen.

§. 293. III. BEPALING. *Fig.* 120. *Twee driehoeken* (*ABC* en *DEF*) zijn *gelijkvormig*, wanneer de hoeken (*A*, *B* en *C*) van den eenen driehoek (*ABC*), elk in het bijzonder, gelijk zijn aan de hoeken (*D*, *E* en *F*) des anderen driehoeks (*DEF*). Met andere woorden en korter, *wanneer de driehoeken onderling gelijkhoekig zijn.*

§. 294. IV. BEPALING. *Fig.* 122. *Twee veelhoekige figuren* (*ABCDEFG* en *abcdefg*) zijn (hoe groot het aantal van derzelver zijden of hoeken mogten zijn,) *gelijkvormig*, wanneer vooreerst al de hoeken (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*) van den eersten veelhoek, *in eene geregelde volgorde genomen*, één voor één, gelijk zijn aan al de overeenkomstige hoeken (*a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*) des anderen veelhoeks, insgelijks in die zelfde volgorde genomen ($A = a$, $B = b$, $C = c$, *enz.*);

en, wanneer dan nog bovendien de hoeken, welke al de hoekpuntslijnen, die in beide figuren, uit de hoekpunten (*A* en *a*) van twee gelijke of overeenstemmende hoeken kunnen worden getrokken, zoo met elkander, als met de beenen dezer hoeken, gelijke hoeken maken, (*hoek BAC = hoek bac*, *hoek CAD = hoek cad*, *hoek DAE = hoek dae*, *hoek EAF = hoek eaf*, *hoek FAG = hoek fag.*)

§. 295. V. Bepaling. *Fig.* 120 en 122. In twee gelijkvormige veelhoekige figuren worden de hoekpunten der gelijke hoeken *overeenstemmende* of *overeenkomstige punten*, en de zijden, of hoekpuntslijnen, die twee overeenstemmende punten vereenigen, *overeenstemmende zijden* of *hoekpuntslijnen*, of, in het algemeen, *afstanden der overeenkomstige punten* genoemd.

Opheldering. Alzoo zijn, in *fig.* 120, *A* en *D*, *B* en *E*, *C* en *F*, overeenstemmende punten, *AB* en *DE* overeenstemmende zijden. In *fig.* 22, *A* en *a*, *B* en *b*, *enz.* overeenstemmende punten, *AB* en *ab*, *BC* en *bc*, *enz.* overeenstemmende zijden; *AC* en *ac*, *BD* en *bd*, *enz.* overeenstemmende hoekpuntslijnen.

§. 296. Aanmerking. Uit de voorgaande bepalingen en de aandachtige beschouwing der figuren, zal men nu duidelijk zien: waarom in gelijkvormige veelhoekige figuren, de onderlinge gelijkheid der hoeken, *in dezelfde volgorde*, moet plaats hebben; terwijl zulks, in de gelijkvormige driehoeken, niet uitdrukkelijk vereischt wordt.

II. *Over de gelijkvormigheid der driehoeken.*

VIII. Stelling. *Fig.* 123.

§. 297. *De overeenstemmende zijden van twee gelijkvormige driehoeken (dat is* III. Bep. *van twee driehoeken, die onderling gelijkhoekig zijn,) staan tot elkander, in dezelfde reden.*

Opheldering. Stel, dat in de driehoeken *ABC* en *DEF*, *hoek A = hoek D*, *hoek B = hoek E*, en bijgevolg (IX. *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*) *hoek C = hoek F* is, en deze driehoeken (III. *Bep*) diensvolgens gelijkvormig zijn; dan zijn, zie V. *Bep.* *AB* en *DE*, *BC* en *EF*, en *AC* en *DF*, die de hoekpunten der gelijke hoeken vereenigen, de overeenstemmende zijden; en nu moet betoogd worden: dat

$$AB : DE = BC : EF$$
$$AB : DE = AC : DF$$

is, en gevolgelijk, dat ook

$$BC : EF = AC : DF$$

zal zijn; hetgeen men ook aldus kan uitdrukken:

$$(AB,\ BC,\ AC) :: (DE,\ EF,\ DF)$$

Be-

Betoog. Men plaatse den driehoek DEF, naast den driehoek ABC, zoodat de zijde DE het verlengde worde van de zijde AB, en het punt D in B valle. Dit gedaan hebbende, zoo verlenge men de zijden AC en EF; dan zullen deze elkander in een punt G ontmoeten, en men zal alzoo, in de figuur, den driehoek AEG verkrijgen.

Omdat nu *hoek* A = *hoek* EDF is (*onderst*), zoo is (XXVII. *St.* I. *B.*) DF evenwijdig aan AG; en, omdat *hoek* ABC = *hoek* E is, zoo is om dezelfde reden BC evenwijdig aan EG.

Wegens de evenwijdigheid dezer lijnen, is nu vooreerst de vierhoek $BFGC$, die in de figuur ontstaan is, (I. *Bep.* III. *B.*), een parallelogram, en daarom is (I. *Stell.* III. *B.*) $CG = DF$ en $FG = BC$.

Ten anderen is, zie II. *Gevolg*, I. *Stelling*, omdat DF evenwijdig aan AG is,

$$AB : DE = FG : EF, \text{ of } AB : DE = BC : EF$$

en, omdat BC evenwijdig is aan EG, zoo is, om dezelfde reden:

$$AB : DE = AC ; CG, \text{ of } AB : DE = AC : DF$$

uit welke twee evenredigheden (I. *Stell.* II. *B.*) verder volgt:

$$BC : EF = AC : DF.$$

§. 298. I. Gevolg *Fig.* 123. Omdat, in elke evenredigheid, welker termen alle gelijkslachtige uitgebreidheden zijn, de redens (VII *Stell.* II *B.*) kunnen verwisseld worden, zoo zal

$$\text{uit} \left\{\begin{array}{l} AB:DE=BC:EF \\ AB:DE=AC:DF \\ BC:EF=AC:DF \end{array}\right\} \text{volgen} \left\{\begin{array}{l} AB:BC=DE:EF \\ AB:AC=DE:DF \\ BC:AC=EF:DF \end{array}\right\}$$

Dat is: *in twee gelijkvormige driehoeken, staan de zijden, om een der hoeken van den eersten, in dezelfde reden, als de overeenkomstige zijden, om den overeenstemmenden hoek, in den anderen driehoek.*

§. 299. Aanmerking. In het vervolg, zullen wij, in onze beschouwingen, telkens met gelijkvormige driehoeken te doen hebben, die niet altijd in zulk eene symetrie bij elkander zullen geplaatst zijn, als in *fig.* 120 en 123; daar het nu voornamelijk hier op aan komt, om, uit twee zulke gelijkvormige driehoeken, de evenredigheden, die uit dezelve volgen, welgeordend op te stellen, zoo moet men eens en vooral tot een regel aannemen: *dat men, voor de termen der eerste reden, twee zijden van den eersten driehoek naar welgevallen kan stellen,* (hetgeen dus drie combinatien geeft,) *maar dan moeten, voor de overeenkomstige termen der tweede reden, uit den tweeden driehoek, die twee zijden genomen worden, welke overeenstemmen met die zijden des eersten driehoeks, welke men voor de termen van de eerste reden heeft aangenomen.*

Maar men kan nog, op eene andere manier, de evenredigheid opmaken. *Men stelle voor de termen der eerste reden twee overeenkomstige zijden uit den eersten en den tweeden der twee gelijkvormige driehoeken, en voor de termen der tweede reden insgelijks twee overeenkomstige zijden uit den eersten en uit den tweeden driehoek.* Laat, om dit op

te helderen, in den driehoek *ABC*, *fig.* 124, *hoek ACD* = *hoek B* gemaakt worden; dan is de driehoek *ACD* gelijkvormig aan den driehoek *ABC*; want *hoek CAD* = *hoek BAC* (*uit de figuur*) en *hoek ACD* = *hoek B* (*constr.*); derhalve *hoek ADC* = *hoek ACB* (IX. *Gev.* XVIII. *Stell* I. *B.*). Om nu, op de eerste manier, eene evenredigheid op te stellen, neem ik, uit den eersten driehoek *ACD*, naar welgevallen, *AD* : *AC*; en om nu de termen van de tweede reden te vinden, zeg ik, in driehoek *ACD* staat *AD* over *hoek ACD*, *hoek ACD* = *hoek B*, tegen over *hoek B* staat, in den tweeden driehoek, de zijde *AC*, deze zijde moet dus voor den eersten term der tweede reden worden genomen; wederom de zijde *AC* staat, in den eersten driehoek, over *hoek ADC*, *hoek ADC* = *hoek ACB*; over *hoek ACB* staat, in den tweeden driehoek, de zijde *AB*; deze zijde moet nu de tweede term van de tweede reden zijn; de evenredigheid is derhalve *AD* : *AC* = *AC* : *AB*. Naar de tweede manier, kan men de termen der eerste reden *AD* : *AC* stellen, omdat die zijden over de gelijke hoeken *ACD* en *ABC* staan, en voor de termen der tweede reden *AC* en *AB*; omdat deze zijden over de gelijke hoeken *ADC* en *ACB* staan; men heeft derhalve: *AD* : *AC* = *AC* : *AB*.

§. 300. II. Gevolg. *Fig.* 125. *De overeenstemmende loodlijnen, (CG en FH), welke, uit de hoekpunten (C en F) der gelijke hoeken van twee gelijkvormige driehoeken (ABC en DEF), op de overeenstemmende zijden (AB en DE) vallen, staan tot elkander in de zelfde reden, als die zijden; dat is CG : FH = AB : DE.*

Want, indien *hoek A* = *hoek D* en *hoek B* = *hoek E* is, en de driehoeken *ABC* en *DEF*, om die reden gelijkvormig zijn, zoo is *hoek AGC* = *hoek DHF* = *R* (*onderst.*); de driehoeken *ACG* en *DFH*, zijn dan (III. *Bep.*) gelijkvormig; derhalve is, volgens het betoogde:

$$CG : FH = AC : DF$$

maar nu is $AC : DF = AB : DE$ (*bewezen*)

derhalve $CG : FH = AB : DE$ (I. *Stell.* II. *B.*)

Staan *AI* en *DK* loodregt op *AC* en *DF*; alsmede *BL* en *EM* loodregt op *AC* en *DF*; dan zal men gemakkelijk betoogen: dat

$$(CG, AI, BL) :: (FH, DK, EM)$$

$$AG : BG = DH : HE$$

$$AG : AL = DH : DM$$

is. Ook zal men nog meer andere evenredigheden uit deze figuur kunnen opstellen.

IX. Stelling. (*Het omgek. van de VIII. Stell.*) *Fig.* 126.

§. 301. *Wanneer de zijden van eenen driehoek, in dezelfde volgorde genomen, evenredig zijn aan de zijden van een anderen driehoek; dan zijn die driehoeken gelijkvormig; dat is, onderling gelijkhoekig.*

Op-

Opheldering. Indien (AB, BC, AC) : : (DE, EF, DF) is; dan zal moeten betoogd worden: dat *hoek* A = *hoek* D, *hoek* B = *hoek* E, en bijgevolg *hoek* C = *hoek* F is.

Betoog. Men make $AG = DE$, $AH = DF$, en trekke dan nog de lijn GH; dan hebben wij:

$AB : DE = AC : DF$, (*onderst.*)
of $AB : AG = AC : AH$, (*constr.*)

uit deze evenredigheid volgt nu, zie VIII. *Stell.* II. *B.*

$AB - AG : AC - AH = AG : AH$
of $BG : CH = AG : AH$, (*volg. fig.*)

Uit kracht derhalve van het betoogde in de II. *Stell.*, is dan de lijn GH evenwijdig aan de zijde BC, en nu volgt, uit de XXVI. *Stell* I. *B.* onmiddellijk: dat *hoek* AGH = *hoek* B en *hoek* AHG = *hoek* C is; de driehoeken ABC en AGH zijn dan (III. *Bep.*) gelijkvormig; wij hebben derhalve:

$AB : BC = AG : GH$, (VIII. *Stell.*)
maar nu is $AB : BC = DE : EF$, (*onderst.*)
gevolgelijk $AG : GH = DE : EF$, (I *Stell.* II. *B.*)
en $AG : DE = GH : EF$, (VII. *Stell.* II. *B.*)

Nu is, volgens de constructie, $AG = DE$; derhalve zal (IV. *St.* II. *B.*) ook $GH = EF$ zijn.

Men vergelijke nu de driehoeken AGH en DEF. In dezelve is $AG = DE$ en $AH = DF$ (*constr.*) en $GH = EF$ (*bewezen*), en daarom is nu (XIII. *Stell* I. *B*) *hoek* AGH = *hoek* B = *hoek* E en *hoek* AHG = *hoek* C = *hoek* F, eindelijk *hoek* A = *hoek* D.

§. 302. Aanmerking. Het blijkt dan ten klaarste: *dat de evenredigheid der zijden van twee driehoeken, op zich zelve genomen, tot het bestaan van derzelver gelijkvormigheid voldoende is.*

X. Stelling. *Fig.* 126.

§. 303. *Twee driehoeken* (ABC en DEF) *zijn gelijkvormig, wanneer een hoek* (A) *van den eersten driehoek* (ABC) *gelijk is aan eenen hoek* (D) *van den anderen driehoek* (DEF); *en de zijden, om die gelijke hoeken staande, in de wederzijdsche driehoeken, onderling evenredig zijn*, ($AB : DE = AC : DF$).

Betoog. Men make $AG = DE$, $AH = DF$, en trekke nog de lijn GH; dan is

$AB : DE = AC : DF$, (*onderst.*)
of $AB : AG = AC : AH$, (*constr.*)
derhalve $AB - AG : AC - AH = AG : AH$, (VIII. *St.* II. *B.*)
dat is, $BG : CH = AG : AH$

en daarom is, zie II. *Stell.* GH evenwijdig aan BC, en volgens XXVI. *Stell.* I. *B.* is *hoek* AGH = *hoek* B, en *hoek* AHG = *hoek* C.

Nu hebben wij (de driehoeken *A G H* en *D E F* afzonderlijk beschouwende,) *hoek A = hoek D (onderst.)*: voorts *A G = D E* en *A H = D F* (*constr*); derhalve is (X. *Stell.* I. *B.*) *hoek A G H = hoek B = hoek E* en *hoek A H G = hoek C = hoek F*; de driehoeken *A B C* en *D E F* zijn dus onderling gelijkhoekig; dat is (III. *Bep.*) gelijkvormig; zoodat nu ook (VIII. *Stell.*) *A B : D E = B C : E F* is.

§. 304. Aanmerking. De drie laatste leerstellingen bevatten al de kenmerken, uit welke men tot de gelijkvormigheid van twee driehoeken, in eenige figuur voorkomende, kan besluiten.

XI. Stelling. *Fig.* 127.

§. 305. *De inhouden van gelijkvormige driehoeken (A B C en D E F) staan tot elkander, in dezelfde reden, als de inhouden der vierkanten (A B K I en D E M L), welke, op twee van derzelver overeenstemmende zijden (A B en D E), beschreven zijn.*

Betoog. Men late, uit de hoekpunten der gelijke of overeenstemmende hoeken *C* en *F*, de loodlijnen *C G* en *F H* op de overeenstemmende zijden *A B* en *D E* vallen, en trekke de hoekpuntslijnen *B I* en *E L*; dan staan de driehoeken *A B C* en *A B I* op dezelfde basis *A B*; en zijn derhalve (XIV. *Stell.* III. *B.*) in dezelfde reden, als hunne hoogten; nu is *C G* de hoogte van den driehoek *A B C*; en, omdat *hoek B A I* (*onderst*) regt is, *A I = A B* de hoogte van den driehoek *A B I*; men heeft dan:

drieh. A B C : drieh. A B I = C G : A I = C G : A B.

Maar nu is (II. *Gev.* VIII. *Stell.*) *C G : A B = F H : D E = F H : D L*, derhalve zal (I. *Stell.* II. *B.*)

drieh. A B C : drieh. A B I = F H : D E = F H : D L zijn. . . (*a*)

De driehoeken, *D E F* en *D E L*, staan insgelijks op dezelfde basis *D E*, en zijn dus (XIV. *Stell.* III. *B.*) in dezelfde reden, als hunne hoogten, *F H* en *D L*; dat is:

drieh. D E F : drieh. D E L = F H : D L.

Vergelijkt men deze evenredigheid met de naast voorgaande evenredigheid (*a*); dan heeft men (I. *Stell.* II. *B.*)

drieh. A B C : drieh. A B I = drieh. D E F : drieh. D E L

of, de redens volgens de VII. *Stell.* II. *B.* verwisselende,

drieh. A B C : drieh. D E F = drieh. A B I : drieh. D E L

en nu kan men (VI. *Stell.* II. *B.*) stellen:

drieh. A B C : drieh. D E F = 2 drieh. A B I : 2 drieh. D E L.

Maar (I. *Stell.* III. *B.*) tweemaal *drieh. A B I* is gelijk aan het *vierkant A B K I*: en tweemaal *drieh. D E L* gelijk aan het *vierkant D E M L*; de voorgaande evenredigheid verandert derhalve in deze:

drieh. A B C : drieh. D E F = vierk. A B K I : vierk. D E M L

dat is, naar de gewone manier van schrijven:

drieh. A B C : drieh. D E F = $AB^2 : DE^2$.

§. 306.

§. 306. I. Gevolg. *Fig.* 127. Omdat (*VIII. Stell.*) $AB:DE = BC:EF = AC:DF = CG:FH$, en derhalve (*VII. Stell.*) $AB^2 : DE^2 = BC^2 : EF^2 = AC^2 : DF^2 = CG^2 : FH^2$ is; zoo blijkt hieruit: *dat de inhouden der gelijkvormige driehoeken in dezelfde reden zijn, als de vierkanten, op andere overeenkomstige zijden, of ook, als de vierkanten beschreven op de overeenstemmende loodlijnen, welke, uit de hoekpunten der gelijke hoeken, op de overstaande zijden vallen.*

§. 307. Aanmerking. De oude Meetkunstenaars (en een groot aantal der hedendaagsche volgen zulks nog,) plegen deze betoogde eigenschap der gelijkvormige driehoeken aldus uit te drukken: *gelijkvormige driehoeken staan in de verdubbelde reden van hunne overeenstemmende zijden.* Men kan die eigenschap, op eene meer zinnelijke wijze, (zie *fig.* 128) aldus voorstellen. Laten de overeenstemmende zijden AB en DE tot elkander in reden staan, als, bij voorbeeld, *vijf* tot *drie*; dan zal men, zie *III. Gev. II. Stell.* het oppervlak van den driehoek ABC in $5 \times 5 = 25$, en het oppervlak van den driehoek DEF in $3 \times 3 = 9$ gelijke- en gelijkvormige driehoeken kunnen verdeelen, die alle aan den driehoek AGH gelijk- en gelijkvormig zijn. Het oppervlak van het vierkant $ABML$ zal in 25 en het oppervlak van het vierkant $DEON$ zal in 9 gelijke vierkanten $AGIK$ verdeeld worden; gevolgelijk zal *drieh.* ABC : *drieh.* $DEF = 25 : 9$, en *vierk.* $ABML$: *vierk.* $DEON = 25 : 9$ zijn; en dus (*IX. Bep. II. B.*) *drieh.* ABC : *drieh.* $DEF = AB^2 : DE^2$. Stelt men AB tot DE in eene andere reden, als, bij voorbeeld, 17 tot 11; dan zal *drieh.* ABC : *drieh.* $DEF = 289 : 121$ zijn.

§. 308. II. Gevolg. *Fig.* 127. *De inhouden van twee gelijkvormige driehoeken* (ABC *en* DEF) *staan tot elkander, in dezelfde reden, als de regthoeken, onder de overeenstemmende zijden, die om twee gelijke of overeenstemmende hoeken staan.*

Want, laat $AP = AC$, $DR = DF$ genomen, en de lijnen PQ en RS, evenwijdig aan AB en DE, worden getrokken, dan is *regth.* $ABQP = AB \times AC$, en *regth.* $DESR = DE \times DF$. Nu is:

regth. $ABQP$: *vierk.* $ABKI = AP : AI = AC : AB$, (*XI. St. III. B.*)
maar nu is $AC : AB = DF : DE$
derh. *regth.* $ABQP$: *vierk.* $ABKI = \ldots\ldots DF : DE$, (*I. St. II. B.*)
ook is *regth.* $DESR$: *vierk.* $DEML = DR : DL = DF : DE$, (*XI. St. III. B.*)
gevolgelijk, *regth.* $ABQP$: *vierk.* $ABKI$ = *regth.* $DESR$: *vierk.* $DEML$,
(*I. St. II B.*)
of *regth.* $ABQP$: *regth.* $DESR$ = *vierk.* $ABKI$: *vierk.* $DEML$,
(*VII. Stell. II. B.*)
maar *drieh.* ABC : *drieh.* DEF = *vierk.* $ABKI$: *vierk.* $DEML$, (*bew.*)
derh. *drieh.* ABC : *drieh.* DEF = *regth.* $ABQP$: *regth.* $DESR$
(*I St. II. B.*)
of, *drieh.* ABC : *drieh.* $DEF = AB \times AC : DE \times DF$.

om dezelfde reden, zal zijn

drieh. ABC : *drieh.* $DEF = AB \times BC : DE \times EF$

drieh. ABC : *drieh.* $DEF = AC \times BC : DF \times EF$.

§. 309. III. Gevolg. *Fig.* 129. *Niet slechts de inhouden der gelijkvormige driehoeken, maar ook de inhouden van alle driehoeken, (ABC en ADE,) welke twee gelijke hoeken (A en D) hebben, zijn tot elkander in de zamengestelde reden van de zijden, die om deze gelijke hoeken staan. Dat is:*

drieh. ABC: *drieh.* $ADE = AB \times AC : AD \times AE$.

Want, trek de lijn CD; dan is, volgens de *XIV. Stell. III. B.*

drieh. ABC : *drieh.* $ACD = AB : AD$

drieh. ACD : *drieh.* $ADE = AC : AE$

volgens de *XVI. Stell. II. B.*, is dan

drieh. ABC : *drieh.* $ADE = AB \times AC : AD \times AE$.

§. 310. Bijvoegsel. Het is eene vraag van groot aanbelang, *om* (zie fig. 130.) *gegeven zijnde een driehoek ABC, een anderen driehoek ADE te vinden, gelijkvormig aan den gegevenen, en zoodanig, dat de inhoud van den gegevenen driehoek ABC tot den gezochten DEF, in reden staat, als eene lijn P tot eene lijn Q?* Dit vraagstuk kan door constructie en door berekening worden opgelost.

A. Oplossing *door constructie.* Getrokken hebbende, uit het punt A, eene onbepaalde lijn AI, en op dezelve genomen hebbende $AH = P$ en $AI = Q$, zoo trek BH, en IK, evenwijdig aan BH; dan is (*IV. Gev. I. Stell.*) $AB : AK = AH : AI = P : Q$. Nu moet, om aan de vraag te voldoen,

drieh. ABC : *drieh.* $ADE = P : Q = AB : AK$

zijn. Men beschrijve op AB het vierkant $ABGF$, en op AK den regthoek $AKLF$; dan is

vierk. $ABGF$: *regth.* $AKLF = AB : AK$, (*XI. Stell. III. B.*)

gevolgelijk wordt (*I. Stell. II. B.*)

drieh. ABC : *drieh.* ADE = *vierk.* $ABGF$: *regth.* $AKLF$

maar nu moet, volgens het betoogde,

drieh. ABC : *drieh.* $ADE = AB^2 : AD^2$

zijn; gevolgelijk wordt

vierk. $ABGF$: *regth.* $AKLF = AB^2 : AD^2$, (*I. Stell. II. B*)

Nu is *vierk.* $ABGF = AB^2$; derhalve moet de regthoek $AKLF$ gelijk zijn aan het vierkant, op AD, beschreven.

Beschrijf, om hier aan te voldoen, op AK een halven cirkel, die BG in M snijdt; trek de koorde AM, en maak $AD = AM$; dan is de basis van den begeerden driehoek gevonden. Want, de lijn KM getrokken hebbende, zoo is, in den regthoekigen driehoek AMK, (*XVI. Stell. III. B.*) $AM^2 = AD^2 = AK \times AB$ = *regth* $AKLF$, enz.

B. Oplossing *door berekening.* Stel, dat $AB = a$ *meters* zij, en dat *drieh.* ABC : *drieh.* $ADE = p : q$ moet zijn. Stel $AD = x$ *meters*; dan

is,

is, volgens het betoogde:

$$\text{drieh. } ABC : \text{drieh. } ADE = a^2 : x^2$$

maar $\text{drieh. } ABC : \text{drieh. } ADE = p : q$, (*voorwaarde*)

derhalve is $p : q = a^2 : x^2$

deze evenredigheid oplosfende, zoo zal men vinden:

$$x^2 = a^2 \times \frac{q}{p} \text{ en } x = a\sqrt{\frac{q}{p}} = \frac{a}{p}\sqrt{pq}.$$

VOORBEELD. Zij $a = 100$ *meters*, $p = 11$, $q = 19$; dan zal men vinden: $x = 131^m, 426 = AD$.

III. *Over de gelijkvormigheid der veelhoekige en kromlijnige figuren.*

XII. STELLING. *Fig.* 122. (*).

§. 311. *In alle gelijkvormige veelhoeken, staan, zoo wel alle overeenstemmende zijden, als alle overeenstemmende hoekpuntslijnen, tot elkander in dezelfde reden. En de hoeken, welke, in elke dezer twee gelijkvormige figuren, de overeenstemmende hoekpuntslijnen, die* (zie IV. Bep.) *niet tot het bepalen der gelijkvormigheid gediend hebben, zoo wel met de overeenstemmende zijden der veelhoeken, als onderling met elkander maken, zijn, hoe men dezelve ook nemen moge, aan elkander gelijk.*

BETOOG. Stellende dat $ABCDEFG$ een veelhoek is, en $abcdefg$ een andere veelhoek, die naar de *IV. Bepaling* is geconstrueerd geworden; dan is *hoek* bac = *hoek* BAC, *hoek* cad = *hoek* CAD, *hoek* dae = *hoek* DAE, *hoek* eaf = *hoek* EAF, *hoek* fag = *hoek* FAG, *hoek* b = *hoek* B, *hoek* c = *hoek* C, *hoek* d = *hoek* D, *hoek* e = *hoek* E, *hoek* f = *hoek* F, *hoek* g = *hoek* G; alle welke gelijkheden uit de constructie, of IV. *Bepaling*, volgen.

In de eerste plaats, merken wij op: dat de driehoeken abc, cad, ade, aef en afg, onderling gelijkhoekig met of gelijkvormig zijn aan de driehoeken ABC, CAD, DAE, EAF en FAG; want, omdat de zijden der veelhoeken evenwijdig aan elkander, en de hoekpuntslijnen ac, ad, ae, af, aan de hoekpuntslijnen AC, AD, AE en AF, insgelijks evenwijdig loopen (zie *IV. Bep.*); zoo zijn (*XXX. St. I. B.*) de hoeken der overeenstemmende driehoeken abc en ABC, acd en ACD, dae en DAE, eaf en EAF, fag en FAG, gelijk; en die overeenstemmende driehoeken zijn derhalve (*III. Bep.*) gelijkvormig.

Nu is in de gelijkvormige driehoeken ABC en abc, volgens de *VIII Stell.*

AB

(*) De XII en XIII *Stellingen*, in den tweeden druk, zijn de XVII en XVIII van dezen.

$$AB : ab = BC : bc = AC : ac$$

in de gelijkvormige driehoeken *ACD* en *acd*, is, om dezelfde reden,

$$AC : ac = CD : cd = AD : ad$$

in de gelijkvormige driehoeken *ADE* en *ade*, is insgelijks:

$$AD : ad = DE : de = AE : ae$$

in de gelijkvormige driehoeken *AEF* en *aef*, is wederom

$$AE : ae = EF : ef = AF : af$$

en, in de gelijkvormige driehoeken *AFG* en *afg*, is eindelijk

$$AF : af = FG : fg = AG : ag$$

uit welke evenredigheden ten klaarste blijkt: 1°. *dat de zijden van den eersten veelhoek met de overeenstemmende zijden des tweeden, in dezelfde reden staan;* en 2°. *dat de overeenstemmende hoekpuntslijnen, welke, in beide veelhoeken, uit de overeenstemmende hoekpunten A en a getrokken zijn, insgelijks tot elkander in dezelfde reden staan, als de zijden, als bij voorbeeld, AB tot ab.*

Nu moet nog bewezen worden: dat alle andere overeenstemmende hoekpuntslijnen insgelijks tot elkander in dezelfde reden staan, als *AB* tot *ab*, en met elke der overeenstemmende zijden en hoekpuntslijnen gelijke hoeken maken.

Men kan, buiten de hoekpuntslijnen, welke tot het bepalen van de gelijkvormigheid der veelhoeken gediend hebben, geene twee overeenstemmende hoekpuntslijnen denken, welke met twee der zijden of hoekpuntslijnen, in de overeenstemmende hoekpunten *A* en *a* zamenkomende, geene twee overeenstemmende driehoeken vormen, die aan die hoekpunten *A* en *a* geene twee gelijke hoeken hebben. Men denke, bij voorbeeld, de hoekpuntslijnen *CE* en *ce*, die de overeenstemmende hoekpunten *C* en *c*, *E* en *e* vereenigen; dan is, in de driehoeken *ACE* en *ace*, vooreerst *hoek CAD = hoek cad*, en *hoek DAE = hoek dae;* derhalve (*VIII. Ax.*) *hoek CAE = hoek cae;* nu is $AC : ac = AE : ae = AB : ab$ (*bewezen*); diensvolgens zal, volgens het betoogde in de *X. Stell. drieh. ACE* gelijkvormig zijn aan *drieh. ace;* dat is, *hoek ACE = hoek ace* en *hoek AEC = hoek aec;* terwijl eindelijk $CE : ce = AC : ac = AE = ae = AB : ab$ zal zijn.

Trekt men, bij voorbeeld, nog de overeenstemmende hoekpuntslijnen *CG* en *cg;* dan zal, om dezelfde reden, *hoek ACG = hoek acg*, *hoek AGC = hoek agc*, en $CG : cg = AC : ac = AG : ag = AB : ab$ zijn.

Laten de hoekpuntslijnen *AD* en *CF* elkander in *H*, en de overeenstemmende hoekpuntslijnen *ad* en *cf* elkander in *h* doorsnijden; omdat dan *hoek CAH = hoek cah*, *hoek ACH = hoek ach* is, (*bewezen*), zoo zal (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) *hoek AHC = hoek ahc* zijn; *zoodat niet slechts de overeenstemmende hoekpuntslijnen AD, CF en ad, cf, elkander onder gelijke hoeken snijden; maar ook nog bovendien gelijkvormige driehoeken AHC, ahc*, enz. *maken.*

Het zou overtollig zijn alle andere overeenstemmende hoekpuntslijnen, die nog niet in de figuur zijn getrokken, afzonderlijk te beschouwen; want dit zou slechts eene herhaling van het voorgaande zijn; ook is

ge-

genoeg gezegd, om geen de minste twijfel aangaande de algemeenheid van het gestelde te laten bestaan.

§. 312. Aanmerking. Het is uit de *IX. Stelling* gebleken: dat de onderlinge evenredigheid van de zijden van twee driehoeken, op zich zelve genomen, even zoo noodzakelijk de gelijkvormigheid dezer driehoeken medebrengt, als het onderling gelijkhoekig zijn van dezelve; want, uit de onderlinge gelijkhoekigheid volgt de evenredigheid der zijden; en omgekeerd. *In de vier- en veelhoekige figuren houdt het noodzakelijk verband tusschen de gelijkheid der hoeken en de evenredigheid der zijden op te bestaan:* in dezelve is noch het onderling gelijk zijn der hoeken, noch de evenredigheid der zijden, elke op zich zelve genomen, genoeg voldoende, om de gelijkvormigheid daar te stellen. Het eerste is uit *fig.* 121 blijkbaar; en, van het tweede zal men overtuigd worden, wanneer men, in *fig.* 122, de zijden van den veelhoek *a b c d e f g* een weinig om de hoekpunten laat draaijen; want dan blijven de overeenkomstige zijden van dien veelhoek wel evenredig aan die van den veelhoek *A B C D E F*; doch de hoeken veranderen, en de gelijkvormigheid wordt verbroken. Het is, omdat de vier- en veelhoeken hoekpuntslijnen hebben en de driehoek niet; het is, omdat de vier- en veelhoeken om derzelver hoekpunten kunnen omdraaijen en de driehoek niet, dat in de driehoeken, zoowel de onderlinge gelijkhoekigheid als de evenredigheid der zijden de gelijkvormigheid bepaalt.

§. 313. I. Gevolg. *Fig.* 122. Uit het betoogde volgt onmiddelijk: *dat in twee gelijkvormige veelhoeken* (en weldra zal het blijken dat zulks ook voor kromlijnige gelijkvormige figuren plaats heeft) *de afstanden der overeenkomstige punten, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, tot elkander in dezelfde reden staan; terwijl de onderlinge rigtingen van die afstanden, in beide figuren, gelijk zijn.* De eerste dezer eigenschappen (de evenredigheid der afstanden) is de bepaling geweest, die wij in den eersten en tweeden druk hadden aangenomen, en nu met eene meer eenvoudige (III. en IV *Bep.*) verwisseld hebben.

§. 314. II. Gevolg. *Fig.* 122. Nog blijkt, uit het betoogde: *dat in twee gelijkvormige veelhoeken de hoeken, in dezelfde volgorde genomen, gelijk en de zijden, om die hoeken staande, evenredig zijn.* Deze eigenschap heeft Euclides, in zijne *Beginselen*, als bepaling aangenomen: de onze is zonder tegenspraak eenvoudiger en natuurlijker. Het is ook ligtelijk te bewijzen: *dat, wanneer, in twee veelhoeken, de hoeken, in dezelfde volgorde, gelijk en de zijden, om de gelijke hoeken, evenredig zijn, de gelijkvormigheid uit die twee voorwaarden noodzakelijk volgen moet.* De Lezer zoeke zelve dit bewijs.

§. 315. III. Gevolg. *Fig.* 122. Nog heeft men uit het betoog

kun-

kunnen zien: *dat twee gelijkvormige veelhoeken kunnen aangemerkt worden, als bestaande uit eene wel geordende vereeniging van n - 2 gelijkvormige driehoeken, indien het getal der zijden gelijk n is.*

§. 316. IV. Gevolg. *Fig.* 122. *In twee gelijkvormige veelhoeken, maken de afstanden van drie overeenstemmende punten* (IX. Stell.) *altijd twee gelijkvormige driehoeken en het aantal dezer gelijkvormige driehoeken is* $\frac{1}{6}$ *n (n — 1) (n — 2).*

§. 317. V. Gevolg. *Fig.* 131. Neemt men, in twee gelijkvormige veelhoeken, twee hoekpunten *A* en *B*, in de eerste figuur naar welgevallen, en twee overeenkomstige hoekpunten *a* en *b*, in de andere figuur; en trekt men dan uit de overeenstemmende hoekpunten *A* en *a* en *B* en *b* al de hoekpuntslijnen, die uit elk dezer punten in de figuren kunnen getrokken worden; *dan ontstaan er*, het aantal der zijden of hoeken = *n* zijnde, *n - 2 gelijkvormige driehoeken A B C en a b c, A B D* en *a b d, A B E en a b e, A B F en a b f, A B G en a b g, die alle de overeenstemmende zijden of hoekpuntslijnen A B en a b tot basis hebben; en wanneer men nu, op eene basis a b, driehoeken, die met de driehoeken A B C, A B D* enz. *gelijkhoekig zijn, overbrengt; dan zal men eene figuur verkrijgen, die aan A B C D E F G gelijkvormig is.*

Bijvoegsel. Uit hetgeen tot hiertoe, wegens de gelijkvormige figuren geleerd is, volgen onderscheidene praktische manieren, om in het klein figuren te construeren, die aan eene gegevene figuur gelijkvormig zijn.

A. *Eerste manier.* *Fig.* 122. Stel, dat men gemeten hebbe met een graphometer, theodoliet, sextant of ander werktuig, *hoek B A C* = 28°, *hoek C A D* = 36°, *hoek D A E* = 21°, *hoek E A F* = 33°, en *hoek F A G* = 42°; *A B* = 412 meters, *A C* = 516 meters, *A D* = 617 meters, *A E* = 528 meters, *A F* = 609 meters, *A G* = 319 meters; dan zal men genoeg gegevens hebben, om eene figuur, die aan *A B C D E F G* gelijkvormig is te construeren. Men neme eene schaal van gelijke deelen, (eene schaal van bij voorbeeld millimeters,) en make eerst op een stuk papier *hoek b a c* = 28°, *hoek c a d* = 36°, *hoek d a e* = 21°, *hoek e a f* = 33° en *hoek f a g* = 42°. Daarna neme men, op die schaal, in millimeters, *a b* = 412, *a c* = 516, *a d* = 617, *a e* = 528, *a f* = 609 en *a g* = 319 millimeters, en trekke de lijnen *b c, c d, d e, e f* en *f g*; dan zal de figuur *a b c d e f g* aan de gegevene gelijkvormig zijn. Want *A B* : *a b* = *A C* : *a c* = *A D* : *a d* = *enz.* = 1000 × 412 : 412 = 1000 × 516 : 516 = *enz.* = 1000 : 1. *enz.*

B. *Tweede manier.* *Fig.* 122. Men ga de figuur rond, en mete al de hoeken *B*, *C*, *D*, *E* en *F*, (op de hoeken *A* en *G* na) en al de zijden *A B*, *B C*, *C D*, *D E*, *E F* en *F G*, op de zijde *G A* na. Zij *hoek B* = 138°, *hoek C* = 142°, *hoek D* = 83°, *hoek E* = 217°, *hoek F* = 91°, *A B* = 412 meters, *B C* = 398 meters, *C D* = 419 meters, *D E* =

353 meters, $EF = 218$ en $FG = 431$ meters. Neem dan, op de schaal der millimeters, $ab = 412$, *hoek* $b = 138°$, $bc = 398$, *hoek* $c = 142°$, $cd = 419$, *hoek* $d = 83°$, $de = 353$, *hoek* $e = 217°$, $ef = 218$, *hoek* $f = 91°$ en $fg = 431$ millimeters; en trek dan de lijn ga; dan zal (zie *III Gev.*) de figuur $abcdefg$ aan de gegevene gelijkvormig zijn.

C. *Derde manier. Fig.* 131. Men mete $AB = 412$ meters, en mete de hoeken BAC, CAD, DAE, EAF, FGA, en verder de hoeken ABG, GBF, FBE, EBD en DBC. Nu neme men, op de schaal, $ab = 412$ millimeters, en make aan de punten a en b, de hoeken $bae = BAC$, $cad = CAD$, *enz.* en trekke eindelijk de lijnen bc, cd, de, ef, fg; dan zal (*V. Gev.*) $abcdefg$ aan de gegevene figuur gelijkvormig zijn.

Wanneer men de figuur $abcdefg$, door ééne dezer drie constructien gevonden heeft, en men op de schaal de afstanden van twee punten meet; dan zal dit getal millimeters aanwijzen: hoe veel meters de overeenstemmende punten in de gegevene figuur van elkander afstaan.

Op deze theorie berust de inrigting en het gebruik van de meettafel of het planchet, door hetwelk eene gelijkvormige afteekening van een terrein gemaakt wordt.

XIII. Stelling. (*Het omgek. I. Gev. XII. Stell.*) *Fig.* 132.

§. 318. *Alle veelhoekige figuren* (hetzelfde aantal hoeken en zijden hebbende,) *in welke al de afstanden van de overeenkomstige hoekpunten, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, tot elkander in dezelfde reden staan, zijn gelijkvormig.*

Opheldering. Laten, *fig.* 132, $ABCDEFGHJK$ en $abcdefghik$ twee tienhoekige figuren zijn, in welke de overeenkomstige hoekpunten door dezelfde letters worden aangewezen; namelijk A en a, B en b, C en c, *enz.* Indien dan de afstanden van elke twee overeenkomstige hoekpunten, als, bij voorbeeld AB en ab, BC en bc, AC en ac, BE en be, *enz.* op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, (het aantal welker afstanden, zie *Gev. XXVI. Bep. I. B.*, gelijk aan $\frac{1}{2}n(n-1)$ voor een n-hoek is.) tot elkander in dezelfde reden staan, $AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EF : ef = FG : fg =$ *enz* $= AC : ac = AD : ad = AE : ae =$ *enz.* $= BD : bd = BE : be =$ *enz.* $= CE : ce = CF : cf =$ *enz.* $= DF : df = DG : dg =$ *enz.* $=$ *enz. enz.* dan moet betoogd worden: *dat deze veelhoeken gelijkvormig zijn.*

Betoog. Men kieze twee overeenstemmende hoekpunten A en a, en trekke, in beide figuren, uit die hoekpunten, al de hoekpuntslijnen AC, AD, *enz.* ac, ad, *enz.* die in dezelve kunnen worden getrokken: Indien wij dan bewijzen kunnen. 1°. dat al de overeenkomstige hoeken, in beide figuren, en 2°. dat al de hoeken, om de punten A en a gelijk zijn; dan zal het gestelde (zie *IV. Bep.*) bewezen zijn.

Om-

Om te betoogen: dat hoek $C =$ hoek c is, zoo trekke men de hoekpunts-lijnen BD en bd; dan is $BC : bc = CD : cd = BD : bd$ (*onderst.*), derhalve is hoek $BCD =$ hoek bcd (*IX. Stell.*)

Op dezelfde wijze wordt betoogd: dat hoek $B =$ hoek b, hoek $D =$ hoek d, hoek $E =$ hoek e, hoek $F =$ hoek f, hoek $G =$ hoek g, hoek $H =$ hoek h, hoek $I =$ hoek i, hoek $K =$ hoek k, hoek $A =$ hoek a is.

Omdat in de driehoeken ABC en abc, volgens de *onderst.* $AB : ab = BC : bc = AC : ac$ is, zoo zal (*IX. Stell.*) hoek $BCA =$ hoek bac zijn. Om dezelfde reden, zal hoek $CAD =$ hoek cad, hoek $DAE =$ hoek dae, hoek $EAF = eaf$, hoek $FAG =$ hoek fag, hoek $GAH =$ hoek gah, hoek $HAI =$ hoek hai, en hoek $IAK =$ hoek iak zijn.

De onderstelde evenredigheden zijn derhalve zelfs meer dan voldoende, om de gelijkheid der hoeken, welke tot de gelijkvormigheid der twee veelhoeken, volgens de *IV. Bep.* vereischt worden, noodzakelijk te maken; de veelhoeken zijn dan, onder de gestelde voorwaarde, noodzakelijk gelijkvormig.

XIV. STELLING. *Fig* 133—137.

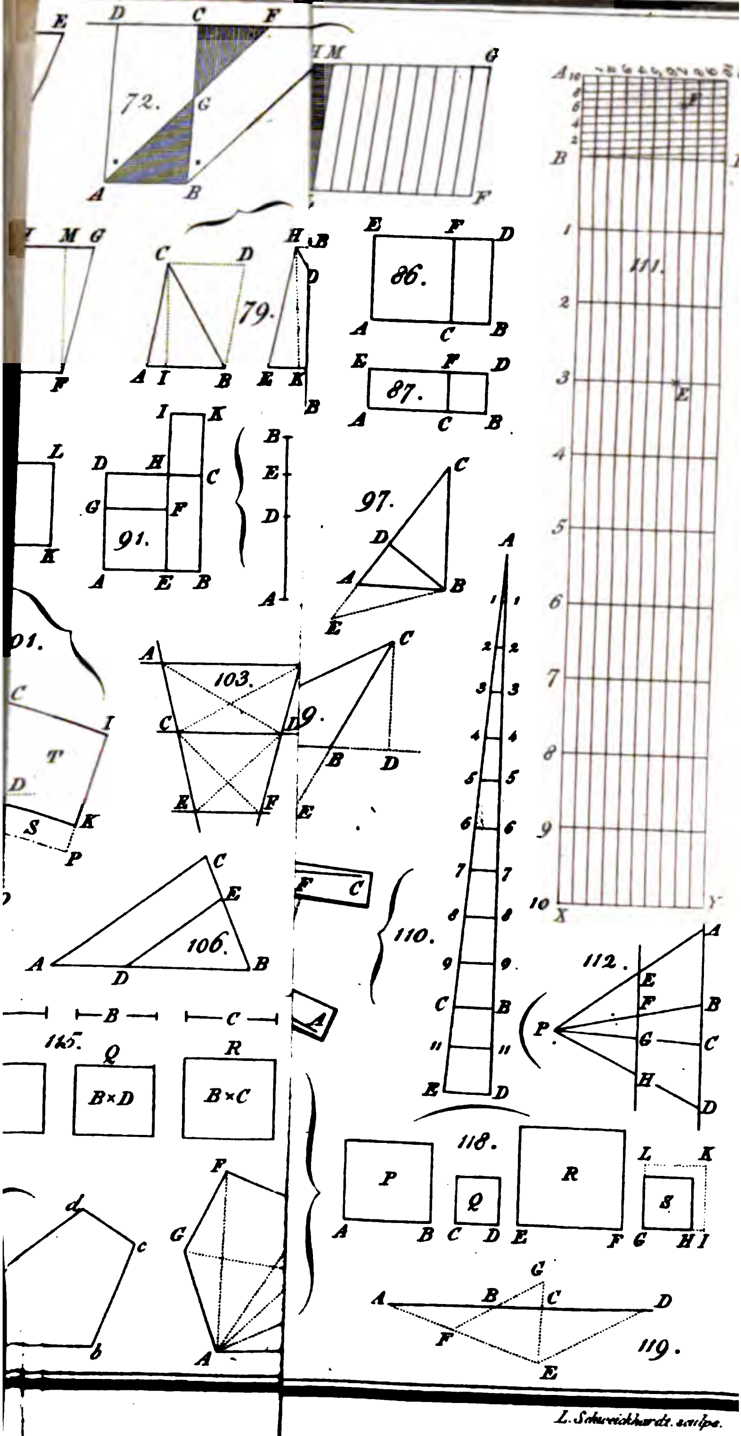
§. 319. *Wanneer men, of binnen, of buiten, of in den omtrek van eenige regtlijnige of kromlijnige figuur, regelmatige of onregelmatige* ($ABCDEFG$), *een punt* (P), *naar welgevallen, aanneemt; en, uit dit punt* (P), *tot aan al de punten van den omtrek dezer figuur, lijnen* (PA, PB, PC, PD, PE, enz.) *trekt; en, voorts op deze lijnen, of derzelver verlengde, van het voornoemde punt* (P) *af te rekenen, deelen* (Pa, Pb, Pc, Pd, Pe, enz.) *zoodanig aanneemt, dat zij tot de geheele lijnen,* (PA, PB, PC, PD, PE, enz.) *altijd in dezelfde reden staan; dan zullen de punten* (a, b, c, d, e, enz.), *op die wijze verkregen, gelegen zijn in den omtrek eener figuur, welke aan de eerste gelijkvormig is.*

BETOOG Wij zullen, in het betoog van deze gewigtige leerstelling, eerst de regtlijnige en daarna de kromlijnige figuren overwegen.

1°. *Voor de regtlijnige figuren.* Zij, *fig.* 133, $ABCDE$ eene vijfhoekige figuur. Men neme binnen dezelve het punt P, en trekke, uit hetzelve, tot aan al de hoekpunten, de lijnen, PA, PB, PC, PD en PE; op deze lijnen neme men de punten a, b, c, d en e, zoodanig: dat $PA : Pa = PB : Pb = PC : Pc = PD : Pd = PE : Pe$, zijn in eene gegevene reden, als, bij boorbeeld, van het getal p tot het getal q; indien men dan de lijnen ab, bc, cd, de en ea, trekt; dan zal de vijfhoek $abcde$ gelijkvormig zijn aan den vijfhoek $ABCDE$.

In deze twee vijfhoeken, zijn A en a, B en b, C en c, D en d en E en e, overeenstemmende punten; en nu bestaan er zoo veel overeenkomstige driehoeken, als er zijden in den veelhoek zijn; namelijk drieh. PAB en drieh. Pab, drieh. PBC en drieh. Pbc, enz. Al die over-





L. Schweickhardt. sculps.

nen verkrijgt, eene figuur voortbrengen, die gelijkvormig is aan de gestelde figuur *A B C enz.*

Men neme twee punten, *A* en *D* bij voorbeeld, in den omtrek van de eerste figuur, vereenige dezelve door de lijn *A D*, en vereenige tevens ook de overeenkomstige punten *a* en *d*; dan verkrijgt men de driehoeken *P A D* en *P a d*. Deze zijn nu gelijkvormig; want *hoek a P d* = *hoek A P D* (*fig.*) en *P A* : *P a* = *P D* : *P d* (*onderst.*); dus is *drieh. P a d* gelijkvormig aan *drieh. P A D* (*X. Stell.*), en daarom *A D* : *a d* = *P A* : *P a* = *p* : *q*.

Om dezelfde reden, zal *A B* : *a b* = *A C* : *a c* = *A E* : *a e* = *B E* : *b e* = *B G* : *b g* = *C H* : *c h* = *enz.* = *p* : *q* zijn; de afstand van twee punten, in den omtrek van de eerste figuur, staat dan tot den afstand van de overeenstemmende punten, in de voortgebragte, in dezelfde reden, als *p* : *q*; de figuren *A B C enz.* en *a b c enz.* zijn dan (*I. Gev. XII. St.*) gelijkvormig.

Wanneer men het punt *P*, in den omtrek van *A B C enz.* of buiten dien omtrek neemt; dan zal nog (even als bij de regtlijnige figuren,) hetzelfde plaats hebben. Men make zelf figuren voor die gevallen.

§. 320. I. Gevolg. *Fig.* 137. *De bogen A B C D en a b c d, die tusschen dezelfde hoeken A P D en a P d begrepen zijn, kan men overeenstemmende bogen noemen*, (zoo als men, *fig.* 133, *B D* en *b d* overeenstemmende hoekpuntslijnen noemt,) *die overeenstemmende bogen zijn nu ook onderling gelijkvormig*; want, ware er niet anders dan de kromlijnige boog *A B C D* gegeven, zou echter nog de overeenstemmende boog *a b c d*, door voorgeschrevene constructie verkregen, aan *A B C D* gelijkvormig moeten zijn.

§. 321. II. Gevolg. *Fig.* 138. Zij *A B C D* de omtrek eens cirkels, en *M* deszelfs middelpunt: indien men dan, op de stralen *A M*, *B M*, *C M*, *enz.* de punten *a*, *b*, *c*, *enz.* zoo aanneemt, dat *M a* : *M A* = *M b* : *M B* = *M c* : *M C*, *enz.* is; dan is (*VII. St. II. B.*) *M a* : *M b* = *M A* : *M B*; maar *M A* = *M B* zijnde, zoo is (*IV. Stell. II. B.*) *M a* = *M b*. Om dezelfde reden, zal *M e* = *M d* = *M c* = *M b* = *M a* zijn; de kromme lijn derhalve, die door de voorgeschrevene constructie verkregen wordt, is een cirkel. *Alle cirkels zijn derhalve gelijkvormige figuren. Ook zijn de overeenstemmende bogen A B C D en a b c d gelijkvormig. Gelijkvormig zijn ook de sectors A B C D M en a b c d M, en de segmenten A B C D en a b c d.*

§. 322. Aanmerking. *Fig.* 137. *Wanneer men de lijn A P om het punt P beweegbaar stelt, en aan de punten A en a op deze lijn zulk eene beweging geeft, dat, wanneer het punt A den omtrek eener regte- of kromlijnige figuur doorloopt, hetzelve door het andere*

punt

punt a zoodanig gevolgd wordt, dat overal PA tot Pa, in dezelfde standvastige reden is; dan zal het punt a eene figuur beschrijven; welke, blijkens het betoogde, aan de gegevene gelijkvormig zal zijn.

XV. Stelling. *Fig.* 139.

§. 323. *Wanneer men, op de verlengde zijden AB en BC van een parallelogram ABCD, twee punten P en E, zoodanig aanneemt, dat zij, met het punt D, in dezelfde regte lijn PE, liggen; en, voorts het geheele stelsel van lijnen, waaruit de zijden van het parallelogram bestaan, om de hoekpunten A, B, C en D, in beweging stelt, (deze lijnen onbuigbaar en onrekbaar stellende,) dan zullen, voor elken bijzonderen stand der figuur; de punten P, D en E, altijd in dezelfde regte lijn PE blijven, en PD zal altijd tot PE, in dezelfde standvastige reden van PA tot PB zijn.*

Betoog. Vermits, door de onderstelling, *ABCD* een parallelogram is, zal (*I. Bep. III. B.*) *AD* en *DC* aan *BE* en *PB* evenwijdig zijn; de driehoeken *ADP*, *CED* en *BEP* zullen dan (*XXVI. Stell. I. B.*) onderling gelijkhoekig en daarom (*III. Bep.*) gelijkvormig zijn, en wij hebben derhalve (*VIII. Stell.*) de evenredigheden: *AP* : *AD* = *CD* : *CE*, en *PD* : *PE* = *PA* : *PB*.

Omdat nu de lijnen onbuigbaar en onrekbaar ondersteld worden, zoo zal, wanneer de figuur den stand *A'B'C'D'* heeft aangenomen, *A'B'* = *AB*; *B'C'* = *BC*; *C'D'* = *CD* en *A'D'* = *AD* blijven, en (*I* en *II. Stell. III. B.*) *A'B'C'D'* zal, in dien stand, nog een parallelogram zijn; terwijl, volgens het bewezene, *PA'* : *A'D'* = *D'C'* : *C'E'* zal zijn, en (*XXX. Stell. I. B.*) *hoek PA'D'* = *hoek D'C'E'*; weshalve (*III. Bep.*) de driehoeken *PA'D'* en *D'C'E'* gelijkvormig zijn, zijnde *hoek PD'A'* = *hoek PD'A'*, en *hoek E'D'C'* = *hoek D'PA'*; deze hoeken met den *hoek A'D'C'* = *hoek PA'D'* optellende, zoo zal men (*VIII. Ax.*) vinden: dat de som der hoeken *PD'A'*, *A'D'C'* en *C'D'E'* = de som der hoeken *PA'D'*, *PD'A'* en *A'PD'* (*XVIII. St. I. B.*) = 2 *R* is; de lijn *D'E'* is dan, in dezen nieuwen stand der figuur (*VI. Stell. I. B.*) het verlengde van de lijn *PD'*; terwijl, wegens de gelijkvormige driehoeken, *PA'D'* en *PB'E'*, de lijnen *PD'* en *PE'* tot elkander in dezelfde reden, als *PA'* tot *P'B*, of, als *PA* tot *PB*, zullen gebleven zijn.

§. 324. Gevolg *Fig.* 139. *Wanneer men het geheele stelsel om het punt P beweegbaar maakt; dan zal men het punt E, langs den omtrek eener figuur QRS, kunnen bewegen, en dan zal het punt D eene figuur qrs beschrijven, welke, omdat PD tot PE altijd in eene bestendige reden blijft, aan de figuur QRS gelijkvormig zal zijn.*

§. 325. Aanmerking. In dezen toestel bestaat de *Pantographe* of *Verkleinaap*, in welke men nogtans *P B* gelijk aan *B E* neemt, en, in welke, men één der punten *P*, *D* of *E*, naar welgevallen, voor het vaste punt *P*, kan aannemen. *Neemt men, in* fig. 140, *de lijn E C, in het parallelogram A P B F, evenwijdig aan A P, en het punt D op de hoekpuntslijn P F; dan zal men dien toestel van lijnen om het punt P beweegbaar kunnen stellen, en hij zal dan denzelfden dienst, als die van de* 139 figuur, *bewijzen.*

HULPSTELLING. *Fig.* 141.

§. 326. *Laat A B C* enz. *G H I eene kromme lijn zijn, P een zeker punt in het vlak van dezelve; wanneer men dan, in den omtrek van die kromme lijn, eene groote menigte punten A, B, C, D,* enz. *zeer digt bij elkander neemt, en, na de lijnen P A, P B, P C* enz. *P I, getrokken te hebben, nog de koorden A B, B C, C D,* enz. *G H, H I, trekt; dan zal de veelhoekige figuur, tusschen de voerstralen P A en I P, en de koorden A B, B C,* enz. *G H, H I, begrepen, in inhoud en omtrek, des te nader komen aan den inhoud en den omtrek der kromlijnige figuur (tusschen dezelfde voerstralen A P en I P en de kromme lijn A I begrepen,) naar dat men de punten A, B, C,* enz. *digter bij elkander genomen heeft.*

Betoog. Omdat eene kromme lijn onophoudelijk en onmerkbaar van rigting verandert, zoo zal, (zie *Inl. X. Bep*) de koorde *A B*, die de uiteinden van een klein gedeelte *A B* van dezelve vereenigt, des te minder van de wezenlijke lengte van dien boog verschillen, hoe kleiner dezelve genomen wordt; doch, hoe klein die boog ook zij, hij is toch (*I. Ax.*) altijd iets langer dan de koorde; zelfs ook dan, wanneer onze zintuigen geen merkbaar verschil tusschen den boog en zijne koorde meer kunnen opmerken.

Men trekke de koorde *A I*, dan de koorden *A E* en *E I*, dan de koorden *A C*, *C E*, *E G* en *G I*, dan de koorden *A B*, *B C*, *C D*, *D E*, *E F*, *F G*, *G H*, *H I*, *enz.* Noemen wij nu de lengte van den boog *A B enz. H I* $= p$; en den inhoud, tusschen de voerstralen *A P* en *I P* en den boog *A B enz. H I* $= I$; dan is (*VII. St. I. B.*) $AE + IE > AI$; $AC + CE > AE$; ter hier bij $EG + GI > EI$; dus zal (*XI. Ax.*) $AC + CE + EG + GI > AE + EI$ zijn. Om dezelfde reden, zal $AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HI > AC + CE + EG + GI$ zijn.

Deelt men die kleine boogjes *A B*, *B C*, *enz.* elk in twee kleinere boogjes; dan zal de som van de zestien koorden dezer kleinere boogjes wederom grooter zijn dan de som van de koorden $AB + BC +$ *enz.* $+ HI$.

Men

Men stelle $AI = a$, $AE + EI = b$, $AC + CE + EG + GI = c$, $AB + BC +$ enz. $+ GH + HI = d$; de som van de zestien koorden, die ontstaan, indien de boogjes AB, BC, enz. elk in twee deelen gedeeld worden $= e$; de som van de koorden der twee-en-dertig boogjes (indien de laatste wederom in twee deelen verdeeld worden) $= f$, en laten g, h, i, k, l, m, n, de sommen van de koorden der boogjes voorstellen, die uit 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, enz. deeltjes van de kromme lijn ontstaan; dan zal $e > d$ en $< p$, $f > e$ en $< p$, $g > f$ en $< p$, $h > g$ en $< p$ zijn, enz. maar de verschillen zullen onophoudelijk kleiner worden, zij zouden zelfs, wanneer men, met die verdeeling, tot in het oneindige, konde voortgaan, ten laatste volkomen nul worden. Het blijkt dan: dat de omtrek van de kromme lijn AI zoo veel te minder van de som van de koorden van derzelver deelen zal verschillen, naar gelang die deelen kleiner genomen worden.

De veelhoeken, welke door de voerstralen AP, IP, en de koorden der boogen van de kromme lijn AI gevormd worden, zullen, zoo als uit de figuur blijkt, minder van I, dat is van den inhoud der kromlijnige figuur PAI, verschillen, naarmate de boogjes AB, BC, enz. kleiner zijn, en zullen aan dien inhoud wezenlijk gelijk worden, indien men met het verdeelen dezer boogjes tot in het oneindige voortgaat.

XVI. Stelling. *Fig.* 122 en 141.

§. 327. *De omtrekken van alle gelijkvormige figuren, regtlijnige en kromlijnige, staan, in regtlijnige figuren, tot elkander, in dezelfde reden, als derzelver overeenstemmende zijden of hoekpuntslijnen; of, als de afstanden van twee overeenstemmende punten, in de kromlijnige; en derzelver inhouden staan tot elkander in dezelfde reden, als de vierkanten, op die overeenstemmende zijden, hoekpuntslijnen of overeenstemmende afstanden, beschreven.*

Betoog. Wij zullen dit gestelde eerst voor de regtlijnige en daarna voor de kromlijnige figuren betoogen.

A. *Voor de regtlijnige figuren. Fig.* 122. Laten AB enz. FG en ab enz. fg twee gelijkvormige veelhoeken zijn: A en a twee van derzelver overeenstemmende hoekpunten; wanneer men dan uit dezelve alle mogelijke hoekpuntslijnen AC, AD, AE, AF, en ac, ad, ae, af, trekt; dan zijn (*III. Bep.* en *IV. Gev. XII. Stell.*) beide veelhoeken in hetzelfde aantal gelijkvormige driehoeken ABC en abc, ACD en acd, ADE en ade, AEF en aef, AFG en afg, verdeeld. En nu is

1°. Volgens het betoogde in de *XII. Stelling*,

$(AB, BC, CD, DE, EF, FG, GA) :: (ab, bc, cd, de, ef, fg, ga)$

Uit die aaneengeschakelde evenredigheid volgt dan (*X. Stell. II. B.*)

$$AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA : ab + bc + cd + de + ef + fg + ga = AB : ab$$

 dat

dat is, de omtrek van de eerste figuur tot dien van de tweede, als $AB : ab$, of (zie *XII. Stell.*) als $AC : ac$, of $Ee : ee$, *enz.*

2°. Volgens het betoogde in de *XI. Stelling*, is verder:

$$drieh.\ ABC : drieh.\ abc = AB^2 : ab^2$$
$$drieh.\ ACD : drieh.\ acd = AC^2 : ac^2$$
$$drieh.\ ADE : drieh.\ ade = AD^2 : ad^2$$
$$drieh.\ AEF : drieh.\ aef = AE^2 : ae^2$$
$$drieh.\ AFG : drieh.\ afg = AF^2 : af^2$$

aangezien nu (*XII. Stell.*) $AB : ab = AC : ac = AD : ad = AE : ae = AF : af$ is, zoo is ook (*VII. Stell.*) $AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2 = AE^2 : ae^2 = AF^2 : af^2$; en, uit de voorgaande evenredigheden, volgt dan de aanééngeschakelde evenredigheid:

$$(drieh.\ ABC,\ drieh.\ ACD,\ enz.\ drieh.\ AFG) :: (drieh.\ abc,\ drieh.\ acd,\ enz.\ drieh.\ afg)$$

uit welke dan (*X. Stell. II. B.*) volgen zal:

$$drieh.\ ABC + drieh.\ ACD + drieh.\ ADE + drieh.\ AEF + drieh.\ AFG : drieh.\ abc + drieh.\ acd + drieh.\ ade + drieh.\ aef + drieh.\ afg = drieh.\ ABC : drieh.\ abc$$

dat is, volgens de figuur:

$$veelh.\ ABCDEFG : veelh.\ abcdefg = drieh.\ ABC : drieh.\ abc$$

maar nu is $drieh.\ ABC : drieh.\ abc = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2 = CE^2 : ce^2$ *enz.* men heeft dan (*I. Stell. II. B.*)

$$veelh.\ ABCDEFG : veelh.\ abcdefg = AB^2 : ab^2 = CE^2 : ce^2,\ enz.$$

B. *Voor de kromlijnige figuren.* Fig 141. Laat de figuur eene vlakte voorstellen, besloten tusschen twee voerstralen AP, IP, en eene kromme lijn AEI. Men construere (zie *XIV. Stell.*) uit het punt P eene figuur $Pabc$ *enz.* ghi, die aan $PABC$ *enz.* GHI gelijkvormig is, door $aP : AP = bP : BP = cP : CP$, *enz.* te stellen.

Indien men dan de koorden AI en ai trekt; dan is (*XIV. Stell.*) $AI : ai = AP : aP$, en $drieh.\ AIP : drieh.\ aiP = AP^2 : aP^2$.

Trekt men nog de koorden AE, IE en ae, ie; dan is, volgens het reeds betoogde, $AE + EI : ae + ei = AP : aP$, en $vierh.\ PAEI : vierh.\ Paei = AP^2 : aP^2$.

Trekt men nog de koorden AC, CE, EG, GI en ac, ce, eg en gi; dan is nog, om dezelfde reden, *omtrek veelh.* $ACEGI$: *omtrek veelh.* $acegi = AP : aP$, *enz.* en *veelh.* $PACEGI : Pacegi = AP^2 : aP^2$.

Al verder voortgaande, zal het blijken: dat, om dezelfde reden, *omtrek veelh.* $ABCDEFGHI$: *omtrek veelh.* $abcdefghi = AP : aP$; en *veelh.* PAB *enz.* HI : *veelh.* Pab *enz.* $hi = AP^2 : aP^2$ is.

Gaat men, op die wijze voort, met telkens het aantal der overeenstemmende zijden van de veelhoeken, die in de kromme lijnen AEI en aei kunnen beschreven worden, onophoudelijk te verdubbelen (echter hier bij altijd de constructie, in de *XIV. Stell.* opgegeven, volgende,) zoo zullen, tot in het oneindige, de omtrekken dezer veelhoeken, in

re-

reden blijven, als AP tot aP, en derzelver inhouden (in P zamenmenkomende,) in reden, als $AP^2 : aP^2$.

Maar nu hebben wij, in de voorgaande *Hulpstelling*, betoogd: dat de omtrekken en inhouden der veelhoeken, in die kromme lijnen beschreven, steeds nader bij den omtrek en den inhoud van die kromme lijnen komen, naarmate het aantal van de zijden der ingeschrevene veelhoeken, door gedurige verdubbeling, grooter wordt; en volkomen aan dezelve gelijk worden, indien men werkelijk tot in het oneindige voortginge; daar nu, blijkens het betoogde, de omtrekken en inhouden der overeenstemmende veelhoeken dezelfde reden van AP tot aP, en van $AP^2 : aP^2$ blijven behouden, zoo is klaarblijkelijk: *de lengte van de kromme lijn* AEI *tot die van de kromme lijn* aei, *als* AP *tot* aP; *en de inhoud der kromlijnige figuur* $PAEI$ *tot dien van de kromlijnige figuur* $Paei$, *als* AP^2 *tot* aP^2.

§. 328. I. GEVOLG. In *fig.* 137, welke tot het betoog der *XIV Stelling* gediend heeft, zijn de omtrekken der gelijkvormige kromlijnige figuren ABC *enz.* en abc *enz.* als AD tot ad, als CF tot cf; en derzelver inhouden, als AD^2 tot ad^2, als CF^2 tot cf^2.

§. 329. II. GEVOLG. *Fig.* 138. Omdat (*II. Gev. XIV. Stell.*) alle cirkels gelijkvormige figuren zijn, zoo zijn:

1°. *De omtrekken van alle cirkels tot elkander, in dezelfde reden, als hunne middellijnen of stralen.*

2°. *De inhouden van alle cirkels staan tot elkander, in dezelfde reden, als de vierkanten, die op hunne middellijnen of stralen zijn beschreven.*

§. 330. III. GEVOLG. *Fig.* 138. Wanneer, uit hetzelfde middelpunt M, twee cirkels ABC *enz.* en abc *enz.* zijn beschreven; *dan zijn* (I. Gev. XIV. Stell.) *de bogen* $ABCD$ *en* $abcd$, *tusschen dezelfde stralen begrepen, gelijkvormig*; ook *zijn gelijkvormig de sectors* $MABCD$ *en* $Mabcd$, *als mede de segmenten* $ABCD$ *en* $abcd$; en dan volgt uit het betoogde:

1°. *Boog* $ABCD$ *tot boog* $abcd$, *als de straal* AM *tot den straal* aM; *als de koorde* AD *tot de koorde* ad.

2°. *Sector* $ABCDM$ *tot sector* $abcdM$, *als* MA^2 *tot* Ma^2, *als* AD^2 *tot* ad^2.

3°. *Segment* $ABCD$ *tot segment* $abcd$, *als* AD^2 *tot* ad^2. Men zie verder het *VI. Boek.*

IV. *Gebruik van de gelijkvormige driehoeken, in het uitvinden van de eigenschappen der figuren.*

XVII. STELLING. (*XII. Stell. II. Druk.*) *Fig.* 142.

§. 331. *De loodlijn (CD), welke, uit het hoekpunt (C) van den regten hoek eens regthoekigen driehoeks (ABC), op de hypothenusa (AB) valt, deelt dien regthoekigen driehoek (ABC) in twee andere regthoekige driehoeken (ACD en BCD), die, elk op zich zelve, aan den geheelen driehoek (ABC), en ook onderling aan elkander gelijkvormig zijn.*

BETOOG *van het eerste.* In de driehoeken *ABC* en *ACD*, is vooreerst *hoek CAD* = *hoek BAC* (*uit de figuur*) *hoek ADC* = *hoek ACB* = *R* (*onderst. en II. Stell. I. B.*); derhalve *hoek ACD* = *hoek ABC* (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*); gevolgelijk is (*III. Bep.*) *drieh. ACD* gelijkvormig aan *drieh. ABC.*

BETOOG *van het tweede.* In de driehoeken *CBD* en *ABC*, is *hoek CBD* = *hoek ABC* (*uit de fig.*) *hoek BDC* = *hoek BCA* (*onderst. en II. Stell. I. B.*) dus *hoek BCD* = *hoek CAB* (*IX. Gev. XVII. St. I. B.*); de driehoeken *CBD* en *ABC* zijn dan (*III. Bep.*) gelijkvormig.

BETOOG *van het derde.* Er is reeds bewezen, dat *hoek CAD* = *hoek BCD*, *hoek ACD* = *hoek CBD* en *hoek ADC* = *hoek CDB*; de driehoeken *ACD* en *BCD* zijn dan (*III. Bep.*) gelijkvormig.

§. 332. I. GEVOLG. *Fig.* 142. *Uit de onderlinge gelijkvormige driehoeken ABC, ACD en BCD, kan alles, wat, in de* XVI. Stelling *van het* III. Boek *en derzelver gevolgen en bijvoegselen, bewezen is, worden afgeleid.*

Want, uit de gelijkvormige driehoeken *ACD* en *ABC*, volgt (zie *VIII. Stell. en V. Stell.*)

$AB : AC = AC : AD$; derhalve $AB \times AD = AC^2$ . . (1)

Om dezelfde reden, is, in de gelijkvormige driehoeken *BCD* en *ABC*,

$AB : BC = BC : BD$; derhalve $AB \times BD = BC^2$ . . (2)

Telt men nu de vergelijkingen (1) en (2) bij elkander; zoo vindt men (*I. Hulpst. III. B.*)

$AB \times AD + AB \times BD$ of $AB^2 = AC^2 + BC^2$ . . . (3)

Eindelijk volgt, uit de gelijkvormige driehoeken *ADC* en *BCD*,

$AD : DC = DC : BD$; derhalve $AD \times BD = CD^2$ . . (4)

§. 333. II. GEVOLG. *Fig.* 142. Men trekke *BE* loodregt op *BC*; *EF* loodregt op *BE*; *FG* loodregt op *EF*, *enz.* dan kan men, met het construeren van die loodlijnen, tot in het oneindige, voortgaan, zonder dat men ooit tot het punt *D* zal komen; en nu is, volgens het betoogde $AD : DC = DC : DB = DB : DE =$

DE

DE : *DF* = *DF* : *DG*, *enz. zoodat de lijnen DA, DC, DB, DE, DF, DG*, enz. *tot in het oneindige, eene afdalende meetkunstige reeks uitmaken; — eene reeks, die men, aan den tegenovergestelden kant, insgelijks tot in het oneindige kan vervolgen.* Verder is *AC* : *BC* = *AD* : *CD* = *CD* : *BD* en *BC* : *BE* = *CD* : *BD* (*bewezen*); derhalve is *AC* : *BC* = *BC* : *BE* (*I. Stell. II. B.*) Om deze'fde reden, is *BC* : *BE* = *BE* : *EF*; *de lijnen AC, CB, BE, EF, FG*, enz. *maken dan insgelijks eene afdalende meetkunstige rij.*

§. 334. III. GEVOLG. *Fig.* 142, *a.* Zij driehoek *ABC* regthoekig in *C*; trek dan *CD* regthoekig op *AB*, *DE* regthoekig op *AC*, enz. *dan zijn:* 1°. *de lijnen BC, CD, DE, EF, FG*, enz. 2°. *de lijnen AB, AD, AF, AH, AK*, enz. *en* 3°. *de lijnen AC, AE, AG, AI*, enz. *termen van meetkunstige reeksen.*

§. 335. IV. GEVOLG. *Fig.* 124. *Wanneer men, in den driehoek ACB, hoek ACD = hoek B, hoek BCE = hoek A maakt; dan zijn de driehoeken ACD en BCE aan den driehoek ABC en onderling aan elkander gelijkvormig.* De Leerling zoeke het bewijs, ook voor het geval, waarin hoek *ABC* scherp is, en hij zoeke verder de gevolgen dezer gelijkvormigheid.

XVIII. STELLING. (*XIII. Stell. II. Druk.*) *Fig.* 143.

§. 336. *Wanneer men, uit het toppunt C van een scheefhoekigen driehoek (ABC), tot aan de basis (AB), eene lijn CD trekt, die gelijk is aan de kortste (BC) der opstaande zijden; dan zal het vierkant, op de grootste der opstaande zijden (AC), gelijk zijn aan het vierkant op de kortste van dezelve, opgeteld met den regthoek, onder de basis (AB) en het stuk (AD) van dezelve, dat aan de langste der opstaande zijden ligt;* $AC^2 = BC^2 + AB \times AD$.

BETOOG. Men make *hoek ADF = hoek ACB; dan zijn vooreerst de driehoeken ABC en AFD gelijkvormig;* want, behalve de hoeken, die, bij *D* en *C*, volgens constructie, zijn gelijk gemaakt, is nog *hoek DAF = hoek CAB*; gevolgelijk is *hoek AFD = hoek ABC* (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*); derhalve zijn de driehoeken *AFD* en *ABC* (*III. Bep.*) gelijkvormig.

Ook zijn de driehoeken ACD en DCF gelijkvormig; want, omdat *CD* = *BC* is (*onderst.*); zoo is *hoek CDB = hoek ABC* (*XIV. St. I. B.*) = *hoek AFD* (*bewezen*); deze gelijke hoeken hebben gelijke supplementen (*III. St. I. B.*); gevolgelijk is *hoek ADC = hoek CFD*, en *hoek ACD = hoek DCF*, (*figuur*); daarom is nu ook *hoek DAC = hoek FDC* (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) de driehoeken *ADC* en *DCF* zijn dan (*III. Bep.*) gelijkvormig.

Uit de twee eerste gelijkvormige driehoeken ABC en AFD volgt nu (VIII. *Stell.*) de evenredigheid, $AB : AC = AF : AD$; derhalve is dan ook (V. *Stell.*)

$$AC \times AF = AB \times AD \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Uit de twee andere gelijkvormige driehoeken ADC en DFC volgt (VIII. *Stell.*) de evenredigheid, $AC : CD = CD : CF$; en daarom is dan ook (V. *Stell.*)

$$AC \times CF = CD^2 = BC^2 \text{ (onderst.)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Telt men nu de vergelijkingen (1) en (2) bij elkander; dan zal men (zie I. *Hulpst.* III. *B.*) verkrijgen:

$$AC^2 = BC^2 + AB \times AD \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

§. 337. I. Gevolg. *Fig.* 143. Indien men $CE = AC$ maakt; dan is het gemakkelijk te zien: dat $AB = DE$ en $AD = BE$ is. Nu is uit vergelijking (3) $BC^2 = AC^2 - AB \times AD$.

§. 338. II. Gevolg. *Fig.* 143. Wanneer men, in een gelijkbeenigen driehoek ACE, uit het toppunt C, eene lijn BC tot aan de basis trekt; dan is (omdat $AB = DE$ is), $AC^2 = DC^2 + AD \times DE$. En trekt men, in eenen gelijkbeenigen driehoek BCD, uit het toppunt C, eene lijn CE tot aan het verlengde van de basis; dan zal $CD^2 = CE^2 - DE \times BE$ zijn.

§. 339. Aanmerking. Men kan, uit de vergelijking (3), het betoogde in de XVI, XVIII en XIX. *Stell.* III. *B.* afleiden. Wij laten dit aan het eigen onderzoek van den Lezer over.

XIX. Stelling. (*IV. Stell. IV. B. en XXV. Stell. V. B. II. Druk.*)
Fig 144 *en* 145.

§. 340. *De lijn* (CD), *welke eenigen hoek* (ACB) *eens driehoeks* (ABC) *in twee gelijke deelen* (ACD *en* BCD) *verdeelt, deelt de overstaande zijde* (AB) *in deelen* (AD *en* BD), *die aan de twee andere zijden* (AC *en* BC) *dezes driehoeks evenredig zijn; en het vierkant, op die deellijn* (CD) *beschreven, is gelijk den regthoek, onder de zijden* (AC *en* BC), *die om den verdeelden hoek* (ACB) *staan, verminderd met den regthoek onder de deelen* (AD *en* BD) *van de derde zijde* (AB). *De lijn* (CF), *welke het supplement van den hoek* (ACB) *eens driehoeks midden door deelt, ontmoet het verlengde van de overstaande zijde* (AB), *in een punt* (F), *welks afstanden* (AF *en* BF) *tot de hoekpunten van die zijde evenredig zijn aan de twee andere zijden* (AC *en* BC) *des driehoeks; terwijl het vierkant, op die deellijn* (CF), *gelijk is aan den regthoek, onder die afstanden, verminderd met den regthoek*

on-

onder de zijden (*AC en BC*) *van den hoek, wiens supplement is midden door gedeeld. Dat is:*

$$AD : BD = AC : BC \quad \ldots \ldots \quad (a)$$
$$CD^2 = AC \times BC - AD \times BD \quad \ldots \quad (b)$$
$$AF : BF = AC : BC \quad \ldots \ldots \quad (c)$$
$$CF^2 = AF \times BF - AC \times BC \quad \ldots \quad (d)$$

BETOOG *van het eerste. Fig.* 144. Men verlenge de zijde *AC*, neme, op die verlengde zijde, *CE* = *BC*, en trekke de lijn *BE*; dan is *BCE* een gelijkbeenige driehoek, in welken 1°. *hoek CBE* = *hoek CEB* (XIV. *Stell.* I. *B.*) is, 2°. is (IV *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*) ½ *hoek ACB* = *hoek ACD* = *hoek BCD* (*onderst.*) = *hoek CEB* = *hoek CBE*; de lijn *CD* is dan (XXVII. *Stell.* I. *B.*) evenwijdig aan *BE*; in den driehoek *ABE* bestaat dan (II *Gev.* I. *Stell.*) de evenredigheid, *AD* : *BD* = *AC* : *CE*; dat is, omdat *CE* = *BC* is genomen, *AD* : *BD* = *AC* : *BC*.

BETOOG *van het tweede. Fig.* 145. Men verlenge *CD*, en make *hoek CAG* = *hoek CDB*.

Dan is vooreerst de driehoek *ACG* gelijkvormig aan den driehoek *DCB*; want *hoek ACG* = *hoek DCB* (*onderst.*) en *hoek CAG* = *hoek CDB* (*constructie*), eindelijk *hoek AGC* = *hoek DBC* (IX. *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*); derhalve is (III. *Bep.*) *drieh. ACG* gelijkvormig aan den *driehoek DCB*.

Nog zijn de driehoeken *AGD* en *CBD* gelijkvormig; want *hoek ADG* = *hoek CDB* (IV. *Stell.* I. *B.*); *hoek AGD* = *hoek CBD* (*bewezen*) en *hoek GAD* = *hoek BCD* (IX. *Gev.* XVIII. *St.* I. *B.*); daarom is (III. *Bep.*) *driehoek AGD* gelijkvormig aan *driehoek CBD*.

Uit de gelijkvormige driehoeken *ACG* en *DCB* volgt (VIII. *Stell.*) de evenredigheid *AC* : *CG* = *CD* : *BC*; en dus is (V. *Stell.*),

$$CG \times CD = AC \times BC \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

En, uit de gelijkvormige driehoeken *AGD* en *CBD*, verkrijgt men de evenredigheid, *AD* : *GD* = *CD* : *BD*, en daarom is, V. *Stell.*

$$GD \times CD = AD \times BD \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Trekt men nu de vergelijking (2) van de vergelijking (1) af; dan wordt eindelijk:

$$CG \times CD - GD \times CD = AC \times BC - AD \times BD$$
$$\text{of } CD^2 = AC \times BC - AD \times BD \quad \ldots \ldots \quad (b)$$

BETOOG *van het derde. Fig.* 144. Men make *CG* = *BC*, en trekke de lijn *BG*; dan is *BCG* een gelijkbeenige driehoek; en nu is (XIV. *Stell.* I. *B.*) *hoek CBG* = *hoek CGB* en (IV. *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*) ½ *hoek BCE* = *hoek BCF* = *hoek ECF* (*onderst.*) = *hoek CBG* = *hoek CGB*; daarom is (XXVII. *Stell.* I. *B.*) *BG* evenwijdig aan *CF*; en nu is IV. *Gev.* I. *Stell.*) *AF* : *BF* = *AC* : *CG*; dat is (daar *CG* = *BC* is) *AF* : *BF* = *AC* : *BC*.

BETOOG *van het vierde. Fig.* 145. Men verlenge *CF*, en make *hoek CAH* = *hoek F*.

Dan

Dan zijn de driehoeken ACH en FCB gelijkvormig; want *hoek* ACH = *hoek* ECF (IV. *Stell.* I. *B.*) = *hoek* BCF (*onderst.*). Voorts is *hoek* CAH = *hoek* F (*constr.*) en *hoek* AHC = *hoek* FBC (IX. *Gev* XVIII. *St.* I. *B.*), en daarom is (III. *Bep.*) *drieh.* ACH gelijkvormig aan *drieh.* FCB.

Nog zijn de driehoeken AFH en CFB gelijkvormig; want *hoek* AHF = *hoek* CBF (*bewezen*); *hoek* AFH = *hoek* CFB (*figuur*) en *hoek* FAH = *hoek* BCF (IX. *Gev.* XVIII. *St.* I. *B.*); zoodat (III. *Bep.*) *drieh.* AFH gelijkvormig is aan *drieh.* CFB.

Uit de gelijkvormige driehoeken AFH en CFB volgt (VIII. *St.*) de evenredigheid, $AF : FH = CF : BF$; en daarom is (V. *Stell.*)

$$FH \times CF = AF \times BF \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Uit de gelijkvormige driehoeken ACH en FCB volgt, om dezelfde reden, de evenredigheid $AC : CH = CF : BC$, en

$$CH \times CF = AC \times BC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Men trekke nu de vergelijking (4) van de vergelijking (3); dan zal men eindelijk vinden:

$$FH \times CF - CH \times CF \text{ of } (FH - CH)CF = AF \times BF - AC \times BC$$

$$\text{of } CF^2 = AF \times BF - AC \times BC \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

§. 341. I. Gevolg. *Fig.* 144. Omdat $AD : BD = AC : BC$ en $AF : BF = AC : BC$ is, zoo is (*I. Stell. II. B.*) $AD : BD = AF : BF$, en daarom is (*V. Stell.*) $AF \times BD = AD \times BF$; *de punten D en B deelen dan* (*II. Gev. II. Bep.*) *de lijn* AF *harmonisch*.

§. 342. II. Gevolg. *Fig.* 144. *De deellijnen* CD *en* CF *snijden elkander onder een regten hoek.* Want 2 *hoek* BCD = *hoek* ACB, en 2 *hoek* BCF = *hoek* BCE (*onderst.*); daarom is (*VIII. Ax. en V. Stell. I. B.*)

$$2 \text{ hoek } BCD + 2 \text{ hoek } BCF = \text{hoek } ACB + \text{hoek } BCE = 2R$$

$$\text{en hoek } BCD + \text{hoek } BCF = \text{hoek } DCF = R \quad (XIII.\ Ax.)$$

§. 343. Aanmerking. *Fig.* 144. Uit de betoogde evenredigheden en vergelijkingen, zal men gemakkelijk vinden:

$$AD = \frac{AC \times AB}{AC + BC},\quad BD = \frac{BC \times AB}{AC + BC},\quad AF = \frac{AC \times AB}{AC - BC},$$

$$\text{en } BF = \frac{BC \times AB}{AC - BC}$$

$$CD = \sqrt{[AC \times BC - AD \times BD]}$$

$$CF = \sqrt{[AF \times BF - AC \times BC]}$$

door welke formulen, uit de drie gegevene zijden eens driehoeks, de deelen AD, BD, de afstanden AF, BF, en de deellijnen CD en CF, zullen kunnen berekend worden.

Voorbeeld. *Zij gegeven*, $AB = 28$, $AC = 36$ *en* $BC = 20$?

dan

dan zal men vinden: $AD = 18$, $BD = 10$, $AF = 63$, $BF = 35$, en eindelijk $CD = 23,2379$ *enz.* en $CF = 38,5357$ *enz.*

XX. Stelling. *Fig.* 146 *en* 147.

§. 344. *De loodlijnen* (AE, BF *en* CD), *welke, uit de hoekpunten* (A, B *en* C,) *van eenen driehoek* (ABC), *op de overstaande zijden* (BC, AC *en* AB,) *vallen, ontmoeten elkander, binnen of buiten dien driehoek, noodzakelijk in hetzelfde punt* (P).

Betoog. *Fig.* 146. Stellen wij: dat CD loodregt op AB, en AE loodregt op BC staat; die loodlijnen snijden elkander in één punt P. Nu zeg ik: *dat de lijn* BF, *die, van het hoekpunt* B, *door dit punt* P *getrokken wordt, loodregt op* AC *staat.*

Men trekke, om dit te bewijzen, PG en PH, evenwijdig aan AC en BC; dan is (XXVI. *Stell.* I. *B.*) *hoek* $APH =$ *hoek* $AEB = R$ (*onderst.*) en *hoek* $BPG =$ *hoek* BFA.

In de driehoeken ACD en ~~BCD~~, die uit de onderstelling regthoekig in D zijn, is (IV. *Gev.* I. *Stell.*)

$$AD : GD = CD : PD$$
$$BD : DH = CD : PD$$

derhalve is $AD : GD = BD : DH$, (I. *Stell.* II. *B.*)

en $GD \times BD = AD \times DH$, (V. *Stell.*) . . (1)

Nu is *hoek* $APH = R$ (*bewezen*), gevolgelijk is (*Gev.* XVI. *St.* III. *B.*)

$$PD^2 = AD \times DH$$

De vergelijking (1) wordt derhalve $PD^2 = GD \times BD$; maar dit zoo zijnde, zoo is (XVII. *Stell.* III. *B.*) de driehoek BPG, in het punt P, regthoekig, en *hoek* $BPG = R$; maar *hoek* $BPG =$ *hoek* BFA (*bewezen*); derhalve is *hoek* $BFA = R$, en BF staat dus loodregt op AC. Dit betoog geldt ook voor *fig.* 147.

Dit nu bewezen zijnde, zoo volgt het gestelde van zelf. Want, indien de loodlijn, die uit B, loodregt op AC valt, de andere loodlijnen AE en CD niet in P doorsnede; dan zouden er uit B twee loodlijnen (ééne door het punt P, en eene andere buiten het punt P gaande,) staan, en dit is (XXI, *Stell.* I. *B.*) onmogelijk.

§. 345. Aanmerking. *Fig.* 146. *Er bestaan, in deze figuur, eene menigte van gelijkvormige driehoeken, uit welke verscheidene evenredigheden kunnen worden opgesteld:* zij zijn de volgende:

drieh. ABE gelijkvormig aan *drieh.* CBD
drieh. BCF gelijkvormig aan *drieh.* ACE
drieh. CAD gelijkvormig aan *drieh.* BAF
drieh. APD gelijkvormig aan *drieh.* ABE
drieh. BPD gelijkvormig aan *drieh.* BAF
drieh. BPE gelijkvormig aan *drieh.* BCF
drieh. CPE gelijkvormig aan *drieh.* CBD

drieh. CPF gelijkvormig aan *drieh.* CAD
drieh. APF gelijkvormig aan *drieh.* ACE
drieh. APD gelijkvormig aan *drieh.* CPE
drieh. BPD gelijkvormig aan *drieh.* CPF
en *drieh.* BPE gelijkvormig aan *drieh.* APF

De Lezer zoeke, met behulp van de III. *Bep.* het betoog van de gelijkvormigheid van al die driehoeken. Met behulp van de VIII en V. *Stellingen* volgen uit dezelve de volgende evenredigheden en vergelijkingen:

$$BC:AB = BD:BE, \text{ derhalve } BC \times BE = AB \times BD \quad . \; (1)$$
$$AC:BC = CE:CF, \; \ldots\ldots \; AC \times CF = BC \times CE \quad . \; (2)$$
$$AB:AC = AF:AD, \; \ldots\ldots \; AB \times AD = AC \times AF \quad . \; (3)$$
verder $$AE:BE = AD:PD, \text{ derhalve } PD = BE \times AD : AE \quad . \; (4)$$
$$BF:CF = BE:PE, \; \ldots\ldots \; PE = BE \times CF : BF \quad . \; (5)$$
$$CD:AD = CF:PF, \; \ldots\ldots \; PF = AD \times CF : CD \quad . \; (6)$$
en nog $$AP:PD = CP:PE, \text{ derhalve } AP \times PE = CP \times PD \quad . \; (7)$$
$$BP:PD = CP:PF, \; \ldots\ldots \; BP \times PF = CP \times PD \quad . \; (8)$$
$$BP:PE = AP:PF, \; \ldots\ldots \; BP \times PF = AP \times PE \quad . \; (9)$$

bij welke nog kan gevoegd worden (*Gev.* VIII. *Stell.* III. *B*)

$$AB \times CD = BC \times AE = AC \times BF \; \ldots\ldots \; (10)$$

En, wanneer men de vergelijkingen (1), (2) en (3), met elkander vermenigvuldigt; dan wordt

$$AD \times BE \times CF = BD \times CE \times AF \; \ldots\ldots \; (11)$$

Met behulp van deze vergelijkingen en die, welke in de XVIII en XIX. *Stell.* III. *B.* betoogd zijn, kan men, de zijden van eenen driehoek gegeven zijnde, deszelfs loodlijnen berekenen, de stukken, in welke zij de overstaande zijden snijden, alsmede de stukken, in welke zij elkander verdeelen.

Voorbeeld. *Zij gegeven*, $AB = 418$, $BC = 290$ en $AC = 480$?

Met behulp van de vergelijkingen $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD$ en $CD^2 = BC^2 - BD^2$ is (*Aanm.* XVIII en XIX. *Stell.* III. *B.*) gevonden $BD = 34$, $AD = 384$ en $CD = 288$.

Op dezelfde wijze, zal men vinden: $CE = 240\frac{144}{145}$, $BE = 49\frac{1}{145}$ en $AE = 415\frac{17}{145}$.

Eindelijk zal men nog, op dezelfde wijze te werk gaande, verkrijgen: $AF = 334\frac{2}{5}$, $CF = 145\frac{3}{5}$ en $BF = 250\frac{4}{5}$.

Onderstelt men, dat BD, AD en CD, door de voornoemde formulen zijn berekend; dan kan men, uit de boven uitgebragte vergelijkingen al het overige vinden; want, uit de vergelijkingen (10) zal volgen:

$$AE = AB \times CD : BC = 418 \times 288 : 290 = 415\frac{17}{145}$$
$$BF = AB \times CD : AC = 418 \times 288 : 480 = 250\frac{4}{5}$$

Verder zal, uit de vergelijkingen (1) en (3), volgen:

$$BE = AB \times BD : BC = 418 \times 34 : 290 = 49\frac{1}{145}$$
$$AF = AB \times AD : AC = 418 \times 384 : 480 = 334\frac{2}{5}$$

Eindelijk, zal men, uit de vergelijkingen (4), (5) en (6), vinden:

PD

$$PD = BE \times AD : AE = 49\tfrac{1}{143} \times 384 : 415\tfrac{17}{143} = 45\tfrac{1}{3}$$
$$PE = BE \times CF : BF = 49\tfrac{1}{143} \times 145\tfrac{3}{5} : 230\tfrac{4}{5} = 28\tfrac{196}{435}$$
$$PF = AD \times CF : CD = 384 \times 145\tfrac{3}{5} : 288 = 194\tfrac{2}{15}$$

waaruit, met behulp der bekende loodlijnen, volgen zal:

$$CP = 242\tfrac{2}{3},\ AP = 386\tfrac{2}{3} \text{ en } BP\ 56\tfrac{2}{3}$$

Tot een bewijs van de juistheid van die berekeningen zal men, zie vergelijkingen (7), (8) en (9), verkrijgen:

$$45\tfrac{1}{3} \times 242\tfrac{2}{3} = 28\tfrac{196}{435} \times 386\tfrac{2}{3} = 194\tfrac{2}{15} \times 56\tfrac{2}{3} = 11000\tfrac{8}{9}.$$

XXI. Stelling. - *Fig.* 148 *en* 149.

§. 346. *Wanneer men, uit de hoekpunten A, B en C, van eenen driehoek ABC, door een punt P, binnen of buiten denzelven genomen, lijnen AE, BF en CD, tot aan de overstaande zijden BC, AC en AB, of derzelver verlengden trekt, welke die zijden, of derzelver verlengden, in zekere punten E, F en D, ontmoeten, dan zal* $AD \times BE \times CF = BD \times CE \times AF$ *zijn.* — En, omgekeerd. *Indien men, op de zijden van eenen driehoek ABC, de punten D, E en F, zoo aanneemt, dat* $AD \times BE \times BF = BD \times CE \times AF$ *is, en men dan, uit deze punten D, E en F, tot de overstaande hoekpunten C, A en B, de lijnen CD, AE en BF trekt; dan zullen die lijnen elkander in hetzelfde punt P ontmoeten.*

Betoog *van het eerste. Fig.* 148 en 149. Men trekke, door het toppunt *C*, eene lijn *GH* evenwijdig aan *AB*, die het verlengde der lijnen *AE* en *BF*, in de punten *H* en *G* doorsnijdt; dan zijn

1°. De driehoeken *ABF* en *CGF* gelijkvormig; want, omdat *CG* evenwijdig aan *AB* is, zoo is (XXVI. *Stell.* I. *B.*) *hoek G = hoek ABF*, en *hoek GCF = hoek BAF*, en *hoek CFG = hoek AFB*; volgens de III. *Bep.* zijn dan de driehoeken *ABF* en *CGF* gelijkvormig.

2°. Ook zijn, om dezelfde redenen, de driehoeken *AEB* en *CEH* gelijkvormig. Wij hebben dan, volgens de VIII. *Stell.* deze evenredigheden:

$$AB : CG = AF : CF$$
$$CH : AB = CE : BE$$

daarom is $CH : CG = AF \times CE : CF \times BE$, XV. *Stell.* II. *B.*
maar nu is $CH : CG = AD : BD$, III. *Stell.*
gevolgelijk $AD : BD = AF \times CE : CF \times BE$, I. *Stell.* II. *B.*
en $AD \times BE \times CF = BD \times CE \times AF$.

Betoog *van het omgekeerde. Fig.* 148. Wanneer de lijn *BF* de lijnen *AE* en *CD* niet in het punt *P* doorsnijdt; dan zal het eene andere lijn *BI* moeten zijn, en dan zal, volgens het betoogde,

$$AI : CI = AD \times BE : CE \times BD$$

moe-

moeten zijn; maar, volgens de onderstelling, is

$$AF : CF = AD \times BE : CE \times BD$$

en daarom is ook $AI : CI = AF : CF$, (I. *Stell.* II *B*)

gevolgelijk $AI + CI : AF + CF = AI : AF$, (VIII. *St.* II. *B.*)

of $AC : AC = AI : AF$, (*uit de figuur*)

Het blijkt dus: dat $AI = AF$ zou moeten zijn, hetwelk ongerijmd is: gezegde lijnen moeten dan elkander in hetzelfde punt P doorsnijden.

§. 347. I. Gevolg. *Fig* 148 en 149. Indien CD, AE en BF, loodregt op AB, BC en AC, staan; dan is, zie *Aanm.* *XX. Stell.*

$$AB : BC = BE : BD$$
$$BC : AC = CF : CE$$
$$\text{en } AC : AB = AD : AF$$

Indien men deze evenredigheden met elkander vermenigvuldigt; dan zal (*XV. Stell. II. B.*)

$$1 : 1 = AD \times BE \times CF : BD \times CE \times AF$$
$$\text{of } AD \times BE \times CF = BD \times CE \times AF$$

zijn; de loodlijnen CD, AE en BF, moeten dan, volgens het betoogde, elkander in hetzelfde punt doorsnijden. Vergelijk *XX Stell.*

§. 348. II. Gevolg. *Fig.* 148. Stel, dat de lijnen CD, AE en BF, de hoeken C, A en B midden door deelen; dan is volgens *XIX. Stell.*

$$AC : BC = AD : BD$$
$$BC : AB = CF : AF$$
$$\text{en } AB : AC = BE : CE$$

derhalve is $1 : 1 = AD \times BE \times CF : BD \times CE \times AF$, (*XV. St II. B.*)

Volgens het betoogde, *moeten dan ook de lijnen, die de hoeken van eenen driehoek midden door deelen, elkander in hetzelfde punt ontmoeten.*

§. 349. III. Gevolg. *Fig.* 148. Laten, uit al de hoekpunten tot het midden van de overstaande zijden, lijnen AE, BF en CD, zijn getrokken; dan is ook $AD \times BE \times CF = BD \times CE \times AF$, die lijnen ontmoeten dan elkander, binnen den driehoek, insgelijks in hetzelfde punt.

XXII. Stelling. *Fig.* 150.

§. 350. *Indien men, in het vlak van eenen driehoek ABC, eene transversale lijn DE trekt, welke de zijden des driehoeks of derzelver verlengden, in de punten D, E en F, snijdt; dan is, voor elke stelling van die lijn, $AD \times BE \times CF = AF \times CE \times BD$.*

Be-

Betoog. Men trekke de lijn *AG* evenwijdig aan *BC*; dan is *drieh*: *DBE* gelijkvormig aan *drieh. DAG* en *drieh. AGF* gelijkvormig aan *drieh. CEF*; men heeft dus, volgens de VIII. *Stell*:

$$AG : BE = AD : BD$$
$$AF : AG = CF : CE$$

derhalve $AF : BE = AD \times CF : BD \times CE$, (XV. *St.* II. *B*)

en eindelijk $AF \times CE \times BD = AD \times BE \times CF$

§. 351. Aanmerking. Men zie verder, wegens deze fraaije eigenschap des driehoeks, het *II. Deel*, *XIV. Boek*.

V. *Korte schets van de platte Driehoeksmeting.*

§. 352. De Meetkunstenaars hebben, om de hoeken, welke, in eene figuur, voorkomen, op de gemakkelijkste wijze, met afstanden te vergelijken, behalve den cirkel, wiens bogen de betrekking der hoeken voorstellen, onderscheidene lijnen bedacht, van die bogen afhankelijk zijnde, die men *Coniometrische lijnen* noemt. Zij zijn de volgende.

§. 353. Bepalingen. *Fig.* 151. Zij *ABC* een hoek, bij voorbeeld, een hoek van eene drie- of veelhoekige figuur. Verleng *AB* naar *Q*, en stel *BP* loodregt op *AB*; dan wordt

hoek CBP het *complement* van *hoek ABC*
hoek CBQ het *supplement* van *hoek ABC*

genoemd. Beschrijf, uit het hoekpunt *B*, met eenen straal, die gelijk is aan de eenheid; dat is, aan de lengte-maat, met welke men in die figuur, de zijden en afstanden meet, eenen cirkel *DEFG*. Indien den omtrek van dien cirkel in graden, minuten en secunden verdeeld is; dan zal de boog *DE* de grootte van den hoek *ABC*, de boog *EF* de grootte van zijn complement, en de boog *EFG* de grootte van zijn supplement bepalen; in één woord, men heeft:

(*boog DE*, *boog EF*, *boog EG*) : : (*hoek ABC*, *hoek CBP*, *hoek CBQ*)

Men trekke *DK*, loodregt op *AB*, en *FL* loodregt op *BP*; en late, uit het punt *E*, de lijnen *BH* en *EI*, loodregt op *AB* en *BP* vallen; dan is *BHEI* een regthoekig parallelogram, en derhalve is (*I. St. III. B.*) $BH = EI$ en $BI = EH$; en nu noemt men

$EH = BI$	de *sinus*	van den *hoek ABC* of van den *boog DE*.
$EI = BH$	de *cosinus*	
DK	de *tangens*	
BK	de *secans*	
FL	de *cotangens*	
BL	de *cosecans*	

De-

Deze lijnen nu, op die wijze, in elken hoek geconſtrueerd, noemt men de *goniometriſche lijnen* van dien hoek. Men heeft, onderſtellende, dat de *radius of ſtraal gelijk één zij*, voor alle bogen van één tot negentig graden, van minuut tot minuut, berekend: hoe lang, voor elken hoek of boog, die lijnen zijn, en aan die getallentafel den naam van *Sinus-tafel* gegeven. Ook heeft men de Logarithmen van die getallen in eene afzonderlijke tafel verzameld, en die tafel, die men eigenlijk doorgaans gebruikt, noemt men de *Logarithmen-ſinus-tafel*.

§. 354. I. Aanmerking. *De coſinus, cotangens en coſecans van eenen boog a zijn eigenlijk de ſinus, tangens en ſecans van het complement van dien boog*; derhalve is:

$$cos.\, a = sin.\,(90^{\circ} - a),\quad cot.\, a = tang.\,(90^{\circ} - a),$$
$$cosec\; a = sec.\,(90^{\circ} - a).$$

§. 355. II. Aanmerking. *Fig.* 151. Van den ſtompen hoek ABC' is eh de ſinus, ei de coſinus, Dk de tangens, Bk de ſecans, Fl de cotangens en Bl de coſecans. *Van nul tot negentig graden, dat is, in het eerſte quadrant, zijn de goniometriſche lijnen van elken hoek poſitief. Van negentig tot honderd-tachtig graden*, of, *in het tweede quadrant, zijn de coſinus, tangens, cotangens en ſecans negatief; maar, de ſinus en coſecans blijven poſitief*; hetwelk uit de figuur van zelf blijkt.

§. 356. III. Aanmerking. *Op de teekens na, is elke goniometriſche lijn van eenen boog gelijk aan die van deszelfs ſupplement. Wanneer dus een hoek ſtomp is, trekke men dien ſtompen hoek van* 180° *af, en zoeke, met het verſchil, de goniometriſche lijn in de tafel; het getal dat men voor dezelve in de tafel vindt, moet negatief genomen worden, indien de goniometriſche lijn eene coſinus, tangens, cotangens of ſecans is.*

XXIII. Stelling. *Fig.* 151.

§. 357. *De goniometriſche lijnen van denzelfden hoek of boog hebben van elkander zulk eene onderlinge afhankelijkheid, als in de volgende vergelijkingen wordt voorgeſteld:*

$$sin^2.\, a + cos^2.\, a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$tang^2.\, a + 1 = sec^2.\, a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$1 + cot^2.\, a = cosec^2.\, a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$tang.\, a = sin.\, a : cos.\, a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

cot.

$$cot.\,a = cos.\,a : sin.\,a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$
$$tang.\,a \times cot.\,a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$
$$sec.\,a \times cos.\,a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$
$$cosec.\,a \times sin.\,a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

welke vergelijkingen voor alle mogelijke waarden van a gelden.

BETOOG. 1°. In den regthoekigen driehoek, BHE is (XVI. *St.* III. *B.*) $HE^2 + BH^2 = BE^2$; dat is, $sin^2.a + cos^2.a = 1$.

2°. In den regthoekigen driehoek BDK, is (XVI. *St.* III. *B.*) $BD^2 + DK^2 = BK^2$; dat is $1 + tang^2.a = sec^2.a$.

3°. In den regthoekigen driehoek BFL, is (XVI. *St.* III. *B.*) $BF^2 + FL^2 = BL^2$; dat is, $1 + cot^2.a = cosec^2.a$.

4°. De regthoekige driehoeken BHE, BDK, BIE en BFL zijn, wegens de constructie, onderling gelijkvormig; want zij zijn onderling gelijkhoekig; wij hebben dus, volgens de VIII. *Stelling*,

$BH : HE = BD : DK$; dat is $cos.\,a : sin.\,a = 1 : tang.\,a$
derhalve $tang.\,a = sin.\,a : cos.\,a$

$BI : IE = BF : FL$; dat is, $sin.\,a : cos.\,a = 1 : cot.\,a$
derhalve $cot.\,a = cos.\,a : sin.\,a$

$DK : BD = BF : FL$; of $tang.\,a : 1 = 1 : cot.\,a$
derhalve $tang.\,a \times cot.\,a = 1$

$BH : BE = BD : BK$; of $cos.\,a : 1 = 1 : sec.\,a$
derhalve $sec.\,a \times cos.\,a = 1$

$BI : BE = BF : FL$; of $sin.\,a : 1 = 1 : cosec.\,a$
derhalve $cosec.\,a \times sin.\,a = 1$.

§. 358. AANMERKING. In de *Bijv.* XXVIII. *St. V. B.* zal betoogd worden: *dat, wanneer a en b twee hoeken of twee bogen zijn,*

$$sin.(a + b) = sin.\,a \times cos.\,b + sin.\,b \times cos.\,a \quad \ldots \quad (9)$$
$$cos.(a + b) = cos.\,a \times cos.\,b - sin.\,a \times sin.\,b \quad \ldots \quad (10)$$

is. Indien men, in deze vergelijkingen, $a = b$ stelt; dan wordt

$$sin.\,2a = 2\,sin.\,a \times cos.\,a;\ \text{of}\ sin.\,a = 2\,sin.\,\tfrac{1}{2}a \times cos.\,\tfrac{1}{2}a \quad (11)$$
$$1 - cos.\,a = 2\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}a \quad \ldots\ldots \quad (12)$$
$$1 + cos.\,a = 2\,cos^2.\,\tfrac{1}{2}a \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

Met behulp van dit weinige, kan men nu de volgende eigenschappen der driehoeken betoogen:

XXIV. STELLING. *Fig.* 152 *en* 153.

§. 359. *In elken regthoekigen driehoek, is ééne der regthoekszijden gelijk aan de andere regthoekszijde, vermenigvuldigd met de tangens van den hoek, over de eerste regthoekszijde; en de hypothenusa gelijk aan ééne der regthoekszijden, vermenigvuldigd met de secans of gedeeld door de cosinus van den hoek, tusschen die regthoekszijde en de hy-*

hypothenusa. En, eindelijk, is elke regthoekszijde gelijk aan de hypothenusa, vermenigvuldigd met de sinus van den hoek, die over die regthoekszijde staat; en ook gelijk aan de hypothenusa, vermenigvuldigd met cosinus van den hoek, tusschen de hypothenusa en die regthoekszijde; dat is:

$$BC = AB \times tang. A, \quad AC = AB \times sec. A = AB : cos. A$$
$$BC = AC \times sin. A, \quad AB = AC \times cos. A$$

Betoog *der twee eerste vergelijkingen. Fig.* 152. Men beschrijve, uit A, met $AD = 1$, als straal, den cirkelboog DE, en trekke DF loodregt op AB; dan is $DF = tang. a$ en $AF = sec. a$. Nu is *hoek* DAF = *hoek* BAC, *hoek* ADF = *hoek* ABC; de driehoeken ADF en ABC zijn dan (III. *Bep.*) gelijkvormig; en dus is (VIII. *Stell.*)
$AD : DF = AB : BC$, of $1 : tang. A = AB : BC$; dus $BC = AB \times tang. A$
$AD : AF = AB : AC$, of $1 : sec. A = AB : AC$; dus $AC = AB \times sec. A$
maar nu is $sec. a = 1 : cos. a$ (zie XXIII. *Stell.*); derhalve is ook $AC = AB : cos. a$.

Betoog *van de twee laatste vergelijkingen. Fig.* 153. Men beschrijve, uit A, met $AD = 1$, als straal, den boog DE, en late uit E de loodlijn EF op AB vallen; dan is $EF = sin. A$ en $AF = cos. A$. Verder is *hoek* FAE = *hoek* BAC, *hoek* F = *hoek* B; de driehoeken FAE en BAC zijn dan (III. *Bep.*) gelijkvormig; wij hebben derhalve (VIII. *St.*)
$AE : EF = AC : BC$, of $1 : sin. A = AC : BC$; dus $BC = AC \times sin. A$
$AE : AF = AC : AB$, of $1 : cos. A = AC : AB$; dus $AB = AC \times cos. A$

XXV. Stelling. *Fig.* 154.

§. 360. *In elken driehoek, staan de zijden tot elkander, in dezelfde reden, als de sinussen der overstaande hoeken:* dat is:

$$(AB, BC, AC) :: (sin. C, sin. A, sin. B)$$

Betoog. Men late, uit het hoekpunt C, de loodlijn CD op de overstaande zijde vallen; dan is, in de regthoekige driehoeken ACD en BCD (zie XXIV. *Stell.*)

$$CD = AC \times sin. A = BC \times sin. B$$
derhalve is $AC : BC = sin. B : sin. A$

Op dezelfde wijze, wordt betoogd: dat $AB : BC = sin. C : sin. A$ is.

XXVI. Stelling. *Fig.* 155.

§. 361. *In elken driehoek, staat de som van twee zijden tot derzelver verschil, in dezelfde reden, als de tangens van de halve som der hoeken, welke over die twee zijden staan, tot de tangens van het halve verschil van die hoeken:* dat is:

$$AB + AC : AB - AC = tang. \tfrac{1}{2}(C + B) : tang. \tfrac{1}{2}(C - B).$$

Be-

BETOOG. Neem $AD = AC$, en, op het verlengde van AB, $AE = AC$. Trek de lijn EC; en DF, evenwijdig aan CE.

De driehoeken ADC en ACE zijn dan gelijkbeenig; en daarom is (XIV. *Stell.* I *B.*)

$$\left.\begin{array}{ll} & \textit{hoek } ACD = \textit{hoek } CDE \\ \text{en} & \textit{hoek } ECA = \textit{hoek } DEC \end{array}\right\} \textit{optellen.}$$

derhalve is *hoek* ECD = *hoek* CDE + *hoek* DEC, VIII. *Ax.*

maar *hoek* CDE + *hoek* $DEC = 180° -$ *hoek* ECD, (I. *Gev.* XVIII. *St.* I. *B.*)

gevolgelijk is *hoek* $ECD = 180° -$ *hoek* ECD

en 2 *hoek* $ECD = 180°$

eindelijk, *hoek* $ECD = 90°$

De driehoek ECD is derhalve in C regthoekig, en, omdat DF evenwijdig aan CE is getrokken; zoo is *hoek* CDF (XXVI. *Stell.* I. *B*) een regte hoek en driehoek CDF, in D, regthoekig.

Verder heeft men, als volgt:

hoek CAE = *hoek* ACB + *hoek* ABC, (I. *Gev.* XVIII. *St.* I. *B.*)

hoek CAE = 2 *hoek* CDE, (IV. *Gev.* XVIII. *St.* I. *B.*)

derhalve 2 *hoek* CDE = *hoek* ACB + *hoek* ABC, (V. *Ax.*)

hoek $CDE = \frac{1}{2}$(*hoek* ACB + *hoek* ABC)

en. *tang.* CDE = *tang.* $\frac{1}{2}(C+B)$

Eindelijk is, volgens het I. *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*

hoek BCD = *hoek* ADC − *hoek* B

maar *hoek* $ADC = \frac{1}{2}$ *hoek* $ACB + \frac{1}{2}$ *hoek* B

derhalve *hoek* $BCD = \frac{1}{2}$ *hoek* $ACB + \frac{1}{2}$ *hoek* B − *hoek* B

of *hoek* $BCD = \frac{1}{2}$ *hoek* $ACB - \frac{1}{2}$ *hoek* B

en *tang.* BCD = *tang.* $\frac{1}{2}(C - B)$

In de regthoekige driehoeken DCE en DCF, is volgens XXIV. *St.*

$CE = CD \times$ *tang.* $CDE = CD \times$ *tang.* $\frac{1}{2}(C+B)$

$DF = CD \times$ *tang.* $BCD = CD \times$ *tang.* $\frac{1}{2}(C-B)$

Eindelijk is, in de gelijkvormige driehoeken CBE en BDF,

$$EB : BD = CE : DF$$

of $AB+AC : AB-AC = CD \times$ *tang.* $\frac{1}{2}(C+B) : CD \times$ *tang.* $\frac{1}{2}(C-B)$ deel de termen van de laatste reden dezer evenredigheid door CD; dan verkrijgt men eindelijk:

$$AB+AC : AB-AC = \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(C+B) : \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(C-B)$$

§. 362. GEVOLG. Omdat $A+B+C = 180°$ is, zoo is $C+B = 180 - C$, en $\frac{1}{2}(C+B) = 90 - \frac{1}{2}C$; derhalve *tang.* $\frac{1}{2}(C+B)$ = *cot.* $\frac{1}{2}C$. Men kan dan de betoogde evenredigheid aldus schrijven:

$$AB+AC : AB-AC = \textit{cot.}\ \tfrac{1}{2}C : \textit{tang.}\ \tfrac{1}{2}(C-B).$$

XXVII. STELLING. *Fig.* 154.

§. 363. *In elken driehoek, is het vierkant, op ééne der zijden,*

gelijk aan de som der vierkanten, op de twee andere zijden, min tweemaal den regthoek, onder die zijden, vermenigvuldigd met de cosinus van den ingesloten hoek: dat is:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times cos.B$$

BETOOG. Men stelle CD loodregt op AB; dan is (zie XVIII en XIX. *Stell.* III. *B.*)

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BD$$

Maar nu is, in den regthoekigen driehoek BCD, de zijde $BD = BC \times cos.B$ (XXIV. *Stell.*); derhalve wordt

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times AC \times cos.B.$$

§. 364. AANMERKING. *Fig.* 154. Men stelle $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$; dan is, volgens het betoogde:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos.A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times cos.B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times cos.C$$

Wanneer één der hoeken stomp wordt; dan is de cosinus negatief; en het teeken van den term, in welke die cosinus voorkomt, verandert dan van — *in* +.

XXVIII. STELLING. *Fig.* 154.

§. 365. *Wanneer men, in den driehoek* ABC, $BC = a$, $AC = b$, $AC = c$, *en* $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ *stelt; dan zal men hebben:*

$$sin.^2 \tfrac{1}{2}A = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

BETOOG. Uit de voorgaande *Stelling* is gebleken: dat

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos.A$$

is, en nu volgt, uit deze vergelijking:

$$cos.A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Men trekke deze vergelijking van $1 = 1$ af; dan zal men, schrijvende voor $1 - cos.A$, $2\,sin^2.\frac{1}{2}A$ (zie *Aanm.* XXIII. *Stell.*) verkrijgen:

$$2\,sin^2.\tfrac{1}{2}A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$$

Maar nu is (II. *Hulpst.* III. *B.*) $a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$ en daar $2s = a+b+c$ is, zoo is $a+b-c = 2s-2c$ en $a-b+c = 2s-2b$; gevolgelijk wordt

$$2\,sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{2(s-b) \times 2(s-c)}{2bc}$$

of $$sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

XXIX.

XXIX. Stelling. *Fig.* 154.

§. 366. *De inhoud van eenen driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijner zijden, vermenigvuldigd met de finus van den ingesloten hoek. Ook is die inhoud gelijk aan de helft van het vierkant van éène der zijden, vermenigvuldigd met het product van de finusfen der hoeken, aan die zijden gelegen, gedeeld door de finus van den hoek, over die zijde. Dat is, indien men den inhoud des driehoeks gelijk I stelt:*

$$I = \tfrac{1}{2} AB \times AC \times \sin. A; \text{ en } I = \tfrac{1}{2} AB^2 \times \frac{\sin. A \times \sin B}{\sin. C}$$

Betoog *van het eerste.* Men heeft:

$$I = \tfrac{1}{2} AB \times CD, \text{ (Gev. VIII. Stell. III. B.)}$$

en $CD = AC \times \sin. A$, (XXIV. *Stell.*)

derhalve is $I = \tfrac{1}{2} AB \times AC \times \sin. A$ . . . . (1)

Betoog *van het tweede.* Men heeft:

$$\sin. C : \sin. B = AB : AC, \text{ (XXV Stell.)}$$

derhalve wordt $AC = \frac{AB \times \sin. B}{\sin. C}$; ſtelt men die waarde van AC in de vergelijking (1); dan wordt

$$I = \tfrac{1}{2} AB^2 \times \frac{\sin. A \times \sin. B}{\sin.} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

§. 367. Aanmerking. Met behulp van de zes voorgaande ſtellingen, zal men, wanneer, in eenen driehoek, ééne zijde met twee hoeken, twee zijden en éénen hoek, of drie zijden gegeven zijn, door middel van de finus-tafel, de onbekende zijden of hoeken kunnen berekenen. Men zie verder de VIII. en IX. *Boeken*, in welke dit onderwerp uitvoeriger behandeld wordt.

VIJFDE BOEK.

Over den Cirkel en deszelfs voornaamste en nuttigste eigenschappen. Inzonderheid wordt de cirkel beschouwd, als het algemeenste hulpmiddel, om de betrekking der hoeken te bepalen. Wijze, hoe de stelkundige vergelijking van eenen cirkel wordt opgemaakt. Andere merkwaardige eigenschappen des cirkels. Over de cirkels, die in en om eenen driehoek kunnen beschreven worden. Merkwaardige eigenschap van den vierhoek, in den cirkel beschreven; vergelijkingen over het verdeelen der hoeken, uit dezelve afgeleid.

---

§. 368. Het is reeds, uit de *Inleid. I. B. XI. Bepaling* bekend, wat een cirkel is en wat men door deszelfs stralen, middellijnen (*die alle even lang zijn*) door cirkelbogen en derzelver koorden verstaat. Ook hebben wij, in de *gevolgen* van de *XVI. Stell. IV. B.* de cirkels reeds als gelijkvormige figuren leeren opmerken; thans zullen wij de eigenschappen van deze merkwaardige kromme lijn nader leeren kennen.

§. 369. I. Bepaling. *Fig.* 156. Een *cirkel-sector ACBM* is een gedeelte van het oppervlak des cirkels, begrepen tusschen twee stralen *AM* en *BM* en den boog *ACB*, welke tusschen die stralen gelegen is.

§. 370. II. Bepaling. *Fig.* 156. Een gedeelte van het oppervlak des cirkels, tusschen eenen boog *ACB* en zijne koorde *AB* begrepen, wordt een *cirkel-segment* genoemd.

§ 371. III. Bepaling. *Fig* 156. Eene lijn *PAB*, die den omtrek eens cirkels doorsnijdt, wordt eene *snijlijn* van den cirkel genoemd.

§. 372. IV. Bepaling. *Fig.* 156. Eene lijn *PC*, die met den omtrek des cirkels slechts één enkel punt *C* gemeen heeft, wordt eene *raaklijn* des cirkels, het punt *C* het *raakpunt* genoemd.

Opheldering. Fig. 156. Wanneer men de snijlijn *PAB*, om het punt *P* naar buiten laat omdraaijen; dan zullen de punten *A* en *B*, in welke zij den omtrek snijdt, digter bij elkander komen, tot dat zij zich in het punt *C* vereenigen; in die stelling der bewegende lijn, verandert de snijlijn in eene raaklijn.

§. 373. V. Bepaling. Twee cirkels worden gezegd elkander *in-*

of

of *uitwendig aan te raken*, wanneer derzelver omtrekken slechts één enkel punt, het raakpunt namelijk, met elkander gemeen hebben.

§. 374. VI. Bepaling *Fig.* 156. Een hoek *AMB* wordt gezegd, in eenen cirkel, *aan het middelpunt M, op eenen boog ACB, te staan*, wanneer het hoekpunt van dien hoek in het middelpunt valt, en deszelfs beenen door de uiteinden *A* en *B* van den boog gaan. Maar *een hoek ADB staat, aan den omtrek, op eenen boog ACB*, wanneer het hoekpunt *D* ergens in den omtrek ligt en de beenen door de uiteinden van den boog *ACB* loopen.

§. 375. VII. Bepaling. *Fig.* 156. Een *hoek ADB staat in een cirkel-segment*, wanneer deszelfs hoekpunt *D* ergens in den omtrek van den boog *ADB* van dit segment ligt, en de beenen van dien hoek door de uiteinden van de koorde *AB* des segments gaan.

§. 376. VIII. Bepaling. Eene *drie-* of *veelhoekige figuur* wordt gezegd in *eenen cirkel beschreven te zijn*, wanneer de hoekpunten van die figuur in den omtrek liggen; maar *om den cirkel*, wanneer de zijden van den drie- of veelhoek of derzelver verlengden den omtrek des cirkels aanraken.

I. Stelling.

§. 377. *De omtrekken en inhouden van cirkels, die gelijke stralen of middellijnen hebben, zijn gelijk- en gelijkvormig.*

Betoog. Want, omdat de stralen der cirkels (*onderst.*) gelijk zijn, zoo zullen, wanneer de middelpunten der cirkels op elkander gelegd worden, de omtrekken op elkander moeten vallen, en daarom zullen de omtrekken en inhouden (II. *Ax.*) gelijk- en gelijkvormig zijn.

II. Stelling. *Fig.* 157.

§. 378. *Elke middellijn eens cirkels deelt deszelfs inhoud en omtrek in twee gelijke- en gelijkvormige deelen.*

Betoog. Men late de benedenste helft der figuur *AFED* om de middellijn *AD* omdraaijen, en op de bovenste helft vallen; dan zullen al de punten van den omtrek *AFED*, wegens de gelijkheid der stralen, in den omtrek der figuur *ABCD* moeten vallen: de figuren *AFED* en *ABCD*, zullen derhalve (II. *Ax.*) gelijk- en gelijkvormig zijn. *Men gevoelt nu, waarom de lijn AD, die door het middelpunt M gaat, middellijn genoemd wordt.*

III. Stelling. *Fig.* 158.

§. 379. *In elken cirkel, is eenige koorde* (*AB*) *korter dan deszelfs middellijn* (*AC*).

Betoog. Omdat het middelpunt *M* des cirkels buiten elke koorde ligt, zal men, uit het uiteinde *A* der koorde *AB*, door het middelpunt *M*, de middellijn *AMC* kunnen trekken; indien men dan nog den straal *MB* trekt; dan zal (VII. *Stell.* I. *B.*) $AB < AM + BM$ zijn; vermits nu $AM + BM = AM + MC = AC$ is, zoo zal (VI. *Ax.*) $AB < AC$ zijn. *De middellijn eens cirkels is alzoo de langste lijn, die in denzelven kan geplaatst of beschreven worden.*

IV. Stelling. *Fig.* 156.

§. 380. *Eene regte lijn* (*AB*) *kan den omtrek eens cirkels slechts in twee punten* (*A en B*) *doorsnijden.*

Betoog. Want, indien men aanneemt, dat zij den omtrek in drie punten doorsnijdt, en men dan uit het middelpunt tot die punten stralen trekt; dan zal men buiten eene lijn een punt hebben, dat op eenen gelijken afstand van drie onderscheidene punten dezer lijn gelegen is; daar zulks nu (XXI. *Stell.* I. *B*) onmogelijk is, zoo zal ook de doorsnijding van eene regte lijn, met eenen cirkel in geen meer, dan in twee punten, kunnen plaats hebben.

V. Stelling. *Fig.* 159.

§. 381. *In denzelfden cirkel, of, in gelijke cirkels, worden gelijke cirkelbogen door gelijke koorden onderspannen.* — En, omgekeerd. — *Gelijke koorden onderspannen, in denzelfden cirkel, of, in gelijke cirkels, gelijke bogen.*

Opheldering. Dat is, wanneer de straal *AM* gelijk is aan den straal *A'M'* en de *boog ACB* gelijk aan den *boog A'C'B'*; dan zal de *koorde AB* gelijk zijn aan de *koorde A'B'*, — en omgekeerd, — wanneer de *koorde AB* gelijk is aan de *koorde A'B'*; dan zullen de *bogen ACB* en *A'C'B'* gelijk zijn.

Betoog *van het eerste.* Laat het punt *M*, in het punt *M'*, en *AM* langs *A'M'* gelegd worden; dan zal (XVIII. *Bep.* I. *B.*) het punt *A* in het punt *A'* vallen, en den omtrek van den boog *ACB* (I. *Stell.*) langs den omtrek van den boog *A'C'B'*; omdat nu de bogen *ACB* en *A'C'B'* gelijk zijn, zoo zal ook het punt *B* in het punt *B'* vallen; de uiteinden der koorden *AB* en *A'B'* vallen derhalve in elkander, en zijn (XVIII *Bep.* I. *B.*) gelijk.

Betoog *van het tweede.* Omdat de zijden der driehoeken, *ABM* en *A'B'M'*,

A' B' M', volgens de onderstelling, gelijk zijn; namelijk *A M* = *A' M'*; *B M* = *B' M'* en *A B* = *A' B'*; zal (XIII. *Stell.* I. *B.*) *hoek A M B* = *hoek A' M' B'* zijn; de beenen dezer hoeken zullen dan (XX *Bep.* I *B.*) op elkander vallen; en, wegens de gelijke stralen *A M* en *B M* en *A' M'* en *B' M'*, zullen de punten *A* en *B*, in de punten *A'* en *B'*, en de bogen *A C B* en *A' C' B'* geheel in elkander vallen, en (II. *Ax.*) om die reden gelijk zijn.

VI. Stelling. *Fig.* 159.

§. 382. *In denzelfden cirkel, of, in gelijke cirkels, wordt een grooter boog door eene grootere koorde; — en, omgekeerd, — eene grootere koorde door eenen grooteren boog onderspannen, (mits de bogen kleiner dan een halve cirkel zijn.)*

Betoog *van het eerste.* Want, indien de *boog A D* > *boog A B*, is; dan zal, na de stralen, *A M*, *B M* en *D M* getrokken te hebben, *A M* = *A M*; *B M* = *D M*, en *hoek A M D* > *hoek A M B* zijn; derhalve zal (XI. *Stell.* I. *B.*) *A D* > *A B* zijn.

Betoog *van het tweede.* Indien, omgekeerd, *A D* > *A B* is; dan zal, in dezelfde driehoeken, *A B M* en *A D M*, (XII. *Stell* I. *B.*) *hoek A M D* > *hoek A M B*; en derhalve *boog A C B D* > *boog A C B* zijn.

§. 383. Aanmerking. *Fig.* 159. *Wanneer de bogen A C B en A C B D grooter dan een halve cirkel zijn; dan zullen,* omgekeerd, *de bogen grooter worden, indien de koorden kleiner zijn.*

VII. Stelling. *Fig.* 160.

§. 384. *De straal (M C), welke loodregt op eene koorde (A B) staat, deelt dezelve, zoo wel als den boog (A C B), welken zij onderspant, in twee gelijke deelen.*

Boog. Want trek de stralen *A M* en *B M*; dan zullen, omdat (*onderst.*) *hoek A D M* = *hoek B D M* = *R* is, en *A M* = *B M* (II. *Hulpst.* I. *B.*) de regthoekige driehoeken *A D M* en *B D M* gelijk- en gelijkvormig zijn; en, om die reden, zal *A D* = *B D*; en *hoek A M C* = *hoek B M C* zijn. Trek men nu de koorden *A C* en *B C*; dan zullen, omdat *hoek A M C* = *hoek A M C* (*bewezen*), *C M* = *C M*, en *A M* = *B M* is, de driehoeken *A M C* en *B M C* (X. *Stell* I. *B.*) gelijk- en gelijkvormig, en derhalve *A C* = *B C* zijn; de *boog A C* zal dan (V. *Stell.*) gelijk aan den *boog B C* zijn. Ook zal, om dezelfde reden, *boog A E* = *boog A E* zijn.

VIII. Stelling. *Fig.* 160.

§. 385. *De lijn (C M), welke loodregt op het midden eener*

koor-

koorde (*A B*) *ſtaat, loopt door het middelpunt des cirkels, en deelt den boog, welken die koorde onderſpant, in twee gelijke deelen.*

Betoog. Want, omdat (XX. *Stell.* I. *B.*) al de punten *M* van de loodlijn *D M* op gelijken afſtand van de uiteinden *A* en *B* der koorde *A B* ſtaan, zoo is het middelpunt des cirkels noodzakelijk in die lijn gelegen: indien nu de koorden *A C* en *B C* getrokken worden; dan zullen deze koorden (XX. *Stell.* I. *B.*) insgelijks gelijk zijn; en daarom zal (V. *Stell.*) *boog A C* = *boog B C* zijn.

IX. Stelling. *Fig.* 160.

§. 386. *De ſtraal* (*M C*) *of middellijn* (*C E*) *eens cirkels, welke eenige koorde* (*A B*) *midden door deelt, deelt ook de beide bogen* (*A C B en A E B*)*, welke deze koorde onderſpant, in twee gelijke deelen.* — En, omgekeerd. — *De ſtraal* (*M C*) *of middellijn* (*C E*)*, welke eenen boog* (*A C B*) *midden door deelt, ſnijdt de koorde* (*A B*)*, welke dezen boog onderſpant, regthoekig en in twee gelijke deelen.*

Betoog *van het eerſte.* Omdat (*onderſt.*) *A D* = *B D* en *A M* = *B M* en *M D* = *M D* is, zijn de de driehoeken *A D M* en *B D M* (XIII. *St.* I. *B.*) gelijk- en gelijkvormig; de *hoek A D M* is dus gelijk aan den *hoek B D M*, gelijk *R*; de ſtraal *M C* ſtaat dan (XXI. *Bep.* I. *B.*) loodregt op de koorde *A B* en deelt (VIII. *Stell.*) den boog *A B C* in twee gelijke deelen: maar de middellijn *E C* deelt den boog *A E B* insgelijks in twee gelijke deelen: omdat, wanneer van de halve omtrekken *C A E* en *C B E*, die (II. *Stell.*) gelijk zijn, de gelijke bogen *A C* en *B C* worden afgetrokken, de overblijvende bogen *A E* en *B E* (IX. *Ax.*) gelijk zijn.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de bogen *A C* en *B C* gelijk zijn, dan zijn (V. *Stell.*) de koorden *A C* en *B C* gelijk, en de driehoeken *A M C* en *B M C*, zijn dan (XIII *Stell.* I. *B.*) gelijk- en gelijkvormig; *hoek A M D* is dan gelijk *hoek B M D*, en de lijn *C M* ſtaat (*Leer.* XIV. *Stell.* I. *B.*) derhalve loodregt op de koorde *A B*.

X. Stelling. *Fig.* 161.

§. 387. *Drie punten* (*A, B en C*) *welke naar welgevallen aangenomen worden, mits zij niet in dezelfde regte lijn gelegen zijn, liggen altijd in den omtrek van denzelfden cirkel.*

Betoog. Indien men, door het midden *G* van de lijn *A B*, eene loodlijn laat gaan; dan ſtaan al de punten *M* van die loodlijn, op eenen gelijken afſtand, van de uiterſte punten *A* en *B* dezer lijn; (zie XX. *St.* I. *B.*). Wanneer men dan uit eenig punt *M* dezer loodlijn met *A M*, als ſtraal, eenen cirkel beſchrijft; dan zal, aangezien al de ſtralen van eenen cir-

cirkel gelijk zijn, de omtrek dezes cirkels ook door het punt *B* gaan, en nu blijkt het, ten klaarste: *dat door de punten A en B eene oneindigheid van cirkels, welker middelpunten alle op de lijn GM liggen, kunnen getrokken worden.* Op dezelfde wijze, zal men, door de punten *B* en *C*, eene oneindigheid van cirkels kunnen trekken, welker middelpunten op de loodlijn *MD*, door het midden van *BC* gaande, gelegen zijn. Wanneer nu de punten *A*, *B* en *C* niet in dezelfde lijn liggen; dan zal *BC* met het verlengde van *AB* eenen hoek *ABC* maken; en omdat de hoeken *BGM* en *BDM*, wegens den loodregten stand der lijnen *GM* en *DM*, regt zijn, zoo zullen (zie *Gev. XIX. St. I. B.*) de loodlijnen *GM* en *DM*, elkander ergens in een punt *M* moeten doorsnijden: dit punt *M* staat dan (*XX. Stell. I. B.*) op denzelfden afstand van de punten *A*, *B* en *C*; en de cirkel, welke uit *M*, als middelpunt, met *MA*, als straal, beschreven wordt, gaat noodzakelijk door de punten *B* en *C*; deze drie punten *A*, *B* en *C*, liggen alzoo in den omtrek van eenen en denzelfden cirkel.

§. 388. I. GEVOLG. Omdat de loodlijnen *GM* en *DM*, elkander slechts in één punt *M* kunnen doorsnijden; *zoo bestaat er ook niet meer dan één punt, dat even ver van de punten A, B en C afgelegen is; en, er kan gevolgelijk, door drie punten, niet meer dan één cirkel beschreven worden.*

§. 389. II. GEVOLG. *Twee cirkels kunnen elkander in geen meer dan in twee punten doorsnijden;* omdat, wanneer zij elkander in drie punten sneden, door drie punten, strijdig met het voorgaande gevolg, twee onderscheidene omtrekken zouden kunnen beschreven worden.

§. 390. LEERING. Men leert hieruit: *dat om elken driehoek een cirkel kan beschreven worden, welks middelpunt zal gelegen zijn in de doorsnijding van twee loodlijnen, welke, uit het midden van twee zijner zijden, op dezelve worden opgerigt.* — Eindelijk leert men nog uit dit betoog: *dat de plaats van de middelpunten van al de cirkels, welks omtrekken door twee gegevene punten A en B gaan, de onbepaalde lijn is, welke loodregt door het midden van de lijn AB getrokken wordt.* Men zie *XI. Bep. III. B.*

XI. STELLING. *Fig.* 162.

§. 391. *Gelijke koorden (AB en CD) staan op gelijke afstanden van het middelpunt; en de langste (CE) van twee koorden (CB en CD) staat digter bij het middelpunt, dan de kortste (CD).*

BETOOG *van het eerste.* Men late, uit het middelpunt *M*, de loodlijnen *MF* en *MG* op de koorden vallen; en trekke de stralen *AM* en *CM*; dan zijn (*VII. Stell.*) $AF = BF = \frac{1}{2}AB$ en $CG = \frac{1}{2}CD$; en om-

omdat $AB = CD$ is, zoo zal (*V. Ax.*) $AF = CG$ zijn; de regthoekige driehoeken, *AMF* en *CMG*, hebben dan gelijke hypothenusen *AM* en *CM*, en twee gelijke regthoekszijden, *AF* en *CG*, en zijn daarom (*II. Hulpst. I. B.*) gelijk- en gelijkvormig; derhalve zijn de zijden *MF* en *GM*, of de afstanden der koorden *AB* en *CD* tot het middelpunt, gelijk.

Betoog *van het tweede*. Is de koorde *CE* langer dan de koorde *CD*; dan zal de boog *CDE* (*VI. Stell.*) langer dan de boog *CD* zijn; indien men dan de loodlijnen *MG* en *MH* op deze koorden laat vallen, zal, omdat hoek $MCD >$ hoek MCE is, (*V. Gev. XVIII. Stell. I. B.* en *XI: Ax.*) hoek $CMI <$ hoek CMH zijn; en, omdat *MH* loodregt op *CE* staat, zal (*XXI. Stell. I. B.*) $MI > MH$ zijn; daar nu *GM* klaarblijkelijk grooter dan *MI* is, zal (*VII. Ax.*) *GM* grooter dan *HM* zijn; dat is: de kortere koorde *CD* staat verder van het middelpunt, dan de langere koorde *CE*.

XII. Stelling. *Fig.* 163.

§. 392. *Eene lijn* (*AB*), *welke loodregt op het einde van eenen straal* (*CM*) *staat, is eene raaklijn, welke den omtrek, in het uiteinde van dien straal, in het punt* (*C*), *aanraakt.*

Betoog. Want, indien men, aan de eene of andere zijde van den straal *CM*, eene lijn *MD*, uit het middelpunt, tot aan de lijn *AB* trekt, zal (*XXI. Stell. I. B.*) de lijn langer dan de loodlijn zijn, en het punt *D* zal derhalve buiten den omtrek liggen; de lijn *AB* heeft dan met den omtrek des cirkels geen ander, dan het punt *C*, gemeen, en is daarom (*IV. Bep.*) eene raaklijn.

§. 393. Aanmerking. *Fig.* 163. Wanneer men, door het raakpunt *C*, eene lijn *CE* trekt, welke met de raaklijn eenen zekeren hoek maakt; dan zal men, uit het middelpunt, eene loodlijn *MF* op die lijn kunnen laten vallen; daar nu de loodlijn (*XXI. St. I. B.*) korter dan de straal *MC* is, zal het punt *F* binnen den omtrek liggen, en *CE* zal gevolgelijk eene snijlijn zijn. Hieruit volgt dan:

§. 394. Gevolg. *Dat door elk punt, aan den omtrek, slechts ééne raaklijn aan den cirkel zal kunnen getrokken worden, en dat elke raaklijn noodzakelijk regthoekig staat op de lijn, welke het raakpunt met het middelpunt des cirkels vereenigt.*

XIII. Stelling. *Fig.* 164.

§. 395. *Uit elk punt* (*M*), *genomen op eene lijn* (*BM*), *welke eenen hoek* (*ABC*) *midden door deelt, kan, als middelpunt, eenen cir-*

cirkel beschreven worden, welke beide de beenen (A B en B C) van dien hoek (A B C) aanraakt.

BETOOG. Men late, uit eenig punt *M* van de lijn *B M*, de loodlijnen *M E* en *M D* op de beenen *A B* en *B C* van den hoek *A B C* vallen; dan zijn de driehoeken *E B M* en *D B M* gelijk- en gelijkvormig; want zij zijn (*constr*) in *E* en *D* regthoekig, en, *hoek E B M* = *hoek D B M* zijnde, zoo zal (*X. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) *hoek B M E* = *B M D* zijn, en (*IX. Stell I. B.*) *M E* = *D M*; wanneer men dan, uit het punt *M*, met *M E*, als straal, eenen cirkel beschrijft; dan zal die cirkel door de punten *E* en *D* gaan, en (*IV. Bep. en XII. Stell. en constr.*) de lijnen, *A B* en *B C*, in de punten *E* en *D*, aanraken.

§. 396. LEERING. Omdat, wegens de gelijke- en gelijkvormige driehoeken, *B E M* en *B D M*, ook *B E* = *B D* is, zoo leert men hieruit: *dat de deelen, B E en B D, der raaklijnen, welke, uit hetzelfde punt B, tot aan den omtrek getrokken worden, (en die altijd twee in getal zijn,) en tusschen dat punt B, en de raakpunten E en D, begrepen zijn, gelijk zullen zijn.* Ook leert men verder uit dit betoog: *dat de plaats van al de middelpunten der cirkels, welke de beenen van eenigen hoek aanraken, de lijn is, welke dien hoek in twee gelijke deelen verdeeld. Zie* XI. Bep. III. B. Bovendien is het ligtelijk in te zien: *dat, wanneer twee onbepaalde lijnen elkander doorsnijden, de plaats van de middelpunten der cirkels, welke deze lijnen aanraken, de lijnen zijn, die de overstaande hoeken en derzelve overstaande supplementen midden door deelen en alzoo een stelsel uitmaken van twee onbepaalde lijnen, die loodregt op elkander staan.*

§. 397. GEVOLG. *Fig.* 165. Wanneer de lijnen, *A D* en *B D*, twee hoeken, *A* en *B*, van eenen driehoek midden door deelen; *dan zal het punt D, alwaar deze lijnen elkander snijden, het middelpunt van eenen cirkel zijn, welke, met de loodlijn, D E, als straal, beschreven zijnde, de zijden van dezen driehoek zal aanraken, en bijgevolg in dien driehoek zal beschreven zijn. Men kan dan, in elken driehoek, eenen cirkel beschrijven. Ook bestaan er* (indien men al de zijden des driehoeks onbepaaldelijk verlengt,) *nog drie cirkels, die buiten den driehoek liggen, elke van welke ééne der zijden uitwendig en het verlengde van de twee andere zijden des driehoeks inwendig aanraakt.* Zie verder *Bijvoegsel* op de *XXVI. Stelling.*

XIV. STELLING. *Fig.* 166.

§. 398. *Twee evenwijdige koorden of snijlijnen (A B en C D) snij-*

snijden twee gelijke bogen (A C en B D) van den omtrek af; — en, omgekeerd, — *twee gelijke bogen (A C en B D) zijn tusschen evenwijdige lijnen (A B en C D) gelegen.*

Betoog *van het eerste.* Laat, uit het middelpunt *M* des cirkels, eene loodlijn *M F* op *A B* vallen; dan zal, omdat *A B* evenwijdig aan *C D* is, die loodlijn (zie *XXXIII. Stell. I. B.*) ook loodregt op *C D* staan; en daarom zal (*VII. Stell.*) de *boog A C H* = *boog B D H* zijn; men trekke hiervan af den *boog C H*, die, om dezelfde reden, gelijk aan den *boog D H* is; dan zal (*IX. Ax.*) de *boog A C* gelijk aan den *boog D B* overblijven.

Betoog *van het tweede.* Laten de bogen *A C* en *D B* gelijk zijn; dan moet bewezen worden: dat *C D* evenwijdig is aan *A B*. Laat *H* het midden van den boog *C H D* zijn; dan is dit punt ook (*VIII. Ax.*) het midden van den boog *A C H D B:* indien men dan van *H* tot het middelpunt *M*, de lijn *H M* trekt; dan zal (*IX. Stell.*) die lijn loodregt op *A B*, en tevens loodregt op *C D* staan: de lijn *A B* is dan (*XXII. Stell. I. B.*) evenwijdig aan *C D*.

§ 399. Gevolg. *Indien de lijn C D den cirkel niet snijdt; maar aanraakt; dan zal die aanraking, in het punt H, of I, moeten plaats hebben, en dan zal de boog A H = den boog B H, of de boog A I = den boog B I zijn.*

XV. Stelling. *Fig. 167 en 168.*

§ 400. *Wanneer de afstand van de middelpunten van twee cirkels korter is dan de som van derzelver stralen, en tevens de grootste straal kleiner is dan de som van de kleinste straal en de afstand der middelpunten; dan zullen deze cirkels elkander snijden; en de lijn, welke de middelpunten dezer cirkels vereenigt, zal de koorde, welke deze cirkels gemeen hebben, in twee gelijke deelen regthoekig doorsnijden.*

Betoog *van het eerste.* Want, onder de gestelde voorwaarden, zal men, met den afstand der middelpunten *M N*, en de stralen *A M* en *A N*, (*VII. Stell. I. B.*) eenen driehoek *A M N* kunnen zamenstellen, en op dezelfde basis *M N*, den tegenovergestelden driehoek *B M N* plaatsen: wanneer men dan, uit de punten *M* en *N*, met de stralen, *A M* en *A N*, cirkels beschrijft; dan zullen deze cirkels elkander in de punten *A* en *B* doorsnijden.

Betoog *van het tweede.* Omdat *A B* eene gemeenschappelijke koorde van beide cirkels is, zoo zal de lijn, welke loodregt door het midden *C* dezer koorde gaat, (*VIII. Stell.*) door de middelpunten van beide de cirkels loopen; omdat nu door twee punten slechts ééne regte lijn (*I. Stell. I. B.*) kan getrokken worden, zoo kan geene andere, dan de lijn *M N*, loodregt door het midden van *A B* gaan.

XVI.

XVI. STELLING. *Fig.* 169 *en* 170.

§. 401. *Wanneer de afstand van de middelpunten van twee cirkels gelijk is aan de som of aan het verschil van derzelver stralen; dan zullen die cirkels, in het eerste geval, elkander uitwendig; en, en het tweede geval, elkander inwendig aanraken.*

BETOOG *van het eerste.* *Fig.* 169. Wanneer de som der stralen *AM* en *AN* gelijk is aan den afstand *MN* der middelpunten; dan hebben de cirkels geen ander, dan het punt *A*, gemeen. Want, indien men, in den omtrek van den eenen cirkel, het punt *P* neemt, en de lijnen *MP* en *NP* trekt; dan is (*VII. Stell. I. B.*) $MP + NP > MN$; hier van $MP = AM$ aftrekkende, zal (*X. Ax.*) $NP > AN$ zijn. Elk ander punt *P* zal dan geheel buiten den tweeden cirkel liggen, en de cirkels, die nu buiten elkander liggen, zullen (*V. Bep.*) elkander in *A* uitwendig aanraken.

BETOOG *van het tweede.* *Fig.* 170. Indien men in den grootsten cirkel het punt *P* neemt, en dan *PM* en *PN* trekt; dan is (*VII. St. I. B.*) $PM + MN > PN$; maar $PN = AN$ (*XI. Bep. I. B.*) zijnde, zoo zal (*VI. Ax.*) $PM + MN > AN$ zijn, en hiervan $MN = MN$ aftrekkende, zal (*X. Ax.*) $PM > AM$ zijn. Elk punt *P* zal dan (*III. Gev. II. Bep.*) buiten den omtrek van den tweeden cirkel liggen, en de cirkels, van welke, in dit geval, de kleinste binnen den grootsten ligt, zullen elkander (*V. Bep.*) in *A* inwendig aanraken.

§. 402. LEERING. Men leert hieruit: 1°. *Dat, wanneer twee cirkels elkander uit- of inwendig aanraken, derzelver middelpunten, met het raakpunt, op dezelfde regte lijn liggen.* 2°. *Dat de middelpunten van alle cirkels, die elkander, in hetzelfde punt, uit- of inwendig aanraken, in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

XVII. STELLING. *Fig.* 171.

§. 403. *De beenen van gelijke hoeken* (*AMB en BMC*)*, welke, in eenen cirkel, aan het middelpunt staan, snijden van den omtrek gelijke bogen* (*AB en BC*) *en van den inhoud gelijke- en gelijkvormige sectors* (*AMB en BMC*) *af.* — En, omgekeerd. — *Op gelijke bogen* (*AB en BC*)*. aan den omtrek, staan gelijke hoeken* (*AMB en BMC*)*, aan het middelpunt.*

BETOOG *van het eerste.* Trek de koorden *AB* en *BC*. Omdat nu de stralen *AM*, *BM* en *CM* (*XI. Bep. I. B.*) gelijk zijn, en (*onderst.*) *hoek* $AMB =$ *hoek* BMC is, zal (*X. Stell. I. B.*) $AB = BC$, en daarom zal (*V. Stell.*) *boog* $AB =$ *boog* BC zijn. Wanneer men nu de sectors *AMB* en *BMC* op elkander past; dan zullen zij klaarblijkelijk op elkander sluiten, en (*II. Ax.*) gelijk- en gelijkvormig zijn.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de bogen *AB* en *BC* gelijk zijn; dan zijn (*V. Stell.*) de koorden, welke deze bogen onderſpannen, gelijk, en de driehoeken *AMB* en *BMC* zijn dan (*XIII. Stell. I. B.*) gelijk- en gelijkvormig, en daarom is *hoek AMB* = *hoek BMC*.

§. 404. I. Gevolg. *Fig.* 172. *Wanneer men dan, uit de hoekpunten (B en E) van gelijke hoeken (ABC en DEF), met gelijke ſtralen (AB en DE), twee cirkelbogen (AC en DF) beſchrijft, welke door de beenen dezer hoeken bepaald worden; dan zullen deze cirkelbogen (AC en DF), zoowel als de cirkel-ſectors (ABC en DEF), welke daardoor in de figuur ontſtaan, gelijk- en gelijkvormig zijn.*

§ 405. II. Gevolg. *Fig.* 173. Omdat gelijke koorden (*V. Stell.*) gelijke bogen, en gelijke bogen gelijke hoeken, aan het middelpunt onderſpannen, zoo zal men eenen hoek *ABC*, op de volgende wijze, kunnen vermenigvuldigen. *Men beſchrijve, uit het punt B, met eenen ſtraal AB, naar welgevallen genomen, eenen cirkel of cirkelboog, en, met eenen ſtraal, gelijk aan de koorde AC, uit C eenen boog, die den cirkel in D; uit D eenen boog, die den cirkel in E; uit E eenen boog, die den cirkel in F, ſnijdt*, enz.: *dan zullen de bogen AC, CD, DE, EF*, enz., *welke, door conſtructie, gelijke koorden hebben, aan het middelpunt B, gelijke hoeken ABC, CBD, DBE, EBF*, enz. *bepalen. Men zal alzoo, met behulp des cirkels, eenen hoek, die gelijk twee, drie, vier en meermalen eenen gegevenen hoek is, kunnen zamenſtellen. — Ook zal men, omgekeerd, eenen hoek in een zeker aantal gelijke deelen verdeelen kunnen, door den boog, welke dien hoek onderſpant, in even zoo veel gelijke deelen te verdeelen.*

§. 406. III. Gevolg. Nog volgt hieruit: *dat, wanneer men, uit het hoekpunt, alwaar twee loodlijnen elkander ſnijden, eenen cirkel beſchrijft, die loodlijnen den cirkel en deszelfs omtrek in vier gelijke deelen zullen verdeelen.* Men noemt deze deelen des cirkels *quadranten.*

XVIII. Stelling. *Fig.* 174 *en* 174. *a.*

§. 407. *In elken cirkel, ſtaan de hoeken (AMB en BMC), aan het middelpunt, tot elkander, in dezelfde reden, als de bogen (DE en EF), welke door de beenen dezer hoeken, van den omtrek dezes cirkels worden afgeſneden, en op welke zij derhalve geplaatst zijn. Dat is:*

$$\text{hoek } AMB : \text{hoek } BMC = \text{boog } DE : \text{boog } EF$$

Betoog. I. Geval. *Fig.* 174. Wanneer de hoeken *AMB* en *BMC* meetbaar zijn; dan hebben zij eene gemeene maat, welke in dezelve

res-

respectievelijk p en q (in de figuur *zeven-* en *negen-*) malen zal begrepen zijn. Men zal dan, uit het middelpunt M, dat tevens het hoekpunt der hoeken is, een zeker aantal lijnen kunnen trekken, welke den hoek AMB, in p (in de figuur in *zeven*,) gelijke hoeken, AMH, HMI, *enz.*; en den hoek BMC, in q (in de figuur in *negen*,) gelijke hoeken, BMK, KML, *enz* zullen verdeelen. De beenen dezer hoeken zullen den boog DE, in p (of in *zeven*) kleinere bogen DN, NO, *enz.*, en den boog EF, in q (of *negen*) kleinere bogen EP, PQ, *enz.* verdeelen Omdat nu (*XVII. Stell.*) gelijke hoeken, aan het middelpunt, gelijke bogen van den omtrek afsnijden, zoo zullen de deelen dezer bogen gelijk zijn: *de hoek AMH zal dan, als de gemeene maat der hoeken, AMB en BMC, en de boog DN, dien deszelfs beenen van den omtrek afsnijden, als de gemeene maat der bogen, DE en EF, kunnen worden aangemerkt*; daar het nu van zelf blijkt: dat de gemeene maat AMH der hoeken AMB en BMC op elken hoek zooveelmaal begrepen is, als de gemeene maat DN der bogen DE en EF, op elken dezer bogen, zoo zal (*Aanm. IX Bep. II. B.*)

hoek AMB : hoek BMC = boog DE : boog EF zijn.

II. GEVAL. *Fig.* 174. *a.* Men stelle, dat P en Q twee hoeken zijn, P de grootste en Q de kleinste hoek; en, dat, uit de hoekpunten van die hoeken, met gelijke stralen, de cirkelbogen p en q zijn beschreven.

Men mete, hoeveelmaal de kleinste hoek Q op den grootsten hoek P begrepen is? Stel a-maal, en dat men nog den hoek R overhoude, die natuurlijk kleiner dan de hoek Q zal moeten zijn; dan is $P = aQ + R$; maar nu zal ook (omdat, bij dit uitmeten, de bogen p en q langs elkander vallen,) de boog q, die den hoek Q meet, in den boog p, die de maat van den hoek P voorstelt, a-maal zijn begrepen, en van den boog p zal dan nog den boog r, kleiner dan de boog q zijnde, overblijven; men heeft derhalve, ten aanzien der metende bogen, de vergelijking $p = aq + r$.

Men mete verder den hoek Q, door den hoek R. Stel, dat de laatste in den eerste b-maal zij begrepen, met nog den hoek S; dan zal $Q = bR + S$ zijn; maar nu zal ook de boog r, die den hoek R meet, in den boog q, die den hoek Q meet, begrepen zijn b-maal, met nog een boog s, die de maat van den hoek S is; zoodat, ten aanzien der metende bogen, ook de overeenstemmende vergelijking $q = br + s$ zal bestaan.

Wanneer men verder met dit uitmeten voortgaat, zoo zal men, voor de overschotten der derde en volgende uitmetingen, verkrijgen, de hoeken T, U, V, W, X, *enz.* en voor de overeenkomstige bogen, die (met denzelfden straal beschreven zijnde,) de betrekking dezer hoeken voorstellen, t, u, v, w, x, *enz.* en zoo men nu, bij de derde en volgende uitmetingen der hoeken, de vergelijkingen $R = cS + T$, $S = dT + U$, $T = eU + V$, $U = fV + W$, $V = gW + X$, *enz.* verkrijgt; dan zal men, voor de uitmeting der overeenkomstige bogen, de overeenstem-

 men-

mende vergelijkingen $r = cs + t$, $s = dt + u$, $t = eu + v$, $u = fv + w$, $v = gw + x$, *enz.* verkrijgen.

De betrekkingswijzer van de hoeken P en Q zal derhalve worden:

$$\left\{ \begin{matrix} P, & Q, & R, & S, & T, & U, & V, & W, & X, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & & \end{matrix} \right\}$$

en die van de bogen, welke de hoeken P en Q meten,

$$\left\{ \begin{matrix} p, & q, & r, & s, & t, & u, & v, & w, & x, & enz. \\ a, & b, & c, & d, & e, & f, & g, & h, & & \end{matrix} \right\}$$

Nu is het klaar, dat, in gevalle de betrekkingswijzer der hoeken ergens ten einde loopt, bij voorbeeld, wanneer X, in W, h-maal begrepen is, ook x, in w, h-maal zal begrepen zijn, en dat beide wijzers alsdan uit hetzelfde aantal termen en uit dezelfde wijzergetallen zullen bestaan.

Maar nemen wij aan, dat de hoeken P en Q onderling onmeetbaar zijn; dan zal de uitmeting dezer hoeken, en gevolgelijk derzelver betrekkingswijzer nooit ten einde loopen; dan, hoe verre men met dit uitmeten mogte voortgaan, zoo zullen echter de wijzergetallen van de betrekking der metende bogen p en q, van het begin tot in het oneindige, dezelfde zijn, als die van den betrekkingswijzer der hoeken, die zij meten. Wij hebben dan, volgens de *IX. Bep. II. B.* in het algemeen:

$$\text{hoek } P : \text{hoek } Q = \text{boog } p : \text{boog } q$$

zoodat het gestelde, ook in het geval der onmeetbaarheid, geldig is.

§. 408. I. Gevolg. *Fig.* 174. *In denzelfden cirkel, zullen de inhouden der sectors (DME en EMF) tot elkander staan, in dezelfde reden, als de hoeken (DME en EMF) van derzelver stralen; of, als de bogen (DE en EF), door welke deze sectors bepaald worden.*

§. 409. II. Gevolg. *Fig.* 172. *Twee hoeken (ABC en DEF) zullen dan ook tot elkander, in dezelfde reden staan, als de bogen, (AC en DF), welke, uit de hoekpunten (B en E) dezer hoeken, met gelijke stralen (AB en DE), beschreven zijn.*

§. 410. III. Gevolg. *Fig.* 174. *Ook staat elke hoek (AMB) tot vier regte hoeken, tot twee regte hoeken, of tot éénen regten hoek, in dezelfde reden, als de boog (DE), welke met eenen straal (MD), naar welgevallen genomen, uit het hoekpunt (M) van den hoek, beschreven zijnde, tusschen de beenen van dien hoek begrepen is, tot den geheelen omtrek, den halven omtrek, en tot het quadrant van dienzelfden cirkel.*

§. 411. IX. Bepaling. Men zegt: *dat een hoek door eenen boog gemeten wordt*, wanneer, het middelpunt van dien boog in het hoekpunt van dezen hoek gebragt zijnde, de uiteinden van dien boog aan de beenen van den hoek sluiten; of, wanneer die boog even

zoo

zoo veel deelen van één-vierde van den omtrek bevat, als de hoek overeenkomstige deelen van één regten hoek.

§. 412. Bijvoegsel. Uit het bewezene volgt: *hoe men, ingevolge de voorschriften der* VI. Bep. II. B. *de betrekking van eenen hoek tot twee regte hoeken, zonder daartoe eenen hoekmeter te gebruiken, eenvoudiglijk door eenen passer, bepalen kan.* Ten dien einde, verlenge men één der beenen van dien hoek, en men beschrijve, uit het hoekpunt, eenen cirkel; men stelle twee regte hoeken $= \pi$; den boog tusschen de beenen van den hoek bevat, $= p$. Stel, dat men π door p mete, *enz.* en, dat deze uitmeting de vergelijkingen: 1°. $\pi = 4p + q$; 2°. $p = 2q + r$; 3°. $q = 3r + s$; 4°. $r = s + t$; 5°. $s = t + u$; 6°. $t = 9u$, geve; dan geven ons deze vergelijkingen, zie *VI. Bep. II. B.* als volgt:

$$t = 9u$$
$$s = t + u = 9u + u = 10u$$
$$r = s + t = 10u + 9u = 19u$$
$$q = 3r + s = 3 \times 19u + 10u = 57u + 10u = 67u$$
$$p = 2q + r = 2 \times 67u + 19u = 134u + 19u = 153u$$
$$\pi = 4p + q = 4 \times 153u + 67u = 612u + 67u = 679u$$

Uit deze berekening blijkt nu: dat (*V. Bep. II. B.*) de hoek p tot den hoek π, of tot twee regte hoeken, staat, in dezelfde reden, als 153 tot 679. Men heeft dan: $p = \frac{153}{679}\,\pi = \frac{153}{679} \times 200° = 45°,06628$ decimale graden; of $= \frac{153}{679} \times 180° = 40° 33' 34'',7$ sexagesimale of oude graden.

Doch, behalve deze handelwijze, welke op de algemeene beginsels van de *VI. Bep. II. B.* berust, kan men nog ééne andere volgen, die zeer eenvoudig, en, omdat men dezelve slechts met ééne opening van den passer, uitvoert, aan minder misslagen onderhevig is. Zij, *fig.* 171, *AMB* een hoek, welke met éénen regten hoek moet vergeleken worden. *Men beschrijve uit M, als middelpunt, met eenen straal, naar welgevallen, eenen cirkel ABC. Neem de punten A en B, zoo naauwkeurig mogelijk, tusschen de beenen van den passer, en laat deze afstand, van het punt A, linksom, in den omtrek des cirkels gemeten worden, den geheelen cirkel rond; en zoo menigmaal rond, tot dat men in, of nagenoeg, bij het punt A, te land komt. Tel dan het getal der afmetingen, als ook, hoeveelmaal men den cirkel zij rond geweest.* Stel dat men, na *drie-en-dertigmaal* den boog AE in den omtrek te hebben afgemeten, den cirkel zeer nabij *vijfmaal* zij rond geweest; ten minste zoo nabij, dat het verschil niet merkbaar is; dan bevat de hoek *AMB* klaarblijkelijk één-drie-en-dertigste deel van vijfmaal 400°; derhalve is hoek $AMB = \frac{1}{33} \times 2000° = 60°,606060$ decimale graden. Of $\frac{1}{33}$ van 5 maal $360° = 54° 32' 43'', 5$ graden van de sexagesimale verdeeling.

XIX. Stelling. *Fig.* 175.

§. 413. *Wanneer eene raaklijn* (AC) *en eene snijlijn* (BD)

elkander, in den omtrek eens cirkels, en gevolgelijk, in het raakpunt (B) snijden; dan worden de hoeken (A B D en C B D), onder welke deze raak- en snijlijnen elkander, in het raakpunt (B), ontmoeten, gemeten door de helften van de bogen (B G D en B E H D), des omtreks, welke binnen elken dezer hoeken (A B D en C B D) gelegen zijn.

Betoog. Men trekke, van het raakpunt *B*, door het middelpunt *M*, de middellijn *B H*; en nog de middellijn *G M E* regthoekig op *B D*. Omdat dan *A C* eene raaklijn is, zoo is (*XII. Stell.*) de hoek *A B H* regt en (*IV. Ax.*) gelijk aan de som van deszelfs deelen, *A B D* en *D B H*, gelijk (*III. Gev. XVIII. Stell. I. B. en constr.*) aan de som der hoeken, *M B F* en *B M F*; trekt men nu van deze gelijkheid denzelfden hoek, *hoek D B H* = *hoek M B F*, af; dan zal er (*IX. Ax.*) *hoek A B D* = *hoek B M G*, overblijven; en, de supplementen dezer gelijke hoeken zullen insgelijks (*III St. I. B*) gelijk zijn; namelijk, *hoek C B D* = *hoek B M E*. Omdat nu de middellijn *G E* loodregt op de koorde *B D* staat, zoo is (*VII. Stell.*) de *boog B G* = den *boog D G*; en de *boog B E* = den *boog D H E*. Nu wordt (*XVII. Stell.*) de *hoek B M G* = *hoek A B D*, door den *boog B G*, die de helft van den *boog B G D* is, en de *hoek B M E* = *hoek C B D*, door den *boog B E*, dat is, door de helft van den *boog B E H D*, gemeten; derhalve, *enz.*

XX. Stelling. *Fig.* 176, 177 *en* 178.

§. 414. *De hoek (A B C), onder welken twee snijlijnen (A B en B C) eens cirkels elkander doorsnijden, wordt, wanneer* (fig. 176.) *het punt van doorsnijding (B) in den omtrek des cirkels gelegen is, gemeten door de helft van den boog (A C), welke tusschen de beenen van dien hoek ligt: maar, wanneer deze snijlijnen elkander, binnen of buiten den omtrek, ontmoeten* (fig. 177 *en* 178.); *dan wordt de hoek (A B C), onder welken deze snijlijnen elkander ontmoeten, gemeten door de halve som of het halve verschil der bogen (A C en D E), welke tusschen de beenen van dien hoek (A B C) gelegen zijn.*

Betoog. I. Geval. *Fig* 176. Laat, door het hoekpunt *B*, de raaklijn *D B E* aangenomen worden; dan wordt (*XIX. Stell.*) *hoek D B C* door de helft van den *boog B A C*, en *hoek D B A*, door de helft van den *boog B A* gemeten; gevolgelijk (*IX. Ax.*) het verschil der hoeken *D B C* en *D B A*, dat is, *hoek A B C*, door het halve verschil der bogen *B A C* en *B A*; dat is, door de helft van den *boog A C*.

II. Geval. *Fig.* 177. Trek *E F*, evenwijdig aan *C D*; dan is (*XIV. Stell.*) *boog C F* = *boog D E*, en (*VIII. Ax.*) *boog A C* + *boog D E* = *boog A C* + *boog C F* = *boog A F*. Nu wordt (*I. Geval*) de *hoek A E F*, door

door de helft van den *boog AF*; dat is, door de helft van de som der bogen *AC* en *DE*, gemeten; die halve som moet dan ook den *hoek ABC*, die (*XXVI. Stell. I. B.*) aan den *hoek AEF* gelijk is, meten.

III. GEVAL. *Fig.* 178. Trek *EF*, evenwijdig aan *AB*; dan is (*XIV. Stell.*) *boog AF* = *boog DE*; derhalve (*IX. Ax.*) *boog CF* = het verschil der *bogen AC* en *DE*; nu wordt de hoek *CEF* (*I. Geval*) door de helft van den *boog CF*; dat is, door het halve verschil der bogen *AC* en *DE* gemeten; en dit zelfde halve verschil meet dan ook den *hoek ABC*, die (*XXIV. Stell. I. B.*) aan den *hoek CEF* gelijk is.

§. 415. I. GEVOLG. *Fig.* 176. Het blijkt, uit het eerste geval der stelling: *dat een hoek* (*ABC*), *aan den omtrek eens cirkels staande, gemeten wordt door den halven boog* (*AC*), *op welken hij staat*. Zie *VI. Bep.*

§. 416 II. GEVOLG. *Fig.* 176. Indien men de stralen *AM* en *CM* trekt; dan wordt de *hoek AMC*, aan het middelpunt, (*IX. Bep.*) door den *boog AC*, waarop hij staat, gemeten. *Wanneer dan, op denzelfden boog* (*AC*), *twee hoeken* (*AMC en ABC*), *de eerste aan het middelpunt, en de tweede aan den omtrek staan; dan is de eerste hoek gelijk aan het dubbel van den tweeden; en de tweede gelijk aan de helft van den eersten.*

§. 417. III. GEVOLG. *Fig.* 179. *Alle hoeken* (*ACB, ADB, AEB, AFB*), *welke, aan den omtrek, op denzelfden boog* (*AGB*) *staan, zijn gelijk*; omdat zij alle, door de helft van denzelfden boog, *AGB*, gemeten worden. *Ook zijn de hoeken, welke, in denzelfden cirkel, of in gelijke cirkels, aan den omtrek, op gelijke bogen staan, onderling gelijk.*

§. 417. IV. GEVOLG. *Fig.* 176. *Wanneer men dan de beenen van den hoek ABC, als onbuigbaar aanneemt, en, langs de vaste punten A en C, heen en weder schuift; dan zal* (*mits dat de opening van den hoek ABC dezelfde blijve,*) *het hoekpunt B den cirkelboog ABC beschrijven.*

§. 419. V. GEVOLG. *Alle hoeken, welke in een halven cirkel staan, zijn regt:* omdat zij, door eenen halven omtrek, gemeten worden. — En, *fig.* 179, *de hoeken ACB, AGB, welke in een cirkelsegment, AECB of AGB, staan, zijn scherp of stomp, naar dat dit cirkelsegment grooter of kleiner dan een halve cirkel is*; omdat de hoek, in het eerste geval, door minder, en, in het tweede geval, door meer dan den halven omtrek, gemeten wordt.

§. 420. VI. GEVOLG. *Fig.* 179. *De som van de overstaande hoeken* (*ACB en AGB, of GAC en GBC*) *eens vierhoeks* (*ACBG*), *wel-*

welke in eenen cirkel beschreven is, is gelijk aan twee regte hoeken; en elke hoek van dien vierhoek is gevolgelijk gelijk aan het supplement van zijn overstaanden hoek.

Want, daar de hoeken *ACB* en *AGB*, door de helften der bogen, *AGB* en *ACB*, op welken zij staan, gemeten worden, zoo wordt derzelver som door de helft van den geheelen omtrek gemeten, en die som is dus gelijk aan twee regte hoeken, *enz.* Het is ook gemakkelijk te zien: *dat geen vierhoek in eenen cirkel kan beschreven worden, indien niet elke hoek gelijk aan het supplement van den overstaanden is. Om die reden, kan, bij voorbeeld, geen scheefhoekig parallelogram in eenen cirkel beschreven worden.*

§. 421. Leering. *Fig.* 179. Men leert uit het betoogde: *dat de meetkunstige plaats van de toppunten van alle driehoeken* (*ABC*, *ABD*, *ABE*, *ABF*, enz.), *die op dezelfde basis* (*AB*) *staan, en gelijke tophoeken* (*C*, *D*, *E*, *F*, enz.), *hebben, de boog* (*BDA*) *van het cirkelsegment is, dat eenen hoek bevat, gelijk zijnde aan den tophoek van éénen dezer driehoeken.*

XXI. Stelling. *Fig.* 180 *en* 181.

§. 422. *Wanneer twee koorden* (*AB en CD*) *van eenen cirkel elkander, in eenig punt* (*E*), *doorsnijden; dan zijn de regthoeken onder derzelver deelen aan elkander gelijk. Dat is:* $AE \times BE = CE \times DE$.

Betoog. Men trekke de koorden, *AC* en *BD*. Omdat dan de hoeken, *ACB* en *EBD*, op denzelfden boog *AFD*, en de hoeken, *CAE* en *BDE*, insgelijks op denzelfden boog *CGB*, staan, zoo zijn zij (III. *Gev.* XX. *Stell.*) gelijk; en, vermits de hoeken, *AEC* en *DEB*, (IV. *Stell.* I. *B.*) nog daarenboven gelijk zijn, zoo zijn de driehoeken, *ACE* en *DBE*, onderling gelijkhoekig, en, om die reden, (III. *Bep.* IV. *B.*) gelijkvormig; men heeft (VIII. *Stell.* IV. *B.*) derhalve de evenredigheid, $AE : CE = DE : BE$; uit welke (V. *Stell.* IV. *B.*) de vergelijking $AE \times BE = CE \times DE$ onmiddellijk volgt.

§. 423. Aanmerking. *Fig.* 181. Wanneer de koorde *AB* eene middellijn is, welke eene eigenlijke koorde *CD* regthoekig doorsnijdt; dan is (*VII. Stell.*) $CE = DE$; daar nu, in dit geval, ook nog de betoogde eigenschap zal plaats hebben, zoo zal $AE \times BE = CE \times ED = CE^2$ zijn. Dat is: *het vierkant van de loodlijn, welke, uit eenig punt van den omtrek eens halven cirkels, op de middellijn valt, is gelijk aan den regthoek, onder de deelen, waarin zij de middellijn verdeelt, en zij is bijgevolg middenevenredig tusschen deze deelen.*

§. 424.

§. 424. BIJVOEGSEL. De Meetkunstenaars hebben, thans twee eeuwen geleden, eene algemeene manier aangenomen, om de onderlinge ligging der punten in eene vlakte, door middel van derzelver afstanden tot twee onbepaalde lijnen, te bepalen, die men doorgaans regthoekig op elkander stelt, en *coördinaten-asfen* noemt. Laten *fig.* 182, XOX' en YOY' twee zulke asfen zijn, die elkander in O doorsnijden, P een zeker punt in de vlakte dezer asfen. Indien men dan PQ, evenwijdig aan OY, en PR, evenwijdig aan OX, trekt; dan worden $PQ = OR$ en $PR = OQ$ (de afstanden namelijk van dit punt tot de asfen,) de *coördinaten van het punt P* genoemd. *Zijn nu de coördinaten van zulk een punt gegeven; dan is deszelfs plaats bekend.* Want, laat, bij voorbeeld, $OQ = 12$ *deelen* $PQ = 19$ *deelen* zijn; neem dan $OQ = 12$ *deelen*, trek QP evenwijdig aan OY, en neem $QP = 19$ *deelen*; dan verkrijgt men het punt P.

Tot elk punt P, in die vlakte genomen zijnde, behoort eene lijn OQ, die men meer bepaaldelijk de *abscis*, en eene lijn PQ, die men meer bepaaldelijk de *ordinaat* van dit punt P noemt. *De abscis OQ wordt doorgaans door de letter x, en de ordinaat PQ door de letter y aangewezen.*

Men noemt OX de *positieve* en OX' de *negatieve streek van de as der abscisfen*; OY de *positieve* en OY' de *negatieve streek van de as der ordinaten.* De coördinaten x en y namelijk, worden, op de asfen OX en OY, van het punt O, (dat men den oorsprong van de telling der coördinaten noemt,) geteld. Valt nu het punt P in den eersten coördinatenhoek XOY; dan zijn x en y beide positief; valt P in den tweeden coördinatenhoek YOX', dan is x negatief en y positief; valt P in den derden coördinatenhoek $X'OY'$; dan zijn x en y beide negatief; en valt eindelijk P in den vierden coördinatenhoek $Y'OX$; dan is x positief en y negatief. Zie verder *Allereerste Gronden der Stelkunst, I. Hoofdst. II Afd. Bladz.* 36.

De coördinaten van al de punten eener regte of kromme lijn kunnen altijd in eene algemeene getallen-vergelijking worden voorgesteld, die eigenlijk de kunstmatige bepaling van dezelve is, en gevonden kan worden, zoodra de wijze bekend is, hoe die regte of kromme lijn ontstaat, en hoe dezelve, ten opzigte van de coördinatenasfen, gelegen is.

Zij, in *fig.* 182, ABZ eene regte lijn, welker vergelijking men zoekt. Stel $OA = a$ en $OB = b$; dan wordt, door deze standvastige getallen, de stelling van de lijn AZ, met betrekking tot de coördinatenasfen OX en OY, aangeduid. Zij nu P een punt van de regte lijn AZ, en trek PQ, evenwijdig aan OY. Stel $OQ = x$ en $PQ = y$; dan is $AQ = a + x$; daar nu $OA : OB = AQ : PQ$, of $a : b = a + x : y$ is, zoo is ook $ay = ab + bx$, of

$$bx - ay + ab = 0$$

de vergelijking van de regte lijn AZ, welker stelling, met betrekking tot de coördinatenasfen, van de getallen a en b afhangt.

Zij, in *fig.* 183, M het middelpunt van eenen cirkel, P een punt van deszelfs omtrek. Men neme twee regthoekige coördinatenasfen OX en OY, naar welgevallen, en men late MA en PQ loodregt op OX of evenwijdig aan OY vallen, en trekke MB, evenwijdig aan OX. Stel $AO = a$ en $MA = b$, $OQ = x$ en $PQ = y$; dan zijn a en b de coördinaten van het middelpunt M, en x en y die van het punt P. Voorts is, volgens de figuur, $MB = AQ = OQ - OA = x - a$, en $BP = PQ - BQ = PQ - AM = y - b$. Stel nu $PM = r$; daar dan, in den regthoekigen driehoek MBP, (XVI. *Stell.* III. *B.*) $MP^2 = MB^2 + BP^2$ is, *zoo wordt*

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

de vergelijking van den cirkel, met betrekking tot de coördinatenasfen OX *en* OY.

In deze vergelijking, blijven de coördinaten van het middelpunt, a *en* b, *dezelfde standvastige waarden behouden, zoo lang de coördinatenasfen niet worden verplaatst;* doch, indien men deze verplaatst; dan verkrijgen a en b andere waarden; en dit maakt: *dat de vergelijking eener kromme lijn, op zoo veel verschillende manieren, kan worden voorgesteld, als het mogelijk is, de asfen te verplaatsen.*

Indien men, bij voorbeeld, de asfen door het middelpunt M laat gaan (dat is, het punt O in M brengt); dan wordt $a = 0$ en $b = 0$, en de verkregene vergelijking van den cirkel verkrijgt dan dezen zeer eenvoudigen vorm:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Laat men de abscisfenas OX door het middelpunt gaan, en neemt men de ordinatenas OY zoodanig aan, dat $OA = a = r$ is; dan wordt de vergelijking (A) $(x-r)^2 + y^2 = r^2$, of $x^2 - 2rx + r^2 + y^2 = r^2$, of eindelijk:

$$y^2 = 2rx - x^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

welke vergelijking ook, uit *fig.* 181, onmiddellijk kan gevonden worden; want, indien, in dezelve, $AE = x$ en $CE = y$ wordt gesteld; dan is $BE = 2r - x$; daar nu $CE^2 = AE \times BE$ is, zoo is $y^2 = (2r - x)x = 2rx - x^2$. — *De vergelijking* (B) *heeft den eenvoudigsten vorm, onder welken de vergelijking van eenen cirkel kan voorkomen.*

XXII. Stelling. *Fig.* 184.

§. 425. *Wanneer twee snijlijnen* (EB *en* ED) *elkander, buiten den omtrek eens cirkels, in een punt* (E), *doorsnijden; dan zijn de regthoeken, onder de deelen dezer snijlijnen, welke, tusschen het snijpunt en den omtrek, begrepen zijn, gelijk. Dat is:* $AE \times BE = CE \times DE$.

Betoog. Men trekke de koorden AC en BD; dan is (VI. *Gev.* XX. *Stell.*) de *hoek* B het supplement van den *hoek* ACD, en de *hoek* ACE is (XIX. *Bep.* I. *B.*) insgelijks het supplement van denzelfden *hoek* ACD;

de *hoek* ACE is dan (III *Stell* I. *B.*) gelijk aan den *hoek* B. Om dezelfde reden, is de *hoek* EAC = den *hoek* D; en, daar de driehoeken, EAC en EDB, nog bovendien eenen gemeenschappelijken hoek E hebben, zoo zijn zij onderling gelijkhoekig, en daarom (III. *Bep* IV. *B.*) gelijkvormig; om die reden is dan, (VIII *St.* IV. *B.*) $AE : EC = ED : EB$, en (V. *St.* IV. *B.*) $AE \times EB = CE \times ED$.

§. 426. I. AANMERKING. *Fig.* 184. Indien men de lijn EB, om het punt E, laat omdraaijen, en naar den kant van F bewegen; dan komen de punten A en B steeds nader bij elkander, en vereenigen zich, op denzelfden oogenblik, dat EB den cirkel, in het punt F, aanraakt; de regthoek $EA \times EB$ verandert dan ook in den regthoek $EF \times EF$, of in EF^2, en men heeft derhalve: $EF^2 = EA \times EB = EC \times ED$. *Wanneer dan eene raaklijn en eene snijlijn elkander doorsnijden; dan is het vierkant van het gedeelte der raaklijn, tusschen het raakpunt en het punt van doorsnijding begrepen, gelijk aan den regthoek, onder de deelen van de snijlijn, welke, tusschen het snijpunt en den omtrek, begrepen zijn.*

§. 427. II. AANMERKING. *Fig.* 180 *en* 184 De twee voorgaande stellingen zijn twee gevallen van de volgende meer algemeene stelling. *Indien twee snijlijnen elkander, binnen of buiten den omtrek eens cirkels, doorsnijden; dan zijn de regthoeken der deelen, tusschen het snijpunt en den omtrek begrepen, onderling gelijk.*

XXIII. STELLING. *Fig.* 185.

§. 428. *Wanneer men, uit het uiteinde* (A) *van de middellijn* (AG) *eens halven cirkels, eene menigte koorden* (AB, AC, AD, AE, AF,) *trekt, en, uit de uiteinden* (B, C, D, E, F,) *van dezelve, loodlijnen* (BH, CI, DK, EL, FM,) *op de middellijn* (AG) *laat vallen; dan zullen de deelen, welke die loodlijnen van de middellijn afsnijden, aan de vierkanten, op die koorden beschreven, evenredig zijn; dat is:*

$$(AB^2, AC^2, AD^2, AE^2, AF^2, AG^2) :: (AH, AI, AK, AL, AM, AG)$$

BETOOG. Laten de koorden BG en CG worden getrokken; dan zijn de hoeken ABG en ACG (V. *Gev* XX. *Stell*) regte hoeken, omdat zij in een halven cirkel staan; de driehoeken ABG en ACG zijn dus regthoekig; derhalve is (*Gev.* XVI. *Stell.* III. *B.*) $AB^2 = AG \times AH$ en $AC^2 = AG \times AI$; uit deze gelijkheden kan men (I. *Gev.* IV. *St.* II. *B.*) de evenredigheid opstellen:

AB^2

$AB^2 : AG \times AH = AC^2 : AG \times AI$

of, $AB^2 : AC^2 = AG \times AH : AG \times AI$, VII. *St.* II. *B.*

maar nu is $AG \times AH : AG \times AI = AH : AI$, XI. *St.* III. *B.*

derhalve is $AB^2 : AC^2 = AH : AI$, I. *St.* II. *B.*

Om dezelfde reden, zal $AB^2 : AD^2 = AH : AK$ zijn. Maar ook is $AB^2 : AG^2 = AH : AG$. Want, uit de vergelijkingen $AB^2 = AH \times AG$ en $AG^2 = AG^2$, zal, even als boven, volgen:

$AB^2 : AG^2 = AH \times AG : AG \times AG$

maar $AH \times AG : AG \times AG = AH : AG$, XI. *St.* III. *B.*

derhalve is $AB^2 : AG^2 = AH : AG$, I. *St.* II. *B.*

Uit dit alles blijkt dan: dat, in het algemeen, zal zijn:

$(AB^2, AC^2, AD^2, AE^2, AF^2$, *enz.* $AG^2) :: (AH, AI, AK, AL, AM$, *enz.* $AG)$

§. 429. Aanmerking. *Fig.* 185. Indien men onderstelt: dat de middellijn AG in n gelijke deelen $AH = HI = IK =$ *enz.* verdeeld, en $AH = 1$ genomen wordt; dan is $AB^2 = 1 \times n = n$, $AC^2 = 2n$, $AD^2 = 3n$, $AE^2 = 4n$, *enz.*; gevolgelijk $AB = \sqrt{n}$, $AC = \sqrt{n} \times \sqrt{2}$, $AD = \sqrt{n} \times \sqrt{3}$, *enz.*; derhalve $AB : AC = \sqrt{1} : \sqrt{2}$, $AC : AD = \sqrt{2} : \sqrt{3}$; de koorden AB, AC, AD, AE, AF, *enz.* zijn dan in reden, als de vierkants-wortels uit de getallen 1, 2, 3, 4, 5, *enz.* Het is door deze constructie, dat de lijnen der quadraats-wortelen, op den *proportie-passer*, zijn geconstrueerd. Zie *Aanmerk.* II. *Stell.* IV. *B.*

XXIV. Stelling. *Fig.* 186.

§. 430. *Wanneer, op den straal* (AM) *eens cirkels en op deszelfs verlengde, twee punten* (B *en* C) *zoodanig worden aangenomen, dat die straal* (AM) *middenevenredig is tusschen de afstanden* (BM *en* CM) *dezer punten* (B *en* C) *tot het middelpunt* (M) *des cirkels* [namelijk $BM : AM = AM : CM$]; *dan zullen de afstanden* (PB *en* PC) *van elk punt* (P) *van den omtrek dezes cirkels tot gezegde punten* (B *en* C), *in dezelfde bestendige reden zijn. Dat is, voor elk punt* P, *zal* $PB : PC = AB : AC$ *zijn.*

Betoog. Men trekke den straal MP; dan is vooreerst:

$CM : AM = AM : BM$, *onderst.*

en daarom $CM - AM : AM - BM = CM : AM$, VIII. *St.* II. *B.*

of, omdat $PM = AM$ is, volgens de *figuur:*

$AC : AB = CM : PM$

Verder is, volgens de *onderstelling*,

$CM : AM = AM : BM$

of $CM : PM = PM : BM$, *uit de figuur*

en *hoek* $CMP =$ *hoek* PMB, *uit de figuur*

de driehoeken CMP en BMP zijn dan (X. *Stell.* IV. *B.*) gelijkvormig; en daarom is

CP

$CP : BP = CM : PM$, VIII. *St.* IV. *B.*
nu is $AC : AB = CM : PM$, *bewezen*
gevolgelijk $CP : PB = AC : AB$, I. *St.* II. *B*
Voor elk ander punt P', zal nu, om dezelfde reden,

$$CP' : P'B = AC : AB$$

zijn; en daarom overal, voor alle punten van den omtrek des cirkels, is $CP : BP = AC : AB$; dat is, in eene bestendige reden.

§. 431. I. GEVOLG. *Fig.* 186. Het punt, op het uiteinde van de middellijn AD gelegen, is van de betoogde eigenschap niet uitgezonderd; ook voor dit punt bestaat de evenredigheid:

$$CD : BD = AC : AB$$

en derhalve $CD \times AB = AC \times BD$, V. *Stell.* IV. *B.*
De lijn CD is dan (II. Bep. IV. B.), in de punten A en B, harmonisch gesneden.

§. 432. II. GEVOLG. *Fig.* 186. *De meetkunstige plaats van de toppunten (P) der driehoeken (BCP), die op dezelfde basis (BC) staan, en welker opstaande zijden (BP en CP) tot elkander eene gegevene reden hebben, is de omtrek van eenen cirkel, wiens middelpunt bepaald is en ligtelijk kan geconstrueerd worden.*

Want, stellen wij: dat $CP : BP = 3 : 2$ moet zijn; trek dan op CD de loodlijnen CE en BF; neem CE = *drie deelen*, $BF = BG$ = *twee deelen*. Trek voorts de lijnen EF en EG; dan wordt de middellijn AD, en gevolgelijk ook het middelpunt M des cirkels bekend.

XXV. STELLING. *Fig.* 187. (*)

§. 433. *Wanneer men, na uit een punt (P), buiten den omtrek eens cirkels gelegen zijnde, twee raaklijnen (PA en PB) aan denzelven getrokken te hebben, de raakpunten (A en B), door eene koorde (AB), vereenigt; dan zal elke snijlijn (PD), welke door het gezegde punt (P) getrokken wordt, door die koorde en den omtrek dezes circels, harmonisch verdeeld zijn; dat is* $PD \times CE = PC \times DE$.

BETOOG. Omdat (zie *Leer.* XIII. *Stell.*) $AP = BP$ is, zoo is ABP een gelijkbeenige driehoek, en daarom is:

$AP^2 = PE^2 + AE \times BE$, II. *Gev.* XVIII. *St.* IV. *B.*
maar nu is $AB \times BE = CE \times ED$, XXI. *St.*
derhalve $AP^2 = PE^2 + CE \times ED$, V. *Ax.*

voorts

(*) De XXV. *Stelling* van dit boek, in den eersten en tweeden druk voorkomende, is, in dezen druk, in de XIX. *Stelling* van het IV. *Boek* begrepen.

voorts is $AP^2 = PD \times PC$, XXII. *St.*
gevolgelijk $PD \times PC = PE^2 + CE \times ED$, V *Ax.*
maar $PD \times PC = PC^2 + PC \times CE + PC \times DE$, III. *Hulpſt.* III. *B.*
en $PE^2 = PC^2 + 2PC \times CE + CE^2$, II. *Hulpſt.* III. *B.*
de voorgaande vergelijking wordt dan:

$$PC^2 + PC \times CE + PC \times DE = PC^2 + 2PC \times CE + CE^2 + CE \times ED$$

trek $PC^2 + PC \times CE$ ...... $= PC^2 + PC \times CE$ af;
dan blijft er $PC \times DE = PC \times CE + CE^2 + CE \times DE$, IX. *Ax.*
of $PC \times DE = PD \times CE$, III. *Hulpſt.* III. *B.*

Het blijkt dus, dat de ſnijlijn PD, in de punten C en E, harmonisch geſneden is.

§. 434. Bijvoegsel. *Fig.* 119. Daar wij meermalen van de harmoniſche ſnijding eener lijn AD geſproken hebbén, zullen wij thans aanwijzen: *hoe die ſnijding door conſtructie bepaald wordt?* Zij AD eene bepaalde lijn, en B één der punten, in welke zij harmonisch geſneden is; om dan het andere punt C te vinden, werke men aldus.

Constructie. Neem een punt E, naar welgevallen, en trek de lijnen AE en DE. Trek door B de lijn FG, evenwijdig aan DE. Maak $BG = BF$, en trek de lijn EG; dan zal deze het tweede punt C bepalen.

Betoog. Want de evenwijdige lijnen DE en FG maken de driehoeken ABF en ADE, alsmede de driehoeken BCG en DCE, (III. *Bep.* IV. *B.*) gelijkvormig; wij hebben dan (VIII. *Stell.* IV. *B.*)

$AB : AD = BF$ of $BG : DE$
en $BC : CD =$ .... $BG : DE$
derhalve $AB : AD = BC : CD$, I. *Stell.* II. *B.*
en $AD \times BC = AB \times CD$, V. *Stell.* IV. *B.*

XXVI. Stelling. *Fig.* 165.

§. 435. *De inhoud van elken driehoek is gelijk aan eenen regthoek, welke de ſom van al deszelfs zijden tot lengte, en den halven ſtraal des ingeſchrevenen cirkels, tot breedte, heeft.*

Betoog. De lijnen, AD, BD en CD, welke, uit het middelpunt des ingeſchrevenen cirkels, tot aan de hoekpunten des driehoeks getrokken worden, verdeelen den driehoek ABC, in drie driehoeken, ABD, BCD en ACD, welker toppunten, in het middelpunt D, des ingeſchrevenen cirkels, aan elkander ſluiten; en welke, omdat de zijden des driehoeks den ingeſchrevenen cirkel aanraken (XII. *Stell.* en X. *Bep.* III. *B.*) deszelfs ſtraal tot hoogte hebben; derhalve zal, den ſtraal $= r$ ſtellende, (*Gev.* VIII. *Stell.* III. *B.*) *drieh.* $ABD = AB \times \frac{1}{2}r$; *drieh.* $BCD = BC \times \frac{1}{2}r$, en *drieh.* $ACD = AC \times \frac{1}{2}r$; en daarom (VIII. *Ax.*) zal *Inh. drieh.* $ABC = (AB + BC + AC) \times \frac{1}{2}r$ zijn.

§. 436. Bijvoegsel. *Fig.* 165. Stellen wij de ſtralen van de cirkels, welke de zijden des driehoeks naar buiten aanraken, als volgt: den ſtraal

des

des cirkels, die het verlengde der zijden AB en AC inwendig, en de zijde BC uitwendig aanraakt, of den straal van den uitwendigen cirkel, binnen den hoek A, gelijk α; den straal des uitwendigen cirkels, binnen den hoek B, gelijk β; en den straal des uitwendigen cirkels, binnen den hoek C, gelijk γ; dan is ligtelijk te bewijzen: dat

$$\text{Inh. driehoek } ABC = (AB + AC - BC) \times \tfrac{1}{2}\alpha$$
$$\text{Inh. driehoek } ABC = (AB + BC - AC) \times \tfrac{1}{2}\beta$$
$$\text{Inh. driehoek } ABC = (AC + BC - AB) \times \tfrac{1}{2}\gamma$$

zal zijn. Stellen wij nu (dit betoog aan den Lezer overlatende), $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; $s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$, en inhoud driehoek $ABC = I$; dan is:

$$I = (a+b+c) \times \tfrac{1}{2}r = \tfrac{1}{2}(a+b+c) \times r = s \times r \quad \ldots \quad (1)$$
$$I = (-a+b+c) \times \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}(-a+b+c) \times \alpha = (s-a)\alpha \quad (2)$$
$$I = (a-b+c) \times \tfrac{1}{2}\beta = \tfrac{1}{2}(a-b+c) \times \beta = (s-b)\beta \quad \ldots \quad (3)$$
$$I = (a+b-c) \times \tfrac{1}{2}\gamma = \tfrac{1}{2}(a+b-c) \times \gamma = (s-c)\gamma \quad \ldots \quad (4)$$

men vermenigvuldige alle deze vergelijkingen met elkander; dan zal men het product door $I^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ [zie *Bijvoegs. XVIII en XIX. Stell. III. B.*] deelende, verkrijgen:

$$I^2 = r\alpha\beta\gamma \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

dat is: *het product van de stralen van al de cirkels, die de zijden van eenen driehoek aanraken, is gelijk aan de tweede magt van het getal, dat den inhoud des driehoeks voorstelt.*

Uit de vergelijkingen (1), (2), (3) en (4), volgt al verder:

$$r = I : s,\quad \alpha = I : (s-a),\quad \beta = I : (s-b) \text{ en } \gamma = I : (s-c)$$

door welke formulen, indien de zijden eens driehoeks gegeven zijn, de stralen van de cirkels, die de zijden aanraken, kunnen berekend worden.

VOORBEELD. Zij $a = 418$, $b = 290$ en $c = 480$; dan is $s = 594$, $s - a = 176$, $s - b = 304$, $s - c = 114$; $I = 60192$ (zie *Bijv. XVIII en XIX. Stell. III. B.*); derhalve is $r = I : s = 60192 : 594 = 101\tfrac{1}{3}$; $\alpha = I : (s-a) = 60192 : 176 = 342$; $\beta = I : (s-b) = 60192 : 304 = 198$; $\gamma = I : (s-c) = 60192 : 114 = 528$.

XXVII. STELLING. *Fig.* 188.

§. 437. *De regthoek, onder twee zijden (AC en BC) eens driehoeks (ABC), is gelijk aan den regthoek, onder de loodlijn (CE), welke, uit het hoekpunt van den hoek (C), tegen over de derde zijde (AB) staande, op dezelve valt, en de middellijn (CD) van den omgeschreven cirkel. Dat is:* $AC \times BC = CE \times CD$.

BETOOG. Men trekke de koorde BD; en lette op de driehoeken, AEC en DBC. In dezelve zijn de hoeken A en D, op denzelfden boog BC staande, (*III. Gev. XX. Stell.*) gelijk; en, omdat CD eene middellijn is, staat de hoek DBC in een halven cirkel, en is derhalve (*V. Gev. XX. Stell.*) regt en gelijk aan den hoek AEC; de driehoe-

hoeken, *AEC* en *DBC*, zijn dan (*III. Bep. IV. B.*) gelijkvormig, en daarom is (*VIII. Stell. IV. B.*) $AC : CD = CE : BC$, en eindelijk (*V. Stell. IV. B.*) $AC \times BC = CD \times CE$.

§. 438. Bijvoegsel. *Fig.* 188. Uit deze betoogde vergelijking volgt onmiddellijk, $CD = AC \times BC : CE$. Indien men den teller en noemer van deze breuk met *AB* vermenigvuldigt; dan verkrijgt men $CD = AB \times BC \times AC : AB \times CE$; maar $AB \times CE$ is gelijk aan tweemaal den inhoud van den driehoek *ABC*; *derhalve is de middellijn van den cirkel, die om eenen driehoek beschreven is, gelijk aan het product van de drie zijden des driehoeks, gedeeld door den dubbelen inhoud.*

Men stelle den straal van den omgeschreven cirkel $= R$, den inhoud $= I$, $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$; dan is

$$R = abc : 4I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (P)$$

door welke formule, wanneer de zijden eens driehoeks gegeven zijn, de straal des omgeschreven cirkels zal kunnen berekend worden.

Voorbeeld. *Zij* $a = 418$, $b = 290$, $c = 480$; dan is $I = 60192$; en $R = 418 \times 290 \times 480 : 4 \times 60\,92 = 241\frac{1}{3}$.

In het bijvoegsel op de voorgaande stelling is gevonden $I = sr$; de vergelijking (*P*) wordt derhalve: $Rr = abc : 4s$.

Bijgevoegde Stelling.

§. 439. *Indien R den straal eens cirkels verbeeldt, die om eenigen driehoek ABC beschreven, r de straal des cirkels, die in denzelven beschreven is; α, β en γ de stralen der cirkels, die de zijden des driehoeks, naar buiten aanraken; dan is de afstand van de middelpunten der in- en omgeschreven cirkels* $R^2 - Rr$; *en de afstand van de middelpunten der cirkels, die R en α tot stralen hebben, gelijk aan* $R^2 + R\alpha$.

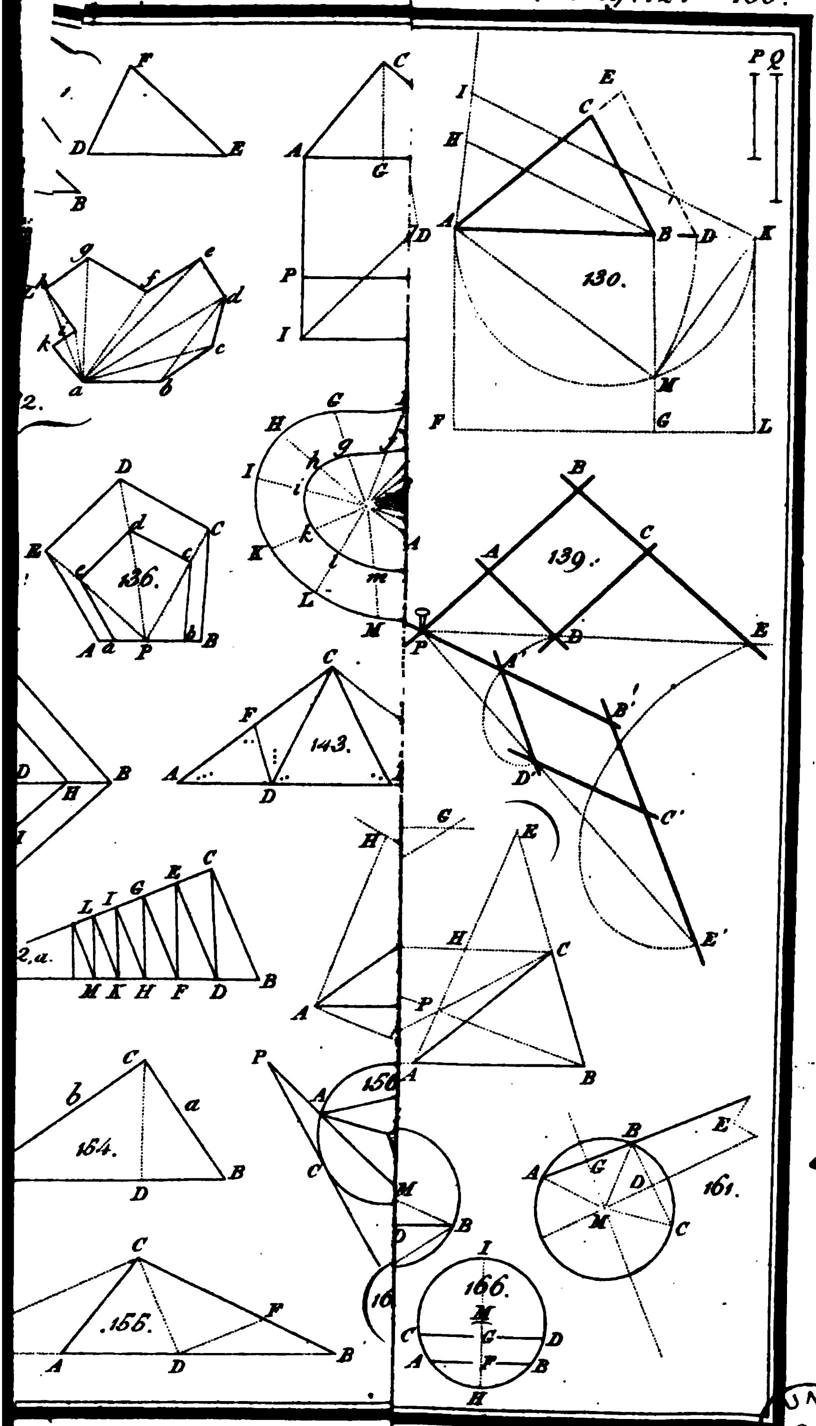
Het betoog van deze stelling te zoeken, zij aan de vlijtige oefening van den Lezer overgelaten, die hetzelve uit de voorgaande stellingen ligtelijk zal kunnen afleiden.

XXVIII. Stelling. *Fig.* 189.

§ 440. *De regthoek, onder de hoekpuntslijnen (AC en BD) van eenen vierhoek, welke in eenen cirkel beschreven is, is gelijk aan de som der regthoeken, onder deszelfs overstaande zijden. Dat is,* $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. *En de twee hoekpuntslijnen, (AC en BD) van dienzelfden vierhoek staan tot elkander, in dezelfde reden, als de sommen van de regthoeken der zijden, welke aan de uiteinden dezer hoekpuntslijnen zamenkomen. Dat is:*

$$AC : BD = AD \times AB + BC \times CD : AB \times BC + AD \times CD.$$

Be-



L. Schwidhenk sculp.

BETOOG *van het eerste.* Neem den *boog* AP = den *boog* BC, en trek de koorden DP en AP. Omdat dan de bogen AP en BC gelijk zijn, zal (*VIII. Ax.*) ook *boog* APB = *boog* PBC zijn; derhalve is (*III. Gev. XX. Stell.*) *hoek* ADE = *hoek* BDC, en *hoek* DAE of DAC = *hoek* DBC; de driehoeken AED en BCD zijn dan (*III Bep. IV. B.*) gelijkvormig. Om dezelfde reden, is *hoek* ADB = *hoek* EDC, en *hoek* ABD = *hoek* ECD, en daarom zijn ook (*III. Bep. IV. B.*) de driehoeken ABD en ECD gelijkvormig; dienvolgens is (*VIII Stell. IV. B.*)

$AD : AE = BD : BC$, uit de *drieh.* ADE en BCD

$CD : CE = BD : AB$, uit de *drieh.* ABD en ECD

derhalve is $AE \times BD = AD \times BC$
en $CE \times BD = AB \times CD$ } *V. Stell. V. B.*

Telt men nu deze twee laatste vergelijkingen bij elkander; dan zal men, zie *I. Hulpst. III. B.* vinden:

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$

BETOOG *van het tweede.* Behalve de gelijkvormige driehoeken, ABD en BCD, zijn ook nog de driehoeken, APE en DBA gelijkvormig; want (*III Gev. XX. Stell.*) *hoek* APE is = *hoek* ABD; en, omdat *boog* AB = *boog* PC is, is *hoek* PAE = *hoek* BDA. Wij hebben dan (*VIII en V. Stell. IV. B.*) en, omdat (*constr. en V. Stell.*) de koorde AP = de *koorde* BC is,

$$\left\{\begin{array}{l} AD : DE = BD : DC \\ BC : PE = BD : AB \end{array}\right\} \text{; derhalve } \left\{\begin{array}{l} DE \times BD = AD \times DC \\ PE \times BD = BC \times AB \end{array}\right\}$$

Deze vergelijkingen optellende, en onder het oog houdende, dat $DE \times BD + PE \times BD$ (*I. Hulpst. III. B.*) = $BD \times PD$ is; dan zal men verkrijgen:

$$BD \times DP = AD \times CD + AB \times BC.$$

Neemt men verder den *boog* DQ = den *boog* AP = den *boog* BC en trekt men de koorden AQ en DQ; dan zal men, op dezelfde wijze, met behulp der gelijkvormige driehoeken, AFD en ABC; DQF en ACD, bewijzen: dat

$$AC \times AQ = AD \times AB + BC \times CD$$

zal zijn. Men zal dan (*I. Gev. IV. Stell. II. B.*) mogen stellen:

$$BD \times DP : AC \times AQ = AD \times DC + AB \times BC : AD \times AB + BC \times CD$$

maar, omdat de bogen AP en DQ gelijk, en bijgevolg de bogen ADQ en DAP insgelijks gelijk zijn, en daarom (*V. Stell.*) de *koorde* AQ = de *koorde* DP is, zoo zal $BD \times DP : AC \times AQ = BD : AC$ zijn; en daarom zal men (*I. Stell. II. B.*) hebben:

$$BD : AC = AD \times DC + AB \times BC : AD \times AB + BC \times AD$$

§. 141. I BIJVOEGSEL. *Fig.* 189. Wanneer de zijden van eenen vierhoek, welke in eenen cirkel beschreven is, gegeven zijn; dan zal men, door het betoogde der twee voorgaande stellingen, deszelfs inhoud en de middellijn des cirkels, waarin hij beschreven is, onder anderen, aldus vinden kunnen. Stel $AD = a$; $DC = b$; $CB = c$, en $AB = d$; $AC = x$, en $BD = y$; dan heeft men, volgens het betoogde, in de

voorgaande ſtelling, de twee vergelijkingen:

$$xy = ac + bd; \text{ en } \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$$

Uit deze twee vergelijkingen, zal men vinden:

$$x = \sqrt{\left\{\frac{(ac+bd).(ad+bc)}{ab+cd}\right\}}; \text{ en } y = \sqrt{\left\{\frac{(ac+bd).(ab+cd)}{ad+bc}\right\}}$$

Maar, volgens de *XXVII. Stelling*, en het bijvoegſel op de *XVIII* en *XIX. Stellingen* van het derde *Boek*, wordt de middellijn des cirkels, beſchreven om den driehoek, welks zijden a, b en x zijn, (die middellijn M noemende,) uitgedrukt door

$$M = 2\sqrt{\left\{\frac{a^2b^2x^2}{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - x^2)^2}\right\}}$$

Wanneer men nu, in deze vergelijking, voor x, de waarde ſtelt, welke zoo even voor dezelve gevonden is; dan zal men, na behoorlijke herleiding, voor die middellijn, verkrijgen:

$$M = 2\sqrt{\left\{\frac{(ac+bd).(ad+bc).(ab+cd)}{(a+b+c-d).(a+b+d-c).(a+c+d-b).(b+c+d-a)}\right\}}$$

Nu is de inhoud van den driehoek $ADC = \frac{1}{4}abx : M$, en die van den driehoek $ABC = \frac{1}{4}cdx : M$; de inhoud van den vierhoek $ABCD$ is derhalve gelijk aan $\frac{1}{4}(ab + cd)x : M$. Wanneer men dan eindelijk, in deze laatſte uitdrukking, voor x en M, de waarden ſtelt, welke boven daarvoor gevonden zijn; dan verkrijgt men (den inhoud des vierhoeks $= I$ ſtellende,)

$$I = \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d).(a+b-c+d).(a-b+c+d).(b+c+d-a)]}$$

en ſtellende kortheidshalve, $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d = s$; dan verandert deze formule in de volgende:

$$I = \sqrt{[(s-a).(s-b).(s-c).(s-d)]}$$

dat is: *de inhoud van eenen vierhoek, in eenen cirkel beſchreven, is gelijk aan den vierkantswortel uit het gedurige product der vier verſchillen, die overblijven, wanneer men van de halve ſom der zijden elke zijde, in het bijzonder, aftrekt.* Stelt men $a = 14$, $b = 27$, $c = 38$ en $d = 47$; dan vindt men: $I = 840$ vierkante éénheden, en $M = \frac{1}{120}\sqrt{410197561} = 48, 222$, *enz.*

Wanneer men, in de vergelijking, welke de waarde van den inhoud des vierhoeks, die in den cirkel beſchreven is, uitdrukt, (en alleen ter berekening van den inhoud van eenen vierhoek dienen kan, wanneer hij in eenen cirkel beſchreven kan worden,) ééne der zijden, bij voorbeeld, de zijde $d = 0$ ſtelt; dan verandert die vierhoek in eenen driehoek, en dan is $s - d = s$, en de gevondene waarde voor I verandert dan in die, welke in het *Bijvoegſel op de XVIII en XIX Stellingen van het III. Boek* gevonden is. Voorts wordt, in dezelfde onderſtelling, de teller der breuk, welke de waarde van M geeft, $ac \times bc \times ab = a^2b^2c^2$, en de vergelijking voor de waarde van M wordt derhalve de vergelijking voor de middellijn of den ſtraal des cirkel, welke om den driehoek beſchreven is. Zie *Gevolg XXVII. Stelling.*

Het

Het is alleen voor den vierhoek, in den cirkel beschreven, dat men uit de vier gegevene zijden tot den inhoud kan besluiten. Voor elken anderen veelhoek, om welken geen cirkel kan beschreven worden, moet, behalve de vier zijden, nog ééne omstandigheid meer bekend zijn, om den inhoud te kunnen vinden.

§. 442. II. BIJVOEGSEL. *Fig.* 190. Laat, met eenen straal MB, gelijk aan de éénheid, een cirkel worden beschreven. Neem, op den omtrek van dien cirkel, twee bogen AB en BC, en trek (na de middellijn BD getrokken te hebben,) de koorden AB, BC, AC, AD en CD; dan is, volgens het bewezene:

$$BD \times AC = AB \times CD + BC \times AD$$
$$\text{of } 2AC = AB \times CD + BC \times AD$$

en, wanneer men deze vergelijking door vier deelt,

$$\tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}AB \times \tfrac{1}{2}CD + \tfrac{1}{2}BC \times \tfrac{1}{2}AD.$$

Men stelle *boog* $AB = 2a$ en *boog* $BC = 2b$; dan is *boog* $ABC = 2a + 2b$, *boog* $AD = 180° - 2a$ en *boog* $DC = 180° - 2b$; en dus wordt de laatste vergelijking:

$$\tfrac{1}{2}\,koorde\,(2a+2b) = \tfrac{1}{2}\,koorde\,2a \times \tfrac{1}{2}\,koorde\,(180° - 2b) \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,koorde\,2b \times \tfrac{1}{2}\,koorde\,(180° - 2a)$$

Men late MFE loodregt op AB vallen; dan is (*VIII. Stell.*) $AF = BF$, en *boog* $BE =$ *boog* $AE = a$, $BF = sin.\,a$; derhalve $\tfrac{1}{2}$ *koorde* $2a = sin.\,a$. Om dezelfde reden, is $\tfrac{1}{2}$ *koorde* $2b = sin.\,b$; $\tfrac{1}{2}$ *koorde* $(180° - 2b) = sin.\,(90° - b) = cos.\,b$ en $\tfrac{1}{2}$ *koorde* $(180° - 2a) = sin.\,(90° - a) = cos.\,a$ (zie §. 353, *en verv IV. B.*) de vergelijking, die wij zoo even hebben gevonden, wordt derhalve:

$$sin.\,(a+b) = sin.\,a \times cos.\,b + sin.\,b \times cos.\,a$$

welke de vergelijking is, die wij in de *Aanmerking* op de *XXIII. Stell. IV. B.* hebben bijgebragt Men zal, op dezelfde wijze, gemakkelijk vinden:

$$sin.\,(a-b) = sin.\,a \times cos.\,b - sin.\,b \times cos.\,a$$

mits, dat men, in de figuur, het punt C tusschen de punten A en B brengt. Wij laten dit aan den Lezer over. Zie verder *II. Deel XI. B.*

§. 443. III. BIJVOEGSEL. *Fig.* 191. Zij nog, met $MA = 1$, een cirkel beschreven, wiens middellijn AMN derhalve $= 2$ is. Men neme, op den omtrek, gelijke bogen $AB = BC = CD = DE = EF = FG =$ *enz*; en trekke den straal BM en de koorden, die in de figuur te zien zijn; dan is, in den vierhoek $AEFG$, volgens het betoogde:

$$AF \times GE = AG \times EF + AE \times GF$$

dat is, omdat, volgens de *IV. Stelling*, gelijke bogen gelijke koorden hebben, en dus $EF = FG$ is;

$$AF \times GE = (AG + AE) \times GF \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

De driehoeken GEF en BMN zijn klaarblijkelijk gelijkvormig; derhalve is (*VIII. Stell. IV. B.*) $GE : GF = BN : BM = BN : 1$; dus $GE = GF \times BN$; de vergelijking (a) wordt derhalve:

$$AF \times GF \times BN = (AG + AE) \times GF$$

Indien men nu die vergelijking door GF deelt; dan verkrijgt men:

$$AF \times BN = AG + AE$$

$$\text{of } AG = AF \times BN - AE \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Eindelijk zijn nog de driehoeken *MBN* en *ABC* gelijkvormig; en daarom is (*VIII. Stell. IV. B.*)

$$MB : BN = AB : AC, \text{ of } 1 : BN = AB : AC$$

$$\text{gevolgelijk is } AC = AB \times BN, \text{ (V. Stell. IV. B.)} \quad \ldots \quad (B)$$

Onderstellen wij nu, dat $AB = k$ en $BN = \sqrt{(4-k^2)} = m$ gegeven zijn; dan zal men, door de formule (B), de waarde van de koorde $AC = mk$, en door de formule (A) de waarde der koorden AD, AE, AF, AG, *enz.* vinden; want, stellende boog $AB = a$; zoo is

$$\text{koorde } a = k$$
$$\text{koorde } 2a = km$$
$$\text{koorde } 3a = k\,(m^2 - 1)$$
$$\text{koorde } 4a = k\,(m^3 - 2m)$$
$$\text{koorde } 5a = k\,(m^4 - 3m^2 + 1), \text{ enz.}$$

en, in het algemeen, zal men vinden:

$$\text{koorde } na = k \left\{ m^{n-1} - \frac{n-2}{1} m^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} m^{n-5} \ldots \right.$$
$$- \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3} m^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} m^{n-9} \ldots$$
$$\left. - \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} m^{n-11} + \text{enz.} \right\} \quad \ldots \quad (P)$$

zijnde deze eene algemeene vergelijking, van welke wij, in het volgende *Boek* (*Aanmerk. VI. Stell.*) gebruik zullen maken.

ZES-

ZESDE BOEK.

Over de regelmatige Veelhoeken; bijzonderlijk den regelmatigen drie, vier, vijf, zes, tienhoek, en de veelhoeken, die van dezelve afhangen. Wat men door de Quadratuur *van den cirkel verstaat; hoe men dezelve door de theorie van de regelmatige veelhoeken kan uitvinden. Eenige Leerstellingen over de* maxima *en* mimima *en over de* isoperimetrische *figuren.*

---

§. 444. I. BEPALING. Een veelhoek, die gelijke zijden en gelijke hoeken heeft, wordt een *regelmatige veelhoek* genoemd.

Ophelder ing. De mogelijkheid van het bestaan der regelmatige veelhoeken, *onder welke de gelijkzijdige driehoeken en vierkanten*, die wij reeds kennen, *behooren*, blijkt uit ééne der twee volgende constructien. 1°. Men make een zeer stompe *hoek ABC*, neme $BC = AB$; make *hoek* $BCD =$ *hoek* ABC en $CD = BC$; wederom make men *hoek* $CDE =$ *hoek* BCD en $CD = BC$, *enz.* 2°. Of men verbeelde zich, dat den omtrek eens cirkels in *n* gelijke bogen, *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *enz.* verdeeld zij; dan zijn (*V. Stell. V. B.*) de koorden dezer bogen gelijk, en de hoeken *ABC*, *BCD*, *DEF*, *enz.* (*III. Gev. XX. Stell. V. B.*) insgelijks gelijk.

I. STELLING. *Fig.* 192.

§. 445. *In, en om, elken regelmatigen veelhoek, kan een cirkel beschreven worden, welke beide hetzelfde middelpunt hebben.*

BETOOG *van het eerste.* Onderstel, dat, door drie aan elkander gelegene hoekpunten, *A*, *B* en *C*, een cirkel beschreven worde, welks middelpunt in *M* zij, (hetgeen volgens de *X. Stelling* van het *V. Boek*, altijd geschieden kan). Laten dan, van het middelpunt *M*, tot al de hoekpunten, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* en *G*, de lijnen, *AM*, *BM*, *CM*, *enz.* worden getrokken; en nog, uit hetzelfde middelpunt *M*, de lijn *MP*, loodregt op de zijde *BC*. Wanneer men dan de vierhoekige figuur *ABPM*, om de lijn *MP*, laat omdraaijen, tot dat dezelve op de vierhoekige figuur *DCPM* valt; dan zal vooreerst, omdat *MP* loodregt op *BC* staat, *hoek* $CPM =$ *hoek* BPM, en (*VII. Stell. V. B.*) $BP = CP$ is, de lijn *BP* langs de lijn *CP*, en het punt *B* in het punt *C* vallen. Voorts, omdat, (*onderst.*) wegens den aard des gelijkvormigen veelhoeks, *hoek* $ABP =$ *hoek* DCP, $AB = CD$ is, zoo zal *BA* langs *CD*, en het punt *A* in het punt *D* vallen: de uiteinden der lijnen *MA* en *MD* vallen alzoo in elkander, en (*XVIII. Bep. I. B.*) de lijn *AM* is ge-

gelijk aan de lijn *D M*. Omdat nu alle stralen van eenen cirkel gelijk zijn, *zoo zal de cirkel, welke door de hoekpunten A, B en C gaat, ook te gelijk door het hoekpunt D loopen.* Op dezelfde wijze, zal, wanneer men de loodlijn *M Q* trekt, bewezen worden: dat dezelfde cirkel, welke door de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D* loopt, ook tevens door de hoekpunten *E*, *F*, *G*, *enz.* zal gaan; en het is derhalve daardoor ten klaarste bewezen: dat al de hoekpunten van eenen veelhoek, die gelijke zijden en gelijke hoeken heeft, in den omtrek van denzelfden cirkel liggen, en dat men diensvolgens (*VIII. Bep. V. B.*), om elken regelmatigen veelhoek, altijd eenen cirkel beschrijven kan.

Betoog *van het tweede.* Wanneer men dan, om den veelhoek, eenen cirkel beschreven heeft; dan zijn de zijden van dien veelhoek koorden van de bogen, waarin de hoekpunten van dien veelhoek den omtrek des omgeschrevenen cirkels verdeelen. Deze koorden zijn nu, wegens de regelmatigheid des veelhoeks, gelijk; en zij hebben derhalve (*XI St. V. B.*) gelijke afstanden van het middelpunt *M* des omgeschrevenen cirkels: dat is, de loodlijnen *M P*, *M Q*, *M R*, *enz.* zijn even lang. Wanneer men derhalve, uit het middelpunt des omgeschrevenen cirkels, als middelpunt, met ééne dezer loodlijnen, *M P* bij voorbeeld, als straal, eenen cirkel beschrijft; dan zal die cirkel door de uiteinden *P*, *Q*, *R*, *S*, van al die loodlijnen gaan, en de zijden des veelhoeks *B C*, *C D*, *E F*, *enz.* op welke zij loodregt vallen, (*XII. Stell. V. B.*) aanraken; die cirkel zal dan (*VIII Bep. V. B.*) in den veelhoek beschreven zijn, en met den cirkel, die er om beschreven is, hetzelfde middelpunt *M* gemeen hebben.

§. 446. Leering. *Fig.* 192. Men leert uit dit betoog: *dat een regelmatige veelhoek*, *A B C D E F G A*, *kan begrepen worden, zamengesteld te zijn, uit de vereeniging van even zoo veel gelijke- en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken*, *A B M*, *B C M*, *C D M*, *D E M*, *E F M*, *F G M*, *G A M*, *als de veelhoek zijden of hoeken heeft; welke gelijkbeenige driehoeken alle met derzelver toppunten, in één punt M, aan elkander sluiten;* welk punt het middelpunt van den regelmatigen veelhoek genoemd wordt, *en tevens het gemeene middelpunt is van de cirkels, welke, om en in dien veelhoek, beschreven zijn.*

§. 447. II. Bepaling. *Fig.* 192. Elk één dezer gelijkbeenige driehoeken, *A B M*, *B C M*, *enz.* wordt de *middelpuntsdriehoek* van den veelhoek genoemd; en de tophoek *A M B* van dien driehoek draagt den naam van *centerhoek*, of *middelpuntshoek* van den veelhoek; terwijl elk der hoeken van den veelhoek, als, bij voorbeeld, *A B C*, *B C D*, *enz*, door de benaming van *polygoonshoek* des veelhoeks onderscheiden wordt. De loodlijn *M P*, welke, uit het

het middelpunt *M*, op ééne der zijden valt, noemden de oude Meetkunstenaars *apothema*.

§. 448. I. Gevolg. Omdat het aantal der middelpunsdriehoeken, uit welke een regelmatige veelhoek bestaat, aan het aantal zijner zijden, of hoeken, gelijk is, en de som der middelpuntshoeken van elken veelhoek (*II. Gev. VI. Stell. I. B.*) gelijk is aan vier regte hoeken; *zoo zal, indien n het aantal der zijden of hoeken beteekent, de middelpuntshoek van eenen regelmatigen veelhoek door* $4\,R : n$ *worden voorgesteld.*

§. 449. II. Gevolg. *Fig.* 192. Omdat al de middelpuntsdriehoeken, *ABM*, *BCM*, *enz.* van eenen regelmatigen veelhoek gelijk- en gelijkvormig zijn, en (*IV. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) het supplement van den tophoek eens gelijkbeenigen driehoeks gelijk is aan het dubbel van éénen der hoeken aan de basis, *daarom moet de centerhoek van eenen regelmatigen veelhoek gelijk zijn aan het supplement van deszelfs polygoonshoek; en de polygoonshoek, omgekeerd, het supplement van den centerhoek.*

§. 450. III. Gevolg. Om derhalve de center- en polygoonshoeken van eenen regelmatigen veelhoek, die een gegeven aantal zijden of hoeken heeft, te vinden, *zoo deele men* 4 *R*, *of* 360°, *door het getal der zijden; dan verkrijgt men den centerhoek. En, dezen centerhoek van* 2 *R*, *of* 180°, *aftrekkende, zoo zal het verschil gelijk aan den polygoonshoek zijn.* Aldus is:

In eenen regelmatigen	*de centerhoek*	*de polygoonshoek*
driehoek	$1\frac{1}{3}\,R = 120°$	$\frac{2}{3}\,R = 60°$
vierhoek	$R = 90°$	$R = 90°$
vijfhoek	$\frac{4}{5}\,R = 72°$	$1\frac{1}{5}\,R = 108°$
zeshoek	$\frac{2}{3}\,R = 60°$	$1\frac{1}{3}\,R = 120°$
n-hoek	$\frac{2}{n} \times 2\,R$	$\frac{n-2}{n} \times 2\,R$

§. 451. IV. Gevolg. *Fig.* 192. Nog volgt uit het bewezene: *dat de lijnen, welke twee polygoonshoeken van eenen veelhoek midden door deelen, zoowel als de loodlijnen, welke, uit het midden van twee zijden, loodregt op dezelve worden opgerigt, elkander in het gemeene middelpunt van den veelhoek en van de in en omgeschrevene cirkels snijden.* Om die reden, kan dan gemakkelijk het middelpunt eens veelhoeks gevonden, en eenen cirkel, in of om denzelven, beschreven worden.

II. STELLING. *Fig.* 193.

§. 452. *Het vierkant (of de regelmatige vierhoek), in eenen cirkel beschreven, is gelijk aan tweemaal het vierkant van deszelfs straal; en het vierkant, om dien cirkel beschreven, is gelijk aan tweemaal het vierkant in denzelven staande.*

BETOOG *van het eerste.* Wanneer men, in eenen cirkel, twee middellijnen AC en BD trekt, welke elkander regthoekig snijden, en daarna de uiteinden dezer middellijnen, door de koorden AB, BC, CD en AD, vereenigt; dan zijn (III. *Gev.* XVII. *Stell.* V. *B.*) de bogen AB, BC, CD en AD, en bijgevolg (V. *Stell.* V. *B.*) ook de koorden, welke deze bogen onderspannen, onderling gelijk. *De vierhoek ABCD is dan een regelmatige vierhoek*, welke, door de middellijnen des cirkels, in vier gelijke middelpuntshoeken, AMB, BMC, CMD en AMD, verdeeld is; terwijl al deszelfs hoeken regt zijn. Nu is, in den regthoekigen driehoek, ABM (XVI. *Stell.* III. *B.*) $AB^2 = AM^2 + BM^2$; of, omdat $AM = BM$ is, $AB^2 = 2AM^2$, en daarom zal (V. *Stell.* II. *B.*) $AB^2 : AM^2 = 2 : 1$ zijn.

BETOOG *van het tweede.* Men trekke, door de hoekpunten A, B, C en D van het vierkant, in den cirkel beschreven, lijnen, die loodregt op de middellijnen AC en BD staan; dan zijn deze (X. *Stell.* V. *B.*) raaklijnen van den cirkel; de vierhoek $EFGH$ is dan (VIII. *Bep.* V. *B.*) om den cirkel beschreven. *Die vierhoek is nu een vierkant;* want, volgens de constructie, staan EF en GH loodregt op AC, FG en EH loodregt op BD; de overstaande zijden van dien vierhoek zijn dan (XXII. *Stell.* I. *B.*) evenwijdig, de hoeken E, F, G, H zijn (I. *Stell.* III. *B.*) regt en de zijden even lang; die vierhoek is dan (V *Bep.* III. *B.*) een vierkant, om den cirkel beschreven. Dit vierkant is nu door de middellijn AC en BD in vier gelijke vierkanten verdeeld; derhalve is $EFGH = 4AFBM = 2ABCD$, of $EF^2 = 2AB^2$.

§. 453. GEVOLG *De zijde van den regelmatigen vierhoek, in den cirkel beschreven, staat tot den straal van denzelven, als de vierkantswortel uit twee tot de éénheid.* Die zijde is dus, met betrekking tot den straal, onmeetbaar; zij is gelijk aan $\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095$ *enz.*

III. (IV.) STELLING. *Fig.* 194. (*).

§. 454. *Elke zijde van een regelmatigen zeshoek is gelijk aan den straal des cirkels, waarin hij beschreven is.*

BE-

(*) De nommers tusschen ( ) staande, zijn de stellingen, in de twee eerste drukken, voorkomende.

Betoog. Volgens het III. *Gev.* I *Stelling*, is de middelpuntshoek van eenen regelmatigen zeshoek gelijk twee-derde van éénen regten hoek: de regelmatige zeshoek bestaat derhalve uit de vereeniging van zes gelijkzijdige driehoeken, *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM*, *EFM* en *AFM*, welke, bij hetzelfde hoekpunt *M*, aan elkander fluiten: dit punt *M* is nu het middelpunt van den zeshoeks, en tevens het middelpunt van den omgeschrevenen cirkel, wiens straal *AM* bijgevolg aan de zijde van dien zeshoek gelijk is.

§. 455. I. Gevolg. *Fig.* 194. Wanneer men derhalve, uit eenig punt *B*, in den omtrek eens cirkels, met deszelfs straal *BM*, eenen cirkelboog beschrijft, welke den omtrek in de punten *A* en *C* doorsnijdt; en voorts, door de punten *B*, *A* en *C*, de middellijnen, *BE*, *AD* en *CF* trekt; *dan zal de omtrek des cirkels, door die constructie, in zes gelijke deelen verdeeld zijn. En, wanneer men nu de uiteinden dezer deelen door koorden vereenigt; dan zal er een regelmatige zeshoek in den cirkel beschreven zijn.*

§. 456. II. Gevolg. *Fig.* 194. *Door diezelfde constructie, zal ook een regelmatige of gelijkzijdige driehoek in den cirkel ontstaan.* Want, nadat men, uit eenig punt *B*, met den straal des cirkels, den cirkelboog *AMC* beschreven heeft, zal men slechts de middellijn *BE* behoeven te trekken, en de punten *A*, *C* en *E*, door regte lijnen, te vereenigen, om den gelijkzijdigen driehoek *ACE*, in dien cirkel beschreven, te verkrijgen.

§. 457. III. Gevolg. *Fig.* 194. Omdat de *bogen* *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* en *FA*, gelijk zijn, zoo zullen (XIV. *Stell.* V. *B.*) *CF* aan *AB* en *DE*; *AD* aan *BC* en *EF*; *BE* aan *CD* en *AF* evenwijdig zijn. *De zeshoek ABCDEF, kan dan* (I. Bep III. B.) *begrepen worden uit de zamenvoeging der parallelogrammen, ABCM, CMED en AMEF, te ontstaan.* Omdat nu (*Gev.* I. *Stell.* III *B.*) de hoekpuntslijnen van een parallelogram elkander midden door snijden, zoo is $MG = BG$; $MH = HD$; $MI = IF$; $AG = GC$; $CH = HE$; $AI = IE$; ook is (I. *Stell.* III. *B.*) *driehoek* ABC = *driehoek* ACM; *driehoek* CDE = *driehoek* CME; *driehoek* AFE = *driehoek* AME. Men leert derhalve hieruit:

1°. *Dat de loodlijn, of apothema, van een regelmatigen driehoek gelijk is aan de helft van den straal des cirkels, waarin hij beschreven is.*

2°. *Dat, wanneer een regelmatige driehoek en een regelmatige zeshoek in denzelfden cirkel beschreven zijn, de inhoud van den zeshoek juist gelijk is aan tweemaal den inhoud des driehoeks.*

§. 458. IV. Gevolg. *Fig.* 194. Omdat de driehoek *AMG* (IX. *Stell.* V. *B.*) regthoekig is, zoo zal (XVI. *Stell.* III. *B.*) $AM^2 = AG^2 + MG^2$ en $AG^2 = AM^2 - MG^2 = AM^2 - \frac{1}{4} AM^2 = \frac{3}{4} AM^2$ zijn; daarom zal

$AG = AM \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} AM\sqrt{3}$, en $2 AG = AC = AM \times \sqrt{3}$, en derhalve (V. *Stell.* II. *B.*) $AC : AM = \sqrt{3} : 1$; dat is:

De zijde van den regelmatigen driehoek staat tot den straal van den cirkel, waarin hij beschreven is, als de vierkants-wortel uit drie tot de éénheid; die zijde is dus $\sqrt{3} = 1,73205\ 08075\ 68877$ *enz.*

§. 459. V. Gevolg. *Fig.* 194. De loodlijn EG is gelijk aan $1\frac{1}{2}\ EM$, omdat $MG = \frac{1}{2} EM$ (*bew.*) is; gevolgelijk is (*Gev.* VIII. *Stell.* III. *B.*) de inhoud van den driehoek $ACE = \frac{1}{2} AC \times EG = \frac{1}{2} \times EM\sqrt{3}$, vermenigvuldigd met $1\frac{1}{2} EM = \frac{3}{4} EM^2 \times \sqrt{3}$. *De inhoud van den gelijkzijdigen driehoek staat dan tot het vierkant van den straal des omgeschrevenen cirkels, gelijk driemaal de vierkants-wortel uit drie, tot vier.* Indien men dan de straal des cirkels gelijk aan de éénheid stelt; dan zal, in vierkante éénheden, de inhoud van den regelmatigen driehoek $= 1,29903\ 81056\ 76658$, *enz.* zijn. — En, hieruit is dan ook de betrekking van den inhoud des regelmatigen zeshoek tot het vierkant van de straal des omgeschrevenen cirkels, of deszelfs zijde, bekend; zijnde deze, als $3\sqrt{3}$ tot 2.

§. 460. VI. Gevolg. Omdat de polygoonshoek van eenen regelmatigen zeshoek gelijk aan 120°, en derhalve een evenmatig deel van vier regte hoeken is; *zoo zullen gelijke regelmatige zeshoeken aan elkander gesloten kunnen worden, zonder eenige ruimte tusschen dezelve open te laten.* Deze eigenschap heeft de zeshoek met den regelmatigen driehoek en het vierkant gemeen: *doch in geenen anderen regelmatigen veelhoek wordt deze eigenschap gevonden.*

§. 461. VII. Gevolg. *Fig.* 194. Indien men, door de punten A, C en E, raaklijnen trekt; dan is het ligtelijk te bewijzen: dat die raaklijnen den regelmatigen driehoek PQR, om den cirkel beschreven, zullen bepalen; en, *dat de inhoud van den regelmatigen driehoek, om den cirkel beschreven, gelijk is aan viermaal den inhoud van den regelmatigen driehoek, die in denzelven beschreven is.*

§. 462. III. Bepaling. Wanneer men eene regte lijn zoodanig in twee deelen deelt, dat de geheele lijn tot het grootste deel, in dezelfde reden staat, als het grootste tot het kleinste deel; dan dan wordt die lijn gezegd, in de *uiterste en middelste reden* verdeeld te zijn.

I. Hulpstelling. *Fig.* 195.

§. 463. *Wanneer men, op het einde van eene lijn AB, eene loodlijn BD, op dezelve oprigt, welker lengte gelijk is aan de helft dezer lijn AB; en, op de lijn AD, het gedeelte DE gelijk maakt*

aan

aan BD of AC, of aan de helft van de lijn AB; en eindelijk AF gelijk neemt aan AE; dan zal de lijn AB, in het punt F, in de uiterste en middelste reden verdeeld zijn.

BETOOG. Vooreerst volgt, uit de constructie,

$$AD^2 = AB^2 + BD^2, \text{ XVI. Stell. III. B.}$$

en $AD^2 = AE^2 + DE^2 + 2AE \times DE$, I. *Hulpst.* III. *B.*

derhalve $AB^2 + BD^2 = AE^2 + DE^2 + 2AE \times DE$, V. *Ax.*

Omdat nu $BD = DE$ is, zoo zal ook $BD^2 = DE^2$ zijn. Wanneer men nu deze gelijkheid van de voorgaande aftrekt; zoo zal er overblijven:

$$AB^2 = AE^2 + 2AE \times DE, \text{ IX. Ax.}$$

Maar nu is, volgens de constructie, $AE = AF$; dus $AE^2 = AF^2$, en $2AE \times DE = AE \times 2DE = AF \times AB$; de laatste vergelijking wordt derhalve:

$$AB^2 = AF^2 + AF \times AB$$

maar $AB^2 = AB \times AF + AB \times BF$, I. *Hulpst.* III. *B.*

gevolgelijk is $AF^2 + AF \times AB = AB \times AF + AB \times BF$, V. *Ax.*

trek hier af $AB \times AF = AB \times AF$

dan blijft er over $AF^2 = AB \times BF$, IX. *Ax.*

§. 464. BIJVOEGSEL. *Fig.* 195. Wanneer men de lijn AB, als de éénheid aanneemt; dan zal men de waarde van de deelen AF en BF, door berekening, gemakkelijk kunnen vinden. Want, omdat $BD = \frac{1}{2} AB$ is, zoo zal $BD = \frac{1}{2}$ zijn. Nu is (XVI. *Stell.* III. *B.*) $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$; en $AD = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; daarom is het grootste stuk AF, $= AE = AD - DE = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$; $= 0, 61803\ 39887\ 49895$ enz. en het kleinste stuk $BF = AB - AF = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$; $= 0, 38196\ 60112\ 50105$ enz. *De deelen eener lijn, welke in de uiterste en middelste reden verdeeld is, zijn derhalve, als van den vierkantswortel uit het getal* vijf *afhangende, met betrekking tot de geheele lijn, onmeetbaar.*

IV. (V). STELLING. *Fig.* 196.

§. 465. *Wanneer men den straal (AM) eens cirkels in de uiterste en middelste reden deelt; dan is het grootste deel (LM) gelijk aan de zijde van den regelmatigen tienhoek, welke in dien cirkel kan beschreven worden.*

BETOOG. Men make de koorde AB gelijk aan het grootste stuk LM van den verdeelden straal, en trekke de lijnen MB en BL; dan is (*onderst.*) $AL : LM = LM : AM$; of, omdat $AB = LM$ is, $AL : AB = AB : AM$; de driehoeken ABM en ALB, welke den gemeenschappelijken hoek A hebben, zijn derhalve (X. *Stell.* IV. *B.*) gelijkvormig; en, om die reden, is dan ook (VIII. *Stell.* IV. *B.*) $AM : BM = AB : BL$: maar nu is (IX. *Bep. Inleid.* I. *B.*) $AM = BM$; derhalve

(IV.

(IV. *Stell.* II. *B.*) ook $BL = AB = LM$. Wegens de eigenfchap des gelijkbeenigen driehoeks, is dan nu ook *hoek* ABL = *hoek* AMB = *hoek* LBM; de gelijke hoeken ABM en BAM zijn dan het dubbel van den hoek AMB. De fom van de hoeken des driehoeks ABM, is derhalve gelijk aan vijfmaal den hoek AMB; vijfmaal den hoek AMB is dan (XVIII. *Stell.* I. *B.*) gelijk aan twee regte hoeken; en de hoek AMB is diensvolgens één-tiende van vier regte hoeken; de boog AB is dan (XVIII. *Stell.* V. *B.*) één-tiende van den omtrek, en deszelfs koorde AB de zijde van den regelmatigen tienhoek, welke in den cirkel befchreven is.

§. 466. I. Gevolg. *Fig.* 196. *Wanneer men derhalve den ftraal eens cirkels in de uiterfte en middelfte reden deelt; dan zal men de koorde van eenen boog vinden, welke gelijk is aan één-tiende van den omtrek.* Wanneer men nu dezen boog, naar het *II. Gev.* der *XVII. Stelling* van het *V. Boek*, in den omtrek rondpast; dan zal men denzelven in tien gelijke deelen verdeelen; *en de koorden dezer gelijke bogen zullen dan de zijden van den regelmatigen tienhoek AB CDEFGHIK uitmaken.*

§. 467 II. Gevolg. *Fig.* 196. *Wanneer men de zijde van den regelmatigen tienhoek gevonden heeft; dan is die van den regelmatigen vijfhoek van zelve bekend;* zij is namelijk de koorde van den dubbelden boog AB; de koorde van den boog ABC, of eindelijk de lijn AC.

§. 468. III. Gevolg. *Fig.* 196. Wanneer men, uit A, als middelpunt, met den ftraal AM des cirkels, waarin de tien- en de vijfhoek befchreven zijn, eenen cirkelboog NO befchrijft, welke den omtrek in N doorfnijdt; dan is (*IV. Stell.*) de boog ABN één zesde van den omtrek des cirkels. Daar nu de bogen AB en ABC één-tiende en één-vijfde van den omtrek bedragen; zoo zal de boog NC gelijk aan $\frac{1}{5}$ min $\frac{1}{6}$ gelijk $\frac{1}{30}$ van den omtrek; en de boog BN gelijk $\frac{1}{6}$ min $\frac{1}{10}$, dat is $\frac{1}{15}$ van den omtrek zijn. *Men zal alzoo één-vijftiende en één dertigfte deel van den omtrek des cirkels, en bijgevolg de zijden van eenen dertig- en van eenen vijftienhoek verkrijgen.*

V. Stelling. *Fig.* 196.

§. 469. *Wanneer men de zijden van een regelmatigen zes- en tienhoek, die in eenen cirkel zijn befchreven, in ééne regte lijn te zamen vereenigt; dan is die geheele lijn in de uiterfte en middelfte reden verdeeld. — De zijden van de regelmatige vijf, zes- en tienhoeken, in denzelfden cirkel befchreven zijnde, hebben met elkan*

kander zulk eene overeenstemming, dat het vierkant, op de zijde van den regelmatigen vijfhoek, gelijk is aan de som van de vierkanten, die op de zijden van den regelmatigen zes- en tienhoek zijn beschreven.

Betoog *van het eerste. Fig.* 196. Men verlenge de lijnen *AB* en *MC*, tot dat zij elkander in *Q* ontmoeten. In de voorgaande stelling, is bewezen: dat *hoek ABL* = *hoek LBM* = *hoek LMB* is; maar, omdat *AB* en *BC* zijden van den regelmatigen tienhoek zijn, zoo is *hoek LMB* = *hoek BMC*; derhalve is (V. *Ax.*) *hoek LBM* = *hoek BMQ*; en daarom is (XXVII. *Stell.* I *B.*) *MQ* evenwijdig aan *BL*; diensvolgens (XXVI. *Stell.* I. *B.*) *hoek Q* = *hoek ABL* = *hoek BMQ*; en, daarom (XV. *Stell.* I.) *BQ* = *BM*; maar *BM* is de straal van den cirkel, of (II. *Stell.*) de zijde van den regelmatigen zeshoek; de lijn *AQ* is dus eene lijn, welker deelen *AB* en *BQ* de zijden van den regelmatigen tien- en zeshoek zijn.

Omdat nu *LB* evenwijdig is aan *MQ*, zoo is (IV. *Gev.* I. *St.* IV. *B.*)

$$AM : LM = AQ : BQ$$

en $AL : LM = AB : BQ$

derhalve is $AM \times AL : LM^2 = AQ \times AB : BQ^2$, *Gev.* VII. *St.* IV. *B.*

Nu is (zie IV. *St.*) $AM \times AL = LM^2$; derhalve I. *Gev.* II. *St.* II. *B.*

$$AQ \times AB = BQ^2 = AM^2.$$

Betoog *van het tweede.* Men deele den hoek *AMB*, door de lijn *MR*, in twee gelijke deelen, en trekke de lijn *BR*; dan is:

1°. *De driehoek CMR gelijkvormig aan den driehoek AMC*; want, omdat *AC* de zijde van een regelmatigen vijfhoek is, zoo is (III. *Gev.* I. *Stell.*) *hoek AMC* = 72°, *hoek MAC* = *hoek MCA* = *halve suppl. hoek AMC* = $\frac{1}{2}(180° - 72) = 54°$. En, omdat *AB* de zijde van een tienhoek is, zoo is *hoek AMB* = 36°; en ½ *hoek AMB* = *hoek BMR* = 18°; derhalve is (VIII. *Ax.*) *hoek CMR* = *hoek CMB* + *hoek BMR* = 36° + 18° = 54°; nu is *hoek MCR* = *hoek CMR* = 54° en (XV. *Stell.* I. *B.*) *MR* = *CR*; de driehoeken *CMR* en *AMC* zijn dan (III. *Bep.* IV.) gelijkvormig; en daarom is (VIII. *Stell.* IV. *B.*)

$$AC : MC = MC : CR$$

en $MC^2 = AC \times CR$, V. *Stell.* IV. *B.* . . . (1)

2°. *Nog zijn de driehoeken ABC en ABR gelijkvormig*; want *hoek AMR* = *hoek BMR* (*constr.*) *AM* = *BM* en *MR* = *MR* zijnde, zoo is (X. *Stell.* I.) *AR* = *BR* en *AB* = *BC*; derhalve is (XIV. *St.* I. *B.*) *hoek BAC* = *hoek ACB*, en *hoek BAR* = *hoek ABR* = *hoek ACB*; de driehoeken zijn dan (III. *Bep.* IV. *B.*) gelijkvormig; en daarom is (VIII. *Stell.* IV. *B.*)

$$AC : AB = AB : AR$$

gevolgelijk is $AB^2 = AC \times CR$, V. *Stell.* IV. *B.* . . . (2)

Men telle nu de vergelijkingen (1) en (2) bij elkander; dan zal (zie I. *Hulpst.* III. *B.*) gevonden worden:

$$AC^2 = MC^2 + AB^2.$$

§. 470. Gevolg. *Fig.* 196. Indien men $AM = 1$ ftelt; dan is (zie *Bijvoegf. I. Hulpft. en IV. Stell.*) $AB = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$; derhalve $AM^2 = 1$ en $AB^2 = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Nu is $AC^2 = AM^2 + AB^2 = 2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \frac{1}{4} \times (10 - 2\sqrt{5})$ en dus wordt de zijde van den regelmatigen vijfhoek in den cirkel befchreven, of $AC = \frac{1}{2}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})} = 1,17557\ 70504\ 58494$.

§. 471. Bijvoegsel. *Fig.* 197. Laten de middellijnen AB en CP elkander in M reghoekig doorfnijden, en EM gelijk aan de zijde van den tienhoek genomen worden; dan is (*V. Stell.*) de lijn AE in het punt M in de uiterfte en middelfte reden verdeeld; wanneer men dan den ftraal AM, in het punt D, in twee gelijke deelen verdeelt; dan is $AM^2 = 4MD^2 = AE \times EM = 2MD \times EM + EM^2$; hierbij tellende hetzelfde vierkant MD^2; dan zal (*VIII. Ax.*) $5MD^2 = 2MD \times EM + EM^2 + MD^2 =$ (*I. Hulpft. III. B.*) $= ED^2$ zijn. Indien men dan verder de lijn CD trekt; dan is (*XVI. Stell. III. B.*) $CD^2 = DM^2 + MC^2 = AM^2 + MD^2 = 4MD^2 + MD^2 = 5MD^2$, en diensvolgens $DE^2 = DC^2$, of $DE = DC$. Uit dit alles volgt dan: *dat, wanneer men, in eenen cirkel, twee middellijnen AB en CP trekt, die elkander regthoekig doorfnijden; en voorts het punt D, in het midden van den ftraal AM, neemt; en, uit dit punt D, als middelpunt, met CD, als ftraal, eenen cirkelboog befchrijft, of wel $DE = DC$ neemt, de lijn EM de zijde van den tienhoek, en EC de zijde zal zijn van den vijfhoek, welke in dien cirkel kan befchreven worden.*

Indien men verder FG loodregt op AB ftelt, en de lijn EF trekt; dan is (*XVI. St. III. B.*) $EF^2 = ED^2 + DF^2$; maar ED^2 is $= 5MD^2$ (*bewez.*) en DF^2 is (*Aanm. XXI. Stell. V. B.*) $BD \times AD = 3MD^2$. Gevolgelijk is $EF^2 = 3MD^2 + 5MD^2 = 8MD^2 = 2AM^2 = AM^2 + CM^2 = AC^2$; daarom is $EF = AC$: nu is FG (*III. Gev. III. St.*) de zijde van den regelmatigen driehoek, welke in denzelfden cirkel befchreven is. En AF is dan de zijde van den regelmatigen zeshoek, in denzelfden cirkel ftaande. *Wanneer men dan, na vooraf twee middellijnen, AB en CP, in den gegevenen cirkel, regthoekig op elkander getrokken te hebben, $AF = AM$ neemt, uit F, met eenen ftraal, gelijk aan AC, eenen cirkelboog befchrijft, welke de middellijn AB in E doorfnijdt; dan zal EM de zijde des tienhoeks en EC de zijde des vijfhoeks zijn, welke in dezen cirkel kunnen befchreven worden.*

VI. Stelling. *Fig.* 198.

§. 472. *Wanneer een regelmatige veelhoek in eenen cirkel befchreven is; dan zal men, in dien cirkel, eenen regelmatigen veelhoek kunnen befchrijven, die een dubbel aantal van zijden heeft.*

Betoog. Laten ABM, BCM, CDM, *enz.* de middelpuntsdriehoeken van den veelhoek zijn, welke in den cirkel befchreven is. Men be-

beschrijve, uit de hoekpunten *A* en *B*, met denzelfden straal, naar welgevallen, twee cirkelbogen, welke elkander in *P* snijden; indien men dan de lijn *MP* trekt; dan zal de boog *AB*, in het punt *E*, in twee gelijke bogen *AE* en *BE*, verdeeld zijn; want de driehoeken *AMP* en *BMP* zijn (*XIII Stell. I. B.*) gelijk- en gelijkvormig, en daarom is *hoek AME* = *hoek BME*, en (*XVII. Stell. V. B.*) de *boog AE* = den *boog BE*; de *koorde AE* is dan ook (*V. Stell. V. B.*) gelijk aan de *koorde BE*. Op dezelfde wijze, zal men de bogen *BC*, *CD*, *enz.* verdeelen, en men zal alzoo in den cirkel eenen veelhoek verkrijgen, die een dubbel aantal van zijden heeft.

§. 473. GEVOLG. *Omdat men, uit de III, IV en V* Stellingen *geleerd heeft: hoe een zeshoek, vierhoek, vijfhoek, tienhoek, vijftienhoek en dertighoek, in eenen cirkel kan beschreven worden, zoo zal men nu ook in staat zijn, om eenen veelhoek van* 8, 16, 32, 64, 128, 256, enz., *zijden; van* 12, 24, 48, 96, 192, enz., *zijden; van* 20, 40, 80, 160, enz., *zijden; van* 60, 120, 240, 480, enz., *zijden in eenen cirkel te beschrijven, en men zal derhalve den omtrek eens cirkels ook in even zoo veel gelijke deelen kunnen verdeelen.*

§. 474. AANMERKING. *Geene andere, dan de zoo even opgenoemde veelhoeken, kunnen, door middel van de regte lijn en den cirkel, in en om eenen cirkel beschreven worden.* Het verdeelen van den omtrek eens cirkels, in een gegeven aantal gelijke deelen, is dus in verre na zoo algemeen en eenvoudig niet, als het verdeelen eener regte lijn; hetwelk daaraan is toe te schrijven, dat het verdeelen zoo van den geheelen omtrek eens cirkels, als van eenen cirkelboog van de vergelijking

$$\textit{koorde}\ na = k\left\{m^{n-1} - \frac{n-2}{1}m^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}m^{n-5}\ \ldots\ldots - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}m^{n-7} + enz.\right\}\ \ldots\ldots\ (P)$$

afhangt, in welke k = *koorde a* en m = *koorde* $(180^{\circ} - a)$ beteekent, (zie *III. Bijvoegs. XXVIII. Stell. V. B.*) zijnde $k = \sqrt{(4-m^2)}$. Om dus eenen boog in n gelijke te verdeelen, moet men de koorde van dien boog, namelijk *koorde na*, als bekend aanmerken; en, uit de vergelijking (*P*), de onbekende m oplossen. Om, echter den geheelen omtrek in n gelijke deelen te verdeelen, wordt, omdat de koorde van 360° of *koorde na* = 0 is, de vergelijking (*P*) eenvoudiger. Na dezelve door k gedeeld te hebben; zoo verkrijgt men:

$$0 = m^{n-1} - \frac{n-2}{1}m^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}m^{n-5}\ \ldots\ldots - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3}m^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}m^{n-9} - enz.\ \ldots\ldots\ldots\ (Q)$$

uit welke m = *koorde* van het supplement van $\frac{360}{n}$ zal gevonden worden,

den, en dus de koorde van het n^{de} gedeelte van den omtrek door de vergelijking $k = \sqrt{(4 - m^2)}$; maar hoe grooter n wordt, des te zwaarder wordt de oplossing dezer vergelijking. Men vindt door dezelve de zijden der regelmatige veelhoeken (de straal = 1 zijnde), zoo als dezelve in de volgende tafel zijn opgegeven.

TAFEL *van de lengte van de zijden der regelmàtige veelhoeken, beschreven in eenen cirkel, wiens straal* = 1 *is.*

deel. omtr.	*koorden.*	*deel. omtr.*	*koorden.*	*deel. omtr.*	*koorden.*
3	1, 73205 08076	18	0, 34729 63553	33	0, 19011 20866
4	1, 41421 35624	19	0, 32918 91806	34	0, 18453 67189
5	1, 17557 05046	20	0, 31286 89301	35	0, 17927 86178
6	1, 00000 00000	21	0, 29808 45[illegible]24	36	0, 17431 14855
7	0, 86776 74782	22	0, 28462 96765	37	0, 16961 18490
8	0, 76536 68647	23	0, 27233 32982	38	0, 16515 86909
9	0, 68404 02867	24	0, 26105 23844	39	0, 16093 31374
10	0, 61803 39887	25	0, 25066 64671	40	0, 15691 81915
11	0, 56346 51137	26	0, 24107 33605	41	0, 15309 85057
12	0, 51763 80902	27	0, 23218 58285	42	0, 14946 01872
13	0, 47863 13286	28	0, 22392 89522	43	0, 14599 06293
14	0, 44504 18679	29	0, 21623 80368	44	0, 14267 83664
15	0, 41582 33816	30	0, 20905 69265	45	0, 13951 29475
16	0, 39018 06440	31	0, 20233 66440	46	0, 13648 48[illegible]67
17	0, 36749 90356	32	0, 19603 42807	47	0, 13358 52675

Deze tafel, dié men verder kan voortzetten, bevat de koorden van de evenmatige deelen van den omtrek. Zij kan in veel gevallen van een nuttig gebruik zijn.

VII. STELLING. *Fig.* 198.

§. 375. *Wanneer een regelmatige veelhoek in eenen cirkel beschreven is; dan zullen de raaklijnen, welke, door de hoekpunten van dezen veelhoek, aan den cirkel getrokken worden, eenen regelmatigen veelhoek van hetzelfde aantal zijden bepalen; en deze zal dan om den cirkel beschreven zijn.*

BETOOG. De raaklijnen *A H* en *B H* zullen elkander in het punt *H* snijden: en dan is (*Leer. XIII. Stell. V B.*) *A H* = *B H*: om dezelfde reden, zal *B I* = *I C*; *C K* = *K D* zijn, *enz.*: daar nu (*XIII. Stell. I. B.*) *hoek A M H* = *hoek B M H*; *hoek B M I* = *hoek I M C* is; zoo zal, omdat de hoeken *A M B* en *B M C* gelijk zijn, ook *hoek B M H* = *hoek B M I* zijn; en derhalve (*IX. Stell. I. B.*) *H B* = *B I*. Om dezelfde reden, zal *I C* = *C K* zijn, en (*VIII. Ax.*) *H I* = *I K*; en uit dezelfde gronden, zal volgen: *dat al de zijden van den veelhoek, welke door deze raaklijnen gevormd wordt, onderling gelijk zijn.* Eindelijk zijn, wegens de gelijke- en gelijkvormige driehoeken, *A M H*, *B M H*, *B M I*, *C M I*, de hoeken, om de punten *H* en *I*, gelijk, en daarom is *hoek A H I* =

hoek

hoek *BIC* = *hoek CKD* = *enz.* De veelhoek, welke, door deze raaklijnen bepaald wordt, is dan gelijkhoekig en gelijkzijdig, en derhalve (*I. Bep.*) een regelmatige veelhoek, welks zijden zooveel in aantal zijn, als de zijden van den regelmatigen veelhoek, welke onderfteld wordt, in den cirkel befchreven zijn.

§. 476. Gevolg. *Fig.* 198. *Men zal dan, om een gegeven cirkel, al die veelhoeken kunnen befchrijven, welke, naar aanwijzing van het gevolg der voorgaande ftelling, in denzelven befchreven kunnen worden.*

VIII. Stelling. *Fig.* 198.

§. 477. *De inhoud van elken regelmatigen veelhoek is gelijk aan deszelfs omtrek, vermenigvuldigd met de halve apothema, of met den halven ftraal des ingefchrevenen cirkels.*

Betoog. Het is, uit het betoog van de *I. Stelling*, gebleken: dat, in elken regelmatigen veelhoek *ABCDEFG*, een cirkel kan befchreven worden, welke deszelfs zijden, in de punten *P*, *Q*, *R*, *S*, *enz.*, in het midden van dezelve gelegen zijnde, aanraakt; en dat het middelpunt *M* van dien cirkel tevens het middelpunt van den veelhoek is, in hetwelk de toppunten van al de middelpunts-driehoeken, *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM*, *enz.*, uit welke de veelhoek kan begrepen worden zamengefteld te zijn, zamenkomen. *Nu is de inhoud van den middelpunts-driehoek BCM* (Gev. VIII. Stell. III. B.) *gelijk aan de zijde BC, vermenigvuldigd met de helft van de loodlijn MP.* Op dezelfde wijze, is *inhoud driehoek CDM* = $CD \times \frac{1}{2} MQ$; *inhoud driehoek DEM* = $DE \times \frac{1}{2} MR$, *enz.* Nu is de fom van de inhouden dezer driehoeken gelijk aan den inhoud van den geheelen veelhoek en, (omdat al de ftralen *MP*, *MQ*, *enz.* gelijk zijn,) gelijk aan de fom van al de zijden des veelhoeks, vermenigvuldigd met de helft van den ftraal des ingefchrevenen cirkels; gelijk aan $(AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA) \times \frac{1}{2} MP$.

IX. Stelling. *Fig.* 199.

§. 478. *Alle regelmatige veelhoeken, hetzelfde aantal zijden hebbende, zijn gelijkvormig; en, als zoodanige, ftaan derzelver omtrekken tot elkander, in dezelfde reden, als de ftralen, of middellijnen, van derzelver in- of omgefchrevene cirkels; en derzelver inhouden, in dezelfde reden, als de vierkanten op de ftralen, of middellijnen, der in- en omgefchrevene cirkels.*

Betoog. Laten *ABCDE* en *abcde* twee regelmatige veelhoeken, bij voorbeeld, twee regelmatige vijfhoeken, zijn. Stel den omtrek van

den eersten $= O$, van den tweeden $= o$; den inhoud van den eersten $= I$, en van den tweeden $= i$; dan moet bewezen worden: dat

$$O : o = AM : am = 2AM : 2am$$
$$I : i = AM^2 : am^2 = 4AM^2 : 4am^2$$

zal zijn; en zulks om het even, uit hoeveel zijden die regelmatige veelhoeken bestaan, indien het aantal der zijden in beiden slechts hetzelfde is.

Men lette op de middelpunts-driehoeken ABM en abm, en stelle het aantal van de zijden der veelhoeken $= n$; dan is (I. *Gev.* II. *Bep.*)

$$\text{hoek } AMB = \text{hoek } amb = 360^\circ : n$$
$$\text{hoek } MAB = \text{hoek } mab = (n-2)\ 180^\circ : n$$
$$\text{hoek } MBA = \text{hoek } mba = (n-2)\ 180^\circ : n$$

die middelpunts driehoeken zijn dan (III. *Bep.* IV. *B.*) gelijkvormig; en dus is (VIII. *Stell.* IV. *B*)

$$AB : ab = AM : am$$

en daarom $n \times AB : n \times ab = AM : am = 2AM : 2am$, VI. *St.* II. *B.*

dat is, $O : o = AM : am = 2AM : 2am$

En, volgens de XI. *Stell.* IV. *B.* is:

$$\text{drieh. } ABM : \text{drieh. } abm = AM^2 : am^2$$

derh. $n \times \text{drieh. } ABM : n \times \text{drieh. } abm = AM^2 : am^2 = 4AM^2 : 4am^2$, VI. *Stell.* II. *B.*

of $I : i = AM^2 : am^2 = 4AM^2 : 4am^2$.

I. *Over de* Quadratuur *van den Cirkel.*

§. 479. IV. Bepaling. Door de *Quadratuur van den cirkel* verstaat men de betrekking of reden van den inhoud eens cirkels tot het vierkant, op deszelfs straal beschreven.

X. Stelling. *Fig.* 200.

§. 480. *Wanneer, in- en om- eenen cirkel, regelmatige n-hoeken zijn beschreven, welker inhouden wij A en a noemen; en nog, om- en in- denzelven, regelmatige 2n-hoeken, welker inhouden door B en b worden aangeduid; dan zal* 1°. *de inhoud van den regelmatigen 2n-hoek, in den cirkel, middenevenredig zijn tusschen de inhouden der regelmatigen n-hoeken, in- en om- denzelven:* 2°. *de som van de inhouden van den n-hoek en 2n-hoek, in den cirkel beschreven, zal tot het dubbel van dien n-hoek, in dezelfde reden staan, als de inhoud van den n-hoek tot den inhoud van den 2n-hoek, beide om den cirkel beschreven zijnde; dat is:*

$$A : B = B : a$$
$$A + B : 2A = a : b.$$

Opheldering. Zij de gelijkbeenige driehoek *ABM* één der middelpuntsdriehoeken van den ingeschrevenen *n*-hoek *A*; dan is de inhoud van dien veelhoek gelijk aan *n*-maal den inhoud van dien middelpuntsdriehoek *AMB*; en dan is *A* = *n* × *drieh AMB*. Men deele den tophoek *AMB* des middelpuntsdriehoeks, door de lijn *MD*, in twee gelijke deelen, en trekke aan het punt *D*, de raaklijn *CDE*, welke de verlengde beenen van den driehoek *ABM*, in de punten *C* en *E*, ontmoet; dan is de driehoek *CEM* de middelpuntsdriehoek van den *n*-hoek, welke om den cirkel beschreven is, en dan is *a* = *n* × *drieh. CEM*. Men trekke voorts de koorden *AD* en *BD*; dan zijn *ADM* en *BDM* de middelpuntsdriehoeken van den 2*n*-hoek, in den cirkel beschreven; en, om die reden, zal *B* = 2*n* × *drieh ADM* = *n* × *vierh. ADBM* zijn. Men deele eindelijk de hoeken *CMD* en *EMD*, door de lijnen *MF* en *MG*, in twee gelijke deelen, en trekke de lijnen *AF* en *BG*, welke (omdat *AM* = *DM*, *MF* = *MF* en *hoek AMF* = *hoek DMF* is, en (X. *St.* I. *B.*) *hoek MAF* = *hoek MDF* is,) raaklijnen tot den cirkel zullen zijn; zijnde (*Gev.* XII. *Stell.* V. *B*) *AF* = *DF* en *BG* = *DG*, en de *hoek FMG* = den *hoek AMD*. De driehoek *FGM* zal dan de middelpuntsdriehoek van den 2*n*-hoek zijn, welke om den cirkel beschreven is; men heeft derhalve, omdat *vierh. AFDM* klaarblijkelijk gelijk aan den driehoek *FGM* is, *b* = 2*n* × *vierh. AFDM*. Na deze verklaring van de constructie der figuur, is het betoog der gestelde evenredigheden zeer gemakkelijk.

Betoog *van het eerste.* Vooreerst hebben de driehoeken *AMH* en *AMD*, als aan het toppunt *A* zamenkomende, gelijke hoogten, en zijn daarom (XIV. *Stell.* III. *B.*) tot elkander, als hunne bases; dat is:

drieh. AMH : *drieh AMD* = *MH* : *MD*

maar, omdat de hoeken *AHM* en *CDM*, (IX. *en* XII. *Stell.* V. *B.*) regt en de lijnen *AH* en *CD* (zie XXII. *Stell.* I. *B.*) derhalve evenwijdig zijn, zoo zal (II. *Gev.* I. *Stell.* IV. *B.*) *MH* : *MD* = *AM* : *MC* zijn, en men zal daarom (I. *Stell.* II. *B*) mogen stellen:

drieh. AMH : *drieh. AMD* = *AM* : *CM.*

Deze lijnen *AM* en *CM*, zijn de bases der driehoeken *ADM* en *CDM*, welker toppunten, in hetzelfde punt *D*, zamenkomen, en daarom gelijke hoogten hebben: men zal dan (XIV. *Stell.* III. *B.*) wederom kunnen stellen:

drieh. AMD : *drieh. CMD* = *AM* : *CM*

vergelijkt men nu deze evenredigheid met de voorgaande; dan zal men (I. *St.* II. *B.*) verkrijgen de evenredigheid:

drieh. AMH : *drieh. AMD* = *drieh. AMD* : *drieh. CMD.*

De inhoud van den driehoek AMD is derhalve middenevenredig tusschen de inhouden der driehoeken, AMH en CMD. Neemt men nu elken van de inhouden dezer driehoeken 2*n*-maal; dan verkrijgt men de inhouden der veelhoeken, *A*, *B* en *a*; men heeft derhalve de evenredigheid, *A* : *B* = *B* : *a*. *Deze* 2*n-hoek, in den cirkel beschreven,*

is alzoo middenevenredig tusschen de n-hoeken, welke, in- en om- denzelfden cirkel, beschreven zijn.

Betoog *van het tweede.* Omdat de driehoeken *DMF* en *CFM*, aan hetzelfde punt *M*, zamenkomen, zoo is (XIV. *Stell.* III. *B.*)

$$driëh.\ DMF : driëh.\ CFM = DF : CF$$

maar nu is, bij de constructie der figuur, de *hoek DMF* = den *hoek CMF* gemaakt; en daarom is (*XIX. Stell. IV B.*) $DF : CF = DM : CM$; of, omdat $AM = DM$ is, $DF : CF = AM : CM$, en diensvolgens is (*I. Stell. II. B.*)

$$driëh.\ DMF : driëh.\ CFM = AM : CM$$

Nu is boven bewezen: dat de lijnen *AM* en *CM* tot elkander staan, als de driehoeken *AMH* en *ADM*; dat is, als de inhouden der veelhoeken, *A* en *B*: men heeft dan wederom (*I. Stell II. B.*)

$$A : B = driëh.\ MDF : driëh.\ CMF$$

uit deze evenredigheid en de figuur, volgt nu: (*VIII. Stell. II. B. en fig.*)

$$A + B : A = driëh.\ CDM : driëh.\ MDF$$

en, wanneer men de volgende termen dezer evenredigheid verdubbelt, en onder het oog houdt, dat het dubbel van den driehoek *MDF* gelijk aan den driehoek *FGM* is, (*VI en VII. Stell. II. B.*)

$$A + B : 2A = driëh.\ CDM : driëh.\ FGM.$$

Maar de driehoeken *CDM* en *FGM*, zijn, gelijk gezegd is, de $2n^{de}$ deelen van de veelhoeken *a* en *b*; zij zijn daarom (*II. Gev. VI. Stell. II. B.*) met deze veelhoeken evenredig; dat is:

$$driëh.\ CDM : driëh.\ FGM = a : b$$

men zal dan, (*I. Stell. II. B.*) deze evenredigheid met de voorgaande vergelijkende, eindelijk verkrijgen:

$$A + B : 2A = a : b.$$

§. 481. Gevolg. *Fig.* 200. *Wanneer een regelmatige n- en 2n-hoek in eenen cirkel is beschreven; dan is zoowel de inhoud als de omtrek van den laatsten grooter dan de inhoud en omtrek van den eersten; maar zijn een regelmatigen n- en 2n-hoek, om den cirkel beschreven; dan zal het omgekeerde plaats hebben: de inhoud en omtrek van den 2n-hoek zal kleiner zijn dan de inhoud en omtrek van den n-hoek.*

Want, uit de figuur blijkt: dat *vierh.* *ADBM* of 2 *driëh.* *ADM* > *driëh.* *ABM* is; en (*VII. Stell. I. B.*) $AD + BD$ of $2AD$ is $> AB$; gevolgelijk is, volgens het (*XIV. Ax.*)

1°. $2n \times driëh.\ ADM > n \times driëh.\ ABM$; 2°. $2n \times AD > n \times AB$ dat is: *inhoud 2n-hoek > inhoud n-hoek; en omtrek 2n-hoek > omtrek n-hoek.*

Verder is *veelh.* *MAFDGB* of 2 *vierh.* *MAFD*, of 2 *driëh* *FMG* < *driëh.* *CEM*; derhalve is (*XIV. Ax.*) $2n \times driëh.\ FMG < n \times driëh.\ CEM$; dat is: *inhoud* van 2 *n-hoek om den cirkel* < *n-hoek*, om denzelven.

Uit

Uit de constructie, is *hoek* $CMF =$ *hoek* DMF, en daarom is (*XIX. Stell. IV. B*) $DM : CM = DF : CF$. Nu is (*XXI. Stell. I. B.*) $DM < CM$; gevolgelijk $DF < CF$; tel bij $DG = DF$; dan is $FG < CD$, of, volgens de figuur, $2FG < CE$; en daarom is (*XIV. Ax.*) $2n \times FG < n \times CE$; dat is, de *omtrek van den* 2 *n-hoek, om den cirkel, is kleiner dan de omtrek van den n-hoek, om denzelven.*

XI. STELLING. *Fig.* 200.

§. 482. *Wanneer, in- en om- eenen cirkel, eén regelmatigen n-hoek is beschreven; dan zullen de inhouden en omtrekken dezer regelmatige n-hoeken des te minder van elkander verschillen, hoe grooter het getal der zijden van die n-hoeken is. Eindelijk zullen die omtrekken en inhouden gelijk worden, wanneer n oneindig groot is.*

BETOOG. Laten ABM en CEM de middelpunts-driehoeken der in- en omgeschrevene regelmatige n-hoeken zijn; dan zijn (omdat AB evenwijdig is aan CE,) deze driehoeken gelijkvormig; en daarom is (*VIII en IX. Stell. IV. B.*)

$$AB : CE = MH : MD$$

$$\text{drieh. } ABM : \text{drieh. } CEM = MH^2 : MD^2$$

en dan is, volgens de *VI. Stell. II. B.*

$$n \times AB : n \times CE = MH : MD$$

$$n \times \text{drieh. } ABM : n \times \text{drieh. } CEM = MH^2 : MD^2$$

dat is, indien wij den inhoud en omtrek van den regelmatigen n-hoek, in den cirkel, A en O; den inhoud en omtrek van den regelmatigen n-hoek, om den cirkel, a en o stellen:

$$O : o = MH : MD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\text{en } A : a = MH^2 : MD^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Nu is, in den regthoekigen driehoek AMH, (*XVI. Stell. III. B.*) $MH^2 = AM^2 - AH^2 = DM^2 - AH^2 = DM^2 \times (1 - AH^2 : DM^2)$, en eindelijk

$$MH = DM \times \sqrt{(1 - AH^2 : DM^2)}$$

Ontwikkelt men die wortel-uitdrukking in eene reeks; dan zal men, zie *Allereerste Grond. der Stelk.*, *I. Afdeel. IX. Hoofdst.*, *art.* 196, verkrijgen:

$$MH = DM \times \left\{ 1 - \frac{AH^2}{2\,MD^2} - \frac{AH^4}{8\,MD^4} - \frac{AH^6}{16\,MD^6} - enz \right\}$$

in welke is op te merken; dat, wanneer n zeer groot is, en, bij voorbeeld de hoek AMD één-duizendste gedeelte van ééne secunde bedraagt, de lijn AH, in vergelijking van den straal MD, zoo onmerkbaar klein zal zijn, dat dezelve, op eenen straal MD van eenige honderde ellen, naauwelijks zal kunnen onderscheiden worden. Wij hebben dus, nagenoeg:

$$MH = DM \times \left\{ 1 - \frac{AH^2}{2\,MD^2} \right\}$$

en, wat hier verwaarloosd wordt, zal des te minder invloed hebben, als n nog grooter genomen wordt.

Men stelle nu die waarden van MH en MH^2, in de evenredigheden (1) en (2); dan hebben wij:

$$O : o = DM \times \left\{ 1 - \frac{AH^2}{2\,MD^2} \right\} : DM = 1 - \frac{AH^2}{2\,MD^2} : 1$$

$$A : a = DM^2 \times \left\{ 1 - \frac{AH^2}{MD^2} \right\} : DM^2 = 1 - \frac{AH^2}{MD^2} : 1$$

Uit deze evenredigheden volgen, nu met behulp van de *VIII. St. II. B.*

$$o - O : o = \frac{AH^2}{2\,MD^2} : 1$$

$$a - A : a = \frac{AH^2}{MD^2} : 1$$

uit welke evenredigheden eindelijk deze twee vergelijkingen volgen:

$$o - O = \frac{AH^2}{2\,MD^2} \times o \;.\;.\;.\; (\alpha) \quad \text{en} \quad a - A = \frac{AH^2}{MD^2} \times a \;.\;.\;.\; (\beta)$$

In deze vergelijkingen verminderen (*Gev. X. Stell.*) o en a, als n grooter wordt: AH wordt, indien n zeer groot is, in vergelijking van de standvastige lijn MD, zeer klein en vermindert, als n grooter wordt; $o-O$ en $a-A$ verminderen dan ook onophoudelijk en worden nul, als $AH = 0$ of n oneindig groot wordt.

§. 483. Gevolg. Men verbeelde zich, dat er regelmatige n, $2n$, $4n$, $8n$, $16n$, $32n$, *enz*, hoeken, in- en om- den cirkel, zijn beschreven (zie de *VI en VII Stell.*) en dat men, met het construeren dezer veelhoeken, tot in het oneindige, voortgaat; wanneer men dan O, O_1, O_2, O_3, O_4 *enz.* de omtrekken der ingeschrevene; o, o_1, o_2, o_3, o_4 *enz.* die der omgeschrevene veelhoeken noemt; A, A_1, A_2, A_3, A_4, *enz.* de inhouden der ingeschrevene; a, a_1, a_2, a_3, a_4, *enz.* die der omgeschrevene veelhoeken; dan zal, in de eerste dezer twee reeksen,

$$O,\ O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4,\ O_5,\ O_6,\ O_7,\ \text{enz.} \;.\;.\;.\;.\; (1)$$

$$o,\ o_1,\ o_2,\ o_3,\ o_4,\ o_5,\ o_6,\ o_7,\ \text{enz.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

elke volgende term grooter dan de voorgaande; en, in de tweede, elke term kleiner zijn dan de voorgaande; terwijl het verschil van twee overeenstemmende termen O_n en o_n des kleiner zal worden, hoe grooter n is; en eindelijk gelijk, indien n oneindig groot is. Het zelfde zal gelden van de reeksen

$$A,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7,\ \text{enz.} \;.\;.\;.\; (3)$$

$$a,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ \text{enz.} \;.\;.\;.\; (4)$$

Nu is de omtrek en inhoud eens cirkel grooter dan de omtrek en inhoud van den regelmatigen n-hoek, in denzelven, en kleiner dan de omtrek en inhoud van den regelmatigen n-hoek, om denzelven beschreven;

ven; de overeenstemmende termen van de reeksen (1) en (2) zijn dan de grenzen, tusschen welke de omtrek, en de overeenstemmende termen van de reeksen (3) en (4) de grenzen, tusschen welke den inhoud van den cirkel bepaald is; wanneer wij derhalve die reeksen tot in het oneindige konden voortzetten, dan zou men eindelijk den omtrek en inhoud eens cirkels volkomen en naauwkeurig kunnen verkrijgen.

Vraagstuk.

§. 484. *Den inhoud eens cirkels, wiens straal gelijk aan de éénheid is, door benadering te vinden?*

Oplossing. Zij de inhoud van den n-hoek, in eenen cirkel beschreven, A; de inhoud van den n-hoek, om dien cirkel beschreven, a; de inhouden van den $2n$-hoeken, in- en om- dienzelfden cirkel beschreven, B en b; dan is, in de X *Stelling*, bewezen: dat

$$A : B = B : a$$

en $A + B : 2A = a : b$ is. Indien wij nu aannemen, dat de inhouden van de n-hoeken, in- en om- den cirkel staande, dat is, A en a bekend zijn; dan zal, uit de eerste evenredigheid, volgen:

Getal der zijden.	*Ingeschrevene veelhoeken.*	*Omgeschrevene veelhoeken.*
4	2, 0000000	4, 0000000
8	2, 8284271	3, 3137085
16	3, 0614674	3, 1825979
32	3, 1214451	3, 1517249
64	3, 1365485	3, 1441184
128	3, 1403311	3, 1422236
256	3, 1412772	3, 1417504
512	3, 1415138	3, 1416321
1024	3, 1415729	3, 1416025
2048	3, 1415877	3, 1415951
4096	3. 1415914	3, 1415938
8192	3, 1415923	3, 1415928
16384	3, 1415925	3, 1415927
32768	3, 1415926	3, 1415926

$$B = \sqrt{Aa} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en uit de tweede, na dat men in dezelve $B = \sqrt{Aa}$ gesteld heeft,

$$b = \frac{2Aa}{A + \sqrt{Aa}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

door welke formulen dan de inhouden der $2n$-hoeken, in en om den cirkel, kunnen berekend worden.

Indien nu de straal van eenen cirkel $= 1$ is; dan is, zie *II. Stelling*, de inhoud van den regelmatigen vierhoek, in den cirkel beschreven, of $A = 2$, en de inhoud van den regelmatigen vierhoek, om denzelven beschreven, of $a = 4$; de inhoud van den regelmatigen achthoek, in dien cirkel, zal dan zijn $B = \sqrt{Aa} = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2} = 2,8284271$; en de inhoud van den regelmatigen achthoek, om dien cirkel beschreven, $b = \frac{2Aa}{A + \sqrt{Aa}} = \frac{16}{2 + 2\sqrt{2}} = 3,3137085$.

Stelt men nu verder, in de vergelijkingen (1) en (2), voor A en a, de waarden, die men voor de inhouden der achthoeken, in- en om- den cir-

cirkel beschreven, verkregen heeft; dan zal men, voor B en b, vinden de inhouden der regelmatige zestienhoeken, in- en om- den cirkel; uit welke men, op dezelfde wijze, de inhouden van de regelmatige twee-en-dertighoeken, en, door eene herhaling van dezelfde berekening, de inhouden van de in- en omgeschrevene 64, 128, 256, 512 hoeken, enz. zal verkrijgen; welke inhouden, op die wijze berekend, in de tafel der vorige Bladz. voorkomen; uit welke tafel blijkt: *dat de inhouden der regelmatige twee-en-dertig-duizend-zeven-honderd-acht-en-zestig hoeken, in- en om- den cirkel beschreven, zoo weinig van elkander verschillen, dat het onderscheid geen tien-millioenste gedeelte van den inhoud van het vierkant op den straal des cirkels onderscheiden is.*

In dit tafeltje, is slechts de berekening van de inhouden, tot in het *zevende* cijfer van de tiendeeligen voortgezet; maar, wanneer men de berekening, tot in *vijf-en-dertig cijfers*, bij voorbeeld, voortzettede; dan zou men ten laatste de inhouden van regelmatige veelhoeken, in- en om- den cirkel beschreven, verkrijgen, zoo nabij elkander komende, dat zij nog in het vijf-en-dertigste cijfer der tiendeeligen zouden overeenstemmen, en bijgevolg minder van elkander verschillen, dan één

0, 00000 00000 00000 00000 00000 00000 00001

gedeelte van het vierkant van den straal.

En, zoo het nu in onze magt stond, om het uit te voeren, dan zou men die berekening tot *honderd*, *twee-honderd* en meer cijfers, in de tiendeeligen, kunnen voortzetten, en eindelijk tot eenen in- en omgeschrevenen veelhoek van een nog veel grooter aantal zijden komen, welker inhouden zoo onbegrijpelijk weinig van elkander zouden verschillen, dat de getallen, die dezelve uitdrukken, tot, in het *honderdste* of *tweehonderdste cijfer*, zouden overeenstemmen. Hoe verre men echter die benadering mogt voortzetten, zou men wel telkens in- en omgeschrevene veelhoeken van een grooter aantal zijden vinden, welker inhouden nog al veel minder zouden verschillen; doch nooit tot twee zoodanige, die volkomen denzelfden inhoud zouden hebben; zoodat men met die berekening tot in het oneindige kan voortgaan.

Laten nu, *fig.* 200, ABM en CEM de middelpunts-driehoeken zijn der n-hoeken, die in- en om- eenen cirkel zijn beschreven; dan is, uit de figuur blijkbaar: dat *drieh.* $ABM <$ *sect.* $ADBM$ en *sect.* $ADBM <$ *drieh.* CEM is, en daarom zal (*XIV. Ax*) $n \times$ *drieh.* $ABM < n \times$ *sect.* $ADBM$, en $n \times$ *sect* $ADBM < n \times$ *drieh.* CEM zijn; dat is, *de inhoud van eenen cirkel is grooter dan den regelmatigen n-hoek, die in denzelven en kleiner dan de inhoud van den regelmatigen n-hoek, die om denzelven beschreven is; en zulks altijd, hoe onbegrijpelijk weinig de inhouden van de in- en omgeschrevenen n-hoeken van elkander zouden mogen verschillen.* Het getal, dat de verhouding van den inhoud des cirkels tot den inhoud van het vierkant op den straal voorstelt, valt derhalve altijd tusschen twee overeenstemmende getallen van de tweede en derde kolom der tafel, van welke wij slechts het begin hebben opgegeven; zoodat men, bij elke nieuwe berekening, twee na-

der

der bij elkander komende grenzen verkrijgt, tusschen welke de inhoud des cirkels invalt; uit al hetwelk, zoowel als uit het voorgaande, blijkt: *dat men, door de twee eenvoudige formulen* (1) *en* (2), *hoezeer door eene zeer lastige berekening, den inhoud eens cirkels, wiens straal de éénheid is, tot in het oneindige voortgaande, al nader en nader zal kunnen vinden.*

Onze beroemde Landgenoot, Ludolph van Ceulen, heeft door eene soortgelijke handelwijze, gevonden: *dat, wanneer de straal eens cirkels gelijk één is, deszelfs inhoud grooter dan*

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288

en kleiner dan

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50289

vierkante éénheden is. Doch, in het *II. Deel*, zal getoond worden: dat dit getal door gemakkelijker wegen gevonden, en, met weinig moeite, veel verder kan worden uitgebragt.

§. 485. Gevolg. *De inhoud eens cirkels is, met betrekking tot den inhoud van het vierkant, op deszelfs straal beschreven, onmeetbaar.*

Want het berekenen der veelhoeken, door welke de inhoud des cirkels benaderd wordt, hangt af van vierkants-worteltrekkingen uit wortelooze getallen. Wie dus die betrekking in ronde getallen naauwkeurig zou willen vinden, zou zijnen tijd vruchteloos verspillen, en betoonen, in de Meetkunst geheel onbedreven te zijn.

§. 486. Aanmerking. Wanneer men het *Ludolphiaansch getal*, 3, 14159 *enz.*, dat de inhoud eens cirkels voorstelt, (*en dat wij voortaan door de letter* π *zullen voorstellen,*) en de éénheid, naar het bekende voorschrift uitmeet; hetgeen hier door eene werkelijke deeling moet plaats hebben; dan zal men voor de wijzergetallen van die uitmeting verkrijgen: 3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, *enz. uit welke wijzergetallen,* zie II. Boek, VI. Bep. Aanm. *voor de reden van den inhoud des cirkels tot het vierkant op den straal, de volgende rij van convergerende breuken zal worden gevonden:*

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215},\ \frac{208341}{66317},\ \text{enz.}$$
$$-\quad +\quad -\quad +\quad -\quad +\quad -$$

welke breuken, in zulke kleine getallen, de betrekking zoo naauwkeurig voorstellen, als mogelijk is. De betrekking van 22 tot 7 is die van Archimedes; en de betrekking van 355 tot 113, die van onzen Landgenoot Metius.

XII. (XIII.) Stelling.

§. 487. *De inhoud van eenen cirkel is gelijk aan den omtrek, vermenigvuldigd met de helft van deszelfs straal.*

Betoog. Men verbeelde zich, dat in- en om- eenen cirkel een n-hoek,

van bij voorbeeld 32768 zijden, beschreven is; en dat men, in- en om dien cirkel, naar de constructie, in de *VI. Stelling* geleerd, 2*n*, 4*n*, 8*n*, 16*n*, 32*n*, 64*n*, 128*n*, 256*n*, *enz.* hoeken beschrijft, en daarmede, tot in het oneindige, voortgaat; dan zullen (zoo als uit *fig.* 200, duidelijk te zien is,) de apothemata der veelhoeken, die om den cirkel staan, de straal van den cirkel zijn; terwijl de apothemata der veelhoeken, in den cirkel beschreven, in elken volgenden veelhoek nader bij den straal des cirkels zullen komen, en eindelijk aan denzelven zouden gelijk worden, indien men met het beschrijven dezer veelhoeken tot in het oneindige kon voortgaan. De omtrek van den cirkel zal, hoe groot het getal van de zijden der in- en omgeschrevene veelhoeken moge zijn, altijd iets grooter dan de omtrek van den ingeschrevenen en iets kleiner dan die van den omgeschrevenen veelhoek zijn; en eindelijk aan beide gelijk worden, wanneer men, met het beschrijven dezer veelhoeken, inderdaad tot in de oneindigheid is voortgegaan; zoo alsdan ook ten laatste, (zie voorgaande *Vraagstuk*,) de inhouden dezer veelhoeken onderling aan elkander en aan dien des cirkels zullen gelijk worden. Nu is (*VIII. Stell.*) de inhoud van elken regelmatigen veelhoek gelijk aan den omtrek, vermenigvuldigd met deszelfs halve apothema; gevolgelijk moet ook de inhoud eens cirkels gelijk zijn aan deszelfs omtrek, vermenigvuldigd met de helft van den straal.

§. 488. Gevolg. Laat de straal van den cirkel $= 1$ zijn; dan is *Inhoud* $=$ *omtrek* $\times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ *omtrek* $= \pi$. *Wanneer men dus den straal gelijk één neemt; dan wordt de halve omtrek door het getal* π (dat wij in het voorgaande vraagstuk gevonden hebben,) *voorgesteld; en neemt men de middellijn gelijk één; dan is de geheele omtrek gelijk het getal* π.

XIII. (XI *en* XII.) Stelling.

§. 489. *Alle cirkels zijn gelijkvormige figuren; en, als zoodanige, staan derzelver omtrekken tot elkander, als de stralen of middellijnen; en de inhouden, als de vierkanten, op de stralen of middellijnen beschreven.*

Betoog. Dat alle cirkels gelijkvormige figuren zijn, is reeds, in het *II. Gev. XIV. Stell. IV. B.* betoogd. Ook is het overige gedeelte dezer stelling reeds, als een gevolg van de *XVI. Stell. IV. B.*, bijgebragt. Wij zullen er echter hier een ander bewijs van geven.

Laten, in- en om- twee cirkels van verschillende grootte, regelmatige *n*-hoeken, bij voorbeeld van 2^{30} of 1073741824 zijden, zijn beschreven, en laten, door constructie, in- en om- die cirkels, 2*n*, 4*n*, 8*n*, 16*n*, hoeken *enz.* tot in het oneindige, worden beschreven. Stel den straal van den eersten cirkel $= R$, van den tweeden $= r$, de omtrekken der ingeschrevene *n*, 2*n*, 4*n*, *enz.* hoeken, in den eersten cirkel,

O,

O, O_1, O_2, O_3, *enz.* en die van de omgeschrevene veelhoeken o, o_1, o_2, o_3, *enz.*; de inhouden van de eerste, G, G_1, G_2, G_3, *enz.* en van de laatste g, g_1, g_2, g_3, *enz.* Stel verder de omtrekken van de n, $2n$, $4n$ hoeken *enz.* in den tweeden cirkel, Ω, Ω_1, Ω_2, Ω_3, *enz.* en, om denzelven ω, ω_1, ω_2, ω_3, *enz.* de inhouden der ingeschrevene veelhoeken Γ, Γ_1, Γ_2, Γ_3, *enz.* en der omgeschrevene γ, γ_1, γ_2, γ_3, *enz.* Nu is, zie *IX. Stelling*,

$$O : \Omega = O_1 : \Omega_1 = O_2 : \Omega_2 = O_3 : \Omega_3 = \text{enz.} = R : r$$
$$o : \omega = o_1 : \omega_1 = o_2 : \omega_2 = o_3 : \omega_3 = \text{enz.} = R : r$$

Wanneer men nu, door het onophoudelijk verdubbelen van de zijden dezer veelhoeken, deze aanééngeschakelde evenredigheid, tot in het oneindige voortzet; dan zal ten laatste $O = o$ de omtrek van den eersten, en $\Omega = \omega$ de omtrek van den tweeden cirkel worden; gevolgelijk is *omtrek* R : *omtrek* $r = R : r = 2R : 2r$.

Verder is, volgens de *IX. Stelling*,

$$G : \Gamma = G_1 : \Gamma_1 = G_2 : \Gamma_2 = G_3 : \Gamma_3 = \text{enz.}\ R^2 : r^2$$
$$g : \gamma = g_1 : \gamma_1 = g_2 : \gamma_2 = g_3 : \gamma_3 = \text{enz.}\ R^2 : r^2$$

maar ook, in deze aanééngeschakelde evenredigheid, wordt, wanneer dezelve tot in het oneindige is voortgezet, $G = g =$ inhoud van den eersten cirkel en $\Gamma = \gamma =$ inhoud van den tweeden cirkel; gevolgelijk is $G : \Gamma = R^2 : r^2 = 4R^2 : 4r^2$.

§. 490. I. Gevolg. *Fig.* 201. Laten, uit hetzelfde middelpunt M, met twee onderscheidene stralen MA en MB, twee cirkels zijn beschreven. Stel den straal $MB = 1$; dan is (*Gev. XII. Stell.*) de *omtrek* $BDH = 2\pi$ en de *inhoud* $BDH = \pi = 3,14159$ *enz.* $MA = r$ ééNheden, en *omtr.* $AFCG = O$; en de inhoud van dien cirkel $= I$; dan is, volgens het betoogde:

$MB : MA =$ *omtr.* BDH : *omtr.* $AFCG$; of $1 : r = 2\pi : O$

derhalve is $O = 2\pi r$ . . . (1), en $r = O : 2\pi$ . . . (2)

Verder is, volgens het bewezene:

$MB^2 : MA^2 =$ *Inh* BDH : *Inh.* $AFCG$; of $1 : r^2 = \pi : I$

derhalve is $I = \pi r^2$ . . . (3), en $r = \sqrt{\frac{I}{\pi}}$ . . . . (4)

Uit welke vergelijkingen dan deze vier regels volgen.

I. Regel. *De omtrek eens cirkels is gelijk aan den straal, vermenigvuldigd met tweemaal het getal* π; *of gelijk aan de middellijn vermenigvuldigd met het getal* π.

II. Regel. *Om, uit den gegeven omtrek des cirkels, zijne middellijn te vinden, moet men den omtrek door* π *deelen; of met* $1 : \pi$ *vermenigvuldigen.*

III. Regel. *Om, uit den straal, den inhoud te vinden, moet men de tweede magt van het getal, dat den straal voorstelt met* π *vermenigvuldigen; of het vierkant van de middellijn met* $\frac{1}{4}\pi$.

IV. Regel. *En, om te vinden, hoe de straal van eenen cirkel moet*

moet genomen worden, op dat hij een gegeven inhoud hebbe, zoo moet men den gegevenen inhoud door π deelen, of met $1:\pi$ vermenigvuldigen, en uit het quotient den vierkants-wortel trekken.

Wanneer men geene Logarithmen gebruikt; dan kunnen de twee volgende tafeltjes van de veelvouden van π en van $1:\pi$ de berekening aanmerkelijk verligten.

	Veelvouden van π.		*Veelvouden van $1:\pi$.*
1	3, 14159 26535 89793	1	0, 31830 98861 83791
2	6, 28318 53071 79586	2	0, 63661 97723 67581
3	9, 42477 79607 69380	3	0, 95492 96585 51372
4	12, 56637 06143 59173	4	1, 27323 95447 35163
5	15, 70796 32679 48966	5	1, 59154 94309 18953
6	18, 84955 59215 38759	6	1, 90985 93171 02744
7	21, 99114 85751 28553	7	2, 22816 92032 86535
8	25, 13274 12287 18346	8	2, 54647 90894 70325
9	28, 27433 38823 08139	9	2, 86478 89756 54116

Men neemt, bij het gebruik van deze tafeltjes, een minder of meerder aantal tiendeeligen, naarmate er, in de uitkomst van de berekening, eene min of meerdere naauwkeurigheid wordt vereischt.

1. VOORBEELD. *Den omtrek en inhoud eens cirkels te vinden, wiens straal $r = 7836$ meters lang is?* Men zal vinden:

$$O = 2\pi r = 49230^m, 40067 = \text{den omtrek}$$

$$\text{en } I = \pi r^2 = 192902186, 9827381 \text{ vierk. met.} = \text{den inhoud.}$$

2. VOORBEELD. *De omtrek van den middagscirkel der Aarde bedraagt veertig milliaenen meters; indien wij denzelven als een volkomen cirkel beschouwen, hoe groot is dan de straal?* Men zal vinden 6366197^m, 72367581.

De opgegevene voorbeelden bewijzen: dat, offchoon de verhouding van den inhoud des cirkels tot het vierkant op den straal, onmeetbaar is, niet slechts het getal van LUDOLPH VAN CEULEN, maar zelf de vijftien eerste cijfers van hetzelve, meer dan voldoende zijn, om, in alle gevallen, de uiterste naauwkeurigheid in de berekening te verkrijgen.

§. 491. AANMERKING. De Logarithmen der voorgaande vergelijkingen zullen, aangezien

$$Log.\ \pi = 0,\ 49714\ 98726\ 94134$$

is, worden:

$$Log.\ O = Log.\ r + 0,\ 7981799 \quad \ldots \quad (1)$$

en als de middellijn $m = 2r$ gegeven is,

$$Log.\ O = Log.\ m + 0,\ 4971299 \quad \ldots \quad (2)$$

$$Log.\ r = Log.\ O + 9,\ 2018201 - 10 \quad \ldots \quad (3)$$

$$Log.\ m = Log.\ O + 9,\ 5028501 - 10 \quad \ldots \quad (4)$$

$$Log.\ I = 2\ Log.\ r + 0,\ 4971499 \quad \ldots \quad (5)$$

$$Log.\ I = 2\ Log.\ m + 9,\ 8950898 - 10 \quad \ldots \quad (6)$$

$$Log.\ r = \tfrac{1}{2}\left[Log.\ I + 9,\ 5028501 - 10\right] \quad \ldots \quad (7)$$

$$Log.\ r = \tfrac{1}{2}\left[Log.\ I + 0,\ 1049101\right] \quad \ldots \quad (8)$$

§. 492. II. GEVOLG. *Fig.* 201. Indien men den straal gelijk *één* stelt; dan

dan is de halve omtrek gelijk π; indien men dus dit getal door 180, 60 en nog eens 60 deelt; dan zal men voor eenen boog van éénen graad, ééne minuut en ééne fecunde, in deelen van den ftraal, verkrijgen:

$$1^\circ = 0,01745\ 32925\ 19943$$
$$1' = 0,00029\ 08882\ 08666$$
$$\text{en } 1'' = 0,00000\ 48481\ 36811$$

Zij nu wederom $MB = 1$, $MA = r$, en *hoek* $AMC = n^\circ$; dan is $180^\circ : n^\circ = \pi :$ *boog* BD; derhalve is, in deelen van den ftraal, *boog* $BD = \pi n : 180$. De gelijkvormige fectors BMD en AMC geven $BM : AM =$ *boog* BD : *boog* AC, of $1 : r = \frac{\pi n}{180}$: *boog* AC; derhalve verkrijgt men, in deelen van den ftraal:

$$\textit{boog } AC = \pi r n : 180 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

en, in Logarithmen, is:

$$\textit{Log. boog. } AC = \textit{Log. } r + \textit{Log. } n + 8,2418774 \quad . \quad . \quad (10)$$

§. 493. III. Gevolg. *Fig.* 201. Vermenigvuldigt men dien *boog* AC met de helft van den ftraal $AM = r$; dan verkrijgt men voor den inhoud van den *fector* AMC:

$$\textit{sect. } AMC = \pi n r^2 : 360 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$
$$\textit{Log. sect. } AMC = 2\ \textit{Log. } r + \textit{Log. } n + 7,9408474 \quad . \quad . \quad (12)$$

§. 494. IV Gevolg. *Fig.* 201. Wanneer van een cirkel-fegment gemeten is de *koorde* $AC = a$, en de pijl $EF = b$, die loodregt midden op de koorde ftaat; dan kan men den inhoud van dit fegment aldus vinden.

Stel den ftraal van den cirkel, tot welken dit fegment behoort, $AM = r$, en, dat de *boog* AC van dit fegment q graden van den omtrek bevat. Verleng de pijl EF, welke (*VIII. Stell. V. B.*) door het middelpunt gaat, en trek nog de koorden CF en AE; dan is *hoek* $ACF =$ *hoek* AIF (*III. Gev. XX. Stell. V. B.*), omdat die hoeken op denzelfden boog AF ftaan; maar (*IV. Gev. XX. Stell. V. B.*) *hoek* $FAC = \frac{1}{2}$ *hoek* $AMF = \frac{1}{4}$ *hoek* $AMC = \frac{1}{4} q$. Nu is, in den regthoekigen driehoek AEF, (*XXIV. Stell. IV. B.*) $EF = AE \times$ *tang.* EAF; dat is, $b = \frac{1}{2} a \times$ *tang.* $\frac{1}{4} q$; derhalve *tang.* $\frac{1}{4} q = 2b : a$; door welke vergelijking het aantal graden, in den boog AFC begrepen, zal bekend worden.

In den regthoekigen driehoek AME, is (*XXIV. Stell. IV. B.*) $AE = AM \times$ *sin.* AME of $\frac{1}{2} a = r \times$ *sin.* $\frac{1}{2} q$; derhalve $r = \frac{1}{2} a$: *sin* $\frac{1}{2} q$. Door deze vergelijking zal de ftraal van den cirkel, uit welken het fegment gefneden is, bekend worden.

De inhoud van den fector AMC is gelijk $\frac{\pi r^2 q}{360}$. Van dien inhoud moet afgetrokken worden den inhoud van den driehoek AMC; die inhoud is (*XXIX. Stell. IV. B.*) $\frac{1}{2} AM \times CM \times$ *sin.* $AMC = \frac{1}{2} r^2 \times$ *sin.* q; en dan zal er den inhoud van het fegment overblijven. Stellen wij den inhoud van het fegment $AFC = I$; dan hebben wij, om, uit de gegevens a en b, dien inhoud te vinden, de volgende vergelijkingen:

tang.

$$tang.\ \tfrac{1}{2} q = \frac{2b}{a},\quad r = \frac{a}{2\ sin.\ \tfrac{1}{2} q},\quad \text{en}\ I = \tfrac{1}{2} r^2 \times \left\{ \frac{\pi q}{180} - sin.\ q \right\}$$

welke vergelijkingen, in Logarithmen overgebragt zijnde, zullen worden:

$$Log.\ tang.\ \tfrac{1}{2} q = Log.\ 2b - Log.\ a$$

$$Log.\ r = Log.\ a - Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2} q - 0,3010300$$

$$Log.\ I = 2\ Log.\ r + Log. \left\{ \frac{\pi q}{180} - sin.\ q \right\} - 0,3010300.$$

VOORBEELD. *Zij gegeven, $a = 42,6$ decimeters, $b = 12,7$ decimeters?* Men zal vinden: $q = 123^\circ\ 13'\ 15'',7$, $r = 41,59168$, en $I = 1287,7504$ vierkante decimeters.

§. 495 BIJVOEGSEL. De volgende ſtellingen en vraagſtukken zijn, om te betoogen en op te losſen, den Lezer tot eigen oefening voorgeſteld.

§. 496. STELLING. A. *De inhoud van eenen cirkel, op de ſchuinſche zijde van een regthoekigen driehoek, is gelijk aan de ſom van de inhouden der cirkels, op deszelfs regthoekszijden.*

§. 497. STELLING. B. *Indien eene lijn AB, in C, in twee deelen is verdeeld, en men, op de geheele lijn AB en op de deelen AC en BC, halve cirkels beſchrijft; dan zal de vlakte, tusſchen de omtrekken dezer halve cirkels, gelijk zijn aan den inhoud van den cirkel, welke, de lijn CD loodregt op AB ſtaande, en tot aan den omtrek van den halven cirkel, op AB beſchreven, verlengd zijnde, tot middellijn heeft.*

§. 498. STELLING. C. *Fig. 202. Indien AB en CD twee middellijnen eens cirkels zijn, die elkander regthoekig doorſnijden, en dus AC = AD koorden van 90°; en men dan, uit A, met AC als ſtraal, een quadrant CED beſchrijft; en, na de koorde AH getrokken te hebben, HI, evenwijdig aan AB, trekt; en dan nog de punten A en I vereenigt; dan zal 1°. de vlakte, tusſchen den halven cirkel CBD en het quadrant CED, gelijk zijn aan den driehoek ACD; 2°. de vlakte, tusſchen de bogen CG en CH, en de regte lijn GH, gelijk aan den driehoek ACI.*

§. 499 VRAAGSTUK. A. *Uit het middelpunt van eenen cirkel, cirkels te beſchrijven, die deszelfs oppervlak, in een zeker aantal gelijke deelen verdeelen?*

§. 500. VRAAGSTUK. B. *Uit een punt, in den omtrek van eenen cirkel genomen, bogen te beſchrijven, die even lang zijn, en het oppervlak des cirkels in n gelijke deelen verdeelen?*

§. 501. VRAAGSTUK. C. *Fig. 197. Indien AF de zijde is van den regelmatigen zeshoek, in den cirkel beſchreven, en FD loodregt*

op

op de middellijn staat, DH gelijk FH genomen, en HI, evenwijdig aan AB wordt getrokken; dan zal de koorde AI zeer nabij de zijde zijn van den regelmatigen veertienhoek, in den cirkel beschreven. Men vraagt zulks door berekening te bewijzen?

§. 502. Vraagstuk. D. *Laat AB de middellijn eens cirkels zijn. Men trekke AE en BD, naar denzelfden kant van die middellijn, loodregt op dezelve, make de loodlijn AE gelijk driemaal den straal AM, en de loodlijn BD gelijk aan de tangens van dertig graden; dan zal de lijn DE nagenoeg gelijk zijn aan den halven omtrek van dien cirkel. Men vraagt zulks door berekening te bewijzen?*

II. *Over de* Isoperimetrische *Figuren.*

§. 503. V. Bepaling. De som van al de zijden eener regtlijnige figuur, of de omtrek eener kromlijnige figuur, wordt *perimeter* of *omtrek* genoemd.

§. 504. VI. Bepaling. *Isoperimetrische* figuren zijn figuren, die gelijke omtrekken of perimeters hebben.

§. 505. VII. Bepaling. Een *maximum* is eene grootheid, welke onder alle grootheden, die op dezelfde wijze ontstaan, de grootste is: een *minimum*, welke de kleinste is.

Opheldering. Aldus is, onder alle koorden eens cirkels, de middellijn het *maximum*, of de grootste; en onder alle lijnen, welke men, van een punt tot eene regte lijn, trekken kan, (zie XXI. *Stell.* I. *B.*) is de loodlijn de kleinste, of het *minimum*. *Wanneer eene lijn AB in twee deelen verdeeld wordt; dan zal, wanneer deze deelen aan elkander gelijk genomen worden, derzelver regthoek een maximum zijn:* Want, deelt men de lijn AB in D, in twee ongelijke deelen, en in C in gelijke deelen; dan is $AD \times BD = (AC + CD)(AC - CD) =$ (II. *Halpst.* III. *B.*) $AC^2 - CD^2$, waaruit blijkt: dat hoe nader de punten C en D bij elkander komen, en CD^2 kleiner wordt, de regthoek $AD \times BD$ des te grooter worden zal, en op zijn grootste zijn, wanneer de punten D en C in elkander vallen. *En wanneer men dezelfde lijn in twee deelen deelt; dan zal de som van de vierkanten der deelen een minimum worden, wanneer de deelen aan elkander gelijk zijn.* Want, volgens de I. *Halpst.* III. *B.* is:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD$$
$$AD^2 = AC^2 + CD^2 + 2AC \times CD$$

telt men nu deze vergelijkingen bij elkander; dan is $AD^2 + BD^2 = 2AC^2 + 2CD^2$. Hoe nader nu de punten C en D bij elkander komen, en hoe kleiner bijgevolg CD^2 wordt, des te kleiner zal $2AC^2 + 2CD^2$ worden; en $AD^2 + BD^2$, zal derhalve een *minimum* zijn, wan-

wanneer, het D in het punt C vallende, de deelen AD en BD aan elkander gelijk worden.

XIV. STELLING. *Fig.* 203.

§. 506. *Onder alle driehoeken, welke op dezelfde basis AB staan en gelijke omtrekken hebben, (of* isoperimetrisch *zijn,) is de gelijkbeenige de grootste, (is, ten aanzien van den inhoud een* maximum.)

BETOOG. Laat, op dezelfde basis AB, eenen gelijkbeenigen driehoek, ABC, ($AC = BC$ zijnde,) en eenen anderen driehoek, ABD, gesteld worden, zoodanig, dat $AC + BC = AD + BD$, of $AB + AC + BC = AB + AD + BD$ zij. Wanneer men dan AC verlengt, en op dit verlengde, $CE = AC = BC$ maakt, en door E en B eene onbepaalde lijn EF trekt; dan zal de hoek ABE een regte hoek zijn; omdat hij (V. *Gev.* XX. *Stell.* V. *B.*) wegens de gelijke lijnen AC, BC, CE, in den halven cirkel staat, welke, uit C, met CA, als straal, beschreven wordt. Men late nu, uit C en D, de loodlijnen CH en DG op EF vallen; dan is, aangezien $BC = CE$ is, ook (II. *Hulpst.* I. *B.*) $BH = HE$. Men make verder $GF = BG$, en trekke de lijn DF; dan is (XX. *Stell.* I. *B.*) $DF = BD$. Indien nu AD grooter of kleiner dan DF is; dan kunnen de lijnen AD en DF niet in dezelfde regte lijn liggen; want alsdan zou noodzakelijk (*Fig. en* X. *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*) *hoek* BAD + *hoek* BFD = *hoek* FBD + *hoek* ABD moeten zijn; en hiervan (XIV. *Stell.* I. *B.*) *hoek* BFD = *hoek* DBF aftrekkende, zou (IX. *Ax.*) *hoek* BAD = *hoek* ABD overblijven, en AD zou (XV. *St.* I. *B.*), tegen de onderstelling, gelijk aan BD moeten zijn. De lijnen AD en DF, liggen dan niet in dezelfde rigting. Men kan dan de punten A en F door de lijn AF vereenigen, en AF zal dan kleiner dan $AD + BD$, of AE zijn; derhalve is ook (XXI. *Stell.* I. *B.*) BF kleiner dan BE, en eindelijk $BG = \frac{1}{2} BF$ kleiner dan $BH = \frac{1}{2} BE$; de gelijkbeenige driehoek ABC heeft dan eene grootere hoogte dan de driehoek ABD; de inhoud van den gelijkbeenigen driehoek is dan (XIV. *Stell.* III. *B.*) de grootste van alle driehoeken, welke denzelfden omtrek hebben.

XV. STELLING. *Fig.* 204.

§. 507. *Onder alle* isoperimetrische *veelhoeken, hetzelfde aantal zijden hebbende, is de gelijkzijdige een* maximum.

BETOOG. Nemen wij dat $ABCDEF$ een zeshoek zij, welke, onder denzelfden omtrek, den grootsten inhoud heeft; indien men dan aanneemt, dat de zijden AB en AC ongelijk zijn; dan zal men, op de hoekpuntslijn AC, eenen gelijkzijdigen driehoek APC kunnen zamenstellen, zoodanig dat $AP + CP = AB + CB$ zij; nu zal (XIV. *St.*)

drieh.

drieh. *APC* > *drieh.* *ABC*, en (X. *Ax.*) de *veelh.* *APCDEF* > *veelh.* *ABCDEF* zijn: en de veelhoek *ABCDEF* zal alzoo, strijdig met de aangenomene onderstelling, geen grootste zijn; *AB* zal derhalve gelijk *BC* moeten zijn. Om dezelfde reden zal, opdat de veelhoek een grootste zijn moge, *BC* = *CD*, *CD* = *DE*, *DE* = *EF*, *EF* = *AF* moeten zijn.

XVI. STELLING. *Fig.* 205.

§. 508. *Onder alle driehoeken (ABC, ABD en ABE), welke, met twee gegevene zijden (AB en AC = AD = AE) en eenen hoek, (BAC, BAD, BAE), naar welgevallen genomen, gemaakt worden, is die driehoek (ABD), in welken die gegevene zijden een regten hoek maken, de grootste.*

BETOOG. Want, indien men, uit de punten *C* en *E*, de loodlijnen *CF* en *EG*, op de gemeene basis *AB* laat vallen; dan zijn deze loodlijnen, welke de hoogte der driehoeken *ABC* en *ABE* zijn, (XXI. *St.* I. *B*) korter dan *AC*, of *AE*, of *AD*; de driehoek *ABD* heeft derhalve de grootste hoogte, en is (XIV. *Stell.* III. *B.*) een maximum of grootste.

II. HULPSTELLING. *Fig.* 206.

§. 509. *Wanneer dezelfde koorde (AB) twee onderscheidene bogen (ACB en ADB) onderspant; dan zal de hoek (AEB), aan het middelpunt van den boog (ACB), welke met den grootsten straal (AE) beschreven is, kleiner zijn dan de hoek (AFB), aan het middelpunt, op den boog (ADB), welke met den kleinsten straal is beschreven.*

BETOOG. Want (XVIII. *Stell.* I. *B.*) *hoek* *AFG* > *hoek* *AEF* zijnde, zal het dubbel van den *hoek* *AFG* > dan het dubbel van den *hoek* *AEF*; dat is *hoek* *AFB* > *hoek* *AEB* zijn.

XVII. STELLING. *Fig.* 207.

§. 510. *Van alle veelhoeken (ABCDEFA), welke, met een zeker aantal gegevene zijden (AB, BC, CD, enz.) en, met eene onbepaalde zijde (AF), naar welgevallen genomen, kunnen gemaakt worden, zal de veelhoek, wiens inhoud een maximum is, zoodanig moeten bepaald zijn, dat hij beschreven is in een halven cirkel, waarvan deze onbepaalde zijde (AF) de middellijn is. Er bestaat slechts één halve cirkel, in welke die veelhoek kan beschreven worden; aan welks omtrek nogtans de gegevene zijden, in zulk eene rangorde, als men goedvindt, zullen kunnen geplaatst worden.*

Betoog *van het eerste*. Men trekke de hoekpuntslijn *B F*; indien dan de hoek *A B F* niet regt is; dan zal men hem regt kunnen maken; en de driehoek *A B F* zal dan (*XVI. Stell.*) een *maximum* worden. Hieruit blijkt dan: dat, wanneer de hoek *A B F* niet regt is, de veelhoek *A B C D E F*, door dien hoek regt te maken, een *maximum* worden zal. Om dezelfde reden, zal de veelhoek *A B C D E F* insgelijks geen *maximum* kunnen zijn, indien de hoeken *A C F*, *A D F* en *A E F* niet regt zijn. Hieruit volgt dan (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) dat de veelhoek, onder de gegevene zijden, en eene onbepaalde zijde *A F*, zamengesteld, alleen een *maximum* zal kunnen worden, wanneer al zijne hoekpunten in den omtrek van een halven cirkel liggen, welks middellijn aan die onbepaalde zijde *A F* gelijk is.

Betoog *van het tweede*. Wanneer men nu onderstelt: dat de veelhoek in eenen grooter' of kleiner' halven cirkel beschreven zij; dan zullen (*IV. Hulpst.*), in het eerste geval, de hoeken, welke op de bogen *A P B*, *B Q C*, *C R D*, *D S E*, *E T F*, aan het middelpunt staan, kleiner, en in het tweede, grooter, dan in de figuur zijn; de som dezer bogen zal derhalve, in het eerste geval, kleiner, en in het tweede geval, grooter dan een halve cirkel zijn: de veelhoek zal dan, in die onderstellingen, in geen halven cirkel staan; de hoeken *A B F*, *A C F*, *A D F*, *A E F*, zullen dan ook niet regt, en de veelhoek zal (zie betoog van het eerste,) geen *maximum* zijn.

Betoog *van het derde*. Men plaatse, in den halven cirkel, de koorden *A B*, *B C*, *C D*, *D E* en *E F*, in zulk eene rangorde, als men goedvinde, zij onderspannen overal gelijke bogen en bepalen gelijke segmenten: nu is de inhoud van den veelhoek gelijk aan den halven cirkel, op *A F* beschreven, min de som der segmenten, *A P B*, *B Q C*, *C R D*, *D S E*, *E T F*: hij behoudt bijgevolg, op welk eene wijze de gegevene zijden des veelhoeks geplaatst worden, altijd denzelfden inhoud.

XVIII. Stelling. *Fig.* 208.

§. 511. *De grootste van alle veelhoeken, welke, onder gegevene zijden, zamengesteld kunnen worden, is die, welks hoekpunten in den omtrek van eenen cirkel liggen.*

Betoog. Laat *A B C D E F G* een veelhoek zijn, welke in eenen cirkel beschreven is; dan zal men een anderen veelhoek *a b c d e f g*, onder dezelfde zijden, kunnen zamenstellen, (zoodanig dat *A B* = *a b*, *B C* = *b c*, *C D* = *c d*, *enz.* is,) om welken geen cirkel kan beschreven worden. Nu moet men betoogen: dat *A B C D E F G* grooter dan *a b c d e f g* zal zijn. Trek de middellijn *E H*, en de koorden *A H* en *B H*; maak, op de zijde *a b*, den driehoek *a b h* gelijk- en gelijkvormig aan den driehoek *A B H*: dan is (*XVII. Stell.*) de veelhoek *E H B C D* grooter dan de veelhoek *e h b c d*, en de veelhoek *E H A G F*, grooter dan de veelhoek *e a h g f*; derhalve (*X. Ax.*) is de veelhoek *A H B C D E F G* grooter

dan

dan de veelhoek *a h b c d e f g*; hiervan de gelijke driehoeken *A H B* en *a h b* aftrekkende, zal de veelhoek *A B C D E F G*, grooter dan de veelhoek *a b c d e f g* overblijven.

§. 512. Gevolg. *Fig.* 208. Men zal, op dezelfde gronden, als in de *XVII. Stell.* betoogen: *dat er slechts één cirkel bestaat, in welken de veelhoek A B C D E F G kan beschreven worden; en dat men de zijden des veelhoeks, op zoo veel onderscheidene wijzen, als mogelijk is, aan elkander kan voegen, zonder dat daardoor deszelfs inhoud eenige verandering zal ondergaan.*

XIX. Stelling.

§. 513. *Onder alle* isoperimetrische *veelhoeken, hetzelfde aantal zijden of hoeken hebbende, is de regelmatige (dat is, die gelijkzijdig en gelijkhoekig is,) de grootste.*

Betoog. Want, volgens de *XV Stelling*, moeten de zijden gelijk zijn, en zoo even is bewezen; dat de veelhoek in eenen cirkel moet kunnen beschreven worden: maar dit kan hij (*I. Stell.*) niet, zonder gelijkhoekig te zijn; derhalve, *enz.*

III. Hulpstelling. *Fig.* 209.

§. 514. *De hoeken (A B C en D E F), in onderscheidene cirkels, aan het middelpunt staande, zijn in de regte reden der bogen, op welke die hoeken staan, en in de omgekeerde reden van de stralen, met welke deze bogen beschreven zijn. Dat is:*

$$\text{hoek } ABC : \text{hoek } DEF = \frac{\text{boog } AC}{AB} : \frac{\text{boog } DF}{DE}.$$

Betoog. Beschrijf, uit *E*, met *E G* = *A B*, als straal, den cirkelboog *G H*; dan is (*II. Gev. XVIII. Stell. V. B.*) *hoek B* : *hoek E* = *boog A C* : *boog G H* $= \frac{\text{boog } AC}{AB} : \frac{\text{boog } GH}{EG}$; maar nu is (*XVIII. St. V. B.*) *boog G H* : *E G* = *boog D F* : *D E*; derhalve $\frac{\text{boog } GH}{EG} = \frac{\text{boog } DF}{DE}$: stellende nu, in de voorgaande evenredigheid, in plaats van den vierden term, de grootheid, welke aan dezelve gelijk is; dan verkrijgt men: *hoek A B C* : *hoek D E F* $= \frac{\text{boog } AC}{AB} : \frac{\text{boog } DF}{DE}$.

XX. Stelling. *Fig.* 210.

§. 515. *Van twee regelmatige veelhoeken, welke denzelfden om-*

 trek

trek hebben, heeft die, welke het meeste aantal zijden of hoeken heeft, ook den grootsten inhoud.

Opheldering. Deze waarheid zal bewezen zijn, wanneer men betoogen kan: dat, onder denzelfden omtrek, een $n+1$-hoek grooter inhoud heeft dan een n-hoek.

Betoog. Laten ABC en DEF, twee halve middelpuntsdriehoeken van eenen regelmatigen $n+1$, en van eenen regelmatigen n-hoek zijn, beide denzelfden omtrek hebbende; dan zal $(n+1)\times BC = n\times EF$, en $(n+1)\times hoek\ BAC = n \times hoek\ EDF$ zijn; en daarom zal $hoek\ EDF > hoek\ BAC$ zijn. Wanneer men dan deze driehoeken, op eenen willekeurigen afstand van elkander, op dezelfde lijn AH plaatst; dan zullen de verlengde zijden AC en DF elkander in een punt G ontmoeten. Laat dan de lijn GH, loodregt op AH, getrokken, en, uit de punten A en D, als middelpunten, met AH en DH, als stralen, de cirkelbogen HK en HI beschreven worden. De gelijkvormige driehoeken ABC, AHG, en DEF, DHG, geven dan (*VIII. Stell. IV. B.*) de evenredigheden:

$$BC : AB = HG : AH$$
$$DE : EF = DH : HG$$

en daarom zal (*XVI. Stell. II. B.*)

$$BC\times DE : EF\times AB = DH : AH$$

moeten zijn. Nu is (*zie boven*) $BC : EF = hoek\ A : hoek\ D$; en daarom zal (*XV. Stell. II. B.*)

$$DE\times hoek\ A : AB\times hoek\ D = DH : AH$$

zijn. Wanneer men de voorgaande termen dezer laatste evenredigheid door DE, en de volgende door AB deelt, (zie *Aanm. X. Stell.*)

$$hoek\ A : hoek\ D = \frac{DH}{DE} : \frac{AH}{AB}$$

maar, volgens de *III. Hulpst.* is:

$$hoek\ A : hoek\ D = \frac{boog\ HK}{AH} : \frac{boog\ HI}{DH}$$

derhalve zal men (*I. Stell. II. B.*) eindelijk verkrijgen:

$$\frac{DH}{DE} : \frac{AH}{AB} = \frac{boog\ HK}{AH} : \frac{boog\ HI}{DH}$$

en, omdat het product der uiterste termen gelijk is aan het product der middelsten, zoo heeft men:

$$\frac{DH\times boog\ HI}{DH\times DE} = \frac{AH\times boog\ HK}{AH\times AB},\ \text{of}\ \frac{boog\ HI}{DE} = \frac{boog\ HK}{AB}$$

en daarom $DE : AB = boog\ HI : boog\ HK$. Laat nu, op het verlengde van den $boog\ HI$, $boog\ IL = boog\ HI$ genomen, en, op het verlengde van DL, met $ML = AH$, den $boog\ Lp$ worden beschreven; dan is $boog\ Lp + boog\ Hp$ klaarblijkelijk grooter dan $boog\ HIL$; en daarom $boog\ Hp > boog\ HI$; en, omdat $HK > Hp$ is, zal (*VII. Ax.*) $boog\ HK > boog\ HI$ zijn: in de laatste evenredigheid, is dan ook de apothema AB grooter dan de apothema DE. Nu zijn, volgens de *VIII. Stelling*, de

de inhouden der regelmatige veelhoeken gelijk aan de omtrekken vermenigvuldigd met de apothema's; de inhouden der isoperimetrische veelhoeken, zijn derhalve in dezelfde reden, als de apothema's: maar nu is de apothema van den $n+1$-hoek grooter dan die van den n-hoek; de inhoud van den $n+1$-hoek is dan ook grooter dan die van den n-hoek.

XXI. STELLING. *Fig.* 211.

§. 516. *Onder alle figuren, welke denzelfden omtrek hebben, heeft de cirkel den grootsten inhoud.*

BETOOG. Onder alle veelhoeken, denzelfden omtrek hebbende, is (*XIX. Stell.*) de regelmatige de grootste, en de regelmatige veelhoek wordt, onder denzelfden omtrek, grooter, wanneer men het aantal zijner zijden vermeerdert (*XX. Stell.*). Wij moeten derhalve alleen eenen regelmatigen veelhoek met eenen cirkel van gelijken omtrek vergelijken. Laat DAC de middelpuntsdriehoek van een regelmatigen n-hoek zijn, en de sector $HEFG$ het n- de gedeelte van den cirkel, welke met den n-hoek isoperimetriesch is; dan is de *hoek* $ADC =$ *hoek* EHG, en dan moet de zijde AC van den n-hoek gelijk aan den *boog* EFG zijn, en de inhoud van den n-hoek zal tot dien van den cirkel staan, in dezelfde reden, als de middelpuntsdriehoek DAC, tot den sector $HEFG$, als de apothema BD tot den straal HF. Laat nu de raaklijn IK aan het punt F getrokken, en de stralen HE en HG verlengd worden; dan is, wegens de gelijkvormige driehoeken DAC en HIK, de apothema BD tot den straal FH, gelijk AB tot IF, of gelijk de boog EF tot de raaklijn IF; derhalve staat de inhoud van den veelhoek tot dien van den cirkel, gelijk de boog EF tot de raaklijn IF; maar nu is de raaklijn IF (*XI. Stell.*) grooter dan de boog EF; gevolgelijk is ook de inhoud van den cirkel grooter dan die van den n-hoek, welke met denzelven eenen gelijken omtrek heeft.

ZEVENDE BOEK.

Over de oplossing der meetkunstige Werkstukken, in het algemeen. Verzameling van de meest gebruikelijke en dagelijks voorkomende constructien; benevens eene menigte van uitgelezene Vraagstukken, welke zuiver meetkunstig, in den trant der Ouden, worden opgelost.

---

§. 517. I. Bepaling. Een *Werkstuk* (*Problema*) is zulk een voorstel, waarin, onder zekere voorwaarden, ééne of meer onbekende grootheden moeten gezocht worden. In een Werkstuk komen *gegevene* of *bekende*, en *gevraagde* of *onbekende* grootheden voor, welke, zal de vraag bepaald en oplosbaar zijn, van elkander zoo bepaaldelijk moeten afhangen, dat men, uit die voorwaarden, alleen, het onbekende kan afleiden. De redenering, waardoor men het onbekende bekend maakt of uitvindt, heet *Oplossing* of *Ontknoping* van het Vraagstuk.

§. 518. II. Bepaling. In de meetkunstige Werkstukken, zijn de onbekende, zoowel als de gegevens, altijd punten, lijnen, vlakken of ligchamen, omtrent welke de volgende onderscheidingen moeten in acht genomen worden. 1°. *Alle punten, die men naar welgevallen stelt, worden als bekend aangemerkt.* 2°. *Elke bepaalde of onbepaalde lijn, die men naar welgevallen trekt, wordt, even als alle punten, die men in dezelve aannemen kan, als bekend aangemerkt.* 3°. *Elke bepaalde of onbepaalde lijn, welke door twee bekende of gegevene punten loopt, wordt als gegeven aangemerkt, en hare rigting, met betrekking tot de overige bekende deelen der figuur, moet dan ook voor bekend gehouden worden.* 4°. *De hoek, onder welken twee gegevene, bekende, of naar welgevallen aangenomene lijnen, elkander doorsnijden, wordt insgelijks als bekend aangemerkt; of een hoek is bekend, wanneer deszelfs beenen bekend zijn.* 5°. *Een punt wordt gezegd gegeven te zijn, wanneer men deszelfs afstand kent tot twee lijnen, welke, in de figuur, naar welgevallen zijn aangenomen; of wel, wanneer dit punt in ééne dezer twee lijnen gelegen en deszelfs afstand tot de tweede lijn bekend is.* 6°. *Eene lijn is in stelling gegeven, wanneer eenig punt, door welke deze lijn loopen moet, benevens de hoek, onder welke deze lijn eene gegevene lijn doorsnijdt, bekend of gegeven zijn.* 7°. *Deze lijn is alleen in grootte gegeven,* wan-

wanneer hare lengte, zonder hare plaatsing of stelling, bekend is. 8°. *Zij is in stelling en grootte beide gegeven, wanneer zoowel hare lengte, als de hoek, onder welken zij eene gegevene lijn doorsnijdt, bekend is.* 9°. *Een cirkel is in stelling gegeven, wanneer zijn middelpunt,* 10°. *in grootte, wanneer zijn straal,* 11°. *in stelling en grootte, wanneer het middelpunt, benevens de straal gegeven zijn.* 12°. *De punten, in welke gegevene lijnen en cirkels elkander doorsnijden, zijn, op dezelfde wijze, bekend of gegeven.* Alle deze bepalingen behelzen zoo vele klaarblijkelijke waarheden, waarvan men de gegrondheid, bij een oppervlakkig nadenken, gevoelen zal, en bij welke nog vele andere zouden kunnen gevoegd worden.

§. 519. III. BEPALING. Een meetkunstig Werkstuk wordt, op tweederlei wijze, *of door constructie, of door berekening,* opgelost. — Door *constructie,* wanneer men, door het trekken van lijnen en cirkels, onbekende punten, lijnen, hoeken, *enz.* bepaalt; of eene figuur, onder gegevene omstandigheden of voorwaarden, zamenstelt, *enz. Deze wijze van oplossen wordt, als van alle getal en van alle berekening volstrekt onafhankelijk zijnde, als zuiver meetkunstig aangemerkt.* — Door *berekening,* wanneer men de stelling van punten, lijnen, benevens de onbekende grenzen eener figuur, in grootte en stelling bepaalt, door te vinden, hoeveelmaal de aangenomene éénheid of *modulus* in deze onbekende deelen begrepen is. — Voorbeelden van deze soort van oplossing zijn reeds, in *Bijv. XV. Stell. III. B.; Bijv. XVI. Stell. III. B.; op XVIII. en XIX. Stell. III. B. enz.* voorgekomen. *De oplossing door constructie zou, in vele gevallen, de eenvoudigste en de naauwkeurigste zijn, indien men van de onvolkomenheid der werktuigen, die men in dezelve gebruiken moet, niet afhing. De oplossing door berekening verdient, in verre de meeste gevallen, den voorrang.* De berekening is een onfeilbaar en bijgevolg het zekerste werktuig, hetwelk slechts, in de bepaling der onmeetbare grootheden, eene onzekerheid nalaat, die echter, zonder ophouden, binnen nadere en nadere grenzen kan beperkt worden.

§. 520. AANMERKING. De oude Meetkundigen bedienden zich, in de constructie hunner werkstukken, van geene andere lijnen, dan van de regte lijn en den cirkel; en deze lijnen worden ook inderdaad, het gemakkelijkst, en met de meeste naauwkeurigheid, beschreven: nogtans bestaat er slechts eene zekere klasse van werkstukken, welke door regte lijnen en cirkels, of, zoo als men het noemt, met liniaal en passer, kunnen opgelost worden; *en dit zijn alle zulke*

werkstukken, welke, rekenkunstig opgelost zijnde, van geene hoogere dan van eene tweede magts vergelijking afhangen. Wij zullen ons met deze soort van werkstukken, in dit Boek, alleen ophouden. Ten aanzien van de uitvoering der constructien nu, moeten wij aanmerken: 1°. *dat het papier, waarop de constructie wordt uitgewerkt, in een volkomen plat vlak moet liggen:* 2°. *dat men de lijnen en cirkels zoo fijn mogelijk trekken moet, ten einde des te naauwkeuriger de ware punten van doorsnijding te kunnen onderscheiden.*

I. *Oplossing der meest gebruikelijke en dagelijks voorkomende Werkstukken.*

§. 521. I. Werkstuk. *Fig.* 212. *Twee punten (A en B) gegeven zijnde, zoo veel andere punten, als men begeert, te vinden, welke, met deze gegevene punten, in dezelfde regte lijn gelegen zijn?*

Constructie. Men beschrijve, uit de gegevene punten *A* en *B*, met eenen straal, gelijk, of grooter, dan *AB*, twee cirkelbogen, elkander in *C* en *D* doorsnijdende. Uit deze punten *C* en *D*, met eenen straal, grooter dan *AC*, twee andere cirkelbogen, welke elkander in de punten *E* en *G* snijden; dan liggen deze punten *E* en *G*, met de gegevene *A* en *B*, in dezelfde regte lijn.

Betoog. Want, omdat (*constr.*) $AC = AD$; $EC = ED$; $BC = BD$; $GC = GD$ is, liggen (*XX. Stell. I. B.*) de punten *F, E, A, B*, in dezelfde regte lijn.

Aanmerking. Men zal, op dezelfde wijze, zoo veel punten *F, H*, als men begeert, in de rigting van *AB*, kunnen vinden.

§. 522. II. Werkstuk. *Fig.* 213. *Eene gegevene bepaalde regte lijn (AB) in twee gelijke deelen te verdeelen?*

Constructie. Beschrijf, met eene opening des pasfers, grooter dan de helft van *AB*, twee cirkelbogen, of cirkels, welke elkander, in de punten *C* en *D*, snijden: trek de lijn *CD*; dan zal deze de gegevene lijn *AB*, in het punt *E*, in twee gelijke deelen *AE* en *BE*, verdeelen.

Betoog. Want, omdat de punten *C* en *D* op gelijken afstand van de punten *A* en *B* liggen, loopt (*XX. Stell. I. B.*) de lijn *CD* door het midden der gegevene lijn *AB*.

§. 523. III. Werkstuk. *Fig.* 214. *Uit een gegeven punt (C), in eene gegevene lijn (AB), eene loodlijn op dezelve op te rigten?*

I. Constructie. Beschrijf, uit het gegevene punt *C*, met eene willekeurige opening des pasfers, eenen cirkel, welke de gegevene lijn, in de punten *A* en *B*, snijdt; en met eenen straal, grooter dan *AC*, twee cirkelbogen, die elkander in *D* snijden; dan zal (*XIII. Stell. I B.*) de lijn *CD* loodregt op *AB* staan.

II. Constructie. *Fig.* 215. Wanneer het gegeven punt *B* op het einde der

der gegevene lijn valt; dan befchrijve men, met eenen ftraal, naar welgevallen genomen, uit het gegevene punt *B*, den boog *CD*; uit *C*, met denzelfden ftraal, eenen boog, die den eerften in *D* fnijdt; met denzelfden ftraal, uit *D*, eenen boog *FG*; trek door de punten *C* en *D*, de lijn *CDF*, welke den laatften boog *FG* in *F* doorfnijdt; dan zal de lijn *BF*, welke door de punten *B* en *F* loopt, loodregt op *AB* ftaan.

BETOOG. Want, omdat, volgens de conftructie, *CD* = *DB* = *DF* is, ftaat de hoek *CBF* in eenen halven cirkel, en is (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) regt.

§. 524. AANMERKING. Met voordeel bedient men zich, in de conftructien der werkftukken, van eenen, uit hout of andere ftoffen, vervaardigden regthoekigen driehoek *ABC*, *fig.* 216, welks kanten zuiver bewerkt en regt zijn, en welker zijden *AB* en *BC*, zoo volmaakt mogelijk, een regten hoek maken.

III. CONSTRUCTIE. *Fig.* 217. Men legge dan ééne der regthoekszijden *MN* van zulk eenen driehoek langs de gegevene lijn *AB*, en fluite tegen de hypothenufa *LN*, een zuiver liniaal *PQ*; (echter kan men daartoe ook eenen dergelijken driehoek gebruiken). Dit liniaal onbewegelijk in deszelfs ftand vasthoudende, fchuift men den driehoek *LMN* langs hetzelve, tot dat, in den ftand *lmn*, de regthoekszijde *LM*, of *lm*, door het gegevene punt *C* gaat. Men trekke dan de lijn *lCm*, welke, omdat *LM* evenwijdig aan *lm*, en derhalve *hoek M* = *hoek C* is, regthoekig op *AB* zal ftaan.

§. 525. IV. WERKSTUK. *Fig.* 218. *Uit een gegeven punt* (*P*), *eene loodlijn, op eene gegevene lijn* (*AB*), *te laten vallen?*

I. CONSTRUCTIE. Befchrijf, uit het gegevene punt *P*, met eenen ftraal, groot genoeg, om de lijn *AB* te kunnen fnijden, eenen cirkelboog, welke de gegevene lijn, in de punten *A* en *B*, doorfnijdt: uit de punten *A* en *B*, met denzelfden ftraal, of dezelfde opening des pasfers, (waarvoor men nogtans eene grootere of kleinere opening nemen kan,) twee cirkelbogen, die elkander in *C* doorfnijden; dan zal (*XX. Stell. I. B.*) de lijn *PC*, welke de punten *P* en *C* vereenigt, loodregt op *AB* ftaan.

II. CONSTRUCTIE. *Fig.* 219. Men neme, in de gegevene lijn *AB*, twee punten *A* en *B*, en befchrijve, uit deze punten, met *AP* en *BP*, als ftralen, twee cirkelbogen, welke elkander, behalve in het punt *P*, nog in het punt *C* doorfnijden; dan zal (*XX. Stell. I. B.*) *AB* loodregt op *PC* of *PD* loodregt op *AB* ftaan.

III. CONSTRUCTIE. *Fig.* 220. Men neme, in de lijn *AB*, een punt *A*, naar welgevallen, trekke de lijn *AP*; deele dezelve, in *C*, in twee gelijke deelen; en befchrijve, uit *C*, met *AC*, eenen cirkel, welke de lijn *AB*, behalve in het punt *A*, nog in het punt *B* fnijdt; indien men dan de lijn *PB* trekt; dan zal deze (*V. Gev. XX. Stell. V. B.*) regthoekig op *AB* ftaan.

IV. CONSTRUCTIE. *Fig.* 221. Men legge den regthoekigen driehoek *LMN*,

met de regthoekszijde *M N*, langs de gegevene lijn *A B*, en het liniaal *Q R* langs de hypothenusa *L N*. Het laatste, in deszelfs stand, onbewegelijk houdende, schuive men den driehoek *L M N* langs het liniaal, tot dat dezelve in den stand *l m n* kome, in welken de regthoekszijde *l m* door het gegevene punt *P* gaat, en men trekke dan de lijn *l m*, welke de begeerde loodlijn zal zijn.

§. 526. V. Werkstuk. *Fig.* 222. *Een punt (C), in eene lijn (AB), gegeven zijnde, door hetzelve eene lijn (C D) te trekken, die, met de gegevene lijn (A B), eenen hoek (B C D), gelijk zijnde aan een gegevenen hoek (P Q R), maken zal?*

Constructie. Men beschrijve, met eene opening des passers, naar welgevallen genomen, uit het hoekpunt *Q* van den gegevenen hoek *P Q R*, als ook, uit het gegevene punt *C*, twee cirkelbogen, en men make (*II. Gev. XVII. Stell. V. B.*) de *boog B D* = den *boog P R*; wanneer men dan, uit het punt *C*, door het punt *D*, de lijn *C D* trekt; dan zal deze de begeerde zijn; want de hoek *C* zal dan (*I. Gev. XVII. Stell. V. B.*) = den hoek *Q* zijn.

Aanmerking. Wanneer men, links van de gegevene lijn *A B*, den *boog B D'* = den *boog P R* neemt, en de lijn *C D'* trekt; dan zal deze ook met de gegevene lijn *A B*, den *hoek B C D'* = den *hoek Q* maken: er bestaan alzoo op dit werkstuk twee oplossingen.

§. 527. VI. Werkstuk. *Fig.* 223. *Door een gegeven punt (P), eene lijn, evenwijdig aan eene gegevene lijn (A B), te trekken?*

I. Constructie. *Fig.* 223. Neem, in de gegevene lijn *A B*, een punt *C*, naar welgevallen; trek, door hetzelve en het gegevene punt *P*, de lijn *C P F*, en maak (*V. Werkst.*) *hoek F P E* = *hoek B C P*; dan zal (*XXV. Stell. I. B.*) *D E* evenwijdig aan *A B* zijn.

II. Constructie. *Fig.* 224. Neem, in de gegevene lijn *A B*, twee punten *A* en *B*, naar welgevallen; beschrijf, uit *A*, met eenen straal, gelijk aan de lijn *P B*, eenen cirkelboog *p q*; en, uit *P*, met eenen straal, gelijk aan de lijn *A B*, een anderen cirkelboog *r s*, welke den eersten in het punt *C* doorsnijdt; dan zal de lijn *P C* evenwijdig aan *A B* loopen.

Betoog. Want *A B* = *C P* en *A C* = *B P* zijnde, zal (*II. Stell. III. B.*) *P C* evenwijdig aan *A B* loopen.

III. Constructie. *Fig.* 225. Trek, door het gegevene punt *P*, eene onbepaalde lijn *P C*, welke de gegevene *A B*, in het punt *B*, doorsnijdt; maak *B C* = *P B*, en trek, door *C*, wederom eene lijn *C D*, welke de gegevene in *A* snijdt: indien men dan *A D* = *A C* maakt, en *P D* trekt, dan zal deze laatste lijn (*II. Stell. IV. B.*) evenwijdig aan *A B* loopen.

IV. Constructie. *Fig.* 226. Neem, in de gegevene lijn *A B*, een punt *C*, naar welgevallen; beschrijf, uit dit punt *C*, met den straal *C P*, eenen cirkel, welke de gegevene lijn *A B*, in de punten *A* en *B*, doorsnijdt; men neme dan (*II Gev. XVII. Stell. V. B.*) *boog A D* = *boog P B*; dan zal de lijn *P D*, welke door de punten *P* en *D* loopt, (*XIV. Stell. V. B.*) evenwijdig aan *A B* zijn.

V. Con-

V. CONSTRUCTIE. *Fig.* 227. Gewoonlijk gebruikt men tot de constructie van de evenwijdige lijnen een regthoekigen driehoek. Men legge de regthoekszijde *L M* van den driehoek *L M N*, langs de gegevene lijn *A B*, en het liniaal *R S*, langs de zijde *L N*, schuive (het liniaal vasthoudende) den driehoek *L M N* langs hetzelve, tot dat, in den stand *l m n*, de zijde *L M* of *l m* door het punt *P* gaat; dan zal, omdat de lijnen *L B* en *l m*, regthoekig op *l N* staan, de lijn *l P m* evenwijdig aan *A B* zijn.

§. 528. VII. WERKSTUK. *Fig.* 228. *Op eenen afstand, gelijk aan eene gegevene lijn (P) zijnde, eene lijn, evenwijdig aan eene gegevene lijn (A B), te trekken.*

CONSTRUCTIE. Neem, in de gegevene lijn *A C*, een punt *B*, naar welgevallen; maak (*III. Werkst.*) *B D* loodregt op *A C*; en trek, na *B D* = *P* genomen te hebben, de lijn *D E*, evenwijdig aan *A C*; dan bevindt deze zich (*XXXIX. Bep. I. B.*) op eenen afstand van *A B*, die gelijk is aan de gegevene lijn *P*.

§. 529. VIII. WERKSTUK. *Fig.* 229. *Door een gegeven punt (P), eene lijn te trekken, welke eene gegevene lijn (A B), onder eenen hoek, gelijk aan een gegevenen hoek (Q) zijnde, ontmoet?*

CONSTRUCTIE. Neem, in de gegevene lijn *A B*, een punt *A*, en trek door hetzelve (*V. Werkst.*) eene lijn *A C* of *A C'*, met *A B* eenen hoek, gelijk aan den gegevenen hoek *Q*, makende; wanneer men dan door het gegevene punt *P*, de lijn *P D* of *P D'*, evenwijdig aan *A C* of *A C'*, trekt; dan zal deze de begeerde lijn zijn.

BETOOG. Want, volgens de *XXIV. Stell. I. B.* zal *hoek P D B* = *hoek C A B* = *hoek Q* zijn.

§. 530. IX. WERKSTUK. *Fig.* 230. *Een hoek (A B C) gegeven zijnde, dezen hoek te vermenigvuldigen; dat wil zeggen, door constructie, eenen hoek te vinden, die twee, drie, vier, enz. malen dezen gegevenen hoek bevat?*

CONSTRUCTIE. Behalve de constructie, welke, in het *II. Gevolg* op de *XVII. Stelling V. Boek*, voorkomt, kan men de begeerde hoeken nog aldus construeren. Met eenen straal, naar welgevallen genomen, beschrijve men, uit het punt *B*, eenen cirkelboog, welke één der beenen van den gegevenen hoek, bij voorbeeld, het been *B C*, in *D* snijdt; uit *D*, met dezelfde opening, eenen boog, welke *A B*, in *E* snijdt; uit *E*, met dezelfde opening, eenen boog, welke *B C*, in *F* snijdt; uit *F*, met dezelfde opening, eenen boog, welke *A B*, in *G* snijdt; uit *G*, met dezelfde opening, eenen boog, welke *B C*, in *H* snijdt; *enz.*; dan zal, indien men de lijnen *D E*, *E F*, *F G*, *G H*, *enz.* trekt, *hoek E D F* = 2 *hoek B*; *hoek F E G* = 3 *hoek B*; *hoek G F H* = 4 *hoek B*; *hoek A G H* = 5 *hoek B*; *enz.* zijn.

BETOOG. Want; omdat *B D* = *D E* is, zoo zal (*IV. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) *hoek E D F* = 2 *hoek B* zijn; maar *D E* = *E F* zijnde, zoo zal *hoek E D F* = *hoek E F D* = 2 *hoek B* zijn; nu is (*XVIII. Stell. I. B.*) *hoek*

hoek FEG = *hoek B* + *hoek BFE* = 3 *hoek B*. Op dezelfde wijze betoogt men: dat *hoek GFH* = 4 *hoek B* is, *enz*.

§. 531. X. Werkstuk. *Fig.* 231. *Een gegevenen hoek* (*ABC*) *in twee gelijke deelen te verdeelen?*

I. Constructie. Beschrijf, uit het hoekpunt *B* van den gegevenen hoek, eenen cirkelboog *AC*, en, met denzelfden of een grooter of kleiner straal, uit *A* en *C*, twee andere cirkelbogen, die elkander in *D* snijden; dan zal de lijn, welke, van het hoekpunt *B*, door dit punt *D* getrokken wordt, den gegevenen hoek in twee gelijke deelen verdeelen.

Betoog. Want, trekkende de lijnen *AD* en *CD*, dan zijn (*XIII. Stell. I. B.*) de driehoeken *ABD* en *CBD*, gelijk- en gelijkvormig, en derhalve *hoek ABD* = den *hoek CBD*.

II. Constructie. *Fig.* 232. Verleng *AB*. Neem, op het verlengde van *AB*, het punt *E*; *BC* = *BE*, en trek *BD* evenwijdig aan *CE*; dan zal *hoek ABD* = *hoek CBD* zijn.

Betoog. Want, wegens de evenwijdige lijnen *CE* en *BD*, en den gelijkbeenigen driehoek *CBE*, is (*XIV*, *XVIII en XXVI. Stell. I. B.*) *hoek ABD* = *hoek BEC* = *hoek BCE* = *hoek CBD*.

Aanmerking. Men kan dan ook een gegevenen hoek, in 4, 8, 16, 32, *enz*. gelijke deelen, verdeelen: doch met den passer en het liniaal, kan geen hoek in 3, 5, 6, 7, 9, 10, *enz*. gelijke deelen verdeeld worden. Wanneer men nogtans (*fig.* 230.) zoo veel onbuigbare lijnen, van gelijke lengte, *BD*, *DE*, *EF*, *FG*, *enz*. en, om de punten *D*, *E*, *F*, *G*, beweegbaar zijnde, als de gegevene hoek in deelen moet verdeeld worden, tusschen twee andere, om het punt *B*, beweegbare lijnen *AB* en *BC*, zoodanig plaatst, dat de hoekpunten *D*, *E*, *F*, *G*, in deze laatste lijnen *BE* en *BC* blijven; dan zal men dit stelsel van lijnen zoodanig plaatsen kunnen, dat de laatste lijn, bij voorbeeld, *GH*, met *AG* den gegeven hoek maakt en dan zal de hoek *B* het evenmatig deel van den gegeven hoek, en, in het geval der figuur, één-vijfde gedeelte van denzelven zijn.

§. 532. XI. Werkstuk. *Fig.* 233. *Eenen driehoek te construeren, welks zijden aan drie gegeven lijnen* (*P*, *Q en R*) *gelijk zijn?*

Constructie. Men make *AB* = *P*, en beschrijve, uit *A* en *B*, met de lijnen *Q* en *R*, als stralen, de cirkelbogen *pq* en *rs*, die elkander in *C* snijden; wanneer men dan de lijnen *AC* en *BC* trekt; dan zal *ABC* de begeerde driehoek zijn. — De som van twee der gegevene lijnen moet (*VII. Stell. I. B.*) grooter dan de derde zijn, anders is de vraag onmogelijk.

§. 533. XII. Werkstuk. *Eene figuur te construeren, gelijk- en gelijkvormig zijnde aan eene gegevene figuur?*

Men noemt zulks eene figuur over te brengen of te kopieren; hetwelk op verscheidene wijzen, waarvan de volgende de voornaamste zijn, kan uitgevoerd worden.

I. Constructie. I. Geval. *Fig.* 234. Wanneer de gegevene figuur regtlijn

lijnig is; dan zal men, uit al hare hoekpunten, *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, evenwijdige lijnen *Aa*, *Bb*, *Cc*, *enz.* trekken, waaraan men eene gelijke lengte zal geven; de uiteinden *a*, *b*, *c*, *d*, *enz.* dezer evenwijdige lijnen zullen dan (*XXXII. Stell. I. B.*) de hoekpunten der begeerde figuur zijn.

II. Geval. *Fig.* 235. Is de figuur niet regtlijnig; dan zal men nogtans, naar aanleiding van de *XXXII. Stell. I. B.* dezelve, als boven, construeren. Men hechte het papier *P*, waarop de gegevene figuur geteekend is, benevens een ſtuk papier *Q*, waarop men de kopij wil overbrengen, op een teekenbord, en trekke, met een fijn potlood, eene genoegzame menigte van evenwijdige lijnen *Aa*, *Bb*, *Cc*, en men make *Bb* = *Aa* = *Cc*; dan zal men eene figuur verkrijgen, die gelijk- en gelijkvormig aan de gegevene zal zijn.

II. Constructie. *Fig.* 236. Laat *ABCDE* de gegevene figuur zijn, (de wijze van conſtructie, die hier beſchreven zal worden, geldt voor de kromlijnige figuren zoowel als voor de regtlijnige,) men trekke eene onbepaalde lijn *PQ*, naar welgevallen, en late, uit al de hoekpunten, of voorname punten der gegevene figuur, loodlijnen *AK*, *BI*, *CG*, *enz.* op deze lijn *PQ* vallen. Voorts trekke men op het papier, waarop men de kopij overbrengen wil, eene onbepaalde lijn *pq*; men neme op dezelve *pf* = *PF*, *fg* = *FG*, *gh* = *GH*, *hi* = *HI*, *ik* = *IK*: men trekke voorts, uit de punten *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, op *pq*, de loodlijnen *fd*, *gc*, *he*, *ib*, *ka*, en, men make eindelijk, *fd* = *FD*; *gc* = *GC*; *he* = *HE*; *ib* = *IB*; *ka* = *KA*; dan zullen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de overgebragte punten zijn, het geen gemakkelijk uit de gelijke- en gelijkvormige regthoekige trapeziums, *CDFG* en *cdfg*, *enz.* zal kunnen betoogd worden.

§. 534. XIII. Werkstuk. *Fig.* 237. *Een parallelogram, onder twee gegevene zijden* (*P en Q*) *en een gegevenen hoek* (*R*) *zamen te ſtellen?*

Constructie. Maak (*V. Werkſt.*) *hoek BAC* = den gegeven *hoek R*; neem *AB* = *P* en *AC* = *Q*; trek *CD* aan *AB*, en *BD* aan *AC* evenwijdig; dan is (*I en V. Bep. III. B.*) *ABDC* het begeerde parallelogram.

Aanmerking. Wanneer men eenen regthoek, onder eene gegevene lengte en breedte, moet zamenſtellen; dan zal men den hoek *BAC* regt maken, en voor het overige, op dezelfde wijze, als in de conſtructie opgegeven is, te werk gaan.

§. 535. XIV. Werkstuk. *Fig.* 238. *Op eene gegevene regte lijn* (*AB*), *een vierkant te beſchrijven?*

Constructie. Trek (*III. Werkſt.*) *AC* loodregt op *AB*; maak *AC* = *AB*, en trek *CD* aan *AB*, en *BD* aan *AC* evenwijdig; of, beſchrijf, uit *B* en *C*, met eenen ſtraal, gelijk aan *AB*, twee cirkelbogen, die elkander in *D* ſnijden, en trek de lijnen *CD* en *BD*; dan zal (*III en V. Bep. III. B.*) *ABDC* een vierkant zijn, op de lijn *AB* beſchreven.

§. 436. XV. Werkstuk. *Fig.* 239. *Een vierkant zamen te ſtellen, gelijk zijnde aan de ſom van eenige gegevene vierkanten, welke on-*

der-

derfteld worden, op gegevene lijnen (AB, BC, CD, DE en EF), beschreven te zijn?

Constructie. Stel de zijden AB, BC, CD, DE, EF, der gegevene vierkanten, op dezelfde regte lijn, nevens elkander, en trek de onbepaalde loodlijnen, BG, CH, DI, EK, FL, op AI; beschrijf uit B, met AB, als straal, den cirkelboog, die BG in G snijdt; uit C, met CG, den boog, die CH in H; uit D, met DH, den boog HI, die DI in I; uit E den boog, die EK in K snijdt, *enz.* indien er nog meer vierkanten gegeven waren. Nu zal $BG^2 = AB^2$; $CG^2 = AB^2 + BC^2$; $DH^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$; $EI^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$ zijn, zoo als uit de *XVI. Stell. III. B.* ligtelijk te zien is. — *Men zal, op deze wijze, gemakkelijk een vierkant kunnen vinden, dat gelijk n-maal een gegeven vierkant is; ook zal men, wanneer eenige lijn als éénheid aangenomen wordt, door dezelfde constructie, de lijnen vinden, welke door* $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, enz. *worden uitgedrukt.*

§. 537. XVI. Werkstuk. *Fig.* 240. *Een vierkant zamen te stellen, gelijk zijnde aan het verschil van twee gegevene vierkanten?*

Constructie. Stel op AB, de zijde van het kleinste der twee gegevene vierkanten, eene loodlijn BC; beschrijf, uit A, als middelpunt, met de zijde van het grootste vierkant, eenen cirkelboog, welke BC in C snijdt; dan is (*XVI. Stell. III. B.*) BC^2 of $BCED$ gelijk aan het verschil der vierkanten, welke, op de gegevene lijnen, AC en AB, beschreven zijn.

§. 538. XVII. Werkstuk. *Fig.* 241. *Eenen regthoek, welks inhoud gelijk is aan dien van een gegevenen driehoek (ABC), te construeren?*

Constructie. Men late de loodlijn CD, uit het toppunt C des driehoeks, op zijne basis AB vallen; men deele dezelve (*II Werkst.*) in E, in twee gelijke deelen. Men trekke, door E, de lijn FG evenwijdig, aan AB; door A en B, de lijnen AG en BF, evenwijdig aan CD; dan zal (*VIII. Stell. III. B*) *regth.* $ABFG =$ *drieh.* ABC zijn.

§. 539. XVIII. Werkstuk. *Fig* 242. *De zijde van een vierkant te vinden, welks inhoud gelijk zal zijn aan dien van eenigen gegevenen regthoek (ABCD)?*

Constructie. Verleng de zijde AB; maak $BE = BC$; beschrijf op AE een halven cirkel; verleng BC tot in F; dan zal (zie *Aanm. XXI. Stell. V. B*) BF de zijde van het begeerde vierkant zijn.

Aanmerking. Het is uit de *XV. Stell. III B.* gebleken hoe, tot elke veelhoekige figuur, eenen driehoek van denzelfden inhoud kan gevonden worden; daar men nu, naar aanleiding van de twee voorgaande werkstukken, tot elken driehoek eenen regthoek, en tot elken regthoek een vierkant van denzelfden inhoud vinden kan, *zoo zal men ook een vierkant vinden kunnen, welks inhoud aan dien van een gegevenen veelhoek gelijk zal zijn.*

§. 540. XIX. WERKSTUK. *Fig.* 243 *en* 244. *Eene gegevene regte lijn* (*A B*), *in een gegeven aantal gelijke deelen, te verdeelen?*

I. CONSTRUCTIE. *Fig.* 243. Zij *A B* de gegevene lijn, welke men, bij voorbeeld, in *tien* gelijke deelen begeert te verdeelen. Men trekke, uit het punt *A*, eene onbepaalde regte lijn *A C*, met *A B* een willekeurigen hoek makende. Op deze lijn, neme men, van *A* af te rekenen, tien gelijke deelen, elk naar welgevallen; vereenige, door de lijn *B C* het uiteinde *C* van het laatste deel met het punt *B*, en trekke eindelijk door al de deelpunten lijnen, die evenwijdig aan *B C* loopen; dan zullen deze evenwijdige de lijn *A B* (*III. Gev. I. Stell. IV. B.*) in tien gelijke deelen verdeelen.

II. CONSTRUCTIE. *Fig.* 244. Men trekke, uit *A*, eene lijn *A C*; en uit *B*, de lijn *B D*, evenwijdig aan *A C*. Op beide lijnen, van de punten *A* en *B* af te rekenen, een aantal van gelijke deelen, dat één minder is, dan het aantal deelen, waarin de lijn *A B* moet verdeeld worden: men vereenige dan de deelpunten der twee lijnen *A C* en *B D*, welke (*XXXI. Stel I. B.*) evenwijdig zullen zijn, en de gegevene lijn in het begeerde aantal gelijke deelen zullen verdeelen.

AANMERKING. Door eene dergelijke constructie, worden alle soorten van schalen zamengesteld. Zie verder *Aanm. II. Stell. IV. B.*

§. 541. XX. WERKSTUK. *Fig.* 245. *Eene gegevene lijn* (*A B*), *in eene gegevene reden, bij voorbeeld, als het getal* twee *tot het getal* drie, *te verdeelen?*

CONSTRUCTIE. Men trekke de onbepaalde lijn *A D*, neme *A C* gelijk aan *twee*, *C D* gelijk aan *drie* gelijke deelen; men trekke de lijn *B D*; en *C E*, evenwijdig aan *B D*; dan zal (*I. Stell. IV. B.*) *A E* : *E B* = *A C* : *C D* = 2 : 3 zijn. — Op dezelfde wijze, zal men de gegevene lijn *A B*, in eene andere reden, als een getal tot een getal, of, als eene lijn tot eene lijn, in twee of meer gelijke deelen, kunnen verdeelen.

§. 542. XXI. WERKSTUK. *Fig.* 246. *Tot drie gegevene lijnen* (*P*, *Q*, *R*), *eene vierde evenredige lijn te vinden?*

CONSTRUCTIE. Trek twee onbepaalde lijnen *A C* en *A E*, onder eenen willekeurigen hoek; neem op de eerste *A B*, de deelen *A B* = *P*, *B C* = *Q*; op de tweede *A D* = *R*; trek *B D*; en, door *C*, de lijn *C E*, evenwijdig aan *B D*; dan zal (*I. Stell. IV. B.*) *A B* : *B C* = *A D* : *D E*; of *P* : *Q* = *R* : *D E* zijn; en *D E* is alzoo de vierde evenredige tot *P*, *Q* en *R*.

§. 543. XXII. WERKSTUK. *Fig.* 247. *Tot twee gegevene lijnen* (*P en Q*), *eene derde evenredige lijn te vinden?*

CONSTRUCTIE. Trek twee onbepaalde lijnen *A B* en *B C*, die elkander onder een regten hoek doorsnijden; maak *A B* = *P*, *B C* = *Q*; trek *A C*, en *C D* loodregt op *A C*; dan zal (*II Gev. XVII. Stell. IV. B.*) *B D* de derde evenredige tot *A B* en *C D*, of tot *P* en *Q*, zijn.

AANMERKING. Indien men *D E*, evenwijdig aan *A C*, *E F* evenwijdig aan

aan *DC* trekt, *enz.* dan zullen de lijnen *AB*, *CB*, *DB*, *BE*, *BF*, *enz.* eene meetkunstige reeks uitmaken.

§. 544. XXIII. Werkstuk. *Fig.* 248. *Tusschen twee gegevene lijnen* (*P en Q*) *eene middenevenredige lijn te vinden?*

Constructie. Stel de twee gegevene lijn, $P = AB$ en $Q = BC$, op dezelfde lijn, nevens elkander, en beschrijf, op deze vereenige lijn *AC*, een halven cirkel; trek *BD*, regthoekig op *AC*; dan is *BD* middenevenredig tusschen *AB* en *BC*, of tusschen *P* en *Q*. Zie *Aanm. XXII. Stell. V. B.*

Aanmerking. *Fig.* 247. *Men kan, door de snijding van lijnen en cirkels, geene twee middenevenredigen tusschen twee gegevene lijnen vinden: nogtans is de volgende werktuigelijke constructie volmaakt naauwkeurig.* Men plaatse de twee gegevene lijnen *AB* en *BE* op de beenen van een regten hoek *ABE*, welks beenen onbepaaldelijk verlengd zijn. Men schuive nu twee zuivere winkelhaken, *ACD* en *EDC*, zoodanig, dat derzelver zijden aan elkander sluiten, de beenen *AC* en *ED* door de punten *A* en *E* gaan, en de hoekpunten *C* en *D* op de lijnen *BC* en *BD* blijven: deze winkelhaken in dien stand gebragt zijnde, zoo zijn *BC* en *BD* de gevraagde middenevenredigen.

§. 545. XXIV. Werkstuk. *Fig.* 249. *Een vierkant te vinden, dat tot een gegeven vierkant* (*ABCD*) *in reden staat, als eene lijn* (*P*) *tot eene lijn* (*Q*)?

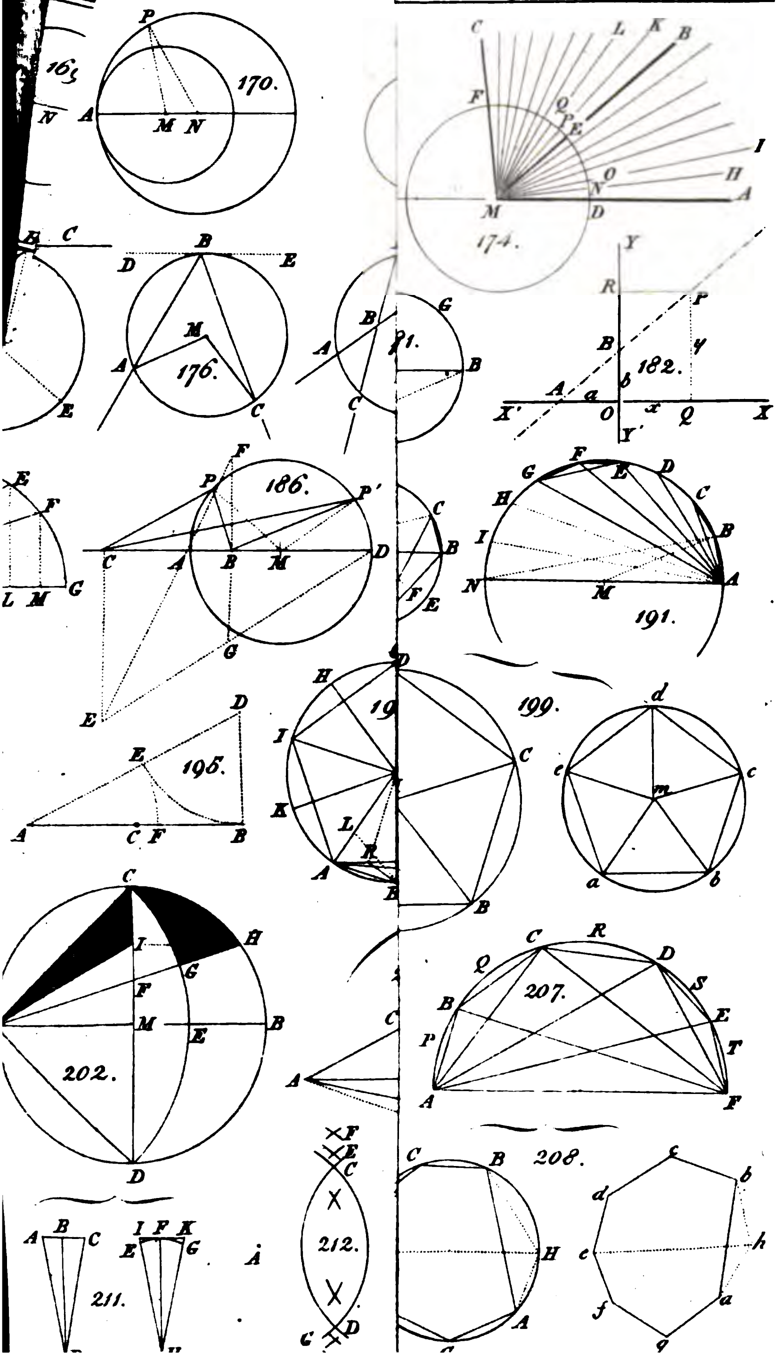
Constructie. Zij *ABCD* het gegevene vierkant. Zoek, volgens het *XXI. Werkstuk*, tot *P*, *Q* en *AB*, de vierde evenredige *AE*; trek *EF*, evenwijdig aan *AD*, en verleng (indien het noodig is,) *CD* tot in *F*; dan is (*XI. Stell. III. B.*) *vierk.* $ABCD$: *regth.* $AEFD = AB . AE = P : Q$. Men moet dus een vierkant vinden, gelijk aan den regthoek *AEFD*. Men make, tot dat einde, (gelijk in het *XVIII. Werkstuk*) $EG = EF = AB$; en beschrijve op *AG* een halven cirkel: indien men dan *EF*, tot aan den omtrek verlengt; dan zal *EH* de zijde van het begeerde vierkant zijn.

§. 546. XXV. Werkstuk. *Fig.* 250. *Op eene gegevene lijn* (*P*), *eenen regthoek te beschrijven, gelijk zijnde aan een gegevenen regthoek* (*ABCD*)?

Constructie. Men brenge op *AB* de lijn $AE = P$ over; trekke *ED* en *BF* evenwijdig aan *ED*; dan zal (*I. Gev. I. Stell. IV B.*) $AB : AE = AF : AD$ zijn, en (*V. Stell. IV. B.*) $AB \times AD = AF \times AE$. De lijn *AF* is dan de breedte van den gevraagden regthoek; zoodat, wanneer men *FG* evenwijdig aan *AE* en *EG* evenwijdig aan *AF* trekt, *AEGF* de begeerde regthoek zal zijn.

§. 547. XXVI. Werkstuk. *Fig.* 251. *Op eene gegevene lijn* (*DE*), *eenen driehoek te beschrijven, gelijkvormig zijnde aan een gegevenen driehoek* (*ABC*)?

I. Con-



170.
174.
176.
182.
186.
191.
195.
199.
202.
207.
208.
211.
212.

aan *DC* trekt, *enz.* dan zullen de lijnen *AB*, *CB*, *DB*, *BE*, *BF*, *enz.* eene meetkunstige reeks uitmaken.

§. 544. XXIII. Werkstuk. *Fig.* 248. *Tusschen twee gegevene lijnen (P en Q) eene middenevenredige lijn te vinden?*

Constructie. Stel de twee gegevene lijn, $P = AB$ en $Q = BC$, op dezelfde lijn, nevens elkander, en beschrijf, op deze vereenige lijn *AC*, een halven cirkel; trek *BD*, regthoekig op *AC*; dan is *BD* middenevenredig tusschen *AB* en *BC*, of tusschen *P* en *Q*. Zie *Aanm. XXII. Stell. V. B.*

Aanmerking. *Fig.* 247. *Men kan, door de snijding van lijnen en cirkels, geene twee middenevenredigen tusschen twee gegevene lijnen vinden: nogtans is de volgende werktuigelijke constructie volmaakt naauwkeurig.* Men plaatse de twee gegevene lijnen *AB* en *BE* op de beenen van een regten hoek *ABE*, welks beenen onbepaaldelijk verlengd zijn. Men schuive nu twee zuivere winkelhaken, *ACD* en *EDC*, zoodanig, dat derzelver zijden aan elkander sluiten, de beenen *AC* en *ED* door de punten *A* en *E* gaan, en de hoekpunten *C* en *D* op de lijnen *BC* en *BD* blijven: deze winkelhaken in dien stand gebragt zijnde, zoo zijn *BC* en *BD* de gevraagde middenevenredigen.

§. 545. XXIV. Werkstuk. *Fig.* 249. *Een vierkant te vinden, dat tot een gegeven vierkant (ABCD) in reden staat, als eene lijn (P) tot eene lijn (Q)?*

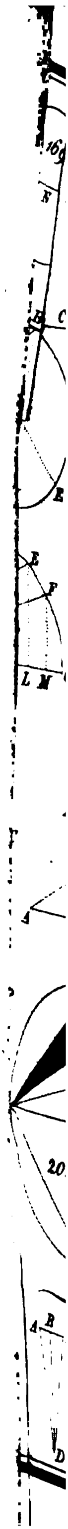
Constructie. Zij *ABCD* het gegevene vierkant. Zoek, volgens het *XXI. Werkstuk*, tot *P*, *Q* en *AB*, de vierde evenredige *AE*; trek *EF*, evenwijdig aan *AD*, en verleng (indien het noodig is,) *CD* tot in *F*; dan is (*XI. Stell. III. B.*) *vierk.* $ABCD$: *regth.* $AEFD = AB \cdot AE = P : Q$. Men moet dus een vierkant vinden, gelijk aan den regthoek *AEFD*. Men make, tot dat einde, (gelijk in het *XVIII. Werkstuk*) $EG = EF = AB$; en beschrijve op *AG* een halven cirkel: indien men dan *EF*, tot aan den omtrek verlengt; dan zal *EH* de zijde van het begeerde vierkant zijn.

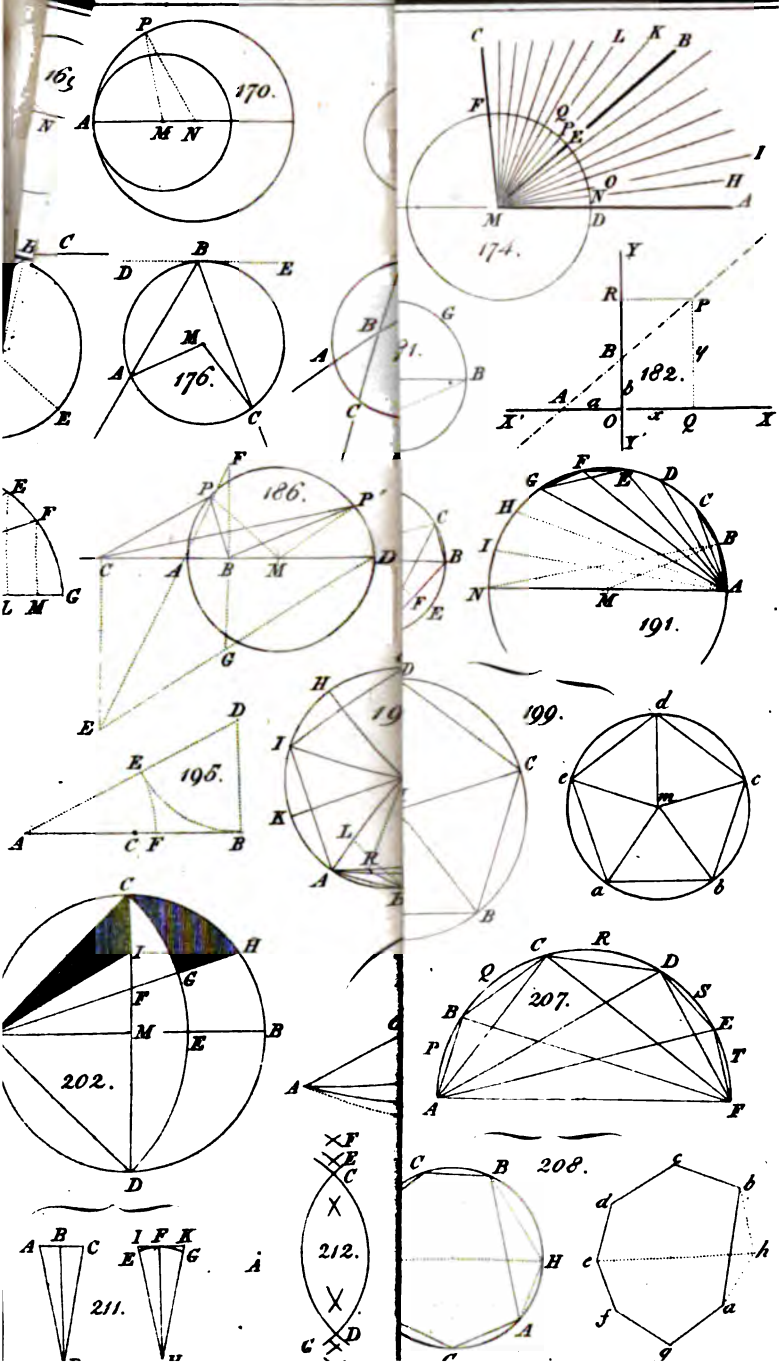
§. 546. XXV. Werkstuk. *Fig.* 250. *Op eene gegevene lijn (P), eenen regthoek te beschrijven, gelijk zijnde aan een gegevenen regthoek (ABCD)?*

Constructie. Men brenge op *AB* de lijn $AE = P$ over; trekke *ED* en *BF* evenwijdig aan *ED*; dan zal (*I. Gev. I. Stell. IV. B.*) $AB : AE = AF : AD$ zijn, en (*V. Stell. IV. B.*) $AB \times AD = AF \times AE$. De lijn *AF* is dan de breedte van den gevraagden regthoek; zoodat, wanneer men *FG* evenwijdig aan *AE* en *EG* evenwijdig aan *AF* trekt, *AEGF* de begeerde regthoek zal zijn.

§. 547. XXVI. Werkstuk. *Fig.* 251. *Op eene gegevene lijn (DE), eenen driehoek te beschrijven, gelijkvormig zijnde aan een gegevenen driehoek (ABC)?*

I. Con-




170.
174.
176.
182.
186.
191.
195.
199.
202.
207.
208.
211.
212.

I. Constructie. Maak (*VIII. Werkst.*) de hoeken *D* en *E*, gelijk aan de hoeken *A* en *B*; dan zullen (*III. Bep. IV. B.*) de driehoeken *D E F* en *A B C* gelijkvormig zijn.

II. Constructie. Men ftelle *D E*, in de rigting van *A B*, of evenwijdig aan *A B*, en trekke de lijnen *D F* en *E F* evenwijdig aan *A C* en *B C*; dan zal (*XXX. Stell. I. B. III. Bep. IV. B.*) de driehoek *D E F* gelijkvormig zijn aan den driehoek *A B C*.

§. 548. XXVII. Werkstuk *Fig.* 252. *Eene figuur te conftrueren, gelijkvormig zijnde aan eene gegevene figuur.*

De XIV. *Stelling* van het IV. *Boek*, behelst reeds eene wijze, om deze conftructie uit te voeren, en, behalve deze, bestaan er nog vele anderen, welke, omdat wij dezelve hier niet kunnen bijbrengen, in onze Lesfen over de Werkdadige Meetkunst, zullen verklaard worden. Wij moeten nogtans doen opmerken: *dat het vervaardigen van alle foorten van kaarten en plans niets anders is, dan dit Werkftuk, in alle deszelfs bijzonderheden, op te lesfen.* Wij zullen ons thans alleenlijk vergenoegen met de volgende conftructie op te geven Laten, *fig.* 252, eenige punten *A*, *B*, *C*, *enz.* voorname en merkwaardige punten van eene figuur of van een terrein gegeven zijn. Neem, in deze figuur, twee lijnen, *I D* en *E G*, naar welgevallen, aan, welke met elkander, in een punt *P*, een regten of fcheven hoek maken; trek op het plan, waarop men de gelijkvormige figuur wil overbrengen, twee lijnen *I'D'* en *E'G'*, naar welgevallen elkander in *P'*, onder eenen hoek gelijk aan den hoek *P*, welke de lijnen *I D* en *E G* maken, doorfnijdende. Men late nu, uit de punten der gegevene figuur, op de aangenomene lijnen *I D* en *E G*, uit de punten *A*, *B*, *C*, *enz.* de loodlijnen *A D*, *B F*, *C I* op *I D*, en de loodlijnen *A E*, *B G* en *C H* op *G E* vallen. Nu overlegge men, in welke reden de afftanden van de punten der overgebragte figuur tot die van de overeenkomftige punten der gegevene figuur moeten ftaan. Stellen wij die reden, als *één* tot *twee*; dan make men $P'D' : PD = P'F' : PF = PI : P'I' = 1 : 2$ en $P'E' : PE = P'G' : PG = P'H' : PH = 1 : 2$, en trekke uit de punten *D'*, *F'* en *I'* loodlijnen op *I'D'*, en uit de punten *E'*, *G'*, *H'* loodlijnen op *E' G'*; de punten *A'*, *B'* en *C'*, alwaar deze loodlijnen elkander fnijden, zijn dan de overgebragte punten. En, wanneer er meer punten gegeven zijn, zoo worden zij, op dezelfde wijze, overgebragt. Het betoog dezer conftructie kan uit de VIII. *Stell.* IV. *B.* gemakkelijk opgemaakt worden.

§. 549. XXVIII. Werkstuk *Fig.* 253. *Het middelpunt van een gegevenen cirkel te vinden?*

Constructie. Neem, in den omtrek, drie punten *A*, *B* en *C*, naar welgevallen, en deel de koorden *A B* en *B C*, in *D* en *E*, midden door; trek de loodlijnen *D M* en *E M* op dezelve; dan zal (X. *Stell.* V. *B.*) *M* het middelpunt des gegevenen cirkels zijn. — Op dezelfde wijze, wordt het middelpunt van eenen cirkel gevonden, welke door drie gegevene punten loopt.

§. 550. XXIX. Werkstuk. *Fig.* 254. *Eenen cirkel te befchrijven,*

ven, welke eene gegevene lijn (A B), in een punt (B), aanraken, en door een gegeven punt (C) zal gaan?

Constructie. Omdat de cirkel door de punten *B* en *C* gaan moet, ligt deszelfs middelpunt (X. *Stell.* V. *B.*) in de lijn *D E*, die loodregt op het midden van *B C* staat; en, omdat de cirkel de lijn *A B*, in het punt *B*, moet aanraken, ligt het middelpunt in de lijn *B D*, welke loodregt op *A B* staat. Men trekke dan *B D*, loodregt op *A B*, vereenige de punten *B* en *C*, trekke (IV. *Werkst.*) eene lijn *E D*, welke loodregt op het midden van *B C* staat; dan is *D* het middelpunt des begeerden cirkels.

§. 551. XXX. Werkstuk. *Fig.* 255. *Door een gegeven punt (P), buiten den omtrek van eenen cirkel gelegen, eene raaklijn tot dien cirkel te trekken?*

Constructie. Vereenig het gegevene punt *P* met het middelpunt *M* des cirkels, en beschrijf op *M P*, als middellijn, eenen cirkel, die den gegevenen, in de punten *A* en *B*, snijdt; dan zullen de lijnen *P A* en *P B* den cirkel, in de punten *A* en *B*, aanraken.

Betoog. Men trekke de stralen *A M* en *B M*; dan zijn (V. *Gev.* XX. *Stel.* V. *B.*) de hoeken *P A M* en *P B M* regte hoeken, en daarom zijn (XII. *Stell.* V. *B.*) *P A* en *P B* raaklijnen.

§. 552. XXXI. Werkstuk. *Fig.* 256. *Op eene gegevene lijn (A B) een cirkelsegment te beschrijven, in hetwelk een hoek, gelijk aan den gegevenen hoek (P Q R) zijnde, kan geplaatst worden?*

Constructie. Men trekke, door het punt *A*, de lijn *A D*, welke met *A B* den *hoek B A D* = den *hoek P Q R* maakt. Wanneer dan, volgens het XXIX. *Werkst.* een cirkel beschreven wordt, welke door de lijn *A D*, in het punt *A*, wordt aangeraakt, en door het punt *B* loopt; dan wordt (XIX. *Stell.* V. *B.*) hoek *B A D* door de helft van den boog *A B* gemeten; en, omdat diezelfde halve boog (I. *Gev.* XX. *Stell.* V. *B.*) den hoek *A E B* meet, zoo zal *hoek A E B* = *hoek B A D* = *hoek P Q R* zijn. Men make daarom *hoek B A D* = *hoek P Q R*; trekke *M C* loodregt op het midden van *A B*; en *A M* loodregt op *A D*; dan zal *M* het middelpunt van het begeerde cirkelsegment zijn. — Of, men trekke *Q S* loodregt op *Q P*, en make *hoek B A M* = *hoek R Q S*; dan zal men ook het middelpunt van het begeerde segment verkrijgen.

§. 553. Aanmerking. Het beschrijven der regelmatige veelhoeken, in- en om- een gegevenen cirkel, volgt uit de betoogde stellingen van het zesde Boek zoo onmiddellijk, dat dezelve hier te plaatsen, slechts eene herhaling van reeds gezegde zaken zijn zou. Ook zullen wij, in de werkdadige Meetkunst, dit onderwerp, gelijk ook de verdeeling van den omtrek des cirkels, opzettelijk behandelen. Intusschen moeten wij den Leerling, die wenscht de opgegevene Werkstukken, door den enkelden passer te leeren uitvoeren, het Italiaansche werk van den Heer L. Mascheroni, getijteld: *Geome-*

metria del compasso, of de Fransche vertaling van hetzelve, bijzonderlijk aanbevelen.

II. *Verzameling van meer ingewikkelde meetkunstige Werkstukken, zuiver meetkunstig, in den trant der Ouden opgelost.*

§. 554. De meeste Werkstukken, welker oplossing en constructie wij leerden kennen, zijn de hulpmiddelen ter constructie van alle andere Meetkunstige Werkstukken. *Om nu een meetkunstig werkstuk op te lossen, begint men met eene figuur voor hetzelve te teekenen, in welke men de vraag, als opgelost zijnde, beschouwt; daarna overweegt men aandachtig, welke bekende eigenschappen van evenredige lijnen, gelijkvormige driehoeken, cirkels,* enz. *welke in die figuur mogten voorkomen, of daarin gemaakt zouden kunnen worden, tot de oplossing of constructie kunnen brengen. Het oplossen der werkstukken in dien trant is dus eene ware meetkunstige oefening, die eene hebbelijkheid moet geven, om met gemak de onbekende eigengenschappen der figuren te ontdekken.* De oplossingen der volgende Werkstukken zullen den Leerling op den weg brengen, om de oplossing van anderen te vinden, en zich met de verklaarde beginselen al meer en meer bekend en gemeenzaam te maken.

§. 555. XXXII. Werkstuk. *Fig.* 257. *Boven eene regte lijn AB, zijn twee punten P en Q gelegen: nu begeert men, uit het punt P, in eene regte lijn PC, naar eenig punt C van de gegevene lijn AB te gaan, en uit dit punt C, tot het andere gegevene punt Q, insgelijks in eene regte lijn, terug te keeren; zoodanig, dat men den kortsten weg aflegge; of, dat de som der lijnen PC en CQ kleiner is, dan wanneer men het punt C ergens anders, meer naar de regter- of naar de linkerhand, nemen mogt.*

Oplossing. Stellende, dat het punt C gevonden zij; dan ziet men terstond: dat, wanneer men uit Q de loodlijn QBR op AB laat vallen, $BR = QB$ neemt, en voorts de lijn CR trekt, de lijn CR (XX. *Stell.* I. *B.*) gelijk aan de lijn CQ zal moeten zijn; derhalve zal $PC + CQ = PC + CR$ zijn. Omdat nu $PC + CQ$ een *minimum* zijn moet, zoo zal ook $PC + CR$ een *minimum* zijn. Het punt C zal derhalve zoo moeten bepaald worden, dat men van P tot C, en van C tot R, of van P tot R, langs den kortsten weg komt; dat is, het punt C zal in de lijn, welke de punten P en R vereenigt, moeten gelegen zijn. Nu is AB, benevens de punten P en Q, gegeven; derhalve zijn de loodlijn QBR en het punt C gegeven. Hieruit volgt dan deze Constructie. Men late uit Q de loodlijn QBR op AB vallen; make $BR = BQ$, en trekke de

lijn *PQ*; dan is het punt *C*, alwaar deze de lijn *AB* doorsnijdt, het begeerde punt.

§. 556. XXXIII. Werkstuk. *Fig.* 258. *Door een gegeven punt (P) eene regte lijn (PQR) te trekken, zoodanig dat derzelver gedeelte (QR), hetwelk tusschen twee gegevene evenwijdige lijnen (AB en CD) gelegen is, gelijk zij aan eene gegevene lijn (V)?*

Oplossing. Onderstellen wij, dat *PQR* de begeerde lijn zij; indien men dan, door een punt *E*, eene lijn *EF*, evenwijdig aan *PQR*, trekt; dan zal (I. *Stell.* III *B.*) $EF = QR$ zijn. Hieruit volgt: dat, wanneer men, uit een punt *E*, als middelpunt, met eenen straal, gelijk aan de lijn *V*, eenen cirkel beschrijft, welke *AB* in de punten *F* en *F'* snijdt, de lijn *PQR* of *PQ'R'*, welke evenwijdig aan de stralen *EF* en *EF'* loopt, de begeerde lijn zal zijn. Dit vraagstuk heeft alzoo twee oplossingen.

§. 557. XXXIV. Werkstuk. *Fig.* 259. *Eene gegevene regte lijn (AB), door een punt (C), zoodanig in twee deelen te verdeelen, dat de regthoek (AC × BC) onder de deelen gelijk zij aan het vierkant, op eene gegevene lijn (P)?*

Oplossing. Onderstellen wij, dat *C* het begeerde punt zij. Wanneer men dan op *AB* een halven cirkel beschrijft, en *CE* loodregt op *AB* stelt; dan zal (XVIII. *Werkst.*) $EC^2 = AC \times BC$ zijn. Nu is $EC = P$ gegeven; wanneer men derhalve, door *E*, de lijn *DEF*, evenwijdig aan *AB* trekt; dan zal de loodlijn *BD*, op het einde van *AB* opgerigt, gelijk aan $CE = P$ zijn: hieruit volgt deze Constructie. Beschrijf op *AB* een halven cirkel; trek *BD* loodregt op *AB*, en maak dezelve gelijk aan *P*; trek door *D*, eene lijn, evenwijdig aan *AB*; deze zal den cirkel, in de punten *E* en *F*, snijden. Laat dan, uit deze punten, de lijnen *EC* en *FC'*, loodregt op *AB* vallen; dan zullen de punten *C* en *C'* de begeerde punten zijn. De vraag heeft derhalve twee oplossingen; doch, wanneer *P* grooter is dan ½ *AB*, dat is grooter dan de straal des halven cirkels; dan zal de lijn *DF* den cirkel niet snijden, en de vraag zal, onder zulk eene bepaling, onmogelijk zijn.

§. 558. XXXV. Werkstuk. *Fig.* 260. *Eene gegevene lijn (AB), tot in eenig punt (C), zoodanig te verlengen, dat de regthoek, welke de geheele lijn, met het verlengde stuk te zamen genomen, tot lengte, en het verlengde stuk tot breedte heeft, gelijk zij aan het vierkant op eene gegevene lijn (P)?*

Oolossing. Wanneer *C* het begeerde punt is, en op *AB*, als middellijn, een halve cirkel beschreven wordt; dan zal, wanneer uit het punt *C* eene raaklijn *CD* getrokken wordt, (I. *Aanmerk.* XXII. *Stell.* V. *B.*) $CD^2 = AC \times BC$ zijn: maar nu moet $AC \times BC = P^2$ zijn: men zal dan het punt *C* zoodanig moeten bepalen, dat de raaklijn $CD = P$ zij. Wanneer men nu *BE* loodregt op *AB* stelt, en gelijk *P* maakt, en voorts de lijn *ME* trekt; dan zal (IX. *Stell.* I. *B.*) $ME = MC$ en $DC = BE = P$ zijn.

zijn. Hieruit volgt dan deze Constructie. Befchrijf op AB een halven cirkel; ftel BE loodregt op AB, en gelijk aan P, en trek ME; maak eindelijk $MC = ME$; dan zal C het begeerde punt zijn.

§. 559. XXXVI. Werkstuk. *Fig.* 261. ***Men begeert, uit een punt (P), hetwelk in de bafis van eenen driehoek (ABC) gelegen is, eenige regte lijnen (PE, PG, enz.) te trekken, welke den driehoek in een zeker aantal ftukken van gelijken inhoud verdeelen?***

Oplossing. Nemen wij: dat de driehoek in vijf gelijke deelen zal verdeeld worden. Wanneer men $AD = \frac{1}{5} AB$ neemt, en de lijn CD trekt; dan zal (XIV. *Stell.* III. *B.*) *drieh.* $ACD =$ *één-vijfde* van *drieh.* ABC zijn; de *drieh.* AEP zal dan aan den *drieh.* ADC gelijk moeten zijn. Wanneer men dus de lijn DE trekt, en van deze gelijke driehoeken den driehoek ADE aftrekt; dan zullen de driehoeken DEP en DEC moeten gelijk zijn; maar deze ftaan op dezelfde bafis; de lijn PC is dan (X. *Stell.* III. *B.*) buiten tegenfpraak evenwijdig aan DE. Nu is P gegeven, derhalve ook PC; en, omdat AB gegeven is, zoo is ook $AD = \frac{1}{5} AB$ gegeven; dus ook het punt D en de lijn DE. Men neme dan $AD = \frac{1}{5} AB$, en trekke DE evenwijdig aan PC; dan zal de lijn PE één-vijfde gedeelte van den driehoek ABC affnijden. Op gelijke wijze, zal volgen: dat, wanneer men $AF = \frac{2}{5} AB$ neemt, en FG evenwijdig aan PC trekt, *drieh.* $APG =$ *drieh.* $ACF = \frac{2}{5}$ *drieh.* ABC zal zijn, *enz.* Hierop berust nu de volgende algemeene Constructie. Verdeel de bafis AB in vijf gelijke deelen, AD, DF, FH, HK en KB; trek, door de deelpunten dezer deelen, lijnen, welke evenwijdig aan PC loopen; namelijk, DE, FG, HI, KL; dan zullen deze, op de zijden AC en BC des driehoeks, de punten E, G, I, L, bepalen, door welke, uit het gegevene punt P, de deellijnen PE, PG, PI en PL, getrokken moeten worden; welke lijnen den gegevenen driehoek in vijf gelijke deelen zullen verdeelen.

§. 560. XXXVII. Werkstuk. *Fig.* 262. ***Binnen een gegevenen driehoek (ABC), een punt (P) te vinden; zoodanig, dat, wanneer men, uit hetzelve, tot de hoekpunten (A, B en C) des driehoeks, regte lijnen (AP, BP en CP) trekt; de driehoek in ftukken (ABP, ACP en BCP) zal verdeeld zijn, welke tot elkander in reden ftaan, als de getallen 4, 5 en 3?***

Oplossing. Omdat de driehoeken APB, ACP en BCP, tot elkander als de getallen 4, 5 en 3, moeten zijn, zal (X. *Stell.* II. *B.*) de *drieh.* ABP : *drieh.* $ABC = 4 : 4 + 5 + 3 = 4 : 12 = 1 : 3$ moeten zijn; trekt men dan PD, evenwijdig aan AB; dan zal (IX. *Stell* III. *B.*) *drieh.* $ABD =$ *drieh.* ABP zijn; derhalve *drieh.* ABC : *drieh* $ABD = 3 : 1 = AC : AD$. Hieruit volgt: dat, wanneer men $AD = \frac{1}{3} AC$ neemt, en DP evenwijdig aan AB trekt, het begeerde punt P in de lijn DP zal gelegen zijn. Wederom zal *drieh.* APC : *drieh.* $ABC = 5 : 12$ zijn; of, wanneer men PE evenwijdig aan AC trekt; *drieh.* ABC : *drieh.* AEC

 $= 12$

$= 12 : 5 = AB : AE$: deelt men derhalve AB in twaalf gelijke deelen, en neemt men AE gelijk aan vijf van die deelen; dan zal het begeerde punt P gelegen zijn in de lijn, welke, door E, evenwijdig aan AC loopt; gevolgelijk zal het in de doorsnijding der lijnen DP en EP, welker onderlinge stelling door de oplossing gevonden is, moeten gelegen, en derhalve bekend zijn.

§. 561. XXXVIII. Werkstuk. *Fig.* 263. *Een gegevenen driehoek* (ABC), *door eene lijn* (DE), *evenwijdig aan de basis loopende, in eene gegevene reden, te verdeelen,* (*zoodanig, dat* DEC *tot* $DEBA$ *staat, in reden als* p *tot* q)?

Oplossing. Wanneer de driehoek ABC, in de gegevene reden, verdeeld is, zoo als is voorgeschreven; dan moet (VIII. *Stell.* II. *B.*) *drieh.* CDE : *drieh.* $CAB = p : p+q$ staan; maar (XI. *Stell.* IV. *B.*) *drieh.* CDE : *drieh.* $ABC = CE^2 : BC^2$; derhalve moet $BC^2 : CE^2 = p+q : p$ zijn. Laat nu het punt M zoodanig genomen worden, dat $CM : MB = p : q$, en derhalve $CB : CM = p+q : p$ zij; dan is $BC^2 : CE^2 = CB : CM = CB^2 : CM \times CB$; derhalve $CE^2 = CM \times CB$ of CE middenevenredig tusschen BC en CM. Hieruit volgt deze Constructie. Deel de zijde BC, in het punt M, in reden van p tot q: neem CE middenevenredig tusschen CM en CB; dan zal de lijn, welke, door E, evenwijdig aan AB getrokken wordt, de begeerde zijn.

§. 562. XXXIX. Werkstuk. *Fig.* 264. *In een gegeven vierkant een gelijkzijdigen driehoek te beschrijven?*

Oplossing. Een gelijkzijdige driehoek wordt gezegd in een vierkant te staan, wanneer één van deszelfs hoekpunten C in een hoekpunt van het vierkant valt, en de twee andere hoekpunten E en F, in twee der zijden van datzelfde vierkant gelegen zijn. Onderstellende dan, dat de gelijkzijdige driehoek in het vierkant beschreven zij; dan zal, omdat $CE = CF$ en $CD = CB$ is, (II. *Hulpst.* I. *B.*) $DE = BF$ en $AE = AF$, en daarom $AF : BF = AE : DE$ en (II. *Stell.* IV. *B.*) EF evenwijdig aan BD zijn. Wanneer men dan DG, evenwijdig aan EC, en BG evenwijdig aan CF trekt; dan zal de driehoek BDG (XXX. *St.* I. *B. en* III. *Bep.* IV. *B.*) gelijkvormig zijn met den driehoek ECF, en derhalve gelijkzijdig. Hieruit volgt dan: dat, wanneer men, op de hoekpuntslijn BD, een gelijkzijdigen driehoek BDG beschrijft, en door het hoekpunt C de lijnen CE en CF evenwijdig aan DG en BG trekt; en, eindelijk de punten E en F vereenigt, de driehoek CEF de begeerde gelijkzijdige driehoek zal zijn.

§. 563. XL. Werkstuk. *Fig.* 265. *In een gegevenen driehoek* (ABC) *een vierkant* ($FGED$) *te beschrijven, welks zijde* (FG) *op de basis* (AB) *rust?*

Oplossing. Onderstellen wij, dat $FGED$ het begeerde vierkant zij; indien men dan de lijn AE trekt, en in dezelve een punt H neemt, en HI en HL, evenwijdig aan ED en EG trekt; dan zal (VIII. *Stell.* IV. *B.*) $DE : IH = AE : AH = EG : HL$ zijn: maar, $DE = EG$ zijnde, zoo

is

is *HI* = *HL*, en (XXX. *Stell.* I. *B.*) *hoek IHL* = *hoek DEC*. Hieruit volgt, omgekeerd: dat, wanneer men eenig vierkant *KLHI* op de basis plaatst, met het hoekpunt *I* in de zijde *AC*, en, van *A*, door *H*, eene lijn trekt, welke de zijde *BC*, in het punt *E*, ontmoet, dit punt *E* één der hoekpunten van het begeerde vierkant zal zijn. Dit hoekpunt dan door constructie bekend zijnde, is al het overige bekend. — CONSTRUCTIE. Men neme, dan in *AC*, een punt *I*, en late *IK* loodregt op *AB* vallen, trekke *IH* evenwijdig aan *AB*, en make *IH* = *IK*; trekke, van *A* door *H*, eene lijn *AE*; dan is *E* één der hoekpunten van het begeerde vierkant; hetwelk, indien men *EG* loodregt op *AB*, *ED* evenwijdig aan *AB*, en *DF* evenwijdig aan *EG* trekt, in den driehoek zal beschreven zijn.

§ 564. XLI. WERKSTUK. *Fig.* 266. *In de opstaande zijde AC van eenen driehoek ABC, een punt D te vinden; zoodanig, dat, wanneer men DE, evenwijdig aan AB trekt, AD : DE = p : q zal zijn?*

OPLOSSING. Nemende, dat *DE* de begeerde lijn zij; indien men dan de lijn *AE* trekt, en, door eenig punt *F*, *FG* evenwijdig aan *DE* of *AB*; dan zal (VIII. *Stell.* IV. *B.*) *AF* : *FG* = *AD* : *DE* = *p* : *q* zijn. Nu kan men *AF* = *p* en *FG* = *q* nemen; wanneer men dus *AG* trekt; dan zal deze lijn, of derzelfs verlengde, *AB* in *E* snijden; de lijn, welke dan door *E*, evenwijdig aan *AB* of *FG* getrokken wordt, zal de begeerde zijn.

§. 565. XLII. WERKSTUK. *Fig.* 267. *Men begeert zich, in een punt (P), binnen eenen driehoek (ABC), zoodanig te plaatsen, dat de afstanden, welke men, in dit punt (P), tot de zijden (AB, BC en AC) van dien driehoek heeft, tot elkander in reden staan, als, bij voorbeeld, de getallen* 5, 6 *en* 7; *dat is, zoodanig, dat (DP, PE, PF) :: (5, 6, 7) zij?*

OPLOSSING. Stellende, dat *P* het begeerde punt zij; wanneer men dan, in de lijn *AP*, een punt *G* neemt, en uit hetzelve de loodlijnen *GH* en *GI*, op *AB* en *AC*, laat vallen; dan zal (VIII. *Stell.* IV. *B.*) *AP* : *AG* = *PD* : *GH* = *PF* : *GI*, of *PD* : *PF* = *GH* : *GI* zijn. Hieruit volgt: dat, wanneer men, uit het hoekpunt *A*, tot het begeerde punt *P*, eene lijn *AP* trekt, al de punten van deze regte lijn op dezelfde evenredige afstanden van de zijden *AB* en *AC* zullen gelegen zijn. Wanneer men derhalve eenig punt *G* van de lijn *AP* vinden kan; dan zal men weten, in welke lijn het punt *P* gelegen is. Zulk een punt is nu gemakkelijk te vinden. Want, indien men, uit het punt *A*, de loodlijnen *AK* en *AL* op *AB* en *AC* opgerigt, en gelijk aan *vijf* en *zeven* deelen neemt, en voorts, door de punten *K* en *L*, de lijnen *KG* en *LG*, evenwijdig aan *AB* en *AC* trekt; dan zal het punt *G* zoodanig bepaald zijn, dat *GH* : *GI* = 5 : 7 is, en het punt *P* zal derhalve in de lijn *AG* gelegen zijn. Om dezelfde redenen zal, wanneer men *BM* en *BN* loodregt op *AB* en *BC* plaatst, en *MB* gelijk vijf, en *BM* gelijk zes deelen neemt, en voorts *MO* en *NO*, evenwijdig

aan *A B* en *B C* trekt, het punt *O* in de lijn *B P* gelegen zijn. Het punt *P*, alwaar de lijnen *A P* en *P B* elkander doorfnijden, is dan het begeerde punt.

Aanmerking. Het parallelogram *A S G R*. is (II. *Gev*. VII *St*. III. *B*.) gelijk aan *A S* × *G H* = *A R* × *G I*; derhalve is *A S* : *A R* = *G I* : *G H* = *P F* : *P D*. Hieruit volgt eene eenvoudiger conftructie. Men neme *A S*, naar welgevallen; en *A R* tot *A S*, gelijk *P D* tot *P F*, en trekke *S G* en *R G*, evenwijdig aan *A C* en *A B*; en voorts de lijn *A G*, in welke het punt *P* moet gelegen zijn, en men bepaalt, op dezelfde wijze, de lijn *A C*, *enz*.

§. 566. XLIII. Werkstuk. *Fig*. 268. *Wanneer twee voorwerpen (A en B), aan dezelfde zijde van eene regte lijn (PQ), gelegen zijn; dan begeert men, op deze regte lijn, het punt (C) te vinden, uit hetwelke deze voorwerpen, onder den grootften hoek (A C B), gezien worden?*

Oplossing. Wanneer *C* het begeerde punt is; dan moet de hoek *A C B* grooter zijn dan de hoeken *A D B* en *A E B*, welke, in de nabijheid van het punt *C*, ter regter- of linkerhand van dezelve, uit de punten *D* en *E*, worden waargenomen. Dit zoo zijnde, zoo zal men op *B D*, een punt *G*, en, op *B E*, een punt *F*, vinden kunnen; zoodanig dat de hoeken *A G B* en *A F B*, elk aan den hoek *A C B* gelijk zijn; en dan zullen de punten *G*, *C* en *F*, (*III. Gev. XX Stell. V. B.*) in den omtrek van eenen cirkel liggen, welke door de punten *A* en *B* gaat, en de lijn *P Q* in het begeerde punt *C* aanraakt. Het is ook klaarblijkelijk: *dat er, aan de regterzijde van de lijn A B Q, een punt C' beftaan moet, uit hetwelk de voorwerpen A en B, onder eenen hoek A C' B gezien worden, grooter dan de hoeken, onder welke men die voorwerpen, in de nabij gelegene punten, waarneemt.* Nu moet (*I. Aanmerk. XXII. Stell. V. B.*) $QC^2 = AQ \times BQ$ zijn; men moet derhalve, na, door de punten *A* en *B*, de lijn *B A Q* getrokken te hebben, eene middenevenredige tusfchen *A Q* en *B Q* zoeken, welke gevonden wordt, indien men op *B Q* eenen halven cirkel befchrijft, en *A R* loodregt op *B Q* ftelt, als wanneer (*I. Gev. XII. Stell. IV. B.*) *Q R* de begeerde middenevenredige zal zijn; zoodat, wanneer *Q C* en *Q C'*, elk gelijk aan *Q R* genomen worden, de voorwerpen *A* en *B*, uit de punten *C* en *C'*, onder den grootften hoek, zullen gezien worden.

§. 567. XLIV. Werkstuk. *Fig*. 269. *Wanneer men aanneemt, dat de onderlinge afftanden van drie punten A, B en C bekend zijn, en dat men, in een vierde punt D, alwaar men zich bevindt, de hoeken B D C en C D A, onder welke de punten B en C, als ook de punten C en A gezien worden, door waarneming bekend, en gelijk aan de hoeken P en Q zijn, zoo begeert men, door conftructie, de betrekkelijke ligging van het punt D, dat is, deszelfs afftanden tot de punten A, B en C, te vinden?*

Oplossing. Vermits de onderlinge afftanden der punten *A*, *B* en *C*, ge-

gegeven zijn, zoo zal men (*XI. Werkst.*) den driehoek kunnen construeren, welker hoekpunten deze gegevene punten zijn. Die driehoek dan geconstrueerd zijnde, zoo zal men (*XXXI. Werkst.*) op de lijn *C B* een cirkelsegment *B D E C*, waarin de *hoek C D B* = den *hoek P*, en op de lijn *A C*, het cirkelsegment *A D F C*, waarin de *hoek A D C* = den *hoek Q* geplaatst is, kunnen beschrijven: de omtrekken dezer cirkelsegmenten zullen elkander, behalve in het punt *C*, ook nog in het punt *D* snijden; welk laatste punt het begeerde punt zal zijn; daar nu dit punt *D* door deze constructie bekend wordt, zoo zullen ook deszelfs afstanden tot de punten *A*, *B* en *C*, of de lijnen *A D*, *B D* en *C D*, bekend worden.

§. 568. XLV. WERKSTUK. *Fig.* 270. *Indien men aanneemt, dat de afstand der voorwerpen A en B bekend is, en dat men, uit twee andere voorwerpen, C en D, welker ligging, ten opzigte van elkander, en, met betrekking tot de twee eerste voorwerpen A en B, niet bekend is, uit het eerste C, de hoeken, A C B en B C D, onder welke de voorwerpen A, B en D, gezien worden; en, uit het tweede D, de hoeken, A D B en A D C, onder welke de voorwerpen A, B en C, gezien worden, door waarneming bepaalt; dan begeert men, door eene meetkunstige constructie, de betrekkelijke ligging der voorwerpen C en D; dat is, de afstanden C D, A C, B C, A D en B D te vinden?*

OPLOSSING. Laat, op eene lijn *c d*, volgens het *V. Werkstuk*, aan het punt *c*, de hoeken *a c b* en *b c d*, gelijk aan de hoeken *A C B* en *B C D*, en, aan het punt *d*, de hoeken *a d b* en *a d c*, gelijk aan de hoeken *A D B* en *A D C* gemaakt, en de lijn *a b* getrokken worden; dan zijn de hoeken *c a d*, *d a b*, *a b c*, *c b d*, bepaald. Wanneer men nu, op de gegevene lijn *A B*, volgens het *V. Werkstuk*, de hoeken *C A D*, *B A D*, *A B C* en *C B D*, respectievelijk aan de hoeken *c a d*, *b a d*, *a b c* en *c b d*, welke door de voorgaande constructie gevonden zijn, gelijk maakt, en voorts de lijn *C D* trekt; dan zal de betrekkelijke ligging van de punten *C* en *D* bekend zijn. Want; omdat, volgens de constructie, *hoek C A B* = *hoek c a b*; *hoek D A B* = *hoek d a b*; *hoek A B C* = *hoek a b c* is, is (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) *hoek A C B* = *hoek a c b*. Wederom zal, om dezelfde reden, *hoek A D B* = *hoek a d b* zijn: de driehoeken *A B C* en *A B D*, zijn dan (*III. Bep. IV. B.*) gelijkvormig aan de driehoeken *a b c* en *a b d*: derhalve is *B C* : *b c* = *A B* : *a b*, en *B D* : *b d* = *A B* : *a b*, en diensvolgens *B C* : *b c* = *B D* : *b d*, of *B C* : *B D* = *b c* : *b d*; daar nu *hoek D B C* = *hoek d b c* is, zoo zal (*X. Stell. IV. B.*) de driehoek *B C D* aan den driehoek *b c d* gelijkvormig zijn, en daarom (*IX Stell. IV. B.*) *hoek B C D* = *hoek b c d*, en *hoek C B D* = *hoek c b d*, en derhalve ook *hoek A C D* = *hoek a c d*. De punten *C* en *D* zijn derhalve zoodanig bepaald, dat de voorwerpen *A* en *B* uit dezelve, onder de waargenomene hoeken, worden gezien.

§. 569 XLVI. WERKSTUK. *Fig.* 271. *Indien, uit twee punten*

A en B twee cirkels zijn beschreven, die elkander in de punten C en D doorsnijden; door het punt C, eene lijn PQ tot aan de omtrekken van die cirkels te trekken, welke eene gegevene lengte M heeft?

Oplossing. Stel, dat PQ de begeerde lijn zij, die de gegevene lengte M hebbe. Men late, uit de middelpunten A en B der gegevene cirkels, de lijnen AE en BF, loodregt op de begeerde lijn PQ vallen; dan is (VII. *Stell.* V. *B.*) $CE = EP$ en $CF = FQ$; derhalve $EF = PE + QF$ (VIII. *Ax*); tel hierbij $EF = CE + CF$; dan is (VIII. *Ax.*) $2EF = PQ = M$, en $EF = \frac{1}{2}M$. Trekt men nu AG, evenwijdig aan PQ; dan is (I. *Stell.* III. *B.*) $AG = EF = \frac{1}{2}M$, en *hoek* AGB regt. Indien men derhalve, op de lijn AB, als middellijn, eenen cirkel beschrijft; dan zal (V. *Gev.* XX. *Stell.* V. *B.*) het punt G in den omtrek van dien cirkel liggen.

Constructie. Vereenig de middelpunten der gegevene cirkels, door de lijn AB. Beschrijf, op AB, als middellijn, eenen cirkel, en, uit A, met eenen straal, gelijk aan $\frac{1}{2}M$, eenen boog, die den omtrek dezes cirkels in G en H snijdt; indien men dan, na de koorden AG en AH getrokken te hebben, door het punt C, de lijnen PQ en $P'Q'$, evenwijdig aan AG en AH trekt; dan zullen deze de begeerde zijn.

Aanmerking. Indien $\frac{1}{2}M > AB$ is; dan zal de cirkelboog, die uit A beschreven wordt den cirkel niet kunnen doorsnijden, en de vraag zal dan onmogelijk zijn. Is $\frac{1}{2}M = AB$; dan zal de lijn PQ een *maximum* zijn. *Door middel van dit werkstuk, zal men gemakkelijk, door drie gegevene punten, drie lijnen hunnen trekken, welke, onder den grootsten inhoud, eenen driehoek maakt, die aan een gegevenen driehoek gelijkvormig is.* Dit zij aan het onderzoek van den Lezer aanbevolen.

§. 570. XLVII. Werkstuk. *Fig.* 272. *Eene onbepaalde regte lijn (PQ) met twee punten (A en B), aan dezelfde zijde van die lijn, in stelling gegeven zijnde, eenen cirkel te beschrijven, wiens omtrek door die gegevene punten (A en B) gaat, en die gegevene lijn (PQ) aanraakt?*

Oplossing. Wanneer men de gegevene punten A en B door eene regte lijn AB vereenigt, en door het midden C van dezelve eene onbepaalde loodlijn CP trekt, die PQ in P doorsnijdt; dan zal (VIII. *St.* V. *B.*) het middelpunt des gevraagden cirkels, op die loodlijn PC, ergens in M, gelegen zijn. Is nu inderdaad M het middelpunt van den gevraagden cirkel; dan zal, indien men MH loodregt op PQ en MA trekt, $MH = AM$ moeten zijn. Trek CE loodregt op PQ, en CF evenwijdig aan AM; dan zijn (III. *Bep.* IV. *B.*) de driehoeken PMA en PCF gelijkvormig; en ook zijn gelijkvormig de driehoeken PMH en PCE. Uit de eerste dezer gelijkvormige driehoeken, is (VIII. *Stell.* IV *B.*) $MA : CF = PM : PC$; en, uit de twee laatste, $MH : CE = PM : PC$; derhalve (I. *Stell.* II. *B.*) $MA : CF = MH : CE$, of (VII. *Stell.* II. *B.*) $MA : MH = CF : CE$. Nu is $MA = MH$; derhalve $CF = CE$. Hieruit volgt deze

Con-

CONSTRUCTIE. Trek, door het midden van AB, de onbepaalde loodlijn CP, door de punten P en A, de onbepaalde lijn PA, en CE loodregt op PQ. Beschrijf uit C, als middelpunt, met CE als straal eenen cirkel, die DA, in de punten F en G, doorsnijdt; indien men dan, uit het punt A, de lijnen AM en AN, evenwijdig aan CF en CG trekt; dan zullen M en N de middelpunten van twee onderscheidene cirkels zijn, die aan de voorwaarde der vraag voldoen.

§. 571. XLVIII. WERKSTUK. *Fig.* 273. *Twee lijnen* (AB *en* BC), *met een punt* (P), *in stelling gegeven zijnde, eenen cirkel te beschrijven, wiens omtrek door dit punt* (P) *loopt, en die lijnen* (AB *en* BC) *aanraakt.*

OPLOSSING. Laat M het middelpunt van den begeerden cirkel zijn; dan ligt het (XIII. *Stell.* V. *B.*) op de lijn BM, die den hoek ABC midden door deelt. Indien men dan MP trekt, en de lijnen ME en MF, loodregt op BC en BA laat vallen; dan zal de cirkel door het punt P gaan, en de lijnen BC en BA, in de punten E en F, aanraken, en dus is $EM = FM = PM$. Men neme op de lijn BM ergens een punt G, en trekke uit hetzelve de lijnen GH en GI; evenwijdig ME en MP; dan is, in de gelijkvormige driehoeken BGH en BME (VIII. *Stell.* IV. *B.*) $GH : ME = BG : BM$; en in de gelijkvormige driehoeken BIG en BMP, is $GI : PM = BG : BM$; daarom is (I *en* VI. *Stell.* II. *B.*) $GH : GI = EM : MP$; nu is $EM = MP$; derhalve $GH = GI$.

CONSTRUCTIE. Indien men dan, na den hoek ABC door de lijn BM in twee gelijke deelen gedeeld, en de onbepaalde lijn BP getrokken te hebben, uit eenig punt G van de lijn BM, de lijn GH, loodregt op BC, laat vallen, en (na alvorens uit G met GH eenen cirkelboog beschreven te hebben, die de lijn BP, in de punten I en K, snijdt,) de lijnen PM en PN, evenwijdig aan GI en GK trekt; dan zullen M en N de middelpunten van twee cirkels zijn, die aan de voorwaarden der vraag voldoen.

§. 572. XLIX. WERKSTUK. *Fig.* 274. *In de vlakte van den driehoek* (ABC), *een punt* (P) *te vinden, onder die bepaling, dat de afstanden van dit punt* (P) *tot de hoekpunten des driehoeks* (A, B *en* C), *in reden zijn, als drie gegevene lijnen* p, q, r; *zoo dat* (AP, BP, CP) $::$ (p, q, r) *is?*

OPLOSSING. Stel, dat P het begeerde punt zij. Men neme op AP het punt D naar welgevallen, en make *hoek* $ADE =$ *hoek* ABP, en *hoek* $ADF =$ *hoek* ACP; dan zijn gelijkvormig, 1°. de driehoeken ADE en ABP; en 2°. de driehoeken ADF en ACP, en dan is (VIII. *Stell.* IV. *B.*)

$$AE : DE = AP : BP = p : q \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$AF : DF = AP : PC = p : r \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Uit diezelfde gelijkvormige driehoeken, volgt nog:

AB

$AB : AD = AP : AE$

$AC : AD = AP : AF$

derhalve is $AB : AC = AF : AE$, XIV. *Stell.* II. *B.*

omdat nu *hoek* $BAC =$ *hoek* EAF is, zoo zijn (X. *Stell.* IV. *B.*) de driehoeken AFE en ABC gelijkvormig; en dan zal (III. *Bep.* IV. *B.*) *hoek* $AEF =$ *hoek* ACB en *hoek* $AFE =$ *hoek* ABC zijn.

Men ftelle nu: dat het punt D zóó zij aangenomen, dat $AE = p$ zij; dan wordt de evenredigheid (1), namelijk $AE : DE = p : q$, deze: $p : DE = p : q$; derhalve is $DE = q$. — Uit de evenredigheid (2) of $p : r = AF : DF$, volgt $DF = r \times AF : q$. Men neme dan $AG = r$, en trekke GH, evenwijdig aan EF; dan verkrijgt men de gelijkvormige driehoeken AGH en AEF, en (VIII. *Stell.* IV. *B.*) $AE : AG = AF : AH$, of $p : r = AF : AH$; derhalve is $AH = r \times AF : q = DF$. Hieruit volgt nu deze

Constructie. Maak $AE = p$, $AG = r$, *hoek* $AEF =$ *hoek* ACB; trek GH, evenwijdig aan EF. Befchrijf uit de punten E en F, met de ftralen q en AH, twee cirkels, die elkander, in de punten D en D' fnijden; dan zal, met elk dezer twee punten, eene bijzondere oplosfing overeenftemmen. 1°. *Voor het punt* D. Trek de onbepaalde lijn AD, en maak *hoek* $ABP =$ *hoek* ADE; dan zal P het eerfte punt zijn. 2°. *Voor het tweede punt* D'. Trek de onbepaalde lijn AD', en maak $ABP' =$ *hoek* ADE; dan zal P' het tweede punt zijn, dat aan de voorwaarde der vraag voldoet.

Men kan uit de XXIV. *Stell.* V. *B.* eene andere oplosfing afleiden.

§. 573. L. Werkstuk. *Fig.* 275. *Onder vier gegevene lijnen (a, b, c en d,) eenen vierhoek zamen te ftellen, wiens inhoud gelijk is aan den inhoud van het vierkant, op eene gegevene lijn (A) befchreven?*

Oplossing. Men ftelle, dat de vierhoek $ABCD$ zamengefteld zij, onder de zijden $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en $DA = d$, de begeerde; dan is deszelfs inhoud gelijk aan A^2. Wanneer men uit D, met $DC = c$ als ftraal, eenen cirkel befchrijft; dan zal, waar, dat men in den omtrek van dien cirkel een punt C neemt, de lijn AC trekt, een vierhoek $ABCD$ ontftaan, indien $AC > a + b$ is. Onder al die vierhoeken nu moet die gezocht worden, wiens inhoud $= A^2$ is. Laat, zoo als gezegd is, $ABCD$ de begeerde vierhoek zijn. Men late dan uit het punt C de loodlijnen CE en CF, loodregt op het verlengde van de zijden AD en AB vallen; dan is (*Gev.* VIII. *Stell.* III. *E.*) 2 *drieh.* $ADC = AD \times CE$ en 2 *drieh.* $ABC = AB \times CF$; derhalve is

$$\text{vierh. } ABCD = AD \times CE + AB \times CF = A^2 \quad . \; . \; . \quad (A)$$

Men ftelle, dat CE tot in G zoo ver verlengd zij, dat $AD \times CG = AB \times CF$ worde; dan hebben wij deze evenredigheid:

$$CG : CF = AB : AD \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

uit welke blijkt: dat de reden der nog onbekende lijnen bekend is. Indien

dien men nu de waarde van $AB \times CF$ in de vergelijking (A) overbrengt; dan verkrijgt men eindelijk:

$$AD \times CE + AD \times CG = AD \times EG = A^2$$

uit welke vergelijking de evenredigheid:

$$AD : 2A = A : EG, \text{ of } d : 2A = A : EG \quad . \; . \; . \quad (2)$$

volgt; uit welke blijkt, dat EG gegeven is.

Men verbeelde zich nu: dat, onder dezelfde lijnen a, b, c en d, een anderen vierhoek $AHID$ zij zamengesteld, zóó dat de hoek H een regte hoek zij. Men trekke in denzelven de hoekpuntslijn AI, door I de lijn KL, evenwijdig aan EG; en nog GL, evenwijdig aan KE; dan is $KL = EG$, door de constructie van de evenredigheid (2), bekend; en, omdat het punt I in den omtrek van den cirkel, met DC als straal beschreven, gelegen is, zoo is de stelling van de lijn KL, en de plaats van het punt L bekend. Nu is (XIX en XVI. *Stell.* III. *B.*)

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 + 2AD \times DE = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BF$$
$$AI^2 = AD^2 + DI^2 + 2AD \times DK = AB^2 + HI^2$$

men trekke de tweede dezer vergelijkingen van de eerste af; dan wordt het verschil

$$2AD \times KE = 2AD \times GL = 2AB \times BF, \text{ of } AD \times GL = AB \times BF$$

uit welke vergelijking volgt de evenredigheid:

$$GL : BF = AB : AD$$

Vergelijkt men deze met de evenredigheid (1); dan verkrijgt men:

$$GL : BF = CG : CF$$

maar nu zijn de hoeken G en F, door de constructie, regte hoeken, en dus zijn (X. *Stell.* IV. *B.*) de driehoeken CBF en CLG gelijkvormig; en daarom is

$$AD : AB = BF : GL = BC : BL, \text{ of } d : a = b : CL \quad . \; . \quad (3)$$

zoo dat CL, door de constructie van deze evenredigheid, bekend zal worden. Uit deze beschouwing, volgt nu deze

Constructie 1°. Neem twee lijnen AH en HI, loodregt op elkander, en maak $AH = a$, $HI = b$, en beschrijf uit A en I met de gegevene lijnen d en c twee cirkelbogen, die elkander, aan den anderen kant van AI, in D snijden; dan verkrijgt men den vierhoek $AHID$, onder de gegevene lijnen zamengesteld en regthoekig in H.

2°. Trek door het punt I de onbepaalde lijn KIL, regthoekig op AD, of derzelver verlengde.

3°. Construeer de evenredigheid $d : 2A = A : KL$; dan wordt het punt L bekend.

4°. Construeer nog de evenredigheid $d : a = b : CL$; dan wordt CL bekend.

5°. Beschrijf uit D, met $DI = DC$, eenen cirkel, en uit L met KL, als straal, een anderen cirkel, die den eersten, indien de vraag mogelijk is, in de punten C en C' zal doorsnijden.

6°. Men construere eindelijk de vierhoeken $ABCD$ en $AB'C'D$; deze zullen de begeerde zijn.

Aan-

Aanmerking. Wanneer $DL = DI + CL = c + \frac{ab}{d}$ wordt; dan zullen de cirkels, die uit D en L beschreven worden, elkander aanraken, en men zal een vierhoek verkrijgen, wiens inhoud, onder de gegevene lijnen, een maximum zal zijn. Wij laten de constructie en verdere beschouwing hiervan aan den Lezer over.

BEGINSELEN
DER
MEETKUNST.
TWEEDE DEEL.
OVER DE MEETKUNST DER LIGCHAMEN.

ACHTSTE BOEK.

(Het tiende van den tweeden druk.)

Over de ligging en den onderlingen stand der lijnen en vlakken, in de onbegrensde ligchamelijke ruimte; inzonderheid over den loodregten, scheven en evenwijdigen stand eener lijn, met betrekking tot een vlak. Over het bepalen van den stand van twee lijnen, die niet in hetzelfde vlak liggen; en over de eigenschappen der evenwijdige vlakken. — Theorie der twee-, drie- en veelvlakkige hoeken. Overeenstemming tusschen dezelve en de bolvormige twee-, drie- en veelhoeken. — Voornaamste gronden en regels van de bolvormige Driehoeksmeting.

§. 574. Tot hiertoe beschouwden wij slechts figuren, welker deelen en grenzen in hetzelfde vlak liggen en verzamelden de hulpmiddelen ter beoefening van het gewigtigste gedeelte der Meetkunst; de *Meetkunst namelijk der Ligchamen*; tot welke dit Boek als inleiding zal moeten dienen.

§. 575. I. BEPALING. Waarin een plat van een gebogen vlak onderscheiden is, is reeds (*Inleid. I. B. XII en XIII Bep.*) te voren verklaard. Een *plat vlak*, of eene *platte vlakte* (welke wij eenvoudig *vlak* noemen,) is zulk eene vlakte, over welke eene regte lijn, in

in alle rigtingen, zonder onderscheid, zoodanig kan worden bewogen, dat al derzelver punten bestendig in dit vlak blijven.

§. 576. I. Gevolg. *Wanneer men dus, in een vlak, ergens twee punten aanneemt, en door dezelve eene onbepaalde lijn trekt; dan zullen al de punten dezer lijn in het vlak liggen; en zoo een gedeelte eener lijn in een vlak ligt; dan liggen ook alle andere deelen van dezelve in dit vlak.*

§. 577. II. Gevolg. *Alle vlakken sluiten of passen volkomen op elkander.* In dit opzigt komen zij dan (zie *I. Stell. I. B.*) met de regte lijnen overeen. *Die volmaakte sluiting zal steeds moeten plaats hebben, het zij men den voorkant van het eene vlak op den voorkant of achterkant van het andere past, en in welke rigting men dezelve over elkander heenschuift*

§. 578. Leering. Men leert hieruit: *hoe men de juistheid van een vlak beproeven kan?* door namelijk een zuiver liniaal over dit vlak te bewegen; want, *indien dit liniaal, in alle rigtingen, volmaakt op het vlak sluit, zonder dat men eenige opening tusschen het liniaal en het vlak bespeurt, zal zulks de juistheid van hetzelve bewijzen.*

§. 579. Berigt. *Offchoon aan de vlakken, welke, in de volgende figuren, strekkende ter opheldering der stellingen en van derzelver betoogen, eene bepaalde figuur gegeven is, om dezelve zigtbaar te maken, zoo moet men nogtans, in dit Boek, alle vlakken en lijnen, welke ter beschouwing worden voorgesteld, aanmerken, als onbegrensd zijnde, en als geen bepaalden omtrek hebbende.*

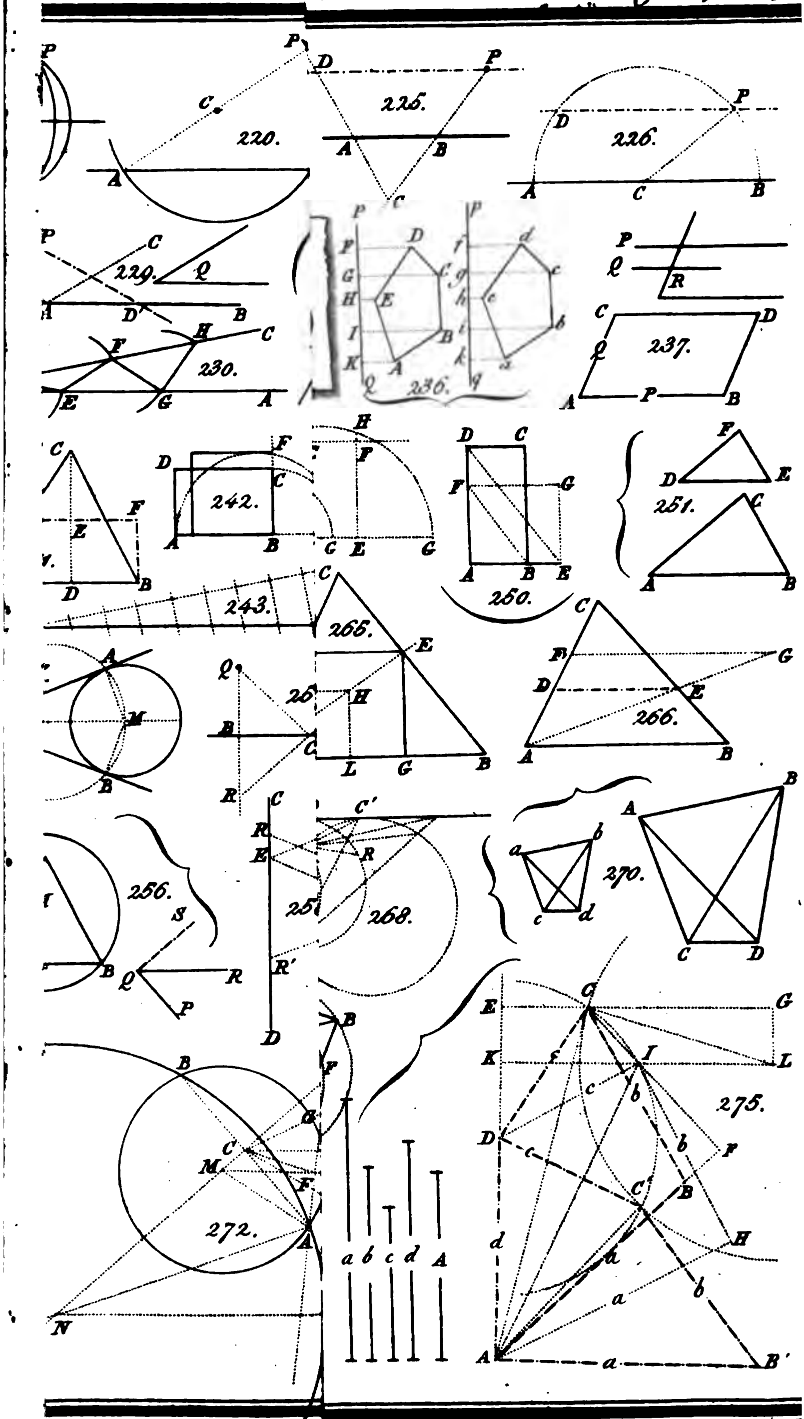
I. Stelling. *Fig.* 276.

§. 580. *Twee vlakken (PQ en RS) snijden elkander, volgens het beloop eener regte lijn (AB).*

Betoog. De doorsnijding van twee vlakken *PQ* en *RS* is de vereeniging van alle punten, welke deze vlakken met elkander gemeen hebben. Wanneer nu *A* en *B* twee zulke punten zijn; dan ligt (I. *Bep.*) de lijn *AB*, welke door deze punten gaat, zoowel in het eene vlak *PQ*, als in het ander *RS*: deze lijn derhalve, aan beide vlakken gemeen zijnde, is derzelver gemeene doorsnede.

§. 581. I. Gevolg. *Door elke regte lijn AB, kan eene vlakte gebragt, en, om deze lijn,* (even als eene deur om hare hengsels) *als beweegbaar beschouwd worden. — En, elk vlak kan, om elke lijn, welke in hetzelve aangenomen wordt, in het ronde bewogen worden.*

§. 582.


220.
225.
226.
229.
230.
236.
237.
242.
243.
250.
251.
265.
266.
256.
268.
270.
272.
275.

§. 582. II. Gevolg. *Een onnoemelijk aantal vlakken kunnen* (even zoo als eene oneindige menigte van lijnen in hetzelfde punt) *elkander, in dezelfde regte lijn, doorsnijden.*

§. 583. III Gevolg. Men kan hier bijvoegen: *dat het niet mogelijk is, dat twee onderscheidene vlakken elkander in meer dan ééne regte lijn doorsnijden.*

II. Stelling. *Fig.* 277.

§. 584. *Twee lijnen (A B en C D), welke elkander, in eenig punt (E) doorsnijden, liggen in hetzelfde vlak (P Q).*

Betoog. Want men kan (I. *Gev.* I. *Stell.*) een vlak *P Q*, door ééne dezer lijnen *A B*, laten gaan, en, dit vlak, om die lijn laten omdraaijen: bij deze beweging, komt het dan ergens in zulk eenen stand, dat een punt *D* van de lijn *C D*, in dit vlak valt; alsdan liggen twee punten van de lijn *C D*, (de punten *E* en *D* namelijk,) in hetzelve; de geheele lijn *C D* zal dan (I. *Bep.*) met de lijn *A B*, in hetzelfde vlak *P Q*, gelegen zijn.

III. Stelling. *Fig.* 278.

§. 585. *Drie punten (A, B en C), ergens, naar welgevallen, in de ligchamelijke ruimte, aangenomen zijnde, liggen altijd in hetzelfde vlak (P Q).*

Betoog. Laat, door twee der drie punten, bij voorbeeld, de punten *A* en *B*, eene regte lijn *A B* getrokken, en door deze regte lijn (I. *Gev.* I. *Stell.*) een vlak *P Q* gebragt worden; wanneer dan dit vlak, om de lijn *A B*, wordt omgedraaid; dan komt het noodwendig in zulk eenen stand, dat het derde punt *C*, in hetzelve valt; in dien stand zullen dan de drie punten *A*, *B* en *C*, in hetzelfde vlak *P Q*, gelegen zijn.

§. 586. I. Gevolg. *Eene regte lijn en een punt buiten dezelve, naar welgevallen aangenomen zijnde, liggen in hetzelfde vlak.*

Want men zal (I. *Gev.* I. *Stell.*) om deze lijn een vlak beweegbaar kunnen stellen, en, gedurende deze beweging, zal het eens in dien stand komen, dat het gezegde punt zich in dit vlak bevindt.

§. 587. II. Gevolg. *Men kan dan, door elke twee lijnen, die elkander snijden, èn door elke drie punten, welke, naar welgevallen, in de ruimte, aangenomen worden, alsmede door eene lijn en een punt, altijd een vlak laten gaan.*

§. 588. III. Gevolg *Alle hoeken, en, in het algemeen, alle lijnen, die elkander onderling snijden, liggen, zonder uitzondering, altijd in hetzelfde vlak.*

§. 589. IV. Gevolg. *Gelijk dan eene lijn in stelling bepaald is, wanneer zij door twee gegevene punten loopt; zoo is een vlak in stand of stelling bepaald, wanneer het door drie gegevene punten of eene gegevene lijn en een gegeven punt gaat.*

IV. Stelling. *Fig.* 279.

§. 590. *Wanneer eene lijn (AB) loodregt staat op twee lijnen (BC en BD), welke in een vlak (PQ) gelegen zijn en elkander onder geen twee regte hoeken doorsnijden; dan staat deze lijn tevens loodregt op alle andere lijnen (BE), welke, uit den voet (B) dezer loodlijn (AB), in dit vak (PQ), kunnen getrokken worden.*

Opheldering. Dat eene lijn AB loodregt op twee afzonderlijke lijnen, BC en BD, kan staan, blijkt hieruit: dat men, door deze lijn AB, twee onderscheidene vlakken brengen kan, in elk van welke, uit een zeker punt B, eene loodlijn, in het eene, en eene loodlijn, in het andere vlak, op deze lijn AB, kan worden opgerigt. Deze twee loodlijnen, uit hetzelfde punt B komende, liggen dan (II. *Stell.*) in hetzelfde vlak PQ; dus kan omgekeerd eene lijn AB loodregt staan op twee lijnen BC en BD, welke in hetzelfde vlak liggen. Nu moet men bewijzen: *dat die loodlijn AB ook loodregt staat op elke andere lijn BE, welke, uit den voet B der loodlijn, in het vlak PQ getrokken wordt; of dat de hoek ABE een regte hoek is.*

Betoog. Het spreekt van zelfs, dat AB met het verlengde der lijnen BC en BD; dat is, met de lijnen BF en BG, regte hoeken maakt.

Men neme, in de lijn BE, een punt E, trekke EH, evenwijdig aan BD, make $CH = BH$, en trekke eindelijk nog door de punten C en E, de lijn CED; dan is (II. *Gev.* I. *Stell.* IV. *B.*) $CH : BH = CE : ED$; maar nu is $CH = BH$ (*constr.*) derhalve is ook (IV. *St.* II. *B.*) $CE = ED$.

Om dan te bewijzen: dat de hoek ABE regt is, trekke men, van een punt A, in de loodlijn AB gelegen, tot de punten C, D en E, de lijnen AC, AD en AE. Omdat dan $DE = CE$ is, zoo zal (XX. *Stell.* III. *B.*), in den driehoek ACD,

$$AC^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2DE^2$$

zijn, en, in den driehoek BCD,

$$BC^2 + BD^2 = 2BE^2 + 2DE^2$$

Trekt men nu deze twee vergelijkingen van elkander (de tweede van de eerste af); dan zal (IX. *Ax.*)

$$(AC^2 - BC^2) + (AD^2 - BD^2) = 2AE^2 - 2BE^2$$

zijn: maar de driehoeken ABC en ABD zijn, volgens de onderstelling, regthoekig; derhalve is (XVI. *Stell.* III. *B.*) $AC^2 - BC^2 = AB^2$ en $AD^2 - BD^2 = AB^2$, en de laatste vergelijking verandert derhalve in de volgende:

$$2AB^2 = 2AE^2 - 2BE^2$$

dat is (XIII. *Ax.*), deze vergelijking door twee deelende, in

$$AB^2 = AE^2 - BE^2$$

en hieruit volgt dan onmiddellijk, dat

$$AE^2 = AB^2 + BE^2$$

moet zijn; de driehoek ABE is dan (XVII. *Stell.* III. *B.*) regthoekig, en de lijn AB staat derhalve loodregt op BE. Ten opzigte van elke andere lijn BE, die in het vlak PQ, tusschen de beenen der hoeken CBD, DBF, FBG en CBG, kan getrokken worden, zal hetzelfde betoog gelden: *de lijn AB maakt dus, onder de gestelde voorwaarde, regte hoeken met alle lijnen, die uit het punt B, alwaar de lijn AB het vlak PQ ontmoet, in hetzelve getrokken worden.*

§. 591. II. Bepaling. Eene lijn staat *loodregt* op een vlak, wanneer zij regte hoeken maakt met twee lijnen, welke uit den voet van die loodlijn, in dit vlak getrokken zijn; *mits die lijnen niet in dezelfde rigting liggen.*

§ 592. I. Gevolg. *Fig.* 280. *Uit hetzelfde punt A, kan slechts ééne loodlijn AB op een vlak worden opgerigt.*

Want, indien er twee loodlijnen AB en AC mogelijk waren; dan zou het vlak, hetwelk door deze twee lijnen gaat, het vlak PQ, volgens de lijn DE, snijden; de hoeken DAB en DAC, zouden dan regt moeten zijn, en dit is (*Gev.* II. *Stell* I. *B.*) onmogelijk.

§. 593. II. Gevolg. *Fig.* 281 *Om dezelfde reden, kan, uit eenig punt A, slechts ééne loodlijn AC op een vlak PQ vallen.*

Want, indien AB en AC die loodlijnen zijn; dan zal een vlak, door dezelve gaande, het vlak PQ, volgens de lijn BC, snijden; men verkrijgt dus eenen driehoek, die twee regte hoeken heeft; hetgeen onmogelijk is.

§. 594. III. Gevolg. *Fig.* 282. Om dan, uit een punt A, in een vlak PR, eene loodlijn AE, op dit vlak op te rigten, zoo trekke men, door het gegevene punt A, twee lijnen BC en AD, naar welgevallen, late door ééne dezer lijnen (BC bij voorbeeld,) een ander vlak gaan, in hetwelk men, uit het punt A, eene loodlijn AE op BC oprigt Men late dan eindelijk dit vlak, om de lijn BC, omdraaijen, tot dat de hoek DAE regt wordt; dan zal, vermits, in dezen stand, de hoeken EAD en EAB beide regt zijn, de lijn AE, zie II. *Bepaling*, loodregt op het vlak PR staan.

§. 595. Aanmerking. *Fig.* 283. Wanneer men, boven eenen bak, op de hoogte CD, met water gevuld, een gewigtje P, aan eenen draad AB, zoo ophangt, dat dit gewigtje P onder water hangt; *dan zal, indien alles in rust is, de draad, als eene regte lijn beschouwd zijnde,* (die geene dikte heeft,) *loodregt op het bovenste oppervlak van het water staan* (welk bovenste oppervlak zoo zuiver vlak is, dat geen konstenaar een zuiverder zou kunnen maken.) Die draad wordt nu de *verticaal* (*verticale lijn* of *loodlijn*), het vlak CD de *horizontale* of *waterpas-*

vlakte genoemd. — *Elk punt, op het oppervlak der Aarde (die rond is) heeft zulk een verticaal en zulk een waterpas-vlak of horizon. — Overal staat de verticaal ten naauwkeurigste loodregt op den horizon.*

V. STELLING. *Fig.* 284.

§. 596. *Wanneer men, uit een punt (A), in eene lijn (BP) gelegen, een onbepaald aantal loodlijnen (AC, AD, AE, enz.) (welke natuurlijk in onderscheidene vlakken moeten liggen,) oprigt; dan zullen deze alle in hetzelfde vlak, op hetwelk deze lijn (BP) loodregt staan zal, gelegen zijn.*

BETOOG. Men kan door twee dezer loodlijnen, *AE* en *AC*, (II. *Stell.*) een vlak laten gaan. Wanneer nu eene derde loodlijn *AD* niet in dit vlak gelegen is; dan zal een vlak *PQ*, hetwelk door de lijnen *AB* en *AD* (II. *Stell*) kan gebragt worden, het eerste vlak, volgens het beloop eener lijn *AF*, doorsnijden, en dan zal de hoek *BAF* (IV. *Stell.*) regt zijn: maar, aangezien de hoek *BAD* (*onderst.*) regt is, en alle regte hoeken gelijk zijn, zoo zal *hoek BAF* = *hoek BAD* moeten zijn; daar zulks nu (IV. *Ax.*) onmogelijk is, zoo zal de lijn *AD* niet buiten, maar wel in het vlak van de lijnen *AC* en *AE*, moeten liggen. — *Alle andere lijnen, die uit A, loodregt op AB staan, zullen, om dezelfde reden, met de lijnen AC, AD en AE, in hetzelfde vlak liggen, dat loodregt op de lijn AB staat.*

§. 597. GEVOLG. *Wanneer men dan een stelsel van twee loodlijnen, om éne van dezelve, laat omdraaijen; dan zal de andere loodlijn, door deze beweging, een plat vlak beschrijven:* wel te verstaan, wanneer die eerste lijn niet van stand verandert.

VI. STELLING. *Fig.* 285 *en* 286.

§. 598. *Elk punt (A), genomen in eene regte lijn (AM, fig.* 285.), *welke, uit het middelpunt eens cirkels, loodregt op het vlak van dien cirkel is opgerigt, staat van al de punten (P, Q, R* enz.) *van den omtrek dezes cirkels op denzelfden afstand* — En, omgekeerd. — *Alle punten (A, B, C* enz. *fig.* 286) *welke, buiten het vlak eens cirkels, van drie punten (P, Q en R) van deszelfs omtrek even ver afstaan (AP = AQ = AR en BP = BQ = BR), liggen in eene lijn, welke door het middelpunt (M) van dien cirkel gaat, en loodregt op deszelfs vlak staat.*

BETOOG *van het eerste. Fig.* 285. Men trekke de lijnen *AP* en *AQ*, benevens de stralen *PM* en *QM*. Omdat dan *AM* (*onderst.*) loodregt op het vlak van den cirkel staat, zoo is *hoek AMP* = *hoek AMQ* = *R*; *PM* = *QM* (*onderst.*) en *AM* = *AM*; derhalve is (X. *Stell.* I. *B.*) *AP* = *BP*. Om dezelfde reden, zal *AR* = *AP* zijn.

Betoog *van het omgekeerde. Fig.* 286. In de driehoeken *ABP*, *ABQ* en *ABR*, is, volgens de onderstelling, *AP* = *AQ* = *AR*, *BP* = *BQ* = *BR*, en *AB* = *AB* = *AB*; die driehoeken zijn dan (XIII *St.* I. *B.*) gelijk- en gelijkvormig; daarom is *hoek MAP* = *hoek MAQ* = *hoek MAR*. Uit die gelijke hoeken en uit de onderstelling, volgt de gelijk- en gelijkvormigheid der driehoeken *PAM*, *QAM* en *RAM*. Want, *hoek MAP* = *hoek MAQ* = *hoek MAR* (*bew.*) *AP* = *AQ* = *AR* (*onderst.*) en *AM* = *AM* = *AM* zijnde, zoo zijn, (X. *Stell.* I. *B.*) gezegde driehoeken gelijk- en gelijkvormig; en daarom *PM* = *QM* = *RM*. Het punt *M* is dus (X. *Stell* V. *B.*) het middelpunt des cirkels.

Maar de lijn AM staat nu ook loodregt op het vlak van den cirkel. Want, uit de zoo even bijgebragte gelijk- en gelijkvormige driehoeken, volgt *hoek AMP* = *hoek AMQ* = *hoek AMR*. Indien nu *hoek AMR* niet regt is; dan zal men uit *P* de loodlijn *PC* op *AM* kunnen laten vallen, en voorts de lijnen *CQ* en *CR* trekken; en dan zullen, omdat *PM* = *QM* = *RM* en *hoek AMP* = *hoek AMQ* = *hoek AMR* (*bew.*) en *CM* = *CM* = *CM* is (X. *Stell.* I. *B.*) *hoek PCM* = *hoek QCM* = *hoek RCM* = *R* zijn. De lijnen *CP*, *CQ* en *CR*, zullen dan (V. *St.*) in hetzelfde vlak liggen; dit vlak zal dan, met het vlak van den cirkel de punten *P*, *Q* en *R*, gemeen hebben en hetzelve (I. *Bep.*) volgens drie onderscheidene lijnen *PQ*, *PR* en *QR* doorsnijden; daar dit nu (III. *Gev.* I. *Stell*) onmogelijk is; zoo kunnen de hoeken *AMP*, *AMQ* en *AMR* niet scherp noch stomp zijn: de lijn derhalve, die door de punten *A* en *B* gaat, staat (II. *Bep.*) regthoekig op het vlak van den cirkel.

VII. Stelling.

§. 599. *Wanneer men, uit eenig punt, gelegen buiten een vlak, tot in, of aan dit vlak, verscheidene lijnen trekt; dan is:*

1°. *De loodlijn de kortste van allen.*

2°. *De lijnen, welke met die loodlijn gelijke hoeken maken, zijn even lang.*

3°. *En de lijn, welke met de loodlijn een grooter hoek maakt, is langer dan de lijn welke met dezelve een kleiner hoek maakt.*

Betoog. De waarheid van dit gestelde volgt onmiddellijk, uit de *XXI. Stelling* van het *I. Boek.*

§. 600. III. Bepaling. Gelijk de afstand van een punt tot eene regte lijn de loodlijn is, welke, uit dit punt, op die lijn valt, zoo is ook de *afstand van een punt tot een vlak*, de loodlijn, welke, uit dit punt, op dit vlak valt.

VIII. Stelling. *Fig.* 287.

§. 601. *Wanneer men, uit eenig punt (A) eener lijn (AB),*

 wel-

welke regthoekig op een vlak (P Q) staat, op eenige andere lijn (E F), in dit vlak gelegen zijnde, eene loodlijn (A C) laat vallen; dan zullen ook alle andere lijnen (C D), welke wederkeerig, uit den voet (C) dezer laatste loodlijn (A C), tot de eerste loodlijn (A B), getrokken worden, loodregt op de lijn (E F) staan, welke in dit vlak (P Q) is aangenomen.

Betoog. Men neme, op de lijn *E F*, *C E* = *C F*, en trekke de lijnen *A E* en *A F*; dan heeft men in de driehoeken *A C E* en *A C F*, *hoek A C E* = *hoek A C F* = *R* (*onderst.*), voorts *E C* = *C F* (*constr.*) en *A C* = *A C*; derhalve is (X. *Stell.* I. *B.*) *A E* = *A F*.

Laat verder, in het vlak *P Q*, de lijnen *B E* en *B F* worden getrokken; dan is, in de driehoeken *A B E* en *A B F*, *hoek A B E* = *hoek A B F* = *R* (*onderst.* en II *Bep.*) *A E* = *A F* (*bewez.*) *A B* = *A B*; derhalve is (II. *Hulpst.* I. *B.*) *B E* = *B F*.

In de driehoeken *B D E* en *B D F*, is dan verder, de lijnen *D E* en *D F* getrokken hebbende, *hoek D B E* = *hoek D B F* (*onderst.*) *B E* = *B F* (*bewez.*) en *B D* = *B D*; derhalve is (X. *St.* I. *B.*) *D E* = *D F*.

Eindelijk is, in de driehoeken *D C E* en *D C F*, als volgt: *C E* = *C F* (*constr.*) *D E* = *D F* (*bewez.*) en *C D* = *C D*; derhalve is (XIII. *Stell.* I. *B.*) *hoek D C E* = *hoek D C F*; en (XXI. *Bep.* I. *B.*) *C D* loodregt op *E F*.

Uit de driehoeken *B C E* en *B C F* volgt op gelijke wijze, dat *B C* loodregt op *E F* staat.

§. 602. Aanmerking. *Indien A B loodregt op het vlak P Q en B C loodregt op de lijn E F staat; dan zal men, op dezelfde wijze, betoogen, dat elke andere lijn A C, welke uit het punt A tot het punt C getrokken is, de lijn E F regthoekig zal doorsnijden.*

IX. Stelling. *Fig.* 288.

§. 603. *Twee lijnen (A B en C D), welke, elke in het bijzonder, regthoekig op hetzelfde vlak (P Q) staan, liggen in een ander vlak, en zijn onderling evenwijdig.*

Betoog. Vereenig de voeten der loodlijnen *A B* en *C D*, door de lijn *A C*; trek, van het punt *C*, tot het punt *B*, de lijn *C B*, en, in de vlakte *P Q*, de lijn *C E* loodregt op *A C*: dan staat (VIII. *Stell.*) de lijn *B C* loodregt op *C E* en wederkeerig; maar *C D* staat (*onderst.*) loodregt op *P Q*, en daarom staat *C D* (II. *Bep.*) loodregt op *C E*. De lijnen *A C*, *B C* en *C D*, liggen dan (V. *Stell.*) in hetzelfde vlak: maar, in ditzelfde vlak, ligt (1 *Gev.* I. *Bep.*) ook de lijn *A B*; de loodlijnen *A B* en *C D* liggen dan in hetzelfde vlak, en zijn (*onderst.* en XXII. *St.* I. *B.*) onderling evenwijdig.

X.

X. STELLING. *Fig.* 289.

§. 604 *Wanneer men, door eene lijn (AB), welke loodregt op een vlak (PQ) staat, een ander vlak (RS) laat gaan, in zulk eene rigting, of in zulk eenen stand, als men goedvindt; dan snijdt dit vlak het eerste, volgens eene regte lijn (AC); wanneer men nu, uit eenig punt (C) van de gemeene doorsnede dezer vlakken, eene loodlijn (CD), op die gemeene doorsnede (AC), in dit vlak (RS) oprigt; dan zal deze loodlijn (CD) ook loodregt op het eerste vlak (PQ) staan.*

BETOOG. Men trekke, uit het punt *C*, tot eenig punt *B* van de loodlijn *AB*, eene lijn *CB*; en, uit datzelfde punt *C*, in *PQ*, eene loodlijn *CE* op *AC*; dan staat (*VIII. Stell.*) deze lijn ook loodregt op *BC* en op de vlakte, welke door de lijnen *AB* en *AC* gaat: maar in deze vlakte ligt (*onderst.*) de lijn *CD*; de lijn *EC* is dan, (*IV. Stell.*) als loodregt op *AC* en *CB* staande, ook loodregt op *CD*; deze laatste dan loodregt op *AC* (*onderst.*) en op *CE* (*bewez.*) staande, zoo staat ook (*IV. Stell.*) *CD* loodregt op het vlak *PQ*.

§. 605. IV. BEPALING. *Fig.* 289. Een vlak (*RS*) staat *loodregt* op een ander vlak (*PQ*), wanneer eene lijn (*CD*) of (*CE*) welke loodregt op derzelver gemeene doorsnede, in één dezer twee vlakken getrokken wordt, ook tevens loodregt op het andere vlak staat.

§. 606. GEVOLG. Volgens deze bepaling en de voorgaande Stelling; *zal elk vlak RS, hetwelk gebragt wordt door eene lijn, welke loodregt op een ander vlak PQ staat, ook loodregt op dit tweede vlak PQ geplaatst zijn.* — En, hieruit volgt dan ook: *dat, wanneer men, uit eene menigte punten, genomen in eene lijn, die in een horizontaal vlak ligt, verticale lijnen* (zie Aanm. IV. Stell.) *oprigt, al die verticale lijnen in hetzelfde vlak zullen liggen, welk vlak alsdan een* verticaal *vlak genoemd wordt.* — Volgens dit beginsel, *wordt, door twee gegevene punten, een verticaal vlak geconstrueerd.*

XI. STELLING. *Fig.* 290.

§. 607. *De gemeene doorsnede (AB) van twee vlakken (RS en TU), welke beide loodregt op hetzelfde vlak (PQ) staan, staat insgelijks loodregt op datzelfde vlak (PQ).*

BETOOG. Want, indien de gemeene doorsnede *AB* niet loodregt op het vlak *PQ*, en dus ook niet loodregt op de snijdingen *AR* en *AT* staat; dan zal men, uit het punt *A*, twee loodlijnen *AC* en *AD*; de eerste in het vlak *RS*, loodregt op de doorsnede *AR*, en de tweede in het vlak *TU*, loodregt op de doorsnede *AT*, kunnen oprigten; en

 de-

deze zullen dan (*IV. Bep.*) elk loodregt op het vlak *P Q* ſtaan. Indien men dan *A B* niet loodregt op het vlak *P Q* ſtelt; dan zal daaruit volgen, dat, uit hetzelfde punt *A*, twee loodlijnen op hetzelfde vlak kunnen worden opgerigt; daar zulks nu (*I. Gev. IV. Stell.*) ongerijmd is, zoo kan *A B* niet anders dan loodregt op *P Q* ſtaan.

§. 608. Gevolg. *Indien drie vlakken regthoekig op elkander ſtaan; dan ſtaat de doorſnede van twee dezer vlakken altijd loodregt op het derde.*

XII. Stelling. *Fig.* 291.

§. 609. *Alle loodlijnen (A F, C G, D H, E I, B K), welke, uit de verſchillende punten eener lijn (A B), buiten een vlak (P Q) gelegen zijnde, loodregt op dit vlak vallen, liggen alle, zonder onderſcheid, in hetzelfde vlak; en de punten, in welke die loodlijnen dit vlak ontmoeten, liggen in dezelfde regte lijn (F K), volgens welke het vlak dezer loodlijnen het eerstgenoemde vlak (P Q) doorſnijdt.*

Betoog. Volgens de *IX. Stelling*, liggen twee loodlijnen *A F* en *C G* in hetzelfde vlak, in hetwelk (*I. Gev. I. Bep.*) de geheele lijn *A B* gelegen is. Om dezelfde reden, liggen de loodlijnen *C G* en *D H* met de lijn *A B* in hetzelfde vlak. Wanneer nu het vlak, waarin de lijnen *A F* en *C G* gelegen zijn, een ander is dan het vlak, waarin de lijnen *C G* en *D H* liggen; dan zullen, ſtrijdig met het *III. Gev.* der *I. Stell.* twee vlakken elkander, volgens het beloop van twee lijnen *A B* en *C G*, moeten doorſnijden; de loodlijnen *A F*, *C G* en *D H*, liggen dan in hetzelfde vlak. Hetzelfde betoog geldt van alle andere loodlijnen *E I*, *B K*, *enz.*, welke alle met *A F*, *C G*, *enz.* in hetzelfde vlak liggen; terwijl de voeten der loodlijnen, in de doorſnijding dezer vlakken gelegen zijnde, (*I. Stell.*) in dezelfde regte lijn *F K* liggen.

§. 610. V. Bepaling. *Fig.* 291. De *projectie van een punt A op een vlak P Q* is de voet *F* van de loodlijn, welke uit het punt *A*, op dit vlak *P Q* valt.

§. 611. VI. Bepaling. *Fig.* 291. De *projectie van eenige regte of kromme lijn op een vlak* beſtaat uit de vereeniging van de projectien van alle de punten dezer regte of kromme lijn.

De projectie van eene regte lijn *A B*, op een vlak *P Q*, is, blijkens de voorgaande Stelling, eene regte lijn *F K*, volgens welke een vlak, dat door deze lijn *A B* gaat, het vlak *P Q* ontmoet. Het vlak *A K*, hetwelk al de loodlijnen, die uit *A B* op *P Q* vallen, bevat, noemt men het *projecterende vlak.* Het vlak *P Q* zelve, het *vlak van projectie*, en de hoek, welke die lijn met hare projectie maakt, de *projectiehoek.* — De projectie *F K* van eenig bepaald gedeelte *A B* eener onbepaalde lijn is dat gedeelte *F K* der projectie, welke tusſchen de loodlijnen *A F* en

B K,

BK, welke uit de uiterste punten *A* en *B* van die lijn, op het vlak van projectie vallen; en is, indien *AL* evenwijdig aan *FK* getrokken wordt, (*I. Stell. III. B*) $AL = FK = AB \times cos. BAL$ (zie *XXIV. Stell IV. B*), dat is, *de projectie eener bepaalde lijn op een vlak, is gelijk aan die lijn, vermenigvuldigd met de cosinus van den projectie-hoek.*

§. 612. Aanmerking. Eene regte lijn kan, met betrekking tot eenig vlak, driederlei verschillenden stand hebben. 1°. *Zij kan loodregt op dit vlak staan.* 2°. *Met hetzelve eenen scheven stand hebben.* 3°. *Of, evenwijdig aan hetzelve loopen. In het eerste geval van den loodregten stand, welks eigenschappen de voorgaande Stellingen reeds hebben leeren kennen, is hare projectie op het vlak een enkel punt: in de twee andere gevallen, tot welker beschouwing wij thans overgaan, is de projectie altijd eene regte lijn.*

§. 613 VII. Bepaling. *Fig.* 292. Eene lijn *AB*, heeft, met betrekking tot een vlak *PQ*, een scheven stand, wanneer deze lijn, of haar verlengde, zonder loodregt op dit vlak te staan, hetzelve in eenig punt *A* ontmoet. En de stand van eene, op een vlak *PQ*, schuins staande lijn *AB* wordt bepaald door den *standhoek BAC*, welke die lijn *AB* met hare projectie *AC*, op dit vlak *PQ*, maakt.

§. 614. Gevolg. *Fig.* 292. Wanneer men derhalve, uit het punt *A*, alwaar de lijn *AB* of deszelfs verlengde het vlak *PQ* ontmoet, eene loodlijn *AZ* op dit vlak oprigt, en, door deze loodlijn *AZ* en de lijn *AB*, een vlak laat gaan; dan zal dit vlak (*Gev. IV. Bep.*) loodregt op *PQ* staan, en bijgevolg het projecterende vlak van de lijn *AB* zijn, welker projectie de lijn *AC* is: de hoek *ZAB* derhalve, welke *de loodlijn AZ met de lijn AB maakt, is het complement van den standhoek BAC, welke den stand van de lijn AB met betrekking tot het vlak PQ bepaalt.*

XIII. Stelling. *Fig.* 292.

§. 615. *Wanneer men, uit het punt A, alwaar eene schuinsche lijn AB een vlak PQ ontmoet, in dit vlak verscheidene lijnen AC, AE, AF, AD,* enz., *trekt; dan zullen deze lijnen, met gezegde schuinsche lijn AB, verscheidene hoeken maken. Onder al die hoeken, zal nu:* 1°. *de hoek BAC, welke gezegde lijn AB met hare projectie maakt, de kleinste zijn;* 2°. *de hoek BAD, welke zij met het verlengde der projectie maakt, zal de grootste zijn;* 3°. *aan denzelfden kant der projectie, worden de hoeken BAE,*

BAF, enz. *grooter*, *als de lijnen AE*, *AF*, enz. *eenen grooteren hoek met de projectie AB maken*; 4°. *wanneer men*, *aan weêrszijden van de projectie*, *de hoeken CAE en CAG gelijk maakt*; *dan zullen ook de hoeken BAE en BAG gelijk zijn*.

Betoog *van het eerste*. Men neme, in de lijn *AB*, een punt *B*, en late uit hetzelve eene loodlijn *BC* op het vlak *PQ* vallen; dan ligt (*XII. Stell*) deze loodlijn in het projecterende vlak, en snijdt de projectie van *AB* in *C*. Wanneer men dan *AE* = *AC* maakt, en de lijnen *CE* en *BE* trekt; dan is: 1°. in den regthoekigen driehoek *BCE*, de hypothenusa *BE* grooter dan de loodlijn *BC*. 2°. In de driehoeken *ABC* en *ABE*, is *AB* = *AB*; *AC* = *AE* en *BE* > *BC*; derhalve zal (*XII. Stell. I. B.*) *hoek BAE* > *hoek BAC* zijn.

Betoog *van het tweede*. Men neme *AF* en *AD* = *AC*, en trekke de lijnen *BD* en *BF*; dan is (*VII. Stell. I. B.*) *CF* < *AC* + *AF*, of *CF* < *CD*; derhalve is (*XXI. Stell. I. B.*) *BF* < *BD*. In de driehoeken, *ABD* en *ABF*, is nu *AB* = *AB*; *AD* = *AF* en *BD* > *BF*; derhalve zal ook (*XII. Stell. I. B.*) *hoek BAD* > *hoek BAF* zijn.

Betoog *van het derde*. Men make *AF* = *AE* = *AC*, en trekke de lijnen *CF* en *BF*; dan is: 1°. in de driehoeken *ACE* en *ACF*, *AC* = *AC*; *AE* = *AF*, *hoek CAF* > *hoek CAE*; dus (*XI. Stell. I. B.*) *CF* > *CE*. 2°. In de regthoekige driehoeken *BCE* en *BCF*, is dan ook (*XXI. Stell. I. B.*) *BF* > *BE*; 3°. eindelijk is, in de driehoeken *BAE* en *BAF*, *AB* = *AB*, *AE* = *AF* en *BF* > *BE*; derhalve zal (*XII. Stell. I. B.*) *hoek BAF* > *hoek BAE* zijn.

Betoog *van het vierde*. Men neme den *hoek CAG* = *hoek CAE*, *AG* = *AE*, en trekke nog de lijn *BG*; dan zal (*X. Stell. I. B.*) *CG* = *CE*; en, in de regthoekige driehoeken *BCE* en *BCG*, (*X. St. I. B.*) *BE* = *BG*; en eindelijk is, in de driehoeken *ABE* en *ABC*, (*XIII. Stell. I. B.*) *hoek BAE* = *hoek BAG* zijn.

§. 616 Gevolg. *Fig.* 292. Neemt men de hoeken *CAG* en *CAE* regt; dan is *AG* het verlengde van *AE*, en omdat in dit geval, *BAE* en *BAG* regt zijn, staat *AB* loodregt op de lijn *EAG*, welke met de projectie van *AB* een regten hoek maakt. *Wanneer men derhalve*, *een vlak*, *om de lijn AB*, *laat omdraaijen*; *dan verkrijgt dit vlak*, *bij elke omwenteling*, *twee merkwaardige standen*. 1°. *Wanneer het loodregt op het vlak PQ staat*, *alsdan is deszelfs doorsnijding met het vlak PQ de projectie der lijn zelve*. 2° *Wanneer dit omwentelende vlak het vlak PQ, volgens eene lijn doorsnijdt*, *welke met de projectie een regten hoek maakt*; *in welk geval*, *de stand van dit vlak van den voorgaanden stand een regten hoek verschilt*. Door dit alles, kan nu het onderscheid tusschen den loodregten en scheven stand eener lijn op een vlak duidelijk en naauwkeurig genoeg onderscheiden worden.

§. 617. VIII. Bepaling. Eene lijn loopt *evenwijdig* aan een vlak, wanneer zij, hoe verre dezelve ook, aan den eenen of aan den anderen kant, mogt verlengd worden, dit vlak nimmer kan ontmoeten of doorsnijden.

XIV. Stelling. *Fig.* 293.

§. 618. *De gemeene doorsnede* (*CD*) *van twee vlakken* (*PQ en BC*), *waarvan het eene* (*BC*) *door eene lijn* (*AB*) *gaat, welke evenwijdig aan het andere vlak* (*PQ*) *loopt, zal altijd evenwijdig aan deze lijn* (*AB*) *loopen.*

Betoog. Want, indien de lijnen *AB* en *CD* niet evenwijdig aan elkander waren; dan zouden zij elkander ergens doorsnijden; en, omdat de lijn *CD* in het vlak *PQ*, ligt, zou de lijn *AB* het vlak *PQ* ontmoeten, en niet evenwijdig aan hetzelve zijn.

§. 619. I. Gevolg. *Fig.* 293 *Wanneer dan het vlak BC, om eene lijn AB, evenwijdig aan een ander vlak PQ loopende, bewogen wordt; dan zal de doorsnijding CD of EF dezer vlakken overal en altijd aan die lijn AB evenwijdig blijven.*

§. 620. II. Gevolg. *Fig.* 293 Komt dit bewegende vlak in den stand *ABEF*, regthoekig op *PQ*; dan is *EP* de projectie (*VI. Bep.*) van *AB*. *Wanneer dus eene lijn evenwijdig aan een vlak loopt; dan is zij ook evenwijdig aan hare projectie op dit vlak:* en, omgekeerd.

§. 621. III. Gevolg. *Fig.* 293. En, omdat eene lijn, die evenwijdig aan een vlak is, evenwijdig aan hare projectie loopt, *zoo zullen* (V en VI. Bep.) *al de punten eener aan een vlak evenwijdig zijnde lijn, overal denzelfden afstand tot dit vlak hebben.*

XV. Stelling. *Fig.* 294.

§. 622. *De doorsnede* (*AB*) *van twee vlakken* (*AR en AS*), *welke, elk in het bijzonder, aan eenige lijn* (*PQ*) *evenwijdig loopen, is tevens aan dieselfde lijn* (*PQ*) *evenwijdig.*

Betoog. Laat, in de doorsnede *AB* der twee vlakken *AS* en *AR*, een punt *A* genomen, en, door dit punt en de lijn *PQ*, een vlak gaan; dan zal de doorsnijding *AB* in dit vlak gelegen zijn of hetzelve onder eenigen hoek ontmoeten. Indien het laatste plaats heeft; dan zal het gezegde vlak het vlak *AS*, volgens eenige lijn *AE*, en het vlak *AR*, volgens eenige lijn *AD*, snijden; welke lijnen volgens de *XIV. Stell.* elk in het bijzonder aan de lijn *PQ* evenwijdig zouden moeten zijn en met dezelve in hetzelfde vlak liggen; hetgeen, daar die lijnen elkander in

A

A snijden, onmogelijk is. Het is dus ongerijmd te stellen, dat deze doorsnede *A B* buiten het vlak, door de lijn *P Q* en het punt *A* gaande, gelegen is; deze lijn *A B* is dan geheel in hetzelve gelegen en is, volgens de *XIV. Stell.*, evenwijdig aan *P Q*.

XVI. STELLING. *Fig.* 295.

§. 623. *Wanneer twee lijnen (A B en C D), elkander niet snijdende, in twee onderscheidene vlakken liggen; dan bestaat er slechts ééne lijn (E H), welke beide deze lijnen regthoekig doorsnijdt, of, met elke derzelven, een regten hoek maakt, en het gedeelte (H E) dezer snijdende lijn, hetwelk tusschen de twee voornoemde lijnen (A B en C D), begrepen is, is korter dan eenige andere lijn, welke eenig ander punt van de eerste lijn (A B) met eenig ander punt van de tweede lijn (C D) vereenigt.*

BETOOG. Men kan, in ééne der lijnen, bij voorbeeld de lijn *C D*, een punt *E* nemen, en door dit punt en de eerste lijn *A B* (*Gev. III. Stell.*) een vlak laten gaan; in dit vlak, door het punt *E*, eene lijn *F G*, evenwijdig aan *A B* trekken; en voorts, door de lijnen *C D* en *F G*, (*II. Stell.*) een vlak *P Q* verbeelden, aan hetwelk (*XIV. Stell.*) de lijn *A B* evenwijdig zal zijn.

Beschouwen wij nu dit vlak *P Q* en de lijn *A B*, als in denzelfden stand blijvende; dan zal men aan het vlak, dat door de lijn *A B* gaat, eene omwentelende beweging om de lijn *A B* kunnen geven: en het zal, staande deze beweging, ergens in eenen stand komen, dat het loodregt op het vlak *P Q* staat. Laat dan de figuur dien loodregten stand voorstellen; dan zal *F G* (*VI. Bep.*) de projectie van de lijn *A B* zijn; en, wanneer men dan, uit het punt *E*, de lijn *E H*, loodregt op deze projectie oprigt; dan zal zij (*X. Stell.*) tevens loodregt op het vlak *P Q* staan, en daarom de lijn *C D* regthoekig doorsnijden; terwijl, wegens de evenwijdigheid der lijnen *A B* en *F G*, de lijn *A B* insgelijks door *E H* regthoekig worden doorgesneden.

Deze lijn E H is nu de eenige lijn, welke beide lijnen A B en C D te gelijk regthoekig kan doorsnijden. Men late, om zulks te betoogen, door een punt *I*, op de lijn *A B*, in de nabijheid van *H* genomen, en de lijn *C D*, een vlak gaan, en, in dit vlak, uit dit punt *I*, eene loodlijn *I L*, op de lijn *C D*, vallen; men trekke *I K*, loodregt op *F G*; dan staat (*X Stell.*) die lijn *I K* ook loodregt op het vlak *P Q*, en, indien men dan de punten *K* en *L* te zamen voegt; dan is (*IV. Stell.*) de hoek *I K L* een regte hoek, en *I K L* een regthoekige driehoek, waarvan *I L* de hypothenusa is.

Wanneer nu de hoek *B I L* een regte hoek ware; dan zou (*IV. St.*) *A B* regthoekig op den driehoek *I K L* staan; en, omdat *F G* met *A B* in hetzelfde vlak ligt, zoo zou *F G* insgelijks regthoekig op den driehoek

hoek *IKL* ſtaan, en de hoeken *IKE* en *EKL* zouden (*IV. Stell.*) regt zijn: daar nu de driehoek *IKL* regthoekig op het vlak *PQ* ſtaat, zoo is (VIII. *Stell.*) de hoek *ELK* een regte hoek. Wanneer men dus den hoek *BIL* als regt aanneemt; dan zal de driehoek *EKL* noodzakelijk twee regte hoeken hebben; daar zulks nu onmogelijk is, zoo kan de hoek *BIL* niet regt zijn. Waar 'ter plaatſe men derhalve, buiten het punt *H*, in de lijn *AB*, een punt *I* neemt, zoo zal de lijn *KI*, welke, uit dit punt, loodregt op *CD* valt, de lijn *AB* onder eenen ſcheven hoek doorſnijden. Men zal, op gelijke wijze, betoogen, dat zulks ook zal plaats hebben, voor elke lijn, welke, uit eenig ander punt van de lijn *CD*, dan het punt *E*, regthoekig op *AB* valt.

Nu moet men nog bewijzen: *dat de lijn EH korter is dan de afſtand van het punt H tot eenig ander punt van de lijn CD, of van het punt E tot eenig ander punt van de lijn AB; of eindelijk korter dan de afſtand van twee andere punten I en L, in beide lijnen, buiten de punten H en E, genomen zijnde.* Tot dat einde merken wij op: 1°. dat, in het vlak *HCD*, het punt *H* (XXI. *Stell.* I. *B.*), digter bij het punt *E*, dan bij eenig ander punt *CD* ſtaat. 2°. Dat, in het vlak *EAB*, het punt *E*, digter bij het punt *H*, dan bij eenig ander punt van de lijn *AB* ſtaat 3° Dat in het vlak *ICD*, het punt *I*, digter bij het punt *L*, dan bij eenig ander punt van de lijn *CD* gelegen is. Omdat nu, in den regthoekigen driehoek *IKL*, welke in *K* regthoekig is, $IL > IK$ of *HE* is, zoo zal (VI. *Ax.*) $IL > HE$ zijn. Hetzelfde zal gelden van elk ander punt *I*, in *AB* gelegen, welks digtſte afſtand tot *CD*, en van elk punt *L*, welks digtſte afſtand tot *AB*, grooter dan *HE* zal zijn. De punten *H* en *E* zijn dan digter bij elkander gelegen, dan twee andere punten, die in de lijnen *AB* en *CD* genomen kunnen worden.

§. 624. LEERING. Men leert hieruit: *dat, wanneer er, in de ruimte, twee lijnen gegeven zijn, die elkander niet ſnijden, er altijd twee vlakken beſtaan, door die lijnen gaande, en die loodregt op elkander ſtaan, benevens nog twee evenwijdige vlakken, welke door de lijn der kortſte afſtanden regthoekig worden doorgeſneden.*

§. 625. IX. BEPALING. *Fig.* 295. Naar aanleiding van het voorgaande betoog, wordt de betrekkelijke ligging van twee lijnen *AB* en *CD*, welke elkander niet ſnijden, en in twee onderſcheidene vlakken liggen, door twee onderſcheidene gegevens bepaald: 1°. door de lijn *EH*, welke loodregt op beide lijnen ſtaat, en derzelver *kortſten afſtand* genoemd wordt; 2°. door den hoek *FEC*, welke eene lijn *FG*, die, door één van de voetpunten dezer loodlijn, evenwijdig aan de eene lijn *AB*, getrokken is, met de andere lijn *CD* maakt, en de *ſtandhoek* dezer lijnen genoemd wordt.

§. 626. AANMERKING. In de Meetkunst der platte vlakken, worden

den de evenwijdige lijnen beschouwd, als liggende in hetzelfde vlak: maar daaruit zou men niet mogen besluiten: dat twee lijnen, in onderscheidene vlakken liggende, de overige eigenschappen der evenwijdige lijnen bezitten. Door het betoogde in deze Stelling wordt echter dit gewigtige punt beslist.

§. 627. I. Gevolg *Fig.* 295. *Twee lijnen AB en CD, welke in onderscheidene vlakken liggen, kunnen niet evenwijdig zijn.*

Want wanneer, men uit eenig punt van ééne van twee evenwijdige lijnen, eene loodlijn op de andere laat vallen; dan staat die loodlijn ook loodregt op de eerste: deze omstandigheid heeft nu (zie boven) in twee lijnen, welke in twee onderscheidene vlakken liggen, slechts voor twee punten plaats, en niet voor alle, zoo als, ingevalle de lijnen evenwijdig waren, zou behooren: deze lijnen kunnen derhalve niet evenwijdig zijn.

§. 628. II. Gevolg. *Twee evenwijdige lijnen liggen dan noodzakelijk in hetzelfde vlak.*

§. 629. III. Gevolg. *Al de zijden van een parallelogram liggen dan ook insgelijks in hetzelfde vlak.*

XVII. Stelling. *Fig.* 296.

§. 630. *Wanneer twee lijnen (AB en CD), elke in het bijzonder, aan eene derde, met de twee eerste niet in hetzelfde vlak liggende lijn (EF), evenwijdig zijn; dan zullen ook deze lijnen evenwijdig zijn, en in hetzelfde vlak liggen.*

Betoog. Omdat *AB* evenwijdig is aan *EF*, liggen deze lijnen (*II. Gev. XVI Stell.*) in hetzelfde vlak, en omdat *CD* aan *EF* evenwijdig is, liggen deze twee lijnen in een ander vlak. Men late nu, door het punt *E* een vlak gaan, op hetwelk de lijn *EF* regthoekig staat; dan snijdt dit vlak de twee voorgaande, volgens de lijnen *EA* en *EC*, en de hoeken *BAE* en *DCE* zijn, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen, (zie *XXIII. Stell. I. B.*) regte hoeken; de lijnen *AB* en *CD* staan derhalve (*X. Stell.*) regthoekig op het vlak *PQ* en zijn (*IX. Stell.*) in dezelfde vlakte gelegen en evenwijdig.

§. 631. X. Bepaling. Wanneer twee vlakken, ten opzigte van elkander, zoodanig geplaatst zijn, dat zij, aan welken kant, en hoe verre zij zich mogten uitstrekken, elkander nimmer snijden; dan worden zij *evenwijdige vlakken* genoemd.

XVIII. Stelling. *Fig.* 297.

§. 632. *Twee vlakken (PQ en RS), welke, elk in het bijzonder, loodregt op dezelfde lijn (AB) staan, zijn onderling evenwijdig.*

Be-

BETOOG. Want, indien deze vlakken niet evenwijdig zijn; dan zullen zij elkander ergens ontmoeten, en een zeker punt C gemeen hebben, door hetwelk en door de gezegde lijn *AB* een vlak zal kunnen gebragt worden, hetwelk de vlakken, volgens de lijnen *AC* en *BC*, zal doorsnijden: daar nu, wegens den loodregten stand van de lijn *AB*, de hoeken *A* en *B* regt zijn, en een driehoek geen twee regte hoeken kan hebben, kunnen de vlakken *PQ* en *RS*, elkander nergens ontmoeten, en zijn derhalve (X. *Bep.*) evenwijdig.

§. 633. I. GEVOLG *Fig.* 298. Om derhalve twee evenwijdige vlakken daar te stellen, neme men op eene lijn *AB* twee punten *A* en *B*, en trekke, in onderscheidene vlakken, door deze punten de loodlijnen *CD*, *EF*, *GH* en *IK*; dan zullen (*IV en XVIII. St.*) de vlakken, welke door deze lijnen gaan, evenwijdig zijn. Of, men late een stelsel van twee evenwijdige lijnen, om de lijn, welke loodregt op beiden staat, omdraaijen; dan zullen deze evenwijdige lijnen, door hare beweging, evenwijdige vlakken voortbrengen.

§. 634. II. GEVOLG. *Fig.* 295. Omdat (*XVII. Stell.*) zekere lijn *EH* twee lijnen *AB* en *CD*, welke in twee onderscheidene vlakken liggen, regthoekig snijdt, en men door de punten, *E* en *H*, twee andere lijnen trekken kan, welke regthoekig op diezelfde lijn *EH* staan, *zoo kunnen* (IV. Stell.) *er door twee lijnen, welke niet in hetzelfde vlak liggen, altijd twee evenwijdige vlakken gebragt worden.*

XIX. STELLING. *Fig.* 299.

§. 635. *Wanneer twee evenwijdige vlakken (PQ en RS) door een derde vlak (BC) gesneden worden; dan zijn ook de doorsnijdingen (AB en CD) dezer vlakken evenwijdig.*

BETOOG. Want, indien de lijnen van doorsnijding elkander mogten ontmoeten; dan zouden ook de vlakken, in welke deze lijnen liggen, elkander moeten snijden, en derhalve niet evenwijdig zijn.

XX. STELLING. (*Het omgek. van de XVIII Stell.*) *Fig.* 297.

§. 636. *Eene lijn (AB), welke loodregt op één (PQ) van twee evenwijdige vlakken (PQ en RS) staat, staat ook loodregt op het tweede vlak (RS).*

BETOOG. Men trekke, uit het punt *B*, in het vlak *PQ*, de lijn *BC*, en snijde beide vlakken, *PQ* en *RS*, door een vlak, hetwelk door de lijnen *BC* en *AB* gaat; dan zal de lijn *AC*, volgens welke dit vlak, het

het vlak *RS* snijdt, (*XIX. Stell.*) aan *BC* evenwijdig, en de hoek *BAC* zal (zie *XXIII. Stell. I. B.*) regt zijn. Hetzelfde zal nu plaats hebben, in welk eene rigting de lijn *BC* genomen wordt; de lijn *AB* zal derhalve regthoekig staan op alle lijnen, welke, uit het punt *A*, in het vlak *RS*, getrokken worden; zij zal bijgevolg (*IV. Stell. of II. Bep.*) regthoekig op het vlak *RS* staan.

XXI. Stelling. *Fig.* 297.

§. 637. *Een vlak (BAC), hetwelk loodregt op één (PQ) van twee evenwijdige vlakken (PQ en RS) staat, staat ook loodregt op het tweede vlak (RS).*

Betoog. Laat, uit het punt *B* van de gemeene doorsnede *BC* van het vlak *PQ* met het vlak *BAC*, hetwelk (*onderst.*) op hetzelve regthoekig staat, de lijn *BA* loodregt op deze doorsnede in het vlak *BAC* worden opgerigt; dan staat (*IV. Bep.*) diezelfde lijn *AB* ook loodregt op het vlak *PQ*; en, omdat *PQ* evenwijdig is aan *RS*, (*XX. Stell.*) loodregt op het vlak *RS*; de hoek *BAC* is dan regt, en de lijn *BA* staat derhalve in het vlak *ABC* loodregt op de doorsnede *AC* van de vlakken *RS* en *ABC*: het vlak *BAC*, staat dan (*IV. Bep.*) loodregt op het vlak *RS*.

XXII. Stelling. *Fig.* 300.

§. 638. *De evenwijdige lijnen (AB en CD), welker uiteinden in twee evenwijdige vlakken (PQ en RS) gelegen zijn, zijn even lang.*

Betoog. De lijnen *AB* en *CD*, volgens de onderstelling, evenwijdig zijnde, liggen (*II. Gev. XVI. Stell.*) in een vlak, dat de vlakken *PQ* en *RS*, volgens twee lijnen *BD* en *AC*, snijdt, welke (*XIX. Stell.*) evenwijdig zijn; diensvolgens, en, wegens de onderstelde evenwijdigheid der lijnen *AB* en *CD*, is *ACDB* een parallelogram, en daarom is (*I. Stell. III. B.*) $AB = CD$.

§. 639. Gevolg. *Fig.* 300. *Wanneer de lijn AB loodregt op PQ staat; dan staat zij ook loodregt op RS, en de lijn AB is dan de afstand der evenwijdige vlakken PQ en RS.* Wijl dan alle lijnen *CD*, welke evenwijdig aan *AB* loopen, en daarom loodregt op beide vlakken staan, evenwijdig en gevolgelijk gelijk zijn, *zoo staan twee evenwijdige vlakken overal even ver van elkander.*

XXIII. Stelling. *Fig.* 301.

§. 640. *De eindpunten van drie gelijke en evenwijdige lijnen, wel-*

welke niet in hetzelfde vlak liggen, zijn altijd in evenwijdige vlakken gelegen.

Opheldering. Wanneer de lijnen *A B*, *C D* en *E F*, die niet alle drie in hetzelfde vlak liggen, onderling gelijk en evenwijdig zijn; dan liggen de punten *B*, *D* en *F*, (*III. Stell.*) in een vlak, en de punten *A*, *C* en *E*, in een ander vlak; of, zoo men wil; de lijnen *B D*, *D F* en *B F*, zijn in een vlak *B D F*, en de lijnen *A C*, *C E* en *A E* in een ander vlak *A C E* gelegen. Nu zeg ik: *dat deze twee vlakken evenwijdig zijn.*

Betoog. Want. indien deze vlakken niet evenwijdig zijn; dan zal men, door het punt *B*, een vlak *B G H* kunnen brengen, dat evenwijdig aan het vlak *A C E* is. Dit vlak zal de lijnen *C D* en *E F*, of derzelver verlengden, in de punten *H* en *G* snijden; en, wegens de ondersteelde evenwijdigheid der lijnen *A B*, *C D* en *E F*, zoo zal (*XXII. St.*) *C H* = *A B* en *E G* = *A B* zijn; maar daar nu (*onderst.*) *A B* = *C D* = *E F* is, zoo zal (*V. Ax.*) *C H* = *C D* en *E G* = *E F* moeten zijn; daar dit nu (*IV. Ax.*) niet mogelijk is, zoo zal geen ander, dan het vlak *B D F*, evenwijdig aan het vlak *A C E* kunnen zijn.

§. 641. Gevolg. *Vlakken derhalve, welke overal even ver van elkander afstaan, zijn evenwijdig.*

§. 642. Leering. Omdat (*XXXI. Stell. I. B.*) *A C* = *B D*, *C E* = *D F* en *A E* = *B F* is, *zoo zullen* (*XXXI en XIII. Stell. I. B.*) *de driehoeken A C E en B D F, welke, door de uiteinden van drie gelijke en evenwijdige lijnen, gevormd worden, gelijk- en gelijkvormig zijn.*

XXIV. Stelling. *Fig.* 302.

§. 643. *Wanneer de beenen van twee hoeken aan elkander evenwijdig loopen; dan zijn deze hoeken aan elkander gelijk, en zij zijn daarenboven in evenwijdige vlakken gelegen.*

Opheldering. Wanneer *A B* aan *D E* en *A C* aan *D F* evenwijdig is; dan zal 1°. *hoek B A C* = *hoek E D F* zijn; en 2°. het vlak, waarin de hoek *B A C* ligt, zal evenwijdig zijn aan het vlak, waarin de hoek *E D F* gelegen is.

Betoog *van het eerste.* Men neme *A B* = *D E* en *A C* = *D F*, en trekke de lijnen *A D*, *B E*, *C F*, en de lijnen *E F* en *B C*. Omdat nu *A B* aan *D E* evenwijdig is, liggen (II. *Gev.* XVI. *Stell.*) deze lijnen in hetzelfde vlak; en, naardien nog *A B* = *D E* is, zoo zijn (XXXI. *Stell.* I. *B.*) de lijnen *A D* en *B E* gelijk en evenwijdig. Om dezelfde redenen, zullen de lijnen *A D* en *C F* gelijk en evenwijdig zijn. De lijnen *B E* en *C F* zullen alzoo, aan dezelfde lijn *A D* evenwijdig zijnde, (XVII *Stell.*) onderling evenwijdig zijn, en (II. *Gev.* XVI *Stell.*) in hetzelfde vlak liggen; maar, daar nu deze lijnen ook nog bovendien gelijk zijn, zoo zal (XXXI. *Stell.* I. *B.*) *B C* = *E F* zijn. De driehoe-

ken *ABC* en *DEF* derhalve onderling gelijkzijdig zijnde, zoo zal (XIII. *Stell.* I. *B.*) de *hoek BAC* = den *hoek EDF* zijn.

Betoog *van het tweede.* Men heeft reeds bewezen: dat de lijnen *AD*, *BE* en *CF*, gelijk en evenwijdig zijn: de vlakken, in welke de hoeken *BAC* en *EDF* liggen, zijn dan (XXIII *Stell.*) evenwijdig.

§. 644 Gevolg. *Fig* 302. Hieruit volgt: *dat, wanneer twee evenwijdige vlakken ABC en DEF, door twee andere vlakken ABED en ACFD, welke elkander, volgens eene lijn AD, snijden, worden doorgesneden, de hoeken EDF en BAC, onder welke de laatste vlakken de eerste snijden, noodzakelijk gelijk zullen zijn.*

XXV. Stelling. *Fig.* 303.

§. 645. *Elk stelsel van drie evenwijdige vlakken (PQ, RS en TU) snijdt van twee lijnen (AC en DF), op eenigerlei wijze, in de ruimte gelegen zijnde, deelen af, welke met elkander eene welgeordende evenredigheid (AB : BC = DE : EF) uitmaken.*

Betoog. Om deze stelling, welke met de *I. Stelling* van het *IV. Boek* overeenstemt, op de algemeenste wijze, te betoogen, zullen wij aannemen: dat de lijnen *AC* en *DF* niet in hetzelfde vlak liggen.

Men trekke, van het punt *D* tot *C*, eene onbepaalde regte lijn *DC*, welke het vlak *RS*, in het punt *G*, ontmoet; daarna trekke men nog de lijnen *AD*, *BG*, *GE* en *CF*. Het vlak van den driehoek *ADC* snijdt de evenwijdige vlakken *PQ* en *RS*, volgens de lijnen *AD* en *BG*; die lijnen zijn (*XIX. Stell.*) evenwijdig; en daarom is, volgens de *I. Stell. IV. B.*

$$AB : BC = DG : GC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Het vlak van den driehoek *DCF* snijdt de evenwijdige vlakken *RS* en *TU*, volgens de lijnen *GE* en *CF*, die (*XIX. Stell.*) evenwijdig zijn, en daarom is *I. Stell. IV. B.*

$$DE : EF = DG : GC \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Uit welke evenredigheden (1) en (2) dan (*I. Stell. II. B.*) onmiddelijk zal moeten volgen:

$$AB : BC = DE : EF$$

I. *Over de tweevlakkige hoeken.*

§. 646. XI. Bepaling. Wanneer men de *XIX Bepaling* van het *I. Boek* inziet; dan zal men gevoelen: dat de natuurlijkste benaming, pasfende aan de onbepaalde ruimte, gelegen tusfchen eenige vlakken, die elkander in hetzelfde punt ontmoeten, *veelvlakkige hoek* zal zijn. Een *tweevlakkige hoek is de onbepaalde ligchamelijke ruimte,*

te, gelegen tusschen twee onbepaalde vlakken, die elkander, volgens het beloop eener onbepaalde lijn, doorsnijden. De vlakken, welke dien tweevlakkigen hoek bepalen, zijn deszelfs *zijvlakken*, en de lijn, volgens welke die zijvlakken elkander snijden, de *ribbe* van den *tweevlakkigen hoek. De grootte van een tweevlakkigen hoek hangt af, noch van de uitgestrektheid, noch van de figuur, welke deszelfs zijvlakken hebben; maar alleen van de grootere of kleinere onbepaalde ligchamelijke ruimte, welke tusschen dezelve gelegen is.*

§. 647. AANMERKING. *Fig.* 304. *Tweevlakkige hoeken zijn uitgebreidheden, welke, door de ribben dezer hoeken langs elkander te leggen en de zijvlakken tegen elkander te sluiten, tot één geheel vereenigd kunnen worden. Men kan ook elken tweevlakkigen hoek ABE, door middel van vlakken. C, D, enz., welke door de ribbe AF van dien hoek gebragt worden, in twee of meer gelijke of ongelijke deelen, verdeelen.*

§. 648. XII. BEPALING. *Fig.* 305. Twee *tweevlakkige hoeken zijn gelijk*, wanneer de ribbe *AB* van den eersten, langs de ribbe *CD* van den tweeden, en een zijvlak *Q* van den eersten hoek op een zijvlak *S* van den tweeden gelegd zijnde, het andere zijvlak *P* van den eersten tweevlakkigen hoek dan ook op het andere zijvlak *R* van den tweeden sluit.

§. 649. XIII. BEPALING. *Fig.* 290. Het *supplement van een tweevlakkigen hoek R B T* ontstaat, wanneer men één van deszelfs zijvlakken *RB*, naar den anderen kant van *RB*, buiten deszelfs ruimte verlengd hebbende, er een anderen tweevlakkigen hoek *TBS* ontstaat, die dan het supplement van den eersten genoemd wordt.

XXVI. STELLING. *Fig.* 306.

§. 650. *Wanneer men, in de lijn (AB), volgens welke twee vlakken (AP en AQ) elkander snijden, twee punten (C en F) aanneemt; en, door deze punten, in het eene vlak (AP) twee evenwijdige lijnen (CD en FG) en, in het tweede vlak (AQ) twee evenwijdige lijnen (CE en FH) trekt; dan zullen de hoeken (DCE en GFH), welke deze lijnen bepalen, gelijk zijn.*

BETOOG. Want; omdat, volgens de onderstelling, *CD* aan *FG*, en *CE* aan *FH* evenwijdig is, zoo zal (*XXIV. Stell.*) de *hoek DCE* gelijk zijn aan den *hoek GFH* zijn.

§. 651. XIV. BEPALING. *Fig.* 306. De *standhoek* van een tweevlakkigen hoek is de hoek *DCE*, welke gevormd wordt door de

loodlijnen *CD* en *CE*, welke, uit eenig punt *C* van de ribbe *AB*, in elk zijner zijvlakken *AP* en *AQ*, op deze ribbe *AB*, worden opgerigt. Is die ſtandhoek een regten hoek; dan is de tweevlakkige hoek *regt*; maar, ſcherp of ſtomp zijnde, zoo kan men dien tweevlakkigen hoek ook *ſcherp* of *ſtomp* noemen. Men vergelijke de IV. *Bep.* boven van den loodregten ſtand van twee vlakken (*fig.* 289) gegeven, welke met deze in alles overeenſtemt.

§. 652. GEVOLG. *Fig.* 306. *Die ſtandhoek*, is, volgens de *XXVI. Stelling*, *voor elk punt van de ribbe AB*, *dezelfde*; en, vermits deszelfs beenen regthoekig op de ribbe van den tweevlakkigen hoek ſtaan, *zoo ſtaat ook* (*II. Bep.*) *deze ribbe regthoekig op het vlak van den ſtandhoek. De zijvlakken van den tweevlakkigen hoek ſtaan bijgevolg ook* (*IV. Bep.*) *regthoekig op het vlak van den ſtandhoek*, *en*, *omgekeerd*.

XXVII. STELLING. *Fig.* 307.

§. 653. *Gelijke tweevlakkige hoeken hebben gelijke ſtandhoeken.* En, omgekeerd; *alle tweevlakkige hoeken*, *welker ſtandhoeken gelijk zijn*, *zijn gelijk.*

BETOOG *van het eerſte.* Laten N°. 1 en 2 twee gelijke tweevlakkige hoeken zijn. Men neme, in de ribben *AB* en *CD* dezer hoeken, twee punten *E* en *H*, naar welgevallen, en trekke, in de zijvlakken *AP* en *AQ*, de lijnen *EF* en *EG*, loodregt op de ribbe *AB*; voorts de lijnen *HI* en *HK*, loodregt op de ribbe *CD* en tevens in de zijvlakken *CR* en *CS*; *dan zijn FEG en IHK*, *de ſtandhoeken der tweevlakkige hoeken N°. 1 en 2.* Men legge nu de ribbe *CD* langs de ribbe *AB*, zoodanig, dat het punt *H* in het punt *E*, en dat het zijvlak *CS* op het zijvlak *AQ* valle; dan zal de lijn *HK* langs de lijn *EG* vallen, omdat de hoeken *CHK* en *AEG* regt, en derhalve gelijk zijn. Omdat nu de tweevlakkige hoeken (*onderſt.*) gelijk zijn; zoo zal het zijvlak *CR* in het zijvlak *AP* vallen; dat is, deze twee vlakken zullen tegen elkander ſluiten; daar dan de regte hoeken *CHI* en *AEF*, gelijk zijn, zoo zal *HI* langs *EF* vallen; de ſtandhoeken *FEG* en *IHK*, zijn dan (*XX. Bep. I. B.*) gelijk.

BETOOG *van het omgekeerde.* Wanneer de ſtandhoeken *FEG* en *IHK* gelijk zijn; dan zal men daaruit tot de gelijkheid der tweevlakkige hoeken, N°. 1 en 2, mogen beſluiten. Want; omdat de ſtandhoeken *FEG* en *IHK* gelijk zijn, zoo zal men het punt *H* in *E*, *HK* langs *EG*, en *HI* langs *EF* kunnen leggen; daar nu de ribben *AB* en *CD* (*XIV. Bep.*) loodregt op de vlakken der ſtandhoeken ſtaan, en, (*II. Gev. IV. Stell.*) uit eenig punt van een vlak, ſlechts ééne loodlijn op dit vlak kan worden opgerigt, zoo zal de ribbe *CD*, langs de ribbe *AB* val-

len;

len; en omdat (*III Gev. I. Stell.*) twee vlakken elkander niet, volgens twee onderscheidene lijnen, kunnen doorsnijden, zoo zal het vlak *C R* op het vlak *A P*, en het vlak *C S* op het vlak *A Q* vallen, en de tweevlakkige hoeken, N°. 1 en 2, zullen (*XII. Bep.*) gelijk zijn.

§. 654. GEVOLGEN. *Fig.* 290. 1°. *Het supplement van een regten tweevlakkigen hoek is insgelijks een regte tweevlakkige hoek.*

2°. *Gelijke tweevlakkige hoeken hebben gelijke supplementen; en, omgekeerd.*

3°. *Wanneer twee vlakken elkander doorsnijden; dan worden er vier tweevlakkige hoeken geboren, die te zamen de geheele onbegrensde ruimte vervullen; en de overstaande tweevlakkige hoeken zijn gelijk. De geheele onbegrensde ligchamelijke ruimte is derhalve gelijk aan vier regte tweevlakkige hoeken.*

4°. *Een tweevlakkige hoek maakt, met zijn supplement te zamen genomen, twee regte tweevlakkige hoeken, en vervullen te zamen de geheele onbegrensde ruimte, aan dezelfde zijde van een vlak gelegen.*

XXVIII. STELLING.

§. 655. *Alle tweevlakkige hoeken staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne overeenkomstige standhoeken.*

BETOOG. Daar deze stelling, met behulp van de voorgaande, op dezelfde wijze, als de *XVIII Stelling*, van het *V. Boek*, bewezen wordt, zoo zullen wij het betoog aan den Lezer overlaten.

§. 656. AANMERKING. *Fig.* 306. Stellen wij, dat het zijvlak *A Q* op zijne plaats onbewegelijk blijve; maar dat het andere zijvlak *A P* van den tweevlakkigen hoek, om de ribbe *A B*, omwentele, en dat (*C D* en *C E* loodregt op *A B* staande,) de hoek *D C E* de standhoek van den tweevlakkigen zij; dan zal de lijn *C D* door die beweging (zie *Gev. V. Stell.*) een vlak beschrijven, dat loodregt op de ribbe *A B* staat, en het punt *S* eenen cirkel, die in dit vlak ligt. *Nu zal de tweevlakkige hoek A P Q tot de geheele onbegrensde ruimte staan, als de standhoek D C E tot vier regte hoeken, of (zie* Gev. XVIII. Stell. IV. B.) *als de boog S T tot den geheelen omtrek des cirkels.*

XXIX. STELLING. *Fig.* 308.

§. 657. *Wanneer, uit eenig punt (C) van de doorsnede (A B) van twee vlakken (A P en A Q), twee loodlijnen, (C F en C G) op deze vlakken, naar denzelfden kant, worden opgerigt; dan is de hoek (F C G) welke deze loodlijnen. (C F en C G) met elkander maken, gelijk aan den standhoek (D C E) dezer twee vlakken.*

BETOOG. Men late, door de loodlijnen *C F* en *C G*, een vlak gaan: dat vlak zal (*Gev. IV. Bep.*) dan loodregt op elk der vlakken *A P* en

AQ staan; en, omdat dan (*XI. Stell.*) de gemeene doorsnede *AB* dezer vlakken loodregt op het vlak, dat door de loodlijnen *CF* en *CG* gaat, geplaatst is, zullen (*II. Bep.*) de lijnen *CD* en *CE*, loodregt op *AB* staan, en (*XIV. Bep.*) den standhoek der vlakken bepalen. Nu zijn (*onderst. en II. Bep.*) de hoeken *FCD* en *GCE* regt; wanneer men derhalve van die hoeken denzelfden hoek *GCD* afneemt; zoo zal men (*IX. Ax*) den hoek *FCG*, gelijk aan den standhoek *DCE*, overhouden.

XXX. STELLING. *Fig.* 309.

§. 658. *De hoek* (*DCE*), *gevormd door twee loodlijnen* (*CD en CE*), *welke, uit eenig punt* (*C*), *buiten een tweevlakkigen hoek gelegen, op zijne zijvlakken* (*AP en AQ*) *vallen, is gelijk aan den standhoek* (*GFE*), *onder welken deszelfs zijvlakken elkander snijden.*

BETOOG. Men late, door de loodlijnen *CD* en *CE*, een vlak gaan, hetwelk (*onderst. en Gev. IV. Bep.*) loodregt op de vlakken *AP* en *AQ* staande, (*XI. Stell.*) ook loodregt op de lijn *AB* zal zijn, welke derhalve (*II. Bep.*) met de snijdingen *FD* en *FE*, regte hoeken zal maken; zoodat de hoek *DFE*, de standhoek der vlakken zal zijn. Omdat nu de driehoeken, *CDG* en *FGE*, regthoekig zijn, en de *hoek FGE* = *hoek CGD* is, zoo zal (*XI. Gev. XVIII. Stell. I. B.*) de *hoek DCE* gelijk aan den *standhoek EFG* zijn.

XXXI. STELLING. *Fig.* 307.

§. 659. *Wanneer twee vlakken* (*AP en AQ*), *die elkander snijden, evenwijdig zijn aan twee andere vlakken* (*CR en CS*); *dan is de doorsnede* (*AB*) *der twee eerste vlakken evenwijdig aan de doorsnede* (*CD*) *der twee laatste; en de standhoek der twee eerste vlakken is gelijk aan den standhoek der twee laatste.*

BETOOG. Laat, in de doorsnijding *AB*, een punt *E* genomen, en, door hetzelve, in de vlakken *AP* en *AQ*, loodregt op *AB*, de lijnen *EF* en *EG* opgerigt, en een vlak door deze lijnen gebragt worden. Dit vlak zal de vlakken *CR* en *CS*, volgens het beloop der lijnen *HI* en *HK*, doorsnijden; en, omdat nu het vlak van den standhoek *FEG*, (*IV Stell. en Gev. IV. Bep.*) regthoekig op de vlakken *AP* en *AQ* staat, zoo zullen de vlakken *CR* en *CS*, als evenwijdig aan de eerste zijnde, ook (*XXI. Stell.*) regthoekig op het vlak van de lijnen *EF* en *EG*, dat is, op het vlak van den standhoek *FEG*, staan; en, wanneer dan *HI* en *HK* de lijnen zijn, volgens welke dit vlak de vlakken *CR* en *CS* snijdt, zal de lijn *DH*, (*XI. Stell.*) loodregt op de lijnen *HI* en *HK* staan: de lijnen *AB* en *CD* zijn derhalve, als staande elk loodregt op het vlak van den standhoek, (*I. Stell.*) evenwijdig. En, om-

omdat eindelijk, wegens de evenwijdigheid der vlakken, *AP*, *CR* en *AQ*, *CS*, (*XIX. Stell.*) *HI* aan *EF*, en *HK* aan *EG* evenwijdig is, zoo zal (*XXX. Stell. I. B.*) de *hoek IHK* gelijk aan den *hoek FEG* zijn.

II. *Over de drievlakkige hoeken en de bolvormige driehoeken, welke met dezelve overeenstemmen.*

§. 660. XV. Bepaling. Een *drievlakkige hoek* is de onbegrende ligchamelijke ruimte, begrepen tusschen drie hoeken, die, met derzelver zijden en hoekpunten, aan elkander sluiten. De hoeken, welke den drievlakkigen hoek bepalen, noemt men de *zijvlakken*; de zamenkomende zijden der zijvlakken de *ribben*, en het punt, waar de ribben zamenkomen, het *hoekpunt* van den drievlakkigen hoek.

Opheldering. Fig. 310. Men verbeelde zich eenen hoek *BAD*, in het vlak van de teekening liggende, en eene lijn *AC*, boven hetzelve uitstekende; dan heeft men drie hoeken *BAD*, *BAC* en *CAD*, die in drie onderscheidene vlakken liggen. *De onbegrensde ruimte nu, tusschen die hoeken, is de drievlakkige hoek*; de hoeken zelve zijn zijne zijvlakken; de zijden *AB*, *AC* en *AD* dezer hoeken zijne ribben, en het punt *A*, waar die ribben zamen komen, het hoekpunt. *Een drievlakkige hoek is derhalve aan drie kanten begrensd; maar binnen de zijvlakken, naar den tegenovergestelden kant van het hoekpunt, onbegrensd.*

§. 661. Aanmerking. In een drievlakkigen hoek onderscheidt men de hoeken, die de ribben, twee aan twee genomen, met elkander maken, en de standhoeken der zijvlakken, insgelijks twee aan twee genomen; dus in alles zes hoeken, welker onderlinge afhankelijkheid, in alle deelen der zuivere en toegepaste Meetkunst, van het grootste belang is.

Opheldering. Fig. 311. Om een drievlakkigen hoek, in zijn geheel, met al de standhoeken van deszelfs ribben en zijvlakken, te verkrijgen, zoo trekke men, uit een punt *A*, de onbepaalde lijnen *AB*, *AC*, *AD* en *AB*, die onderling met elkander de hoeken *BAC*, *CAD* en *DAB* maken. Deze hoeken moeten (zoo als straks uit de *XXXIII. Stelling* blijken zal) onder die bepaling zijn aangenomen, dat elk derzelve kleiner is dan de som der twee anderen. Men beschrijve nu, uit het hoekpunt *A*, met eenen straal, naar welgevallen genomen, eenen cirkelboog *BCDB*; trekke, door het punt *B*, de lijnen *BE* en *BF*, loodregt op *AB*; door *C*, *IK*, loodregt op *AC*; en, door *D*, *GH*, loodregt op *AD*. Nu late men de hoeken *BAC* en *BAD*, om de beenen *AC* en *AD*, omdraaijen, tot dat de beenen *AB* en *AB* aan elkander sluiten; dan heeft men een drievlakkigen hoek, in zijne natuurlijke gedaante; en dan is in denzelven

	hoek BAC	de standhoek der ribben	*AB* en *AC*
	hoek CAD	———————	*AC* en *AD*
	hoek BAD	———————	*AD* en *AB*
	hoek EBF	de standhoek der zijvlakken	*BAC* en *BAD*
	hoek ICK	———————	*BAC* en *CAD*
en	*hoek GDH*	———————	*CAD* en *DAB*

De standhoeken nu der zijvlakken zijn (zie Gev. XIII. Bep.) *altijd van dezelfde grootte; hoe groot of klein de straal van den cirkelboog BCBD genomen worde.* Doorgaans neemt men de lengtemaat, als straal, om de standhoeken der ribben en zijvlakken te bepalen.

§. 662. XVI. Bepaling. Deze eenvoudige constructie brengt ons van zelf tot de beschouwing van den bol, als het geschikste hulpmiddel, om de standhoeken van de ribben en zijvlakken eens drievlakkigen hoeks onderling met elkander te vergelijken. — Een *bol*, of *spheer*, is eene ligchamelijke uitgebreidheid, besloten binnen één enkel gebogen vlak, welks punten alle even ver van het middelpunt afstaan. — *Deszelfs oppervlak is alzoo de meetkunstige plaats van alle punten, welke, in de ligchamelijke ruimte, van eenig bepaald punt denzelfden afstand hebben. De bol bekleedt onder de ligchamen denzelfden rang, als de cirkel onder de platte vlakken.*

Opheldering. Fig. 312. Een bol kan (zie *Inl. I. B. Aanm. XIII. Bep.*) begrepen worden door de omwenteling van een halven cirkel *ACDEB*, om deszelfs middellijn *AB*, te worden voortgebragt. De vlakte van den halven cirkel beschrijft dan de ligchamelijke uitgebreidheid en deszelfs omtrek het oppervlak van den bol; de as van omwenteling *AB* is natuurlijk ééne van deszelfs middellijnen.

Indien men, uit de punten *C*, *D*, *E*, *enz.* loodlijnen *CF*, *DM*, *EF*, *enz* op de as *AB* laat vallen; dan zullen die loodlijnen, gedurende de omwenteling van den halven cirkel, (*Gev. V. Stell.*) vlakken beschrijven, welke alle loodregt op de as *AB* staan. Die vlakken zijn (*XI. Bep. I. B.*) cirkels, welker omtrekken geheel in het oppervlak van den bol liggen.

Alle vlakken, die derhalve door eenen bol gaan, snijden deszelfs oppervlak, in het beloop van eenen cirkel, die den grootsten omtrek en de grootste middellijn zal hebben, indien het snijdende vlak door het middelpunt van den bol gaat.

De lijn *BH*, die loodregt op het uiteinde *B* van de as *AB* staat, zal, gedurende de omwenteling van den halven cirkel, eene vlakte *HI* voortbrengen, welke, omdat de lijn *BH* den cirkel in *B* aanraakt, (*XII. Stell. V. B.*) met het oppervlak van den bol, slechts het enkele punt *B* zal gemeen hebben. Men noemt daarom dit vlak *HI* een *rakend vlak. Het staat* (Gev. V. Stell.) *loodregt op de middellijn, die door het raakpunt B gaat.*

§. 663. I. Gevolg. *Alle vlakken, die door het middelpunt van*

eenen

eenen bol gaan, fnijden deszelfs oppervlak volgens cirkels, die gelijke omtrekken en gelijke ftralen hebben. Men noemt die cirkels *groote cirkels van den bol*, om dezelve te onderfcheiden van de *kleinere cirkels*, die ook door de fnijding van een vlak ontftaan; maar van een vlak, dat buiten het middelpunt van den bol loopt.

§. 664. II. Gevolg. *Twee groote cirkels van eenen bol fnijden elkander, volgens ééne van deszelfs middellijnen, in twee gelijke- en gelijkvormige deelen.*

§. 665. XVII. Bepaling. *Fig.* 313. Wanneer een bol door twee vlakken *AHB* en *AGB*, gaande door de middellijn *AB*, gefneden wordt; dan verdeelen die vlakken het ligchaam van den bol in vier ftukken, liggende tusfchen de hoeken *GMH*, *GMK*, *KMI* en *HMI*; zijnde elk van dezelve begrepen tusfchen twee halve groote cirkels en een gedeelte van het oppervlak van den bol. Deze ftukken noemt men *tweevlakkige bolvormige fectors*; en het gedeelte van de oppervlakte van den bol, welke zulk een tweevlakkigen fector naar buiten bepaalt, *eene bolvormige ftrook.*

§. 666. Gevolg. *Fig.* 313. *Zoo wel de inhouden van twee tegenoverftaande tweevlakkige bolvormige fectors, als de bolvormige ftrooken, welke dezelve bepalen, zijn gelijk- en gelijkvormig, en hebben dus dezelfde inhouden.*

Want, laten de vlakken *ABC* en *ABD* door de middellijn *AB* gaan, en de middellijnen *GI* en *HK*, in die vlakken, loodregt op de middellijn *AB*, en nog, door de punten *A* en *B*, in diezelfde vlakken, *CA*, *DA*, *EB* en *FB*, insgelijks loodregt op *AB*, worden getrokken; dan zijn *hoek CAD = hoek GMH = hoek IMK*, *of hoek EBF = hoek IMK* (*Gev. XIII. Bep.*) de ftandhoeken van de vlakken der halve cirkels *AGB* en *AHB*, en der halve cirkels *AIB* en *AKB*. Laat nu de tweevlakkige fector *AIBK* in den tweevlakkigen fector *AGBH* gepast worden; zoodanig, dat het punt *B* in het punt *A*, de lijn *BA* langs *AB*, en het zijvlak *BIA* op het zijvlak *AGB* valle; dan zal het punt *M* in het punt *M* vallen; en, omdat *hoek BMI = hoek AMG = R* is, zoo zal *MI* langs *GM*, en omdat het vlak *MIK* zoo wel als het vlak *MGH*, loodregt op *AB* ftaat, zoo zal het vlak *MIK*, op het vlak *GMH*; en omdat *hoek IMK* (IV. *Stell.* I. *B.*) = *hoek GMH* is, zoo zal *MK* langs *MH* vallen; derhalve zal het vlak *BKA* op het vlak *AHB* vallen, al de punten van de halve omtrekken *BAI* en *BKA* in de halve omtrekken *AGB* en *AHB*; en eindelijk al de punten van de bolvormige ftrook *BIAK* in de bolvormige ftrook *AGBH*: *beide ligchamen en derzelver grenzen zijn dan* (II. Ax.) *gelijk- en gelijkvormig.*

§. 667. XVIII. Bepaling. *Fig.* 313. De hoeken (*CAD*, *EBF*), wel-

welke, aan eenig punt (*A* of *B*), in hetwelk de omtrekken van twee groote cirkels (*AGBI* en *AHBK*) van eenen bol elkander ſnijden, de raaklijnen (*AC* en *AD* of *BE* en *BF*) dezer cirkels, in de rakende vlakken (*CAD* of *BEF*), met elkander maken, worden *bolvormige* of *ſpheriſche hoeken* genoemd.

§. 668. Aanmerking. *Fig.* 313. Volgens de XXVI. *Stell.* is *hoek CAD = hoek GMH = hoek EBF = hoek IMK. Een bolvormige hoek is dan eigenlijk de ſtandhoek, welke de vlakken van twee groote cirkels van den bol met elkander maken.* Een bolvormige hoek is dus niet de hoek, die de bogen met elkander maken (zoo als vele dit doorgaans verkeerdelijk uitleggen); maar wel de hoek van de raaklijnen dezer bogen. Evenwel zegt men, bij verkorting: *de hoek der bogen GA en HA, of de bolvormige hoek GAH.*

§. 669. Gevolg. Om dan, op het oppervlak van eenen bol, den bolvormigen hoek, welke twee groote cirkels met elkander maken, te verkrijgen, zoo moet men, in het vlak, dat den bol, in het punt, alwaar die cirkels elkander ſnijden, aanraakt, en wel, in derzelver vlakken, twee lijnen trekken; de hoek, die deze met elkander maken, is dan de bolvormige hoek dezer bogen.

§ 670. XIX. Bepaling. *Fig.* 314. Wanneer men, uit het hoekpunt *A* van een drievlakkigen hoek *BCDA*, als middelpunt, met eenen ſtraal *AB*, naar welgevallen genomen, eenen bol beſchrijft; dan zullen de zijden *BAC*, *CAD* en *BAD* van den drievlakkigen hoek het oppervlak van den bol, volgens de bogen *BC*, *CD* en *BD* van groote cirkels, ſnijden: dat gedeelte nu van het oppervlak van den bol, tusſchen de zijvlakken van den drievlakkigen hoek begrepen, noemt men een *bolvormigen* of *ſpheriſchen driehoek.* De bogen *BC*, *CD* en *DB* zijn de zijden, en de ſtandhoeken, welke de vlakken dezer bogen met elkander maken, zijn de hoeken van den bolvormigen driehoek. *Een bolvormige driehoek is dus een gedeelte van het oppervlak van eenen bol, begrepen tusſchen drie bogen van groote cirkels, in de hoekpunten van den driehoek zamenkomende.* En een *drievlakkige bolvormige ſector* is een gedeelte van het ligchaam van den bol, begrepen tusſchen drie ſectors van groote cirkels, die met hunne ſtralen aan elkander ſluiten en den bolvormigen driehoek, welke de bogen dezer ſectors, op het oppervlak van den bol vormen.

Nadere opheldering. Fig. 314 en 311. De zijden *BC*, *CD* en *BD* van een bolvormigen driehoek *BCD* zijn de betrekkelijke maten van de ſtandhoeken *BAC*, *CAD* en *BAD* der ribben. Men heeft derhalve (*hoek BAC*, *hoek CAD*, *hoek BAD*) : : (*boog BC*, *boog CD*, *boog BD*) In *fig.* 311, zijn de hoeken *EBF*, *ICK* en *GDH* de hoeken van den

den bolvormigen driehoek *BCD*, de standhoeken der zijvlakken van den drievlakkigen hoek *BCDA*; en wij zullen straks betoogen: *dat de vlakke inhoud van den bolvormigen driehoek BCD tot het geheele oppervlak van den bol, in dezelfde reden staat, als de onbegrensde ruimte van den drievlakkigen hoek tot de geheele onbegrensde ruimte, in welke het Heelal bestaat*; uit al hetwelk blijkt: *dat de bolvormige driehoeken, in het beschouwen der drievlakkige hoeken, dezelfde diensten bewijzen, als de cirkelbogen, in het vergelijken der regtlijnige hoeken.* Wanneer men, *fig.* 314, met eenen anderen straal *Ab*, eenen bol beschrijft; dan zal men een anderen bolvormigen driehoek *bcd* verkrijgen, die, alhoewel hij kleiner of grooter dan de bolvormige driehoek *BCD* zal zijn, nogtans tot hetzelfde einde zal kunnen dienen: omdat *hoek b* = *hoek B*, *hoek c* = *hoek C*, *hoek d* = *hoek D*, en, behalve dat

(*boog bc*, *boog cd*, *boog bd*) : : (*boog BC*, *boog CD*, *boog BD*)

zal zijn. Noemen wij Ω en ω de oppervlakken der bollen, van welke de bolvormige driehoeken *BCD* en *bcd* gedeelten zijn; dan zal het naderhand blijken: dat

$$bolv.\ drieh\ BCD : bolv.\ drieh.\ bcd = \Omega : \omega = AB^2 : ab^2$$

is; want, in het IX. *Boek* zal betoogd worden: *dat alle bollen gelijkvormig zijn; en, dat de bolvormige driehoeken BCD, bcd, alsmede de drievlakkige bolvormige sectors ABCD en Abcd, tot denzelfden drievlakkigen hoek behoorende, altijd gelijkvormige figuren zijn.*

XXXII. STELLING. *Fig.* 315.

§. 671. *De inhouden der bolvormige strooken, welke, aan de uiteinden van dezelfde middellijn van eenen bol, door de snijding van groote cirkels gevormd worden, staan tot elkander, in dezelfde reden, als de standhoeken dezer cirkels, of als de bolvormige hoeken, welke derzelver omtrekken, aan de uiteinden van de middellijn, met elkander maken: dat is*

strook AFBG : strook ACBH = hoek FMG : hoek GMH =
hoek CBD : hoek DBE.

BETOOG. Stellen wij eerst, dat de bolvormige hoeken *CBD* en *DBE* even groot zijn. Indien men dan den tweevlakkigen sector *BFAG* in den tweevlakkigen sector *BGAH* past; zoodanig, dat het punt *A* in *A*, de middellijn *AB* langs de middellijn *AB*, en het zijvlak *AFB* op het zijvlak *AGB* valt; dan zal (daar *hoek CBD* = *hoek DBE* is) *BC* langs *BD* en *BD* langs *BE* vallen, en het zijvlak *AGB* op het zijvlak *AHB*, en (zie *Gevolg*, XVII. *Bep.*) de bolvormige strook *AFBG* zal op de bolvormige strook *AGBH* passen, en daarom zullen dezelve gelijk- en gelijkvormig zijn.

Laten nu de bolvormige hoeken *CBD* en *DBE*, ongelijk zijnde, eene zekere meetbare of onmeetbare reden tot elkander hebben; dan zal men,

men, uit kracht van het zoo even betoogde, op dezelfde wijze, als in de betoogen van de XI. *Stell.* III. *B.* en XVIII. *Stell.* V. *B.* vinden:

ftrook AFBG : ftrook ACBH = hoek CBD : hoek DBE.

§. 672. I. GEVOLG. *Fig.* 315. *De inhoud van eene bolvormige ftrook (AFBG) ftaat dan tot het geheele oppervlak van den bol, uit welken zij gefneden is, als derzelver bolvormige hoek (CBD) of ftandhoek (FMG) tot vier regte hoeken.*

§. 673. II. GEVOLG. *Fig.* 315. Indien wij derhalve den inhoud van het oppervlak van een bol gelijk Ω ftellen, den bolvormigen hoek *CBD* van eene bolvormige ftrook *AFBG* gelijk *B*; dan heeft men de evenredigheid, $4R : B = \Omega$: *ftrook AFBG*; gevolgelijk is

$$\textit{Inhoud ftrook } AFBG = \Omega \times \frac{B}{4R} = \Omega \times \frac{\text{hoek } CBD}{360^\circ}$$

XXXIII. STELLING. (*XXXII en XXXIII. Stell. II. Druk.*) *Fig.* 316.

§. 674. *Elk zijvlak van een drievlakkigen hoek is kleiner dan de fom van deszelfs twee andere zijvlakken; en de fom van al de zijvlakken van een drievlakkigen hoek is altijd minder dan vier regte hoeken.*

Opheldering. Men ftelle duidelijkshalve, dat het hoekpunt *D* boven het vlak van de teekening uitfteke, en dat de ribben van den drievlakkigen hoek dit vlak, in de punten *A*, *B* en *C*; ontmoeten. Nemen wij: dat de zijvlakken *ADB*, *ADC* en *BDC*, alle in groote van elkander onderfcheiden zijn; en dat hoek *BDC* de grootfte van allen is; dan zal moeten betoogd worden: dat

1°. *hoek ADB* + *hoek ADC* > *hoek BDC*

2°. *hoek ADB* + *hoek ADC* + *hoek BDC* < 4*R*

Zal moeten zijn.

BETOOG *van het eerfte.* Zoo wij aannemen, dat het zijvlak *BDC* het grootfte van de drie is; dan zal men *hoek BDE* = *hoek ADB* kunnen maken, en *DE* = *AD* nemen. Indien men dan verder, van *A* tot *B*, van *D* door *E*, en van *A* tot *C*, de lijnen *AB*, *BC* en *AC* trekt; dan verkrijgt men eene bepaalde ligchamelijke uitgebreidheid, befloten tusfchen de driehoeken *ADB*, *ADC*, *BDC* en *ACB*, die in het vervolg eene *driehoekige piramide* genoemd wordt.

De driehoeken *BDE* en *ABD* zijn (X. *Stell.* I. *B.*) gelijk- en gelijkvormig; want *hoek BDE* = *hoek ADB* en *DE* = *AD* (*conftr.*) en *BD* = *BD*; derhalve is *BE* = *AB*.

In den *drieh. ABC* is *AB* + *AC* > *BC* (VII. *Stell.* I. *B.*); trekt men van deze ongelijkheid af *AB* = *BE* (*bewez.*); dan zal men (X. *Ax.*) overhouden *AC* > *CE*.

In de driehoeken *ADC* en *CDE*, is *AD* = *DE* (*conftr.*) *DC* = *DC* en

en $AC > CB$ (*bewezen*); daarom zal (XII. *Stell.* I. *B.*) *hoek* $ADC >$ *hoek* CDE zijn. Telt men bij deze ongelijke hoeken, *hoek* $ADB =$ *hoek* BDE; dan wordt (X. *Ax.*)

$$\text{hoek } ADB + \text{hoek } ADC > \text{hoek } BDC.$$

BETOOG *van het tweede.* Aan de hoekpunten der drievlakkige hoeken A, B en C, is, volgens het betoogde, $n+p > ABC$, $q+r > ACB$, $s+t > BAC$; derhalve is, deze ongelijkheden optellende, (XI. *Ax.* en XVIII. *Stell.* I. *B.*)

$$n+p+q+r+s+t > 2R \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Maar, in de driehoeken ABD, ADC en BDC, is, volgens de XVIII *Stell* I. *B.*

$$ADC + BDC + ADB + n + p + q + r + s + t = 6R$$

Indien men nu van deze vergelijking de ongelijkheid (a) aftrekt; dan zal men (XII *Ax.*) overhouden:

$$\text{hoek } ADC + \text{hoek } BDC + \text{hoek } ADB < 4R$$

§. 675. XX. BEPALING. *Fig.* 317. Onderstellende, dat ABC een bolvormige driehoek is, behoorende tot eenen bol, tot middelpunt het punt M hebbende; indien men dan de zijden CA en CB, op het oppervlak van den bol, zoo verre verlengt; dat $CD = CE = 90°$ worde; AB en AC, tot dat $AF = AG = 90°$ worde, en BC en BA tot dat $BI = BH = 90°$ worde; en men dan verder, door het middelpunt M van den bol, en de punten D en E; door de punten M, F en G, en door de punten M, H en I vlakken laat gaan; dan zullen die vlakken, op het oppervlak van den bol, een anderen bolvormigen driehoek abc formeren, dien wij in het vervolg den *aspunts-driehoek* van den driehoek ABC zullen noemen, en dezen laatsten ABC wederkeerig den *aspunts-driehoek* van den driehoek abc. — *In die wederkeerige aspunts-driehoeken, worden de hoeken* a, b, c *gezegd tegen over de zijden* BC, AC *en* AB, *en de hoeken* A, B *en* C *tegen over de zijden* bc, ac *en* ab *te staan.*

XXXIV. STELLING. *Fig.* 317.

§. 676. *Elke hoek en elke zijde van een bolvormigen driehoek* (ABC) *is gelijk aan het supplement van de zijden of van den hoek, welke, in zijn overeenstemmenden aspunts-driehoek* (abc), *tegen over dien hoek, of die zijde, staat.*

Opheldering. Indien de figuur, naar het voorschrift van de voorgaande bepaling, is geconstrueerd; dan zal men moeten betoogen: dat is

$$\text{boog } ab + \text{hoek } ACB = 180° \text{ en boog } AB + \text{hoek } acb = 180°$$
$$\text{boog } bc + \text{hoek } BAC = 180° \text{ en boog } BC + \text{hoek } bac = 180°$$
$$\text{boog } ac + \text{hoek } ABC = 180° \text{ en boog } AC + \text{hoek } abc = 180°$$

BE-

Betoog. Men trekke de stralen *MA*, *MB*, *MC*, *Ma*, *Mb*, *Mc*, *MD*, *ME*, *MF*, *MG*, *MH* en *MI*. Omdat nu (*constr.* of *onderst.*) *boog CAD* = *boog CBE* = 90° is; zoo is *hoek CMD* = *hoek CME* = 90°, en daarom is (IV. *Stell.*) *hoek CMa* = *hoek CMb* = 90°; en de lijn *CM* staat dus loodregt op het vlak van den boog *aDEb*.

Om dezelfde reden, zal *hoek BMI* = *hoek BMH* = *hoek BMa* = *hoek BMc* zijn. — En insgelijks *hoek AMF* = *hoek AMG* = *hoek AMb* = *hoek AMc*.

De lijn *aM* staat dan (IV. *Stell.*) loodregt op het vlak *MEBCH*, de lijn *bM* loodregt op het vlak *DACG*, en de lijn *cM* loodregt op het vlak *IABF*; en daarom zijn (IV. *Stell.*) *hoek aME* = *hoek aMH* = 90°, *hoek bMD* = *hoek bMG* = 90°, en *hoek cMI* = *hoek cMF*; gevolgelijk zijn de bogen *aE*, *aH*, *bD*, *bG*, *cI* en *cF*, alle bogen van 90°. Voorts is *hoek DME* de standhoek van de vlakken der bogen *AC* en *BC*; derhalve *boog DE* = *hoek ACB*. Om dezelfde reden, is *boog GF* = *hoek BAC* en *boog HI* = *hoek ABC*; terwijl *boog IABF* = *hoek acb*, *boog DACG* = *hoek abc* en *boog EBCH* = *hoek bac* is.

Nu is, uit de figuur en het reeds betoogde,

$$ab + DE = aE + bD = 90° + 90° = 180°$$
$$bc + FG = bG + cF = 90° + 90° = 180°$$
$$ac + HI = aH + cI = 90° + 90° = 180°$$
$$IF + AB = AF + BI = 90° + 90° = 180°$$
$$EH + BC = CE + BH = 90° + 90° = 180°$$
$$DG + AC = AG + CD = 90° + 90° = 180°$$

dat is, *boog ab* + *hoek ABC* = 180°, *boog bc* + *hoek BAC* = 180°, *enz.*

XXXV. Stelling. *Fig.* 317.

§. 677. *De som van al de hoeken van een bolvormigen driehoek, of de som van de standhoeken van de zijvlakken eens drievlakkigen hoeks, is altijd meer dan vier en minder dan zes regte hoeken.*

Betoog. Men beschrijve, als in de *XX. Bepaling*, den aspunts-driehoek *abc*; dan is, volgens de voorgaande stelling:

$$hoek\ A + hoek\ B + hoek\ C + boog\ bc + boog\ ac + boog\ ab = 6R$$

maar nu is (XXXIII. *Stell.*) *boog bc* + *boog ac* + *boog ab* > 0° en < 4R; derhalve zal (XII. *Ax.*) de som der hoeken *A*, *B* en *C*, grooter dan twee en kleiner dan zes regte hoeken zijn.

§. 678. Gevolg. *In een bolvormigen driehoek, is dan de som der hoeken geene standvastige grootheid, gelijk in de vlakke driehoeken; maar zij is veranderlijk, en tusschen de grenzen van twee en zes regte hoeken begrepen. Een bolvormige driehoek kan dan ook twee en drie regte, ja ook twee en drie stompe hoeken hebben.*

§. 679. XXI. Bepaling. In elken drievlakkigen hoek, wordt de stand-

ſtandhoek van twee zijner zijvlakken gezegd tegen over het derde zijvlak te ſtaan; en, omgekeerd.

XXXVI. STELLING. *Fig.* 318.

§. 680. *Indien twee zijvlakken van een drievlakkigen hoek gelijk zijn; dan zijn de overſtaande ſtandhoeken der twee andere zijvlakken gelijk; en, omgekeerd; maar zoo al de zijvlakken van een drievlakkigen hoek in groote verſchillen; dan zal tegen over een grooter zijvlak een grooter ſtandhoek der twee andere zijvlakken ſtaan; en, omgekeerd.*

BETOOG *van het eerſte.* *Fig.* 318. Laten de zijvlakken *BAC* en *DAC* van den drievlakkigen hoek *ABCD* gelijk zijn; dan moet bewezen worden: dat het zijvlak *BAD* met het zijvlak *BAC* eenen ſtandhoek maakt, die gelijk is aan den ſtandhoek der zijvlakken *BAD* en *DAC*.

Laat, met *AC* als ſtraal, den bolvormigen driehoek *BCD* worden beſchreven; dan is (*onderſt.* en XVII. *Stell.* V. *B.*) *boog BC* = *boog CD*, en de bolvormige driehoek *BCD* is dus gelijkbeenig. Men late *CE* loodregt op het zijvlak *BAD*, en de lijnen *CF* en *CG* loodregt op de ribben *AB* en *AD* vallen; men trekke de lijnen *EF* en *EG*; dan ſtaan deze (VIII *Stell.*) loodregt op *AB* en *AD*; de hoeken *CFE* en *CGE* zijn dan (XIV. *Bep.*) de ſtandhoeken der zijvlakken, die aan de ribben *AB* en *AD* zamenkomen.

In de regthoekige driehoeken *ACF* en *ACG* zijn dan *hoek CAF* = *hoek CAG* (*onderſt.*) *hoek CFA* = *hoek CGA* = *R* (*conſtr.*) *AC* = *AC*, derhalve is (IX. *Stell.* I. *B.*) *CF* = *CG*.

Eindelijk is, in de regthoekige driehoeken *CEF* en *CEG*, *CE* = *CE* en *CF* = *CG* (*bewezen*); derhalve is (II. *Hulpſt.* I. *B.*) *hoek CFE* = *hoek CGE*.

BETOOG *van het omgekeerde.* *Fig.* 318. Hier moet bewezen worden: dat, wanneer de ſtandhoeken *CFE* en *CGE* gelijk zijn, ook *hoek CAB* = *hoek CAD* zal zijn.

In de regthoekige driehoeken *CFE* en *CGE*, is, als volgt: *hoek CEF* = *hoek CEG* = *R*; *hoek CFE* = *hoek CGE* (*onderſt.*) *CE* = *CE*; derhalve is *CF* = *CG*.

In de regthoekige driehoeken *ACF* en *ACG*, is *AC* = *AC* en *CF* = *CG* (*bewezen*); derhalve is (II. *Hulpſt.* I. *B.*) *hoek CAB* = *hoek CAD*.

BETOOG *van het derde.* Stel *hoek BAC* > *hoek DAC*; dan zal, in de regthoekige driehoeken *ACF* en *ACG*, (die dezelfde hypothenuſa hebben) volgens de XXI. *Stell.* I. *B.*, *CF* > *CG* zijn. In de regthoekige driehoeken *CEF* en *CEG*, is dan *CE* = *CE* en *CF* > *CG*; derhalve (XXI. *Stell.* I. *B.*) *EF* > *EG* en *hoek FCE* > *hoek GCE*, en daarom (XIII. *Ax.*) *hoek CGE* > *hoek CFE*.

BETOOG *van het vierde.* Indien *hoek CGE* > *hoek CFE* is; *dan zal*

hoek

hoek BAC > *hoek DAC zijn.* Want, in de regthoekige driehoeken *CEG* en *CEF*, is dan *hoek ECG* < *hoek ECF* (*onderst*); derhalve is *EG* < *EF* en (XVI. *Stell.* III. *B.*) *CF* > *CG*, en eindelijk (XXI. *St.* I. *B.*) *hoek BAC* > *hoek DAC*.

§. 681. Gevolg. *Fig.* 318. Uit het betoogde volgt: 1°. *dat, wanneer al de zijvlakken van een drievlakkigen hoek gelijk zijn, de standhoeken der zijvlakken insgelijks gelijk zullen zijn; en, omgekeerd.* 2°. *Dat de hoeken, die, in een bolvormigen driehoek, tegen over gelijke zijden staan, gelijk zijn; en, omgekeerd.* 3°. *Dat, in elken bolvormigen driehoek, de grootste zijde staat tegen over den grootsten hoek; en, omgekeerd.*

§. 682. XXII. Bepaling. Twee drievlakkige hoeken zijn in allen opzigte gelijk- en gelijkvormig, wanneer zij zoodanig in elkander kunnen geplaatst worden, *dat derzelver toppunten, zijvlakken en ribben in, op en langs elkander vallen.*

XXXVII. Stelling. (XXXIV.) *Fig.* 319.

§. 683. *Wanneer de zijvlakken van twee drievlakkige hoeken, in dezelfde volgorde genomen, aan elkander gelijk zijn; dan zullen deze drievlakkige hoeken in alles gelijk- en gelijkvormig zijn, volkomen in elkander passen en de standhoeken van elke twee der gelijke zijvlakken zullen ingelijks gelijk zijn.*

Opheldering. Zij gegeven de twee drievlakkige hoeken, N°. 1 en 2. Wanneer dan de zijvlakken dezer hoeken, in dezelfde volgorde genomen, aan elkander gelijk zijn; dat is, *hoek BAD* = *hoek FEH*; *hoek BAC* = *hoek FEG*; en *hoek CAD* = *hoek GEH*; dan zullen deze drievlakkige hoeken in alles gelijk zijn; dat is, 1°. het zijvlak *BAD* zal met het zijvlak *BAC* denzelfden hoek maken, als het zijvlak *FEH*, met het zijvlak *FEG*; 2°. het zijvlak *BAD* zal met het zijvlak *CAD* denzèlfden hoek als het zijvlak *FEH* met het zijvlak *GEH*; en 3°. het zijvlak *BAC*, zal met het zijvlak *CAD* denzelfden hoek maken, als het zijvlak *FEG* met het zijvlak *GEH*.

Betoog. Men neme, op de eveneens geplaatste ribben *AC* en *EG*, twee punten *C* en *G*, zoodanig, dat *EG* = *AC* zij, en late, uit dezelve twee loodlijnen *CP* en *GQ*, de eerste op het vlak *BAD*, en de tweede op het vlak *FEH* vallen. Men trekke voorts de lijnen *PB* en *PD*, regthoekig op *AB* en *AD*, en de lijnen *QF* en *QH*, regthoekig op *EF* en *EH*; en eindelijk de lijnen *AP*, *CB*, *CD* en *EQ*, *GF* en *GH*.

Omdat dan *CP* loodregt op het vlak *BAD* staat, staat (*Gev.* IV. *Bep.*) het vlak *ACP* loodregt op het vlak *BAD*; daar nu de hoek *ABP* regt is, zoo zal (VIII. *Stell.*) *BP* loodregt op het vlak *BCP*, en bij-

ge-

gevolg (II. *Bep. en* IV. *Stell*) loodregt op *A B* zijn, en de hoek *C B P*, zal de standhoek der zijvlakken *B A D* en *B A C* uitmaken.

Om dezelfde redenen, zal de hoek *G F Q* de standhoek der zijvlakken *F E H* en *F E G*; de hoek *C D P* de standhoek der zijvlakken *B A D* en *C A D*; de hoek *G H Q* de standhoek der zijvlakken *F E H* en *G E H* zijn.

De driehoeken *A B C* en *E F G* zijn derhalve regt, in *B* en *F*; en de hoeken *B A C* en *F E G* zijn (*onderst.*) gelijk; daarom zijn ook (X. *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*) de hoeken *A C B* en *E G F* gelijk; vermits nu (*constr.*) *E G* = *A C* is, zoo zijn (IX. *Stell.* I. *B.*) de driehoeken *A B C* en *E F G* gelijk- en gelijkvormig; en daarom is *B C* = *F G* en *A B* = *E F*.

Om dezelfde redenen, zullen de driehoeken *A D C* en *E H G* gelijk- en gelijkvormig; en derhalve *C D* = *G H* en *A D* = *E H* zijn.

Laat nu de vierhoek *E F Q H* op den vierhoek *A B P D* gepast worden; zoodanig, dat het punt *E*, in het punt *A*, en *E F* langs *A B* valle; dan zal, 1°. het punt *F* in *B* vallen; omdat *E F* = *A B* (*bew.*) is; 2°. *E H* zal langs *A D* en het punt *H* in het punt *D* vallen; 3°. de lijnen *F Q* en *H Q* zullen langs de lijnen *B P* en *D P* vallen; omdat de hoeken, in de punten *B*, *D*, *F* en *H*, regt zijn. Het punt *Q* zal dan in het punt *P* en *E Q* langs *A P* vallen; en daarom zal *E Q* = *A P*, *F Q* = *B P* en *Q H* = *P D* zijn.

De regthoekige driehoeken *E G Q* en *A C P* hebben dan (*constr. en bew.*) gelijke hypothenusen *E G* en *A C*, en ook gelijke regthoekszijden *E Q* en *A P*; zij zijn dan (II. *Hulpst.* I *B.*) gelijk- en gelijkvormig; en *G Q* is daarom gelijk *C P*. De driehoek *F G Q* is (XIII. *Stell* I *B.*) met den driehoek *B C P*, en de driehoek *G H Q* met den driehoek *C D P* gelijk- en gelijkvormig; derhalve is *hoek C B P* = *hoek G F Q* en *hoek C D P* = *hoek G H Q*.

Wanneer men dan den drievlakkigen hoek N°. 2, in den drievlakkigen hoek N°. 1 past; zoodanig, dat het hoekpunt *E*, in het hoekpunt *A*; *E F* langs *A B*, en het zijvlak *F E H* op het zijvlak *B A D* valt; dan zal, volgens het bewezene, *E H* langs *A D*; *F* in *B*; *H* in *D*; *F G* langs *B C*; *H G* langs *D C*; het punt *G* in *C*, en derhalve *E G* langs *A C* vallen; en de twee drievlakkige hoeken zullen (XXII. *Bep.*) derhalve, in allen opzigte, aan elkander gelijk zijn.

§. 684. Gevolg. *Fig.* 319. Laat, uit de hoekpunten *A* en *E*, met gelijke stralen *A C* en *E G*, bollen worden beschreven; dan verkrijgt men de bolvormige driehoeken *C I K* en *G L M*; daar nu *hoek D A B* = *hoek H E F*, *hoek D A C* = *hoek H E G* en *hoek B A C* = *hoek F E G* is, zal (XVII. *Stell.* V. *B.*) *boog I K* = *boog L M*, *boog C I* = *boog G L* en *boog C K* = *boog G M* zijn. Indien men dan deze twee drievlakkige hoeken in elkander past; dan zullen de punten *G*, *L* en *M* in de punten *C*, *I* en *K*, en de bogen *L M*, *G L* en *G M* langs de bogen *I K*, *I C* en *K C* vallen; en de bolvormige driehoek *G L M* zal gelijk- en gelijkvormig zijn aan den bolvormigen driehoek *C I K*.

In dezelfde, of in gelijke bollen, zijn dus onderling gelijkzijdige bolvormige driehoeken onderling gelijkhoekig, gelijk- en gelijkvormig.

§. 685. I. Aanmerking. Men zal thans ligtelijk de *drie* volgende leerſtellingen kunnen betoogen.

§. 686. Stelling A. *Indien de ribben van twee drievlakkige hoeken, in dezelfde rigting, onderling evenwijdig aan elkander loopen; dan zullen deze drievlakkige hoeken, als ook de bolvormige driehoeken, met denzelfden ſtraal beſchreven zijnde, en tot deze drievlakkige hoeken behoorende, gelijk- en gelijkvormig zijn.*

§. 687. Stelling B. *Wanneer de ſtandhoeken van de zijvlakken van twee drievlakkige hoeken, in dezelfde volgorde genomen, gelijk zijn; dan zijn ook de ſtandhoeken der ribben, in dezelfde volgorde genomen, even groot, en de drievlakkige hoeken paſſen in elkander.*

§. 688. Stelling C. *In denzelfden bol, of in gelijke bollen, zijn onderling gelijkhoekige bolvormigen driehoeken, onderling gelijkzijdig en daarom ook gelijk- en gelijkvormig.*

§. 689. Aanmerking. *Fig.* 319. Wanneer de zijvlakken der twee drievlakkige hoeken, N°. 1 en 2, wel gelijk; maar niet, in dezelfde volgorde, aan elkander gevoegd zijn; zoodat, wanneer hoek $FEH =$ hoek BAD; hoek $FEG =$ hoek CAD, en hoek $GEH =$ hoek BAC is; dan zal men, dezelfde lijnen, als in het voorgaande betoog, trekkende, bewijzen: dat $GQ = CP$; $EF = AD$; $EH = AB$; $FQ = PD$; $QH = PB$; hoek $GFQ =$ hoek CDP; hoek $GHQ =$ hoek CBP zal zijn: *de zijvlakken der drievlakkige hoeken zullen elkander dan ook wel, onder dezelfde hoeken, als in het geval der voorgaande Stelling, doorſnijden; maar de twee drievlakkige hoeken zullen niet meer, zoo als, wanneer de gelijke zijvlakken, in de wederzijdſche figuren, in dezelfde volgorde geplaatst zijn, plaats heeft, in elkander paſſen.*

XXXVIII. Stelling. *Fig.* 320 en 321.

§. 690. *Binnen of buiten de ruimte van elken drievlakkigen hoek* ($ABCD$), *beſtaat eene lijn* (AZ), *die, uit het hoekpunt* (A), *getrokken zijnde, met de ribben* (AB, AC *en* AD) *gelijke hoeken* (BAZ, CAZ *en* DAZ) *maakt.*

Betoog. Om de meening en het betoog dezer ſtelling te verduidelijken, zoo laat uit het hoekpunt A met eenen ſtraal, naar welgevallen genomen, een bol worden beſchreven; dan zal men den bolvormigen driehoek BCD verkrijgen, welker zijden en hoeken de ſtandhoeken der ribben en zijvlakken van den drievlakkigen hoek zullen voorſtellen.

Laat de lijn AE den hoek of het zijvlak BAC, of den boog BC midden door deelen; en laat, door die lijn AC, een vlak AEH, loodregt

regt op het vlak *BAC*, worden opgerigt; *dan zal dit vlak de meetkunstige plaats van alle lijnen AFZ zijn, welke met de ribben AB en AC gelijke hoeken ZAB en ZAC maken.*

Men trekke, om dit te betoogen, in *fig.* 321, welke een gedeelte van *fig.* 320 voorstelt, in het vlak *EFH* de lijn *FI*, loodregt op *AE*; dan staat zij (IV. *Bep.*) loodregt op het vlak *ABC*. Men late nog *FK* en *FL*, loodregt op *AB* en *AC*, vallen; dan zullen de lijnen *IK* en *IL* (VIII. *Stell.*) loodregt op *AB* en *AC* staan. Nu heeft men, als volgt:

1°. In de regthoekige driehoeken *AIK* en *AIL*, *hoek BAE* = *hoek CAE* (*constr.*) en *hoek AKI* = *hoek ALI* = *R* (*bewez.*); dus *hoek AIK* = *hoek AIL* en *AI* = *AI*; derhalve is (IX. *Stell.* I. *B.*) *IK* = *IL* en *AK* = *AL*.

2°. In de driehoeken *FIK* en *FIL*, is *IK* = *IL*, *FI* = *FI*, en *hoek FIK* = *hoek FIL* = *R* (*bewezen*), en dus (X. *Stell.* I. *B.*) *FK* = *FL*.

3°. Eindelijk is, in de driehoeken *AFK* en *AFL*, *AF* = *AF*, *AK* = *AL* en *FK* = *FL* (*bew.*); derhalve zal (XIII. *Stell.* I. *B.*) *hoek FAK* = *hoek FAL*, of *hoek ZAB* = *hoek ZAC* zijn.

Het blijkt dus (zie nu verder *fig.* 320,) dat alle lijnen *AFZ*, welke uit het hoekpunt *A* van den drievlakkigen hoek *ABCD*, in het vlak, dat loodregt op het zijvlak *BAC* staat, en hetzelve in twee gelijke deelen verdeelt, getrokken worden, met de ribben *AB* en *AC*, gelijke hoeken maken.

Laat nu verder de hoek *BAD* door de lijn *AG*, uit het hoekpunt getrokken zijnde, in twee gelijke hoeken *BAG* en *DAG* worden verdeeld; indien men dan, langs die lijn *AG*, op het vlak *BAD*, een vlak *GFK*, loodregt op het vlak *BAD*, oprigt; dan zal (om dezelfde redenen als boven,) elke lijn *AFZ*, welke uit het hoekpunt *A*, in dit vlak getrokken wordt, met de ribben *AB* en *AD* gelijke hoeken *ZAB* en *ZAD* maken.

Op welke eene wijze nu de drievlakkige hoek is zamengesteld, zoo is het klaar: dat de vlakken *AEFH* en *AGFK* elkander in eenige lijn *AFZ* doorsnijden; deze lijn *AFZ* moet dan, het zij zij binnen of buiten den drievlakkigen hoek ligt, met de ribben *AB*, *AC* en *AD*, gelijke hoeken *ZAB*, *ZAC* en *ZAD* maken.

§. 691. GEVOLG. *Fig.* 320. De vlakken der hoeken *ZAB*, *ZAC* en *ZAD* snijden het oppervlak van den bol, volgens de bogen *BF*, *CF* en *DF*; aangezien nu die hoeken even groot zijn, zoo is ook (*XVII. Stell. V. B.*) *boog BF* = *boog CF* = *boog DF*. *Er bestaat dan, op het oppervlak van den bol, binnen of buiten eenigen bolvormigen driehoek BCD, een punt F, dat van de hoekpunten B, C en D, in bogen van groote cirkels gerekend, gelijke afstanden heeft. — Indien men dus uit het punt F, als middelpunt, met de koorde van den boog BF, op het oppervlak van den bol, eenen cirkel beschrijft; dan zal de omtrek van dien cirkel door de hoekpunten B, C en D loopen.*

En, wanneer men den hoek ZAB, om de lijn ZA, laat omwentelen; dan zal de ribbe AB (zie *X. B.*) een regt cirkelvormig kegelvlak beschrijven, hetwelk ook door de twee andere ribben AC en AD zal gaan. *Om elken drievlakkigen hoek kan derhalve een regt cirkelvormig kegelvlak worden beschreven.*

§. 692. Stelling D. *Binnen elken drievlakkigen hoek, bestaat eene lijn, die, uit het hoekpunt getrokken zijnde, met de zijvlakken gelijke standhoeken maakt.* — Gevolgen. *In elken bolvormigen driehoek, bestaat een punt, zoodanig, dat de loodregte bogen, die uit hetzelve op de zijden vallen, gelijk zijn. In elken drievlakkigen hoek, kan dan een regten cirkelvormigen kegel worden beschreven, die al de zijvlakken aanraakt.*

§. 693. Vraagstuk. *In, en om eenen drievlakkigen hoek, een regt cirkelvormig kegelvlak te beschrijven?*

XXXIX. Stelling. *Fig.* 322 *en* 323.

§. 694. *Wanneer de zijvlakken* (BAC, CAD *en* DAB) *van een drievlakkigen hoek* (N°. 1) *gelijk zijn aan de zijvlakken* (HEG, FEG *en* FEH) *van een anderen drievlakkigen hoek* (N°. 2); *maar in eene omgekeerde volgorde genomen; dan zullen de standhoeken van de zijvlakken van den eersten, insgelijks in eene andere volgorde genomen, wel gelijk zijn aan die van den tweeden; doch deze drievlakkige hoeken zullen, zoo min als de bolvormige driehoeken, welke tot dezelve behooren, niet in elkander passen of in elkander sluiten; evenwel zullen, zoo wel deze drievlakkige hoeken, als de bolvormige driehoeken, de eerste eene gelijke ligchamelijke ruimte bevatten en de tweede denzelfden inhoud hebben.*

Betoog. Wij nemen, dat de zijvlakken van beide drievlakkige hoeken, N°. 1 en N°. 2, ongelijk zijn; *hoek* $BAC >$ *hoek* CAD en *hoek* $CAD >$ *hoek* BAD. Indien men dan (zie *fig.* 323) het zijvlak FEG op het zijvlak DAC past; dan zal men zien, dat noch de zijvlakken BAD en FEH, noch de zijvlakken CAB en GEH, op elkander sluiten. Echter zullen de standhoeken der zijvlakken, die over de gelijke zijvlakken staan, gelijk, en den drievlakkigen hoek N°. 1 gelijk aan den drievlakkigen hoek N°. 2 zijn.

Men verlenge, om dit te bewijzen, in *fig.* 322, de ribben van den drievlakkigen hoek N°. 1; namelijk BA tot in f, CA tot in g en DA tot in h. Men neme $Af = BA$, $Ag = AC$ en $Ah = AD$; dan zullen de punten f, g en h in het oppervlak van den bol liggen, die uit A met AB als straal beschreven is, en men zal den bolvormigen driehoek fgh verkrijgen, behoorende tot den drievlakkigen hoek $Afgh$.

Nu

Nu is (IV. *Stell.* I. *B.* *en onderst.*) *hoek fAg* = *hoek BAC* = *hoek HEG*, *hoek fAh* = *hoek BAD* = *hoek FEH*, en *hoek gAh* = *hoek CAD* = *hoek FEG*. Men zal dus (XXXVII. *Stell.*) de drievlakkige hoek *EFGH* in den drievlakkigen hoek *Afgh*, zoodanig kunnen passen, dat de ribben *EF*, *EG* en *EH*, langs de ribben *Af*, *Ag* en *Ah* vallen, en de punten *F*, *G* en *H* in de punten *f*, *g* en *h*; zoodat de drievlakkige hoek *Afgh* met den drievlakkigen hoek *EFGH*, en de bolvormige driehoek *fgh* met den bolvormigen driehoek *FGH* gelijk- en gelijkvormig zullen zijn.

Laat nu, in N°. 1, de lijn *AP* zóó worden aangenomen, dat zij, met de ribben gelijke hoeken *BAP*, *CAP* en *DAP* maakt; indien men dan die lijn tot aan *q* verlengt; dan zal (IV. *St.* I. *B.*) *hoek PAD* = *hoek qAh*, *hoek PAC* = *hoek qAg* en *hoek PAB* = *hoek qAf* zijn. Indien men derhalve, in den drievlakkigen hoek N°. 2, de lijn *EQ* zoodanig aanneem, dat zij met de ribben *EF*, *EG* en *EH* gelijke hoeken *QEF*, *QEG* en *QEH* maakt; dan zal, nadat de drievlakkige hoek *EFGH* in den drievlakkigen hoek *Afgh* gepast is, de lijn *EQ* langs de lijn *Aq* moeten vallen.

Nu is (zie *fig.* N°. 1) de standhoek der zijvlakken *BAD* en *DAC*, dezelfde als de standhoek der zijvlakken *hAf* en *hAg*, dezelfde als de standhoek der zijvlakken *HEF* en *FEG*; en zoo zal, om dezelfde reden, ook de standhoek *BAD* en *BAC* gelijk den standhoek *HEF*, *HEG* en de standhoek *BAC* en *CAD* gelijk den standhoek *FEG* en *GEH* zijn.

Eindelijk is, volgens de voorgaande stelling,

drievl. hoek APBD = *drievl. hoek qAfh* = *drievl. hoek EQFH*
drievl. hoek APBC = *drievl. hoek Aqfg* = *drievl. hoek EQHG*
drievl. hoek APCD = *drievl. hoek Aqgh* = *drievl. hoek EQGF*

Telt men deze vergelijkingen bij elkander; dan zal (VIII *en* IV. *Ax.*)

drievl. hoek ABCD = *drievl. hoek EFGH*

zijn. Zoo als dan ook de inhoud van den bolvormigen driehoek *BCD* gelijk zal zijn aan den inhoud van den bolvormigen driehoek *FGH*.

§. 695. GEVOLG. *Wanneer men de ribben van een drievlakkigen hoek, naar de tegenovergestelde zijden, verlengt; dan verkrijgt men een drievlakkigen hoek, die tegen over den eersten staat, welks zijvlakken en standhoeken, in eene omgekeerde volgorde genomen, aan die van den eersten gelijk zijn; die overstaande drievlakkige hoeken zijn dus bij tegenoverstelling gelijk. En, wanneer men* (*fig.* 324), *uit de hoekpunten A, B en C van een bolvormigen driehoek ABC, door het middelpunt M van den bol, middellijnen AD, CE en BF trekt; dan ontstaat, aan den anderen kant van het oppervlak, een bolvormigen driehoek DEF, die bij tegenoverstelling denzelfden vlakken inhoud heeft als de andere bolvormige driehoek ABC.*

§. 696. XXIII. BEPALING. Twee drievlakkige hoeken zijn, door *su-*

perpositie, of in elkander passing, gelijk, wanneer de zijvlakken van den eersten gelijk zijn aan die van den tweeden, en de standhoeken der eveneens geplaatste zijvlakken, in dezelfde volgorde genomen, in beide drievlakkige hoeken, gelijk zijn: maar zij zijn slechts, door *oppositie, of tegenoverstand, gelijk*, wanneer de zijvlakken, in eene omgekeerde volgorde genomen, gelijk zijn.

XL. STELLING. *Fig.* 324.

§. 697. *De inhoud van een bolvormigen driehoek staat tot het oppervlak van den bol, tot welken hij behoort, als de som zijner hoeken, min twee regte hoeken, tot acht regte hoeken; dat is, indien men de hoeken, in graden uitgedrukt, A, B en C noemt, den inhoud van het oppervlak van den bol Ω stelt; dan zal men hebben:*

$$\textit{Inh. bolv. drieh. } ABC = \frac{A+B+C-2R}{8R} \times \Omega$$

BETOOG. Laat de boog AC, zijnde één der zijden van den bolvormigen driehoek, en derhalve ook de geheele omtrek $ACDE$ des grooten cirkels tot welken die zijde behoort, met het middelpunt M, van den bol in het vlak van het papier liggen, en de bolvormige driehoek ABC boven hetzelve uitsteken. Indien men dan, van A en C, door het middelpunt M, de middellijnen AD en CE trekt; en, op het oppervlak van den bol, de bogen AB en CB verlengt; dan zullen zij den omtrek des cirkels $ACDE$, in de punten D en E, ontmoeten; en indien men deze bogen verder verlengt, zoo zullen zij elkander, onder het vlak van het papier, of van den cirkel $ACDE$, in een punt F ontmoeten, hetwelk met het punt B in de middellijn BMF zal liggen; en dit alles zal daarop zijn gegrond, dat de vlakken van twee groote cirkels van den bol, door het middelpunt gaande, elkander noodzakelijk volgens eene middellijn van den bol moeten doorsnijden.

De bogen ACD, DEA, CAE, AED, EBC, ABD, BEF en BDF zijn dan alle gelijk aan de helft van den omtrek eens grooten cirkels.

De bovenste helft van het oppervlak van den bol is nu verdeeld, in de vier aan elkander sluitende bolvormige driehoeken ABC, BCD, DBE en ABE. En de inhoud van den bolvormige driehoek DEF, is (*Gev. XXXIX, Stell.*) gelijk aan den inhoud van den bolvormigen driehoek ABC.

Volgens de figuur, is nu:

bolv. strook $CAEB$ = *bolv. drieh.* ABC + *bolv. drieh.* ABE (A)
bolv. strook $ABDC$ = *bolv. drieh.* ABC + *bolv. drieh.* BCD
bolv. strook $BDFE$ = *bolv. drieh.* DEF + *bolv. drieh.* BDE

Nu

Nu hebben wij, zie *II. Gev. XXXII. Stell.* het oppervlak van den bol $= \Omega$ stellende:

$$\textit{strook } CAEB = \Omega \times \frac{\textit{hoek } ACB}{4R}, \ \textit{strook } ABDC = \Omega \times \frac{\textit{hoek } BAC}{4R},$$

$$\textit{strook } BDFE = \Omega \times \frac{\textit{hoek } ABC}{4R}$$

de vergelijkingen (*A*) worden derhalve:

$$\textit{bolv. drieh. } ABC + \textit{bolv. drieh. } ABE = \Omega \times \frac{\textit{hoek } ACB}{4R} \ldots (1)$$

$$\textit{bolv. drieh. } ABC + \textit{bolv. drieh. } BCD = \Omega \times \frac{\textit{hoek } BAC}{4R} \ldots (2)$$

$$\textit{bolv. drieh. } ABC + \textit{bolv. drieh. } BDE = \Omega \times \frac{\textit{hoek } ABC}{4R} \ldots (3)$$

Wanneer men nu in aanmerking neemt, dat de som van de bolvormige driehoeken *ABC*, *ABE*, *BCD* en *BDE* gelijk is aan het halve oppervlak van den bol; dan zal men, de vergelijkingen (1), (2) en (3) optellende, verkrijgen:

$$2 \textit{ bolv. drieh. } ABC + \tfrac{1}{2}\Omega = \Omega \times \frac{\textit{hoek } ABC + \textit{hoek } ACB + \textit{hoek } BAC}{4R}$$

derhalve $2 \textit{ bolv. drieh. } ABC = \frac{A+B+C}{4R} \times \Omega - \frac{1}{2}\Omega$

Deelt men nu deze vergelijking door twee; dan zal men verkrijgen:

$$\textit{bolv. drieh. } ABC = \frac{A+B+C}{8R} \times \Omega - \tfrac{1}{4}\Omega = \frac{A+B+C}{8R} \times \Omega - \frac{2R}{8R} \times \Omega$$

of, $\textit{bolv. drieh } ABC = \frac{A+B+C-2R}{8R} \times \Omega$

§. 698. I. GEVOLG Er zal, in het X. *Boek* XVIII. *Stell.* betoogd worden: *dat het oppervlak van eenen bol gelijk is aan viermaal den inhoud van deszelfs grooten cirkel*; indien men dus den straal van den bol r stelt; dan zal $\Omega = 4\pi r^2$ zijn en de betoogde vergelijking zal dan worden:

$$\textit{bolv. drieh. } ABC = \frac{A+B+C-2R}{2R} \times \pi r^2$$

§. 699. II. GEVOLG. *Fig.* 314. Men stelle het oppervlak van den bol, tot welke de bolvormige driehoek bcd behoort $= \omega$, en dien, waarvan BCD een gedeelte uitmaakt, Ω; dan is

$$\textit{bolv. drieh. } BCD : \textit{bolv. drieh. } bcd = \Omega : \omega$$

III. *Over de veelvlakkige hoeken en bolvormige veelhoeken, in het algemeen.*

§ 700. XXIV. BEPALING. Een veelvlakkige hoek van n zijden is de onbegrensde ligchamelijke ruimte, begrepen tusschen n regtlijnige

hoeken, die, in even zoo veel onderfcheidene vlakken, met derzelver zijden en hoekpunten, aan elkander fluiten.

Alzoo ftelt *fig* 325 een zesvlakkige hoek voor, welks zijvlakken zijn de hoeken *AMB*, *BMC*, *CMD*, *DME*, *EMF* en *EMA*, die in het punt *M* zamenkomen. *Het aantal der ribben in een veelvlakkigen hoek is altijd gelijk aan het getal zijner zijvlakken.*

§. 701. XXV. Bepaling *Fig.* 325. Indien men, uit het hoekpunt *M* van een veelvlakkigen hoek, als middelpunt, met eenen ftraal *AM* naar welgevallen genomen, eenen bol befchrijft; dan zullen de zijvlakken van den veelvlakkigen hoek het oppervlak van dien bol, volgens bogen *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* en *FA* van groote cirkel doorfnijden en een bolvormigen veelhoek *ABCDEF* formeren. *De zijden van dien bolvormigen veelhoek zullen de ftandhoeken der ribben van den veelvlakkigen hoek aan het hoekpunt, en de bolvormige hoeken de ftandhoeken der zijvlakken voorftellen.*

§. 702. XXVI. Bepaling. *Fig.* 325. Een vlak *BDM*, dat door het hoekpunt *M*, en twee ribben *BM* en *DM* van een veelvlakkigen hoek gaat, wordt, indien dit vlak geen zijvlak is, een *diagonaal-vlak van den veelvlakkigen hoek* genoemd; en dit vlak fnijdt het oppervlak van den bol, uit het hoekpunt befchreven, volgens den boog *BD* van een grooten cirkel; die boog wordt dan een *diagonaal-boog van den bolvormigen veelhoek* genoemd.

§. 703. Aanmerking. Men zal hieruit (even als in de gevolgen van de *XXVI. Bep. I. B.*) opmaken: *dat, in een veelvlakkigen hoek van n zijvlakken en in een bolvormigen driehoek van n zijden, het aantal der diagonaal-vlakken, of het aantal der diagonaal-bogen, door* $\frac{1}{2}n(n-3)$ *wordt voorgefteld; en dat verder, in elken veelvlakkigen hoek van n zijvlakken, als ook in elken bolvormigen veelhoek van n zijden, door alle mogelijke diagonaal-vlakken door dezelfde ribbe, of door alle mogelijke diagonaal-bogen uit hetzelfde hoekpunt te trekken, in n—2 drievlakkige hoeken of n—2 bolvormige driehoeken, kan verdeeld worden.* De hoeken van de zijvlakken van een drievlakkigen hoek ftaan naar buiten of naar binnen, indien het diagonaal vlak, dat door de twee naast gelegene ribben gaat, binnen of buiten den veelvlakkigen hoek valt. — De Lezer betooge de twee volgende ftellingen.

§. 704. Stelling. E. *Indien, in een veelvlakkigen hoek, de ftandhoeken der zijvlakken alle naar buiten ftaan; dan is de fom der zijvlakken altijd minder dan vier regte hoeken.*

§. 705 Stelling F. *Indien, al de hoeken van een bolvormigen n-hoek naar buiten ftaan, en Ω de inhoud van het oppervlak van den bol, I den inhoud van den bolvormigen veelhoek voorftelt;*

dan

dan is, in het algemeen:

$$I = \frac{\text{som der hoeken} - (n-2) \times 2R}{8R} \times \Omega$$

IV. *Korte schets van de eerste gronden en voornaamste regels der bolvormige Driehoeksmeting.*

§. 706. XXVII. BEPALING. De uitvinding der regels, welke dienen moeten, om, wanneer van de zes hoeken, zijnde de standhoeken der ribben en der zijvlakken van eenigen drievlakkigen hoek, drie termen bekend of gegeven zijn, de drie anderen te vinden; of, door welke, wanneer, uit de zijden en hoeken eens bolvormigen driehoeks, drie termen, zoo als het valt, gegeven zijn, de drie anderen, het zij door constructie, het zij door berekening, te vinden, maakt een bijzonder gedeelte der Meetkunst uit, waaraan men den naam van *bolvormige* (spherische) *Driehoeksmeting* gegeven heeft.

§. 707. *Nadere verklaring.* In de platte Driehoeksmeting, is het geval, in hetwelk al de hoeken van een platten driehoek gegeven zijn, uitgezonderd. Want, omdat, in den platten driehoek, de som der hoeken eene standvastige grootheid is, zoo zal door de gegevene hoeken van een platten of vlakken driehoek wel den vorm, maar geenszins de grootte bepaald worden. Een bolvormigen driehoek daarentegen is door deszelfs hoeken in allen opzigte bepaald; en daarom bestaan er op het oppervlak van den bol wel gelijke- en gelijkvormige bolvormige driehoeken; maar geenszins gelijkvormige; de laatste moeten, zie *fig.* 314, in bollen van onderscheidene stralen bestaan. Die uitzondering maakt nu, dat, hoezeer de regels der bolvormige driehoeksmeting in velerlei punten met die der platte driehoeksmeting, uit welke zij worden afgeleid, overeenstemmen, de regels van de eerste nogtans menigvuldiger en eenigermate omslachtiger zijn, dan die van de laatste.

Men kan de regels van de bolvormige driehoeksmeting in die der regthoekige en der scheefhoekige driehoeken onderscheiden; van welke wij de eerste en voornaamste, in de oplossing van de volgende vraagstukken, zullen leeren kennen.

§. 708. XXVIII. BEPALING. Omdat (*XXXV. Stell.*) de som der hoeken van een bolvormigen driehoek grooter dan twee en kleiner dan zes regte hoeken is, zoo kan een bolvormige driehoek een regten en twee scherpe, een regten en twee stompe, een regten, een scherpen en een stompen hoek, twee regte en een scherpen of stompen, en eindelijk drie regte hoeken hebben; doch wanneer een driehoek slechts één regten hoek heeft; dan wordt hij *regthoekig* genoemd; een

regthoekige bolvormige driehoek is dus zulk een, in welken de vlakken van twee zijden of bogen loodregt op elkander staan.

I. VRAAGSTUK. *Fig.* 326 *en* 327.

§. 709. *De twee regthoekszijden* (*AB en BC fig.* 326) *van een regthoekigen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de hypothenusa* (*AC*) *benevens de scheve hoeken* (*BAC en ACB*), *door constructie, te vinden; en verder uit de figuur de regels te zoeken, om, gegeven zijnde, uit de drie zijden en de twee scheve hoeken, twee termen, de drie overige door berekening te vinden?*

MEETKUNSTIGE OPLOSSING. *Fig.* 326. Laten de zijvlakken of de vlakken der bogen *AB* en *BC* loodregt op elkander staan; dan is de bolvormige driehoek *ABC* regthoekig in *B*. Zij *M* het middelpunt van den bol. Men trekke de ribben *MA*, *MB* en *MC*; dan verkrijgt men den drievlakkigen hoek *MABC*, wiens betrekkelijke grootte en standhoeken door den regthoekigen bolvormigen driehoek *ABC* worden voorgesteld.

Men late *CD* loodregt op de ribbe *MB* vallen. Omdat dan het vlak *CMB* loodregt op het vlak *BMA* staat, zoo zal (*X. Stell.*) die lijn *CD* loodregt op het vlak *AMB* staan. Men late *DE* loodregt op de ribbe *AM* vallen; dan is (*IV. Stell.*) *hoek CDE* = 90°, en zoo men nu de *CE* trekt; dan zal (*VIII. Stell.*) *CE* loodregt op *AM* staan, en de hoek *CED* zal dan (*XIV. Bep.*) de standhoek der zijvlakken *AMB* en *AMC* zijn, of (*XVIII. Bep.*) gelijk aan den bolvormigen hoek *BAC*; terwijl de driehoek *CDE* regthoekig in *D* is.

Laat men, in het vlak *AMB*, de lijn *AH*, loodregt op *MB*, en, in het vlak *BMC*, de lijn *HI*, loodregt op *MC* vallen; dan zal, om dezelfde reden, de driehoek *AHI* regthoekig in *H* zijn; hoek *AIH* de standhoek der zijvlakken *BMC* en *AMC*, gelijk aan den bolvormigen hoek *ACB*.

Men late nu de zijvlakken *AMC* en *BMC*, om de ribben *AM* en *BM*, naar buiten omdraaijen, tot dat zij in het vlak *AMB* vallen, en de regthoekige driehoeken *CDE* en *AHI*, om de zijden *DE* en *HI*, tot dat zij insgelijks, met de voornoemde zijvlakken, in het vlak *AMB* vallen; dan verkrijgt men de *fig.* 327, in welke *EC* het verlengde van *DE*, *EK* = *EC*, *DK* = *DC*, *HL* = *AH* en *IL* = *AI* is.

CONSTRUCTIE. Stel nu: dat gegeven zijn de regthoekszijden *AB* en *BC*; beschrijf dan, met eenen straal, die gelijk is aan den straal van den bol, eenen cirkel; neem op denzelven de bogen *AB* en *BC* gelijk aan de gegevene regthoekszijden, en trek de stralen *MA*, *MB* en *MC*. Om de hypothenusa te vinden, late men *CD* loodregt op *MB* en *DE* loodregt op *AM* vallen; zoo dan *DE* tot aan *C* verlengd wordt; dan zal *AC* de hypothenusa zijn. En, om de scheve bolvormige hoeken *A*

en

en C te vinden, trekke men DK en HL, loodregt op DE en HI; men make $DK = DC$ en $HL = AH$. Wanneer men dan de lijnen EK en IL trekt; dan is *hoek* $DEK =$ *bolv. hoek* BAC en *hoek* $HIL =$ *bolv. hoek* ACB. Twee andere termen van den regthoekigen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, zoo zal men den driehoek ABC ligtelijk kunnen construeren; hetgeen wij aan den Lezer overlaten.

- Rekenkunstige oplossing. *Fig.* 326 *en* 327. Trek nog (*fig.* 326) in het zijvlak BMF de lijn BF, loodregt op MB, en verleng MC tot in F. Voorts BG, loodregt op AM, en vereenig F en G door de lijn FG; dan is (zie boven) FBG een regthoekige driehoek, die in B regthoekig is, en *hoek* $FGB =$ *hoek* $DEC =$ *bolv. hoek* BAC.

In de bolvormige driehoeksmeting, wordt de straal (even als in de platte driehoeksmeting) *gelijk aan de éénheid gesteld.* Wij hebben dus, in *fig.* 326, volgens de welbekende bepalingen, $AM = BM = CM = 1$; $CD =$ *sin.* BC, $MD =$ *cos.* BC, $BF =$ *tang.* BC, $MF =$ *sec.* BC. Voorts is, in het vlak AMB, $BG = AH =$ *sin.* AB, $MG = MH =$ *cos.* AB; en eindelijk is, in het vlak AMC, $CE = AI =$ *sin* AC, $MI = ME =$ *cos.* AC; terwijl, zoo als boven betoogd is, *hoek* $CED =$ *hoek* $BGF =$ *bolv. hoek* A, en *hoek* $AIH =$ *bolv. hoek* C is. Nu hebben wij, als volgt:

1°. in den regthoekigen driehoek CDE (*XXIV Stell. IV. B.*) $CD = CE \times$ *sin.* E; dat is, volgens de opgegevene verklaring,

$$\sin. BC = \sin. A \times \sin. AC \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (A)$$

2°. In den regthoekigen driehoek BGF, is (*XXIV. Stell. IV. B.*) $BF = GB \times$ *tang.* G; dat is:

$$\text{tang.}\, BC = \text{tang.}\, A \times \sin. AB \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

3°. In den regthoekigen driehoek MED, is (*XXIV. Stell. IV. B.*) $ME = MD \times$ *cos.* DME; dat is, zie boven:

$$\cos. AC = \cos. BC \times \cos AB \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (C)$$

4°. De gelijkvormige driehoeken MBC en MDE geven de evenredigheid: $MB : MD = BG : DE$; of $1 :$ *cos.* $BC =$ *sin.* $AB : DE$; derhalve is

$$DE = \sin. AB \times \cos. BC \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (p)$$

Nog volgt, uit de gelijkvormige driehoeken MDC en MIH, de evenredigheid: $MC : CD = MH : HI$, of $1 :$ *sin.* $BC =$ *cos.* $AB : HI$; derhalve is

$$HI = \cos. AB \times \sin. BC \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (q)$$

welke vergelijkingen (p) en (q) moeten dienen, om de volgende te vinden.

5°. In den regthoekigen driehoek DEC, is (*XXIV. Stell. IV. B.*) $DE = CE \times$ *cos.* E; dat is, volgens formule (p), *sin.* $AB \times$ *cos* $BC =$ *sin.* $AC \times$ *cos.* A; nu is, zie *verg.* (A), *sin.* $AB =$ *sin.* $AC \times$ *sin* C; de laatste vergelijking wordt derhalve *sin.* $AC \times$ *sin.* $C \times$ *cos.* $BC =$ *sin.* $AC \times$ *cos.* A, of dezelve door *sin.* AC deelende,

$$\cos. A = \cos. BC \times \sin. C \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (D)$$

6°. In

6°. In den regthoekigen driehoek *CDE*, is (*XXIV. Stell. IV. B.*) $DC = DE \times tang.\ E$; dat is, zie vergelijking (*p*),

$$sin.\ BC = sin.\ AB \times cos.\ BC \times tang.\ A \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en, in den regthoekigen driehoek *AHI*, is $AH = HI \times tang.\ I$; dat is, zie vergelijking (*q*),

$$sin.\ AB = sin.\ BC \times cos.\ AB \times tang.\ C \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Men vermenigvuldige de vergelijkingen (1) en (2) met elkander; dan verkrijgt men, na door $sin.\ AB \times sin.\ BC$ gedeeld te hebben,

$$1 = cos.\ AB \times cos.\ BC \times tang.\ A \times tang.\ C$$

maar, volgens vergelijking (*C*), is $cos.\ AB \times cos.\ BC = cos.\ AC$; derhalve is

$$tang.\ A \times tang.\ C \times cos.\ AC = 1 \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

7°. Eindelijk is, in den regthoekigen driehoek *CED*, (*XXIV. Stell. IV. B.*) $DE = CE \times cos.\ E$; dat is, zie vergelijking (*p*)

$$sin.\ AB \times cos.\ BC = sin.\ AC \times cos.\ A$$

deel door $cos.\ AB \times cos.\ BC = cos.\ AC$, zie verg. (*C*); dan zal men, omdat volgens *XXIII. Stell. IV. B.*, $sin.\ x : cos.\ x = tang.\ x$ is, verkrijgen:

$$tang.\ AB = tang.\ AC \times cos.\ A. \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

§. 710. AANMERKING. De formulen of vergelijkingen (*A*), (*B*), (*C*), (*D*), (*E*), en (*F*) bevatten alles, wat noodig is, om alle gevallen van de regthoekige bolvormige driehoeken te berekenen, en kunnen, tot bijzondere einden, op vele wijzen, onder andere vormen worden voorgesteld; terwijl uit de naauwkeurige beschouwing van dezelve eene groote menigte waarheden, betrekkelijk de regthoekige bolvormige driehoeken, zullen kunnen worden afgeleid. Zie verder het II. *Deel.*

II. VRAAGSTUK. *Fig.* 328 *en* 329.

§. 711. *Al de zijden van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, deszelfs hoeken, door constructie en berekening, te vinden?*

MEETKUNTIGE OPLOSSING. *Fig.* 328. Zij *ABC* de bolvormige driehoek, wiens zijden *AB*, *BC* en *AC* ondersteld worden gegeven te zijn. Zij *M* het middelpunt van den bol, tot welken die bolvormige driehoek behoort, en bijgevolg *CMG*, *GMH* en *CMH* de zijvlakken van den drievlakkigen hoek, welks betrekkelijke grootte door den bolvormigen driehoek *ABC* wordt voorgesteld.

Men late, uit het hoekpunt van den tophoek *C*, de loodlijn *CD* op het tegenoverstaande zijvlak *GMH* vallen; en nog, uit datzelfde punt *C*, in de zijvlakken *CMG* en *CMH*, de loodlijnen *CE* en *CF*, op de ribben *MG* en *MH*; indien men dan de lijnen *DE* en *DF* trekt; dan zullen deze (*VIII. Stell.*) ook loodregt op *MG* en *MH* staan, en de hoeken *CED* en *CFD* zullen dan (*XIV. Bep.*) de standhoeken der

zij-

zijvlakken *CMG* en *CMH*, met het zijvlak *GMH*, en derhalve gelijk (zie *XVIII. Bep.*) aan de bolvormige hoeken *BAC* en *ABC* zijn; terwijl (*IV. Bep. en IV. Stell.*) de hoeken *CDE* en *CDF* regte hoeken, en de driehoeken *CDE* en *CDF* regthoekig in *D* zullen zijn.

Nog trekke men, in de zijvlakken *CMG* en *CMH*, aan het punt *C*, de lijnen *CG* en *CH*, regthoekig op *MC*; lijnen, die derhalve de bogen *AC* en *BC*, in het punt *C*, aanraken; dan zal *hoek GCH* (*XIV en XVIII Bep.*) de standhoek der zijvlakken *CMG* en *CMH*, of den bolvormigen hoek *ACB* zijn; terwijl het vlak van den driehoek *CGH* het oppervlak van den bol, in het punt *C*, zal aanraken.

Men late nu (vergelijk *fig.* 328 met 329) de zijvlakken *CMG* en *CMH*, om de ribben *MG* en *MH*, omdraaijen, tot dat zij beide in het vlak van *AMB* vallen. Voorts late men de regthoekige driehoeken *CDE* en *CDF*, om de zijden *DE* en *DF*, als ook de driehoek *CGH*, om de zijde *GH*, omdraaijen, en in het vlak *AMB* vallen; dan verkrijgt men, *fig.* 329; in welke *EDI*, *FDK* en *GHL*, de driehoeken *EDC*, *FDC* en *GHC* van *fig.* 328 zijn; zoo dat *ED* het verlengde van *CE*, *FD* het verlengde van *CF*, $EI = EC$, $FK = FC$, $DI = DK$, $GL = GC$ en $HC = HL$ is.

Hieruit volgt dan, om, uit de drie gegevene zijvlakken, de standhoeken te vinden, deze constructie.

Constructie. *Fig.* 329. Na, op eenen boog de zijden van den bolvormigen driehoek *CA*, *AB* en *BC*, nevens elkander geplaatst, en de ribben *MC*, *MA*, *MB*, *MC* getrokken te hebben, trekke men *CE* en *CF*, loodregt op de ribben *AM* en *BM*, verlenge verder die loodlijnen, tot dat zij elkander in *D* snijden. Na *DI* en *DK*, loodregt op *ED* en *DF*, of evenwijdig aan *MA* en *MB* getrokken te hebben, beschrijve men, uit *E* en *F*, als middelpunten, met *EC* en *FC*, als stralen, cirkelbogen, die *DI* en *DK* in de punten *I* en *K* snijden; indien men dan de lijnen *EI* en *FK* trekt; dan zijn de hoeken *DEI* en *DFK* gelijk aan de bolvormige hoeken *BAC* en *ABC*. Eindelijk trekke men nog *CG* en *CH*, loodregt op *MC*, en beschrijve op *GH*, als basis, eenen driehoek, wiens zijden *GL* en *HL* aan *GC* en *HC* gelijk zijn; dan zal de hoek *GLH* gelijk zijn aan den bolvormigen hoek *ACB*.

Rekenkunstige oplossing. *Fig.* 329. Men stelle den straal van den bol $CM = AM = BM = 1$; dan is, volgens de voorgaande constructie, $CE = EI = sin.\ AC$; $ME = cos.\ AC$, $CG = tang.\ AC$, $MG = sec.\ AC$. Verder is $CF = FK = sin.\ BC$, $MF = cos\ BC$, $CH = tang.\ BC$ en $MH = sec.\ BC$. Hoek $DEI =$ *bolv. hoek A*, hoek $DFK =$ *bolv. hoek B*, en hoek $GLH =$ *bolv. hoek C*.

In de regthoekige driehoeken *EDI* en *FDK*, is (*XXIV. Stell. IV. B.*) $DI = EI \times sin.\ DEI = CE \times sin.\ DEI = sin.\ AC \times sin.\ A$; en $DK = FK \times sin.\ DFK = CF \times sin.\ DFK = sin.\ BC \times sin.\ B$. Nu is (zie *voorgaande oplossing*) $DI = DK$; derhalve is (*IV. Ax.*)

$$sin.\ AC \times sin.\ A = sin.\ BC \times sin.\ B,\text{ of } sin.\ AC : sin.\ BC = sin.\ B : sin.\ A$$

Men

Men zal dus, in het algemeen, kunnen stellen:

$$(sin.\,AB,\ sin.\,AC,\ sin.\,BC) :: (sin.\,C,\ sin.\,B,\ sin.\,A) \quad . \quad (G)$$

Verleng DK tot in N, en trek EOP, loodregt op MB; dan is (*constr.*) NDK evenwijdig aan MB en EOP evenwijdig aan DC; daarom is (I. *Bep.* III. *B.*) $DOPF$ een parallelogram, en (I. *Stell.* III. *B.*) $PF = OD$. Verder heeft men hoek $END =$ hoek AMB (XXIV. *Stell.* I. *B.*); en, omdat hoek $O = R$ is, zoo is (XVII. *Stell.* IV. *B.*) hoek $DEO =$ hoek. $END =$ hoek AMB. Nu is, in den regthoekigen driehoek MEP, (XXIV. *Stell.* IV. *B.*) $MP = ME \times cos.\,EMP = cos.\,AC \times cos.\,AB$.

In den regthoekigen driehoek EDI, is (XXIV. *Stell.* IV. *B.*) $DE = EI \times cos.\,DEI = sin.\,AB \times cos.\,A$. En, in den regthoekigen driehoek DEO, is $DO = PF = ED \times sin.\,DEO = DE \times sin.\,AMB$, of $PF = sin.\,AB \times sin.\,AC \times cos.\,A$.

Daar nu, volgens de figuur, $MF = cos.\,BC = PF + MP$ is, zoo hebben wij deze fraaije vergelijking:

$$cos.\,BC = cos.\,A \times sin.\,AB \times sin.\,AC + cos.\,AB \times cos.\,AC \quad (H)$$

Deze formule kan dienen, *om, wanneer twee zijden AB en AC van een bolvormigen driehoek, met den ingesloten hoek, gegeven zijn, de derde zijde te vinden.*

Uit de formule (B) volgt onmiddellijk:

$$cos.\,A = \frac{cos.\,BC - cos.\,AB \times cos.\,AC}{sin.\,AB \times sin.\,AC} \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

en, *door deze formule zal, wanneer de drie zijden van een bolvormigen driehoek gegeven zijn, één der hoeken kunnen berekend worden.*

§. 712. Gevolg. *Fig.* 317. In den aspuntsdriehoek abc, is, volgens de formulen (H) en (I),

$$cos.\,ab = cos.\,c \times sin.\,ac \times sin.\,bc + cos.\,ac \times cos\ bc \quad . \ . \quad (b)$$

Nu is, zie XXXIV. *Stelling*, $ab + C = 180^{\circ}$, $c + AB = 180^{\circ}$, $ac + B = 180^{\circ}$ en $bc + A = 180^{\circ}$; derhalve is (*Aanmerk. Bepalingen* IV. *B.* §. 354—§. 356, *Bladz.* 130), $cos.\,ab = -\,cos.\,C$, $cos\ c = -\,cos.\,AB$, $sin.\,ac = sin.\,B$, $sin.\,bc = sin.\,A$, $cos.\,ac = -\,cos.\,B$, $sin.\,bc = sin\ A$ en $cos.\,bc = -\,cos\ A$; de vergelijking (b) wordt dan, door het overbrengen van die waarden:

$$cos.\,C = cos.\,AB \times sin.\,A \times sin.\,B - cos.\,A \times cos.\,B \quad . \quad (K)$$

uit welke dan onmiddellijk zal volgen:

$$cos.\,AB = \frac{cos.\,C + cos.\,A \times cos.\,B}{sin.\,A \times sin\ B.} \quad \ldots\ldots \quad (L)$$

Door de formule (K), zal men, ééne zijde met de aanliggende hoeken van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, den derden hoek kunnen berekenen, en door de formule (L) één der zijden, wanneer al de hoeken van den bolvormigen driehoek gegeven zijn.

III. Vraagstuk. *Fig.* 330.

§. 713. *Van een bolvormigen driehoek ABC twee zijden AB en*

en AC, met den ingeslooten hoek A, gegeven zijnde, de derde zijde BC, door constructie, te vinden?

OPLOSSING. Men beschrijve, uit het punt *M*, eenen cirkel, en neme de bogen *AB* en *AC*, gelijk aan de gegevene zijden van den bolvormigen driehoek. Na, door het punt *A*, de raaklijn *ED* (loodregt op *AM*) te hebben getrokken, make men hoek *DAF* gelijk aan den bolvormigen hoek *BAC*, en *AF* = *AE*. Men trekke verder de lijn *DF*, en beschrijve op *MD* eenen driehoek *MDG*, wiens opstaande zijden *MG* en *DG* gelijk zijn aan de lijnen *ME* en *DF*; *dan zal de boog BC de derde zijde van den begeerden bolvormigen driehoek zijn.*

BETOOG. Want, men late de vlakken *EMA* en *DMG*, om de ribben *MA* en *MD*, omdraaijen, tot dat het punt *B* in het punt *B*, en de lijnen *MG* en *ME* langs elkander vallen; dan zal, omdat *MG* = *ME* (*constr.*) is, het punt *E* in het punt *G* vallen, en men zal den driehoek *ADG* of *ADE* verkrijgen, *in welke* (XVIII. Bep.) *hoek DAE eigenlijk de bolvormige hoek A is.* Nu is (*constr.*) *AF* = *AE* en *DF* = *DG*; dus is (XIII. *Stell.* I *B.*) *hoek DAF* = *hoek GAD* = *bolv. hoek A*; de boog *BC* is derhalve de derde zijde des bolvormigen driehoeks. *De onbekende hoeken zullen, volgens de constructie van het voorgaande vraagstuk gevonden worden.*

§. 714. AANMERKING *Fig.* 330. De derde zijde *BC* door berekening te vinden, kan door de formule (*B*) worden bewerkstelligd; doch die formule kan uit onze laatste constructie, op eene geheel andere wijze, worden afgeleid. Volgens de figuur en de bekende bepalingen, is *AE* = *AF* = *tang AB*, *ME* = *MG* = *sec. AB*, *AD* = *tang AC*, *MD* = *sec. AC*; ook is (*constr.*) *hoek DAF* = *bolv. hoek A.* Nu is, volgens de XXVII *Stell.* IV. *B.* in den driehoek *DAF*,

$$DF^2 = AF^2 + AD^2 - 2AF \times AD \times \cos. DAF$$

of $DF^2 = \tang^2. AB + \tang^2. AC - 2 \tang. AC \times \tang. AB \times \cos. A$ (1)

en, in den driehoek *DMG*, is, om dezelfde reden,

$$DG^2 = DF^2 = MG^2 + MD^2 - 2MG \times MD \times \cos. DMG$$

of, $DF^2 = \sec^2 AB + \sec^2. AC - 2\sec. AB \times \sec. AC \times \cos\ BC$

deze laatste vergelijking wordt, wanneer men, zie XXIII. *Stell.* IV. *B.* $\sec^2. p = 1 + \tang^2. p$ stelt,

$$DF^2 = 2 + \tang^2. AB + \tang^2. AC - 2\sec. AB \times \sec. AC \times \cos\ BC \quad (2)$$

Men trekke de vergelijking (1) van de vergelijking (2); dan wordt eindelijk

$$0 = 2 - 2\sec. AB \times \sec. AC \times \cos. BC + 2\tang. AB \times \tang. AC \times \cos. A$$

Men deele deze vergelijking door *twee* en stelle, zie XXIII. *St.* IV. *B.* $\sec. p = 1 : \cos. p$; $\tang. q = \sin. q : \cos. q$; dan verkrijgt men:

$$0 = 1 - \frac{\cos. BC}{\cos. AB \times \cos\ AC} + \frac{\sin. AB \times \sin. AC \times \cos. A}{\cos. AB \times \cos\ AC}$$

vermenigvuldigt men deze vergelijking met $\cos. AB \times \cos. AC$; dan zal men verkrijgen:

cos.

$\cos. BC = \cos. A \times \sin. AB \times \sin. AC + \cos. AB \times \cos. AB$
zijnde deze de vergelijking (H), die boven gevonden is.

IV. VRAAGSTUK. *Fig.* 331.

§. 715. *Zoo van een bolvormigen driehoek ABC gegeven zijn ééne zijde AC, met de bolvormige hoeken A en C, aan die zijde gelegen, de twee andere zijden AB en BC, zoo door constructie, als door berekening, te vinden?*

CONSTRUCTIE. Men make eenen hoek XYZ, gelijk aan het gegeven zijvlak van den drievlakkigen hoek, of gelijk aan de gegevene zijde AC van den bolvormigen driehoek. Door eenig punt D van de ribbe XY, trekke men eene onbepaalde loodlijn BDE op dezelve. Uit eenig punt E van deze loodlijn DE, late men eene loodlijn EQ op YZ vallen. Verder make men de hoeken EDF en EQG gelijk aan de gegevene bolvormige hoeken A en C, en trekke nog, op DE en QE, de loodlijnen EF en EG; indien dan $EF = EG$ ware; dan zouden, indien de regthoekige driehoeken DEF en EQG, om de zijden DE en EQ omdraaijende, loodregt op het vlak XYZ gesteld zijnde, met derzelver toppunten F en G aan elkander komen, en de hoek XYZ zou wezenlijk het gegevene zijvlak Y het hoekpunt van den drievlakkigen hoek, en het middelpunt van den bolvormigen driehoek zijn.

Men beschrijve dan, uit E, met EF, als straal eenen cirkelboog FH, die EG in H snijdt; en men trekke HI, evenwijdig aan QG; en, door het punt I, MI, evenwijdig aan YZ; dan is *hoek* XMC = *hoek* XYZ, gelijk aan de zijde AB van den bolvormigen driehoek ABC.

Men trekke, van M door E, eene onbepaalde lijn ME, en EK loodregt op ME; indien men dan de driehoeken DEF, MEK en EIH, om de zijden DE, ME en EI, laat omdraaijen, tot dat zij loodregt op het vlak XYZ staan; dan zullen de zijden EF, EK en EH langs elkander, en (omdat $EF = EK = EH$ is,) de punten F, K en H, in elkander vallen. De lijn MK zal dan als de straal van den bol kunnen aangemerkt worden, tot welken de bolvormige driehoek ABC behoort.

Wanneer men derhalve, uit M, met MK als straal, eenen cirkel beschrijft; dan zal de omtrek van dien cirkel het verlengde der lijnen ED en EI, in de punten B en B, snijden; en, indien men dan eindelijk, uit het punt M, de lijnen MB en MB trekt; dan zullen de bogen AB en CB de twee gezochte zijden van den bolvormigen driehoek zijn; zoo, als uit het *I. Vraagstuk*, en de verklaring van *fig.* 328, duidelijk te zien is. De hoek B wordt op dezelfde wijze gevonden, als in *fig.* 329.

REKENKUNSTIGE OPLOSSING. *Fig.* 331. Men verlenge EF en EH tot in L en N; omdat dan EF evenwijdig is aan MA en EH aan MC, zoo is (I. *Bep.* III. *B.*) $ELMN$ een parallelogram, *hoek* ELI = *hoek* END = *hoek* NML = *boog* AC, en $NE = ML$.

In den regthoekigen driehoek EIH, is (XXIV. *Stell.* IV. *B.*) $EI = HI \times cos.\ I = sin.\ BC \times cos.\ C$; en verder, $EH = EF = HI \times sin.\ I = sin.\ BC \times sin.\ C$.

In den regthoekigen driehoek EIL, is, om dezelfde reden, $LI = EI \times tang.\ E = EI \times cot.\ L = EI \times cot.\ AC$; derhalve is $LI = sin.\ BC \times cos.\ C \times cot.\ AC$.

In den regthoekigen driehoek DEF, is $DE = EF \times tang.\ F = EF \times cot.\ EDF = EF \times cot.\ A$; maar $EF = EH$; derhalve $DE = sin.\ BC \times sin.\ C \times cot.\ A$.

Eindelijk is den regthoekigen driehoek DNE, $DE = NE \times sin.\ N = NE \times sin.\ M = NE \times sin\ AC$; derhalve is:

$$NE = LM = \frac{DE}{sin.\ AC} = \frac{sin.\ BC \times sin.\ C \times cot.\ A}{sin.\ AC}$$

Nu is, volgens de figuur, $MI = ML + LI$; wij hebben derhalve:

$$cos.\ BC = \frac{sin.\ BC \times sin.\ C \times cot\ A}{sin.\ AC} + sin.\ BC \times cos.\ C \times cot.\ AC$$

Deelt men nu deze vergelijking door $sin.\ BC$; dan zal, omdat (XXIII. *Stell.* IV. *B.*) $cot.\ BC = cos.\ BC : sin.\ BC$ is,

$$cot.\ BC = \frac{sin.\ C \times cot.\ A}{sin.\ AC} + cos.\ C \times cot.\ AC \quad \ldots \quad (M)$$

worden; welke vergelijking, door omkeering van derzelver leden, gemakkelijk onder den volgenden vorm te brengen is,

$$tang.\ BC = \frac{sin.\ AC}{sin.\ C \times cot.\ A + cos.\ C \times cos.\ AC} \quad \ldots \quad (N)$$

door welke formulen (*M*) *en* (*N*), *de onbekende zijde BC, uit de zijde AC, en de hoeken A en C, die aan dezelve liggen, kunnen berekend worden.* De andere onbekende zijde zal, door ééne der twee formulen:

$$cot.\ AB = \frac{sin.\ A \times cot.\ C}{sin.\ AC} + cos.\ A \times cot.\ AC \quad \ldots \quad (M')$$

$$tang.\ AB = \frac{sin.\ AC}{sin.\ A \times cot.\ C + cos.\ A \times cos.\ AC} \quad \ldots \quad (N')$$

kunnen berekend worden.

§. 716. Gevolg. *Fig.* 317. Volgens het betoogde, is, in den aspuntsdriehoek abc, als volgt:

$$cot.\ bc = \frac{sin.\ c \times cot.\ a}{sin.\ ac} + cos.\ c \times cot.\ ac$$

$$tang.\ bc = \frac{sin.\ ac}{sin.\ c \times cot.\ a + cos.\ c \times cot.\ ac}$$

Nu is, zie *Bladz.* 130, $cot.\ bc = -\ cot.\ A$; $tang.\ bc = -\ tang.\ A$; $sin.\ c = sin.\ AB$; $cot.\ a = -\ cot.\ BC$; $sin.\ ac = sin.\ B$; $cos.\ c = -\ cos.\ AB$ en $cos.\ ac = -\ cos.\ B$; de voorgaande vergelijkingen worden derhalve:

$$cot.\ A = \frac{sin.\ AB \times cot.\ BC}{sin.\ B} - cos.\ AB \times cot.\ B \quad \ldots \quad (O)$$

$$\text{tang.}\,A = \frac{\sin.\,B}{\sin.\,AB \times \cot.\,BC - \cos.\,AB \times \cos.\,B} \quad . \quad . \quad (P)$$

Door deze formulen, zullen nu, twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijnde, de twee onbekende hoeken kunnen berekend worden.

V. Vraagstuk. *Fig.* 332.

§. 717. *Een bolvormigen driehoek te construeren, wanneer twee zijner zijden AC en BC, met één der hoeken A, over ééne van die bekende zijden staande, gegeven zijn?*

Constructie. Men beschrijve uit M, als middelpunt, met den straal MA, den cirkel, tot welken den bolvormigen driehoek ABC behoort. Men neme AC en BC gelijk aan de gegevene zijden, en, na de stralen MB, MC en MA, getrokken te hebben, zoo trekke men CDF en BG loodregt op MA en MC, en make den hoek EDF gelijk aan den gegeven bolvormigen hoek A; indien men dan $DE = DC$ neemt, en EF loodregt op het verlengde van DC laat vallen; dan zal F de projectie van het hoekpunt C en MF de projectie van de ribbe MC op het vlak van den boog AB zijn. Uit het punt E, beschrijve men, met eenen straal, gelijk aan BG zijnde, eenen boog; dan wordt $EH = BG$.

Men beschrijve nu uit F, met FH als straal, eenen cirkel, en trekke uit het middelpunt M van den bol, de raaklijnen MB en MB' tot dien cirkel, denzelven in de punten I en K aanrakende; dan zijn AB of AB' de onbekende zijde, van den bolvormigen driehoek; *en er bestaan alzoo twee bolvormige driehoeken, die aan de gegevens voldoen.*

Betoog. Men trekke, uit of door het punt F, de lijnen FIC en FKC', loodregt op MB en MB', en trekke door de punten C en C'; de ribben MC en MC'; dan is (*Leering* XIII *Stell.* V. *B.*) $MK = MI$ en $CM = C'M$; dus zal (II *Hulpst.* I. *B.*) $C'K = CI$ zijn; en *boog* $B'C'$ = *boog* BC. Men late de sectors AMC en BMC, alsmede den driehoek DEH, om de lijnen AM, BM en DFH, omdraaijen, tot dat de lijn CD langs DE en (*constructie*) C in E valt; dan zal FE loodregt op het vlak AMB staan, en de punten C en C' van de vlakken BMC en $B'MC'$, zullen zich met het punt E vereenigen; en daar nu $EH = EI$ is, zal $BG = EH = IC = C'K$ zijn. De nog onbekende hoeken zullen, zoo als in het *II. Vraagstuk*, worden gevonden.

VI. Vraagstuk. *Fig.* 333.

§. 718. *Nog een bolvormigen driehoek te construeren; wanneer twee zijner hoeken A en B, met ééne zijde AC, tegen over éénen dezer hoeken staande, gegeven zijn?*

Constructie. Zij M het middelpunt van den bol en AC de gegevene zijde. Men late CD loodregt op AM vallen, en, na CD verlengd

lengd te hebben, neme men, op dit verlengde, *hoek* $FDE =$ *bolv. hoek* A, $DE = DC$ en EF loodregt op DG. Nog make men *hoek* FEG $=$ *compl. bolv. hoek* B; dan wordt *hoek* $DGE =$ *bolv. hoek* B. Nu beschrijve men, uit F, met FG als straal, eenen cirkel, en trekke, uit M, de lijnen MB en MB', die denzelven aanraken; dan zullen AB of AB' de zijden zijn van de twee bolvormige driehoeken, die aan de gegevens voldoen. En trekt men nu door F, de lijnen FHC en IFC', loodregt op MB en MB'; dan verkrijgt men de bogen BC en BC'; zijnde de derde zijde van den bolvormigen driehoek. Wij laten het overige den Lezer tot oefening over.

§. 719. AANMERKING. De formulen (*G*), (*H*), (*I*), (*K*), (*L*), (*M*), (*N*), (*O*) en (*P*), uit welke, als algemeenere regels, de formulen (*A*), (*B*), (*C*), (*D*), (*E*) en (*F*) kunnen worden afgeleid, zullen kunnen dienen, om al de gevallen van de scheefhoekige bolvormige driehoeken op te lossen. Men zie verder het II. *Deel*.

NEGENDE BOEK.

(*Het elfde van den tweeden druk.*)

Over de veelvlakkige ligchamen; *inzonderheid over de* prisma's, parallelopidums, piramiden, *en andere eenvoudige ligchamen, die van dezelve afhangen. Hoe de inhouden der prisma's en piramiden bepaald worden. Over de gelijkvormige ligchamen en de verhouding van derzelver inhouden. Beschrijving en constructie der vijf regelmatige ligchamen.*

---

§. 720. I. BEPALING. De *veelvlakkige Ligchamen* bekleeden, onder de ligchamelijke figuren, dezelfde plaats, als de veelhoeken, onder de vlakke figuren. Onder alle ligchamelijke figuren, de eenvoudigste zijnde, strekken zij tot eene maat van de meer zamengestelde. Zij zijn, *door een zeker aantal zijvlakken*, (niet minder dan vier in getal zijnde,) *die elkander onderling snijden*, *ingèsloten*. Men onderscheidt in dezelve: 1°. de *zijvlakken*, die altijd driehoeken, parallelogrammen, of veelhoeken zijn; 2°. de *ribben*, volgens welke de zijvlakken aan elkander sluiten; 3°. de *veelvlakkige hoeken*, welke door de zamenkomst der zijvlakken, in afzonderlijke *hoekpunten*, gevormd worden; 4°. en eindelijk den *inhoud*, of de *uitgebreidheid der ligchamelijke ruimte*, welke tusschen de zijvlakken dezer ligchamen is ingesloten; een inhoud, welke natuurlijk van de onderlinge ligging en uitgebreidheid der grenzen afhankelijk moet zijn.

§. 721. AANMERKING. Onder de veelvlakkige ligchamen, zijn de *prisma's* (onder welke de *parallelopipedums*) en *piramiden* de *eenvoudigste*, en strekken, in de Ligchaamsmeting, tot termen van vergelijking, waarmede alle andere ligchamelijke figuren vergeleken worden; om welke redenen dan ook deze soort van ligchamen, die met de parallelogrammen en driehoeken, in de merkwaardigste hoofdzaken overeenkomen, in dit Boek, meer bijzonderlijk overwogen worden.

I. *Over de* Prisma's *en* Parallelopipedums, *in het algemeen.*

§. 722. II. BEPALING. *Fig.* 334. Een *Prisma*, of *Zuil*, is een ligchaam, hetwelk op de volgende wijze ontstaat: *men neme eene regtlijnige figuur ABCDE tot grondvlak, en, op een zekeren afstand,*

naar

naar welgevallen, het zij boven het zij beneden dezelve, een vlak RS, evenwijdig aan dit grondvlak: indien men dan, door al de zijden van het grondvlak, vlakken brengt, welke, elk in het bijzonder, evenwijdig aan eene gegevene lijn PQ loopen; dan zal de ligchamelijke ruimte, tusschen al die vlakken besloten, een prisma of zuil zijn. Men noemt *ABCDE* het *grondvlak*; *abcde* het *bovenvlak*; de vierhoeken *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae*, *de opstaande zijvlakken*; *de lijnen Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd en Ee*, *de opstaande ribben.*

§. 723. III. Bepaling. *Fig.* 335, 337 *en* 334. Men onderscheidt de prisma's in *drie*, *vier*, *vijf*, *zeshoekige prisma's*, enz. naar dat het grondvlak een drie, vier, vijf, zeshoek is, *enz.*

§. 724. IV. Bepaling. *Fig.* 334. De Prisma's worden nog in *regte* en *scheve* prisma's onderscheiden: naar dat de rigtlijn *PQ*, aan welke de zijvlakken van het prisma evenwijdig loopen, met het grondvlak, of deszelfs verlengde, een regten of scheven hoek maken.

§. 725. V. Bepaling. *Regelmatige prisma's* zijn regte prisma's, welker grondvlakken regelmatige veelhoeken zijn. Zij hebben eene *as*, welke, *door het middelpunt van het grondvlak gaande*, *regthoekig op hetzelve staat.*

§. 726. VI. Beplaing. *Fig.* 334. Indien het bovenvlak *RS* niet evenwijdig aan het grondvlak *ABCDE* is, en echter (266, als in de *II Bep.*) al de zijvlakken, die door de zijden van het grondvlak gaan, evenwijdig aan de rigtlijn *PQ* loopen; dan noemt men het ligchaam, dat op deze wijze ontstaat, een *afgenot prisma.*

I. Stelling. *Fig.* 334.

§. 727. *In elk regt of scheefhoekig prisma zijn*, 1°. *de opstaande zijvlakken parallelogrammen*; 2°. *de ribben dezer zijvlakken zijn gelijk*, *en* 3°. *het bovenvlak is aan het grondvlak gelijk- en gelijkvormig.*

Betoog. Omdat (II. *Bep*) elk zijvlak, *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae*, evenwijdig is aan dezelfde lijn *PQ*, zoo zullen de doorsnijdingen dezer zijvlakken, dat zijn de opstaande ribben, *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, van het prisma (XV. *Stell.* VIII. *B.*) aan de lijn *PQ*, en (XVII. *St.* VIII. *B.*) onderling evenwijdig zijn; en, omdat (II. *Bep.*) het bovenvlak van het prisma aan deszelfs grondvlak evenwijdig loopt, zoo zullen (XIX. *St.* VIII. *B.*) *ab* aan *AB*; *bc* aan *BC*; *cd* aan *CD*; *de* aan *DE* en *ae* aan *AE*, evenwijdig zijn. De zijvlakken zijn dan (I. *Bep* III. *B*) parallelogrammen, welke, in de opstaande ribben van het prisma, aan elkander sluiten: men heeft dan (I. *Stell.* III. *B.*) $Aa = Bb = Cb = Dd = Ee$; en voorts $AB = ab$; $BC = bc$; $CD = cd$; $DE = de$; EA

 $= ea$;

$=$ *ea;* en (XXIV. *Stell.* VIII. *B.*) *hoek ABC* $=$ *hoek abc; hoek BCD* $=$ *hoek bcd; hoek CDE* $=$ *cde; hoek DEA* $=$ *hoek dea* en *hoek EAB* $=$ *hoek eab:* de grond en bovenvlakken zijn derhalve gelijke- en gelijkvormige veelhoeken.

§. 728. I. Gevolg. *Wanneer een prisma, door een vlak, evenwijdig aan het grondvlak loopende, gesneden wordt; dan zal dit vlak hetzelve in twee andere prisma's verdeelen; en de doorsnede zal, zoowel aan het grondvlak, als aan het bovenvlak, gelijk- en gelijkvormig zijn.*

§. 729. II. Gevolg. *Fig.* 334. Wanneer de rigtlijn *PQ* loodregt op het grondvlak staat, en het prisma gevolgelijk regt is; *dan staan* (XV. Stell. XI. Stell. VIII. B.) *de zijvlakken en de ribben dezer zijvlakken regthoekig, zoowel op het grondvlak, als op het bovenvlak van het prisma; de zijvlakken zijn, in dit geval, altijd regthoeken.*

§. 730. III. Gevolg. *Fig.* 336. Is het grondvlak van het prisma een parallelogram *ABCD;* dan zal, vermits *Bb* aan *Aa*, en *BC* aan *AD* evenwijdig is, (*XXIV. Stell. VIII. B.*) het parallelogram *ADda* aan het parallelogram *BCcb* evenwijdig zijn; en deze parallelogrammen zullen, daar (*XXIV. Stell. VIII. B.*) de hoeken *DAa* en *CBb* gelijk, en (*I. Stell. III. B.*) *AD* $=$ *BC* en *Aa* $=$ *Bb* is, (*III. Stell. III. B.*) gelijk- en gelijkvormig zijn. Om dezelfde reden, zijn de parallelogrammen *ABba* en *DCcb* evenwijdig, gelijk- en gelijkvormig.

§. 731. IV. Gevolg. *Een prisma, welks grondvlak een parallelogram is, is dan bepaald door zes vlakken, die alle parallelogrammen zijn, welke twee aan twee, tegen over elkander staan, evenwijdig, gelijk- en gelijkvormig zijn. In hetzelve bestaan zes drievlakkige hoeken, welke, twee aan twee, tegen over elkander staan. Deze soort van prisma heeft, met uitzondering van alle andere prisma's, de eigenschap, dat elk zijner zijvlakken tot grondvlak kan genomen worden, zonder dat de figuur ophoudt, naar de* II. Bepaling, *prisma te zijn.* Men heeft daarom die soort van prisma's, door de bijzondere benaming van *parallelopipedum*, (hetgeen zoo veel zeggen wil, als *evenwijdzijdig ligchaam*, somtijds *balk* genoemd,) onderscheiden.

§. 732. VII. Bepaling. *Een parallelopipedum is gevolgelijk een prisma, een parallelogram tot grondvlak hebbende; een ligchaam derhalve, dat bepaald is door zes parallelogrammen, waarvan die, welke tegen over elkander staan, evenwijdig, gelijk- en gelijkvormig zijn.*

§. 733. Aanmerking. Men zou een parallelopipedum aldus kunnen bepalen. *Een parallelopipedum is een zesvlakkig ligchaam, waarvan de tegen overstaande zijvlakken evenwijdig loopen;* en men zou, uit de-

deze bepaling alleen, kunnen betoogen: *dat elke twee tegen overstaande zijvlakken gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen zijn.* Wij laten dit te betoogen aan den Lezer over.

§. 734. VIII BEPALING. *Fig.* 337. Een parallelopipedum wordt gezegd, onder drie gegevene hoeken *P*, *Q* en *R*, en onder drie gegevene ribben *p*, *q* en *r*, te zijn zamengesteld, wanneer de zijvlakken *XAZ*, *XAY* en *YAZ* van éénen zijner drievlakkigen hoeken *A* aan die gegevene hoeken *P*, *Q* en *R*, en de ribben *AB*, *AC* en *AD* der zijvlakken van dien drievlakkigen hoek aan de gegevene lijnen *p*, *q* en *r* gelijk zijn.

§. 735. AANMERKING. *Een parallelopipedum is altijd door deze zes gegevens bepaald.*

Want, indien men den drievlakkigen hoek *ABCD*, onder de drie gegevene hoeken *P*, *Q* en *R* geconstrueerd, en, van het hoekpunt *A* af te rekenen, op deszelfs ribben, $AB = p$, $AC = q$ en $AD = r$ genomen heeft, en men dan eindelijk door de punten *B*, *C* en *D*, vlakken laat gaan, die evenwijdig loopen aan de zijvlakken *DAC*, *BAD* en *BAC*, des drievlakkigen hoeks *A*; dan zal men een parallelopipedum verkrijgen, hetwelk onder de gegevene hoeken en zijden zamengesteld zal zijn.

§. 736. IX. BEPALING. *Fig.* 337. Zijn al de hoeken *P*, *Q* en *R*, onder welke een parallelopipedum is zamengesteld, regt; dan is het een *regthoekig parallelopipedum*; zie *fig.* 338. *Een regthoekig parallelopipedum kan dus gehouden worden door drie ribben, die om den regten drievlakkigen hoek A staan, bepaald te zijn*; het wordt daarom gezegd onder drie lijnen *p*, *q* en *r* te zijn zamengesteld, wanneer $AB = p$, $AC = q$ en *ADr* genomen is. — Deze drie ribben *AB*, *AC* en *AD* worden *de lengte*, *breedte* en *hoogte* van het regthoekige parallelopipedum genoemd; doch die benaming geldt alleen van het regthoekige parallelopipedum. — Eindelijk is, volgens het III. *Gev.* I. *Stell.* elk zijvlak van een regthoekig parallelopipedum een regthoek; *en daarom zijn al de zes drievlakkige hoeken van het regthoekige parallelopipedum regte drievlakkige hoeken.*

§. 737. X. BEPALING. *Fig.* 337. Zijn de hoeken *P*, *Q* en *R* alle regt en de lijnen *p*, *q* en *r* even lang; dan wordt *hoek BAC* = *hoek CAD* = *hoek RAD* = *R* en $AB = AC = AD$; het regthoekige parallelopipedum wordt in dit geval een *kubus* genoemd; welke gezegd wordt, op eene gegevene lijn $AB = p$, beschreven te zijn. Zie *fig* 339. — *Een kubus is derhalve* (zie *III. Gev. I. Stell.*) *door zes gelijke vierkanten ingesloten.*

§. 738. XI. Bepaling. De *hoogte*, zoo wel van een prisma, als van een parallelopipedum, is de loodlijn, die uit eenig punt van het bovenvlak op het grondvlak valt. — *Die loodlijn zal, waar men in het bovenvlak ergens een punt neemt,* (*XXIII. Stell. VIII. B.*) *dezelfde lengte hebben.*

I. Vraagstuk. *Fig.* 340.

§. 739. *Het grondvlak, de rigtlijn en de hoogte van een drie- of veelhoekig prisma gegeven zijnde, hetzelve te construeren?*

Oplossing. Laat *ABCDE* een vijfhoekig grondvlak zijn, de lijn *H* de hoogte van het prisma. De stand van de rigtlijn *PQ*, met betrekking tot het grondvlak *ABCDE*, kan worden bepaald: 1°. door hare projectie *PR* op dit vlak; en, 2°. door den hoek *QPR*, dien zij met hare projectie, in het verticale, vlak maakt. Laat dan *PR* die gegevene projectie en hoek *QPR* de gegeven hoek zijn; dan zullen (*I. Stell.*) al de ribben van de opstaande zijvlaken met het grondvlak eenen hoek maken, die gelijk is aan den hoek *QPR*.

Stel *PS* loodregt op *PR*, en maak *PS* = *H*; trek *SQ*, evenwijdig aan *PR*, en laat *QT* loodregt op *PR* vallen; dan is *PQ* gelijk aan elk één der ribben van de opstaande zijvlakken, en *PT* gelijk aan de projectie van elke dezer ribben.

Men trekke, door de hoekpunten van het grondvlak, lijnen *Aa'*, *Bb'*, *Cc'*, *Dd'* en *Ee'*, evenwijdig aan *PR*, (de projectie van de rigtlijn,) make *Aa'* = *Bb'* = *Cc'* = *Dd'* = *Ee'* = *PT*, en vereenige de uiteinden dezer lijnen; dan verkrijgt men (*XXXII. Stell. I. B.*) eenen veelhoek *a'b'c'd'e'*, die gelijk- en gelijkvormig is aan den veelhoek *ABCDE*.

Nu zijn (zie *V en VI. Bep. VIII. B.*) *Aa'*, *Bb'*, *Cc'*, *Dd'*, *Ee'*, de projectien van de ribben der opstaande zijvlakken; *ABb'a'*, *BCc'b'*, *CDd'c'*, *DEe'd'* en *EAe'a'*, de projectien der zijvlakken, en *a'b'c'd'e'* de projectie van het bovenvlak: en nu komt het er op aan, om, uit die projectien der zijvlakken, de zijvlakken zelve te vinden.

Om het zijvlak *ABba* te vinden, zoo trekke men, door *a'*, (de projectie van het hoekpunt *a*,) eene onbepaalde loodlijn *Fa'a* op *AB*, en men make *Aa* = *PQ*; indien men dan op *BAa* een parallelogram *ABba* beschrijft; dan zal dit het zijvlak zijn, dat het grondvlak in de lijn *AB* doorsnijdt.

Want men trekke *a'h*, loodregt op *Aa'*, en make *a'h* = *H* = *QT*; dan zal *hoek a'Ah* = *hoek QPR* zijn, en *Ah* = *PQ*. Indien men nu het zijvlak *ABba*, om de lijn *AB*, en het vlak *Aa'h*, om *Aa'* laat omdraaijen; dan zal (*Gev. V. Stell. VIII. B.*) aangezien *Fa'a* loodregt op *AB* staat, het punt *a* in hetzelfde vlak blijven; en, na dat men het vlak *Aa'h* loodregt op het grondvlak geplaatst heeft, zal *Ah* de opstaande ribben zijn, die door het punt *A* gaat. Nu is *Aa* = *PQ* = *Ah*;

dus zal men het vlak *ABba* zoo lang om *AB* kunnen draaijen, tot dat *Aa* langs *Ah* en het punt *a* in *h* valt; als wanneer *ab* in *a'b'*, *Aa* in *Aa'*, *Bb* in *Bb'* zal geprojecteerd zijn.

Op dezelfde wijze, worden al de overige zijvlakken *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae* geconstrueerd; en hoe veel zijvlakken er in het grondvlak mogten bestaan, de herhaling van dezelfde eenvoudige constructie, zal al de zijvlakken geven; gelijk uit de figuur verder te zien is.

Wanneer men de figuur, in het plat, aldus op kaartenpapier geconstrueerd zijnde, uitknipt, en het kaartenpapier, volgens de ribben *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, (maar aan de achterkant) ten naastenbij doorsnijdt, zal men al de zijvlakken en het bovenvlak *abcde* aan elkander kunnen sluiten, en indien men dan het papier als wezenlijke vlakken beschouwt, die geene dikte hebben; dan zal men het prisma verkrijgen, zoo als men het zich wezenlijk in de meetkunst voorstelt. Het is nuttig, dat de Lezer dit zelf uitvoere.

De lijnen *aF*, *bG*, *cH*, *dI* en *eK*, zijn de hoogten der zijvlakken *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed* en *EAae*. *Die hoogten verschillen in een scheefhoekig prisma van het eene tot het andere zijvlak.*

II. Stelling. *Fig.* 341.

§. 740. *Twee prisma's (N°. 1 en 2) zijn gelijk- en gelijkvormig, wanneer, derzelver grondvlakken (ABC enz. en ABC enz.) gelijk- en gelijkvormig zijnde, de zijden en ribben van twee drievlakkige hoeken, aan twee eveneens geplaatste hoekpunten (A en A') van het grondvlak, onderling gelijk zijn; (namelijk* hoek *BAF* = hoek *B'A'F'*; hoek *BAa* = hoek *B'A'a'*; hoek *FAa* = hoek *F'A'a'*; *voorts AB = A'B'; AF = A'F' en Aa = A'a').*

Betoog. Laat het grondvlak *A'B'C'D'E'*, op het grondvlak *ABCDE*, gepast worden, zóó dat de gelijke zijden en hoeken in elkander vallen; hetgeen, wegens de onderstelde gelijk- en gelijkvormigheid der grondvlakken, geschieden kan; dan valt *A'* in *A*; *B'* in *B*; *C'* in *C*; *D'* in *D*; *E'* in *E*; *F'* in *F*. Omdat dan *hoek B'A'a'* = *hoek BAa* en *hoek F'A'a'* = *hoek FAa* is, zoo zal (*XXXVII. Stell. VIII. B.*) *A'a'* langs *Aa* vallen, en omdat *A'a'* = *Aa* is, zal het punt *a'* in het punt *a* vallen: de parallelogrammen *ABba* en *A'B'b'a'*, zijn dan (*III. Stell. III. B.*) gelijk- en gelijkvormig; het punt *b'* zal dan in het punt *b* vallen: daar nu, om dezelfde reden, het punt *c'* in *c*, *d'* in *d*, *e'* in *e* en *f'* in *f*, zal vallen, daarom kan het prisma N°. 2, volkomen in het prisma N°. 1 geplaatst worden, en de prisma's zijn (*II. Ax.*) derhalve onderling gelijk- en gelijkvormig.

III. Stelling. *Fig.* 342.

§. 741. *Wanneer men ééne der opstaande ribben (AC) van een*

$$tang. A = \frac{sin. B}{sin. AB \times cot. BC - cos. AB \times cos. B} \quad . \quad . \quad (P)$$

Door deze formulen, zullen nu, twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijnde, de twee onbekende hoeken kunnen berekend worden.

V. Vraagstuk. *Fig.* 332.

§. 717. *Een bolvormigen driehoek te construeren, wanneer twee zijner zijden A C en B C, met één der hoeken A, over ééne van die bekende zijden staande, gegeven zijn?*

Constructie. Men beschrijve uit *M*, als middelpunt, met den straal *MA*, den cirkel, tot welken den bolvormigen driehoek *A B C* behoort. Men neme *A C* en *B C* gelijk aan de gegevene zijden, en, na de stralen *M B*, *M C* en *M A*, getrokken te hebben, zoo trekke men *C D F* en *B G* loodregt op *MA* en *M C*, en make den hoek *E D F* gelijk aan den gegeven bolvormigen hoek *A*; indien men dan *D E* = *D C* neemt, en *E F* loodregt op het verlengde van *D C* laat vallen; dan zal *F* de projectie van het hoekpunt *C* en *M F* de projectie van de ribbe *M C* op het vlak van den boog *A B* zijn. Uit het punt *E*, beschrijve men, met eenen straal, gelijk aan *B G* zijnde, eenen boog; dan wordt *E H* = *B G*.

Men beschrijve nu uit *F*, met *F H* als straal, eenen cirkel, en trekke uit het middelpunt *M* van den bol, de raaklijnen *M B* en *M B'* tot dien cirkel, denzelven in de punten *I* en *K* aanrakende; dan zijn *A B* of *A B'* de onbekende zijde, van den bolvormigen driehoek; *en er bestaan alzoo twee bolvormige driehoeken, die aan de gegevens voldoen.*

Betoog. Men trekke, uit of door het punt *F*, de lijnen *F I C* en *F K C'*, loodregt op *M B* en *M B'*, en trekke door de punten *C* en *C'*; de ribben *M C* en *M C'*; dan is (*Leering* XIII. *Stell.* V. *B.*) *M K* = *M I* en *C M* = *C' M*; dus zal (II *Hulpst.* I. *B.*) *C' K* = *C I* zijn; en *boog B' C'* = *boog B C*. Men late de sectors *A M C* en *B M C*, alsmede den driehoek *D E H*, om de lijnen *A M*, *B M* en *D F H*, omdraaijen, tot dat de lijn *C D* langs *D E* en (*constructie*) *C* in *E* valt; dan zal *F E* loodregt op het vlak *A M B* staan, en de punten *C* en *C'* van de vlakken *B M C* en *B' M C'*, zullen zich met het punt *E* vereenigen; en daar nu *E H* = *E I* is, zal *B G* = *E H* = *I C* = *C' K* zijn. De nog onbekende hoeken zullen, zoo als in het *II. Vraagstuk*, worden gevonden.

VI. Vraagstuk. *Fig.* 333.

§. 718. *Nog een bolvormigen driehoek te construeren; wanneer twee zijner hoeken A en B, met ééne zijde A C, tegen over éénen dezer hoeken staande, gegeven zijn?*

Constructie. Zij *M* het middelpunt van den bol en *A C* de gegevene zijde. Men late *C D* loodregt op *A M* vallen, en, na *C D* verlengd

lengd te hebben, neme men, op dit verlengde, *hoek* FDE = *bolv. hoek* A, $DE = DC$ en EF loodregt op DG. Nög make men *hoek* FEG = *compl. bolv. hoek* B; dan wordt *hoek* DGE = *bolv. hoek* B. Nu beschrijve men, uit F, met FG als straal, eenen cirkel, en trekke, uit M, de lijnen MB en MB', die denzelven aanraken; dan zullen AB of AB' de zijden zijn van de twee bolvormige driehoeken, die aan de gegevens voldoen. En trekt men nu door F, de lijnen FHC en IFC', loodregt op MB en MB'; dan verkrijgt men de bogen BC en BC'; zijnde de derde zijde van den bolvormigen driehoek. Wij laten het overige den Lezer tot oefening over.

§. 719. Aanmerking. De formulen (G), (H), (I), (K), (L), (M), (N), (O) en (P), uit welke, als algemeenere regels, de formulen (A), (B), (C), (D), (E) en (F) kunnen worden afgeleid, zullen kunnen dienen, om al de gevallen van de scheefhoekige bolvormige driehoeken op te lossen. Men zie verder het II. *Deel*.

NEGENDE BOEK.

(*Het elfde van den tweeden druk.*)

Over de veelvlakkige ligchamen; *inzonderheid over de* prisma's, parallelopidums, piramiden, *en andere eenvoudige ligchamen, die van dezelve afhangen. Hoe de inhouden der prisma's en piramiden bepaald worden. Over de gelijkvormige ligchamen en de verhouding van derzelver inhouden. Beschrijving en constructie der vijf regelmatige ligchamen.*

---

§. 720. I. Bepaling. De *veelvlakkige Ligchamen* bekleeden, onder de ligchamelijke figuren, dezelfde plaats, als de veelhoeken, onder de vlakke figuren. Onder alle ligchamelijke figuren, de eenvoudigste zijnde, strekken zij tot eene maat van de meer zamengestelde. Zij zijn, *door een zeker aantal zijvlakken*, (niet minder dan vier in getal zijnde,) *die elkander onderling snijden*, *ingesloten*. Men onderscheidt in dezelve: 1°. de *zijvlakken*, die altijd driehoeken, parallelogrammen, of veelhoeken zijn; 2°. de *ribben*, volgens welke de zijvlakken aan elkander sluiten; 3°. de *veelvlakkige hoeken*, welke door de zamenkomst der zijvlakken, in afzonderlijke *hoekpunten*, gevormd worden; 4°. en eindelijk den *inhoud*, of de *uitgebreidheid der ligchamelijke ruimte*, welke tusschen de zijvlakken dezer ligchamen is ingesloten; een inhoud, welke natuurlijk van de onderlinge ligging en uitgebreidheid der grenzen afhankelijk moet zijn.

§. 721. Aanmerking. Onder de veelvlakkige ligchamen, zijn de *prisma's* (onder welke de *parallelopipedums*) en *piramiden* de *eenvoudigste*, en strekken, in de Ligchaamsmeting, tot termen van vergelijking, waarmede alle andere ligchamelijke figuren vergeleken worden; om welke redenen dan ook deze soort van ligchamen, die met de parallelogrammen en driehoeken, in de merkwaardigste hoofdzaken overeenkomen, in dit Boek, meer bijzonderlijk overwogen worden.

I. *Over de* Prisma's *en* Parallelopipedums, *in het algemeen.*

§. 722. II. Bepaling. *Fig.* 334. Een *Prisma*, of *Zuil*, is een ligchaam, hetwelk op de volgende wijze ontstaat: *men neme eene regtlijnige figuur ABCDE tot grondvlak, en, op een zekeren afstand,*

naar

naar welgevallen, het zij boven het zij beneden dezelve, een vlak RS, evenwijdig aan dit grondvlak: indien men dan door al de zijden van het grondvlak, vlakken brengt, welke, elk in het bijzonder, evenwijdig aan eene gegevene lijn PQ loopen; dan zal de ligchamelijke ruimte, tusschen al die vlakken besloten, een prisma of zuil zijn. Men noemt *ABCDE* het *grondvlak*; *abcde* het *bovenvlak*; de vierhoeken *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae*, *de opstaande zijvlakken*; *de lijnen Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd en Ee*, *de opstaande ribben*.

§. 723. III. Bepaling. *Fig.* 335, 337 *en* 334. Men onderscheidt de prisma's in *drie*, *vier*, *vijf*, *zeshoekige prisma's*, enz. naar dat het grondvlak een drie, vier, vijf, zeshoek is, *enz.*

§. 724. IV. Bepaling. *Fig.* 334. De Prisma's worden nog in *regte* en *scheve* prisma's onderscheiden: naar dat de rigtlijn *PQ*, aan welke de zijvlakken van het prisma evenwijdig loopen, met het grondvlak, of deszelfs verlengde, een regten of scheven hoek maken.

§. 725. V. Bepaling. *Regelmatige prisma's* zijn regte prisma's, welker grondvlakken regelmatige veelhoeken zijn. Zij hebben eene *as*, welke, *door het middelpunt van het grondvlak gaande*, *regthoekig op hetzelve staat.*

§. 726. VI. Beplaing. *Fig.* 334. Indien het bovenvlak *RS* niet evenwijdig aan het grondvlak *ABCDE* is, en echter (zóó, als in de *II Bep.*) al de zijvlakken, die door de zijden van het grondvlak gaan, evenwijdig aan de rigtlijn *PQ* loopen; dan noemt men het ligchaam, dat op deze wijze ontstaat, een *afgenot prisma.*

I. Stelling. *Fig.* 334.

§. 727. *In elk regt of scheefhoekig prisma zijn*, 1°. *de opstaande zijvlakken parallelogrammen*; 2°. *de ribben dezer zijvlakken zijn gelijk*, *en* 3°. *het bovenvlak is aan het grondvlak gelijk- en gelijkvormig.*

Betoog. Omdat (II. *Bep.*) elk zijvlak, *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae*, evenwijdig is aan dezelfde lijn *PQ*, zoo zullen de doorsnijdingen dezer zijvlakken, dat zijn de opstaande ribben, *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, van het prisma (XV. *Stell.* VIII. *B.*) aan de lijn *PQ*, en (XVII. *St.* VIII. *B.*) onderling evenwijdig zijn; en, omdat (II. *Bep.*) het bovenvlak van het prisma aan deszelfs grondvlak evenwijdig loopt, zoo zullen (XIX. *St.* VIII. *B.*) *ab* aan *AB*; *bc* aan *BC*; *cd* aan *CD*; *de* aan *DE* en *ae* aan *AE*, evenwijdig zijn. De zijvlakken zijn dan (I. *Bep* III. *B*) parallelogrammen, welke, in de opstaande ribben van het prisma, aan elkander sluiten: men heeft dan (I. *Stell.* III. *B.*) $Aa = Bb = Cc = Dd = Ee$; en voorts $AB = ab$; $BC = bc$; $CD = cd$; $DE = de$; EA

 $= ea$;

$=$ *e a*; en (XXIV. *Stell.* VIII. *B.*) *hoek A B C* $=$ *hoek a b c*; *hoek B C D* $=$ *hoek b c d*; *hoek C D E* $=$ *c d e*; *hoek D E A* $=$ *hoek d e a* en *hoek E A B* $=$ *hoek e a b*: de grond en bovenvlakken zijn derhalve gelijke- en gelijkvormige veelhoeken.

§. 728. I. Gevolg. *Wanneer een prisma, door een vlak, evenwijdig aan het grondvlak loopende, gesneden wordt; dan zal dit vlak hetzelve in twee andere prisma's verdeelen; en de doorsnede zal, zoowel aan het grondvlak, als aan het bovenvlak, gelijk- en gelijkvormig zijn.*

§. 729. II. Gevolg. *Fig.* 334. Wanneer de rigtlijn *P Q* loodregt op het grondvlak staat, en het prisma gevolgelijk regt is; *dan staan* (XV. Stell. XI. Stell. VIII. B.) *de zijvlakken en de ribben dezer zijvlakken regthoekig, zoowel op het grondvlak, als op het bovenvlak van het prisma; de zijvlakken zijn, in dit geval, altijd regthoeken.*

§. 730. III. Gevolg. *Fig.* 336. Is het grondvlak van het prisma een parallelogram *A B C D*; dan zal, vermits *B b* aan *A a*, en *B C* aan *A D* evenwijdig is, (*XXIV. Stell. VIII. B.*) het parallelogram *A D d a* aan het parallelogram *B C c b* evenwijdig zijn; en deze parallelogrammen zullen, daar (*XXIV. Stell. VIII. B.*) de hoeken *D A a* en *C B b* gelijk, en (*I. Stell. III. B.*) *A D* $=$ *B C* en *A a* $=$ *B b* is, (*III. Stell. III. B.*) gelijk- en gelijkvormig zijn. Om dezelfde reden, zijn de parallelogrammen *A B b a* en *D C c b* evenwijdig, gelijk- en gelijkvormig.

§. 731. IV. Gevolg. *Een prisma, welks grondvlak een parallelogram is, is dan bepaald door zes vlakken, die alle parallelogrammen zijn, welke twee aan twee, tegen over elkander staan, evenwijdig, gelijk- en gelijkvormig zijn. In hetzelve bestaan zes drievlakkige hoeken, welke, twee aan twee, tegen over elkander staan. Deze soort van prisma heeft, met uitzondering van alle andere prisma's, de eigenschap, dat elk zijner zijvlakken tot grondvlak kan genomen worden, zonder dat de figuur ophoudt, naar de* II. Bepaling, *prisma te zijn.* Men heeft daarom die soort van prisma's, door de bijzondere benaming van *parallelopipedum*, (hetgeen zooveel zeggen wil, als *evenwijdzijdig ligchaam*, somtijds *balk* genoemd,) onderscheiden.

§. 732. VII. Bepaling. *Een parallelopipedum is gevolgelijk een prisma, een parallelogram tot grondvlak hebbende; een ligchaam derhalve, dat bepaald is door zes parallelogrammen, waarvan die, welke tegen over elkander staan, evenwijdig, gelijk- en gelijkvormig zijn.*

§. 733. Aanmerking. Men zou een parallelopipedum aldus kunnen bepalen, *Een parallelopipedum is een zesvlakkig ligchaam, waarvan de tegen overstaande zijvlakken evenwijdig loopen*; en men zou, uit de-

deze bepaling alleen, kunnen betoogen: *dat elke twee tegen overstaande zijvlakken gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen zijn.* Wij laten dit te betoogen aan den Lezer over.

§. 734. VIII Bepaling. *Fig.* 337. Een parallelopipedum wordt gezegd, onder drie gegevene hoeken *P*, *Q* en *R*, en onder drie gegevene ribben *p*, *q* en *r*, te zijn zamengesteld, wanneer de zijvlakken *XAZ*, *XAY* en *YAZ* van éénen zijner drievlakkigen hoeken *A* aan die gegevene hoeken *P*, *Q* en *R*, en de ribben *AB*, *AC* en *AD* der zijvlakken van dien drievlakkigen hoek aan de gegevene lijnen *p*, *q* en *r* gelijk zijn.

§. 735. Aanmerking. *Een parallelopipedum is altijd door deze zes gegevens bepaald.*

Want, indien men den drievlakkigen hoek *ABCD*, onder de drie gegevene hoeken *P*, *Q* en *R* geconstrueerd, en, van het hoekpunt *A* af te rekenen, op deszelfs ribben, $AB = p$, $AC = q$ en $AD = r$ genomen heeft, en men dan eindelijk door de punten *B*, *C* en *D*, vlakken laat gaan, die evenwijdig loopen aan de zijvlakken *DAC*, *BAD* en *BAC*, des drievlakkigen hoeks *A*; dan zal men een parallelopipedum verkrijgen, hetwelk onder de gegevene hoeken en zijden zamengesteld zal zijn.

§. 736. IX. Bepaling. *Fig.* 337. Zijn al de hoeken *P*, *Q* en *R*, onder welke een parallelopipedum is zamengesteld, regt; dan is het een *regthoekig parallelopipedum*; zie *fig.* 338. *Een regthoekig parallelopipedum kan dus gehouden worden door drie ribben, die om den regten drievlakkigen hoek A staan, bepaald te zijn*; het wordt daarom gezegd onder drie lijnen *p*, *q* en *r* te zijn zamengesteld, wanneer $AB = p$, $AC = q$ en *ADr* genomen is. — Deze drie ribben *AB*, *AC* en *AD* worden *de lengte*, *breedte* en *hoogte* van het regthoekige parallelopipedum genoemd; doch die benaming geldt alleen van het regthoekige parallelopipedum. — Eindelijk is, volgens het III. *Gev.* I. *Stell.* elk zijvlak van een regthoekig parallelopipedum een regthoek; *en daarom zijn al de zes drievlakkige hoeken van het regthoekige parallelopipedum regte drievlakkige hoeken.*

§. 737. X. Bepaling. *Fig.* 337. Zijn de hoeken *P*, *Q* en *R* alle regt en de lijnen *p*, *q* en *r* even lang; dan wordt *hoek* $BAC =$ *hoek* $CAD =$ *hoek* $RAD = R$ en $AB = AC = AD$; het regthoekige parallelopipedum wordt in dit geval een *kubus* genoemd; welke gezegd wordt, op eene gegevene lijn $AB = p$, beschreven te zijn. Zie *fig.* 339. — *Een kubus is derhalve* (zie *III. Gev. I. Stell.*) *door zes gelijke vierkanten ingesloten.*

§. 738. XI. Bepaling. De *hoogte*, zoo wel van een prisma, als van een parallelopipedum, is de loodlijn, die uit eenig punt van het bovenvlak op het grondvlak valt. — *Die loodlijn zal, waar men in het bovenvlak ergens een punt neemt,* (*XXIII. Stell. VIII. B.*) *dezelfde lengte hebben.*

I. Vraagstuk. *Fig.* 340.

§. 739. *Het grondvlak, de rigtlijn en de hoogte van een drie- of veelhoekig prisma gegeven zijnde, hetzelve te construeren?*

Oplossing. Laat $ABCDE$ een vijfhoekig grondvlak zijn, de lijn H de hoogte van het prisma. De stand van de rigtlijn PQ, met betrekking tot het grondvlak $ABCDE$, kan worden bepaald: 1°. door hare projectie PR op dit vlak; en, 2°. door den hoek QPR, dien zij met hare projectie, in het verticale, vlak maakt. Laat dan PR die gegevene projectie en hoek QPR de gegeven hoek zijn; dan zullen (*I. Stell.*) al de ribben van de opstaande zijvlakken met het grondvlak eenen hoek maken, die gelijk is aan den hoek QPR.

Stel PS loodregt op PR, en maak $PS = H$; trek SQ, evenwijdig aan PR, en laat QT loodregt op PR vallen; dan is PQ gelijk aan elk één der ribben van de opstaande zijvlakken, en PT gelijk aan de projectie van elke dezer ribben.

Men trekke, door de hoekpunten van het grondvlak, lijnen Aa', Bb', Cc', Dd' en Ee', evenwijdig aan PR, (de projectie van de rigtlijn,) make $Aa' = Bb' = Cc' = Dd' = Ee' = PT$, en vereenige de uiteinden dezer lijnen; dan verkrijgt men (*XXXII. Stell. I. B.*) eenen veelhoek $a'b'c'd'e'$, die gelijk- en gelijkvormig is aan den veelhoek $ABCDE$.

Nu zijn (zie *V en VI. Bep. VIII. B.*) Aa', Bb', Cc', Dd', Ee', de projectien van de ribben der opstaande zijvlakken; $ABb'a'$, $BCc'b'$, $CDd'c'$, $DEe'd'$ en $EAe'a'$, de projectien der zijvlakken, en $a'b'c'd'e'$ de projectie van het bovenvlak: en nu komt het er op aan, om, uit die projectien der zijvlakken, de zijvlakken zelve te vinden.

Om het zijvlak $ABba$ te vinden, zoo trekke men, door a', (de projectie van het hoekpunt a,) eene onbepaalde loodlijn $Fa'a$ op AB, en men make $Aa = PQ$; indien men dan op BAa een parallelogram $ABba$ beschrijft; dan zal dit het zijvlak zijn, dat het grondvlak in de lijn AB doorsnijdt.

Want men trekke $a'h$, loodregt op Aa', en make $a'h = H = QT$; dan zal hoek $a'Ah$ = hoek QPR zijn, en $Ah = PQ$. Indien men nu het zijvlak $ABba$, om de lijn AB, en het vlak $Aa'h$, om Aa' laat omdraaijen; dan zal (*Gev. V. Stell. VIII. B.*) aangezien $Fa'a$ loodregt op AB staat, het punt a in hetzelfde vlak blijven; en, na dat men het vlak $Aa'h$ loodregt op het grondvlak geplaatst heeft, zal Ah de opstaande ribben zijn, die door het punt A gaat. Nu is $Aa = PQ = Ah$;

dus

dus zal men het vlak *ABba* zoo lang om *AB* kunnen draaijen, tot dat *Aa* langs *Ah* en het punt *a* in *h* valt; als wanneer *ab* in *a'b'*, *Aa* in *Aa'*, *Bb* in *Bb'* zal geprojecteerd zijn.

Op dezelfde wijze, worden al de overige zijvlakken *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *EAae* geconstrueerd; en hoe veel zijvlakken er in het grondvlak mogten bestaan, de herhaling van dezelfde eenvoudige constructie, zal al de zijvlakken geven; gelijk uit de figuur verder te zien is.

Wanneer men de figuur, in het plat, aldus op kaartenpapier geconstrueerd zijnde, uitknipt, en het kaartenpapier, volgens de ribben *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, (maar aan de achterkant) ten naastenbij doorsnijdt, zal men al de zijvlakken en het bovenvlak *abcde* aan elkander kunnen sluiten, en indien men dan het papier als wezenlijke vlakken beschouwt, die geene dikte hebben; dan zal men het prisma verkrijgen, zoo als men het zich wezenlijk in de meetkunst voorstelt. Het is nuttig, dat de Lezer dit zelf uitvoere.

De lijnen *aF*, *bG*, *cH*, *dI* en *eK*, zijn de hoogten der zijvlakken *ABba*, *BCcb*, *CDdc*, *DEed* en *EAae*. *Die hoogten verschillen in een scheefhoekig prisma van het eene tot het andere zijvlak.*

II. STELLING. *Fig.* 341.

§. 740. *Twee prisma's (N°. 1 en 2) zijn gelijk- en gelijkvormig, wanneer, derzelver grondvlakken (ABC enz. en ABC enz.) gelijk- en gelijkvormig zijnde, de zijden en ribben van twee drievlakkige hoeken, aan twee eveneens geplaatste hoekpunten (A en A') van het grondvlak, onderling gelijk zijn; (namelijk* hoek *BAF* = hoek *B'A'F'*; hoek *BAa* = hoek *B'A'a'*; hoek *FAa* = hoek *F'A'a'*; *voorts AB = A'B'; AF = A'F' en Aa = A'a').*

BETOOG. Laat het grondvlak *A'B'C'D'E'*, op het grondvlak *ABCDE*, gepast worden, zóó dat de gelijke zijden en hoeken in elkander vallen; hetgeen, wegens de onderstelde gelijk- en gelijkvormigheid der grondvlakken, geschieden kan; dan valt *A'* in *A*; *B'* in *B*; *C'* in *C*; *D'* in *D*; *E'* in *E*; *F'* in *F*. Omdat dan *hoek B'A'a'* = *hoek BAa* en *hoek F'A'a'* = *hoek FAa* is, zoo zal (*XXXVII. Stell. VIII. B.*) *A'a'* langs *Aa* vallen, en omdat *A'a'* = *Aa* is, zal het punt *a'* in het punt *a* vallen: de parallelogrammen *ABba* en *A'B'b'a'*, zijn dan (*III. Stell. III. B.*) gelijk- en gelijkvormig; het punt *b'* zal dan in het punt *b* vallen: daar nu, om dezelfde reden, het punt *c'* in *c*, *d'* in *d*, *e'* in *e* en *f'* in *f*, zal vallen, daarom kan het prisma N°. 2, volkomen in het prisma N°. 1 geplaatst worden, en de prisma's zijn (*II. Ax.*) derhalve onderling gelijk- en gelijkvormig.

III. STELLING. *Fig.* 342.

§. 741. *Wanneer men ééne der opstaande ribben (AC) van een pris-*

prisma, in een zeker aantal gelijke deelen (AH, HI, IK, KG.) verdeelt, en, door de deelpunten (H, I, K, enz.) vlakken, evenwijdig aan het grondvlak, trekt; dan zullen deze vlakken het prisma in even zoo veel gelijke- en gelijkvormige prisma's verdeelen, als er deelen in de opstaande ribbe genomen zijn.

Betoog. Want, omdat de vlakken van doorsnijding (*I. Gev. I. Stell.*) aan het grondvlak gelijk- en gelijkvormig, en de opstaande ribben *AH*, *HI*, *IK*, *enz.* gelijk ook de drievlakkige hoeken, aan de punten *A*, *H*, *I*, *K*, *enz.* (*XXIV. Stell. VIII. B*) aan elkánder gelijk zijn, zullen (*II. St.*) de prisma's, in welke het geheele prisma verdeeld is, aan elkander gelijk- en gelijkvormig zijn; zijnde derzelver aantal gelijk aan het aantal der deelen, welke in de opstaande ribbe *AG* genomen zijn geworden.

§. 742. I. Gevolg. Vermits alles, wat van een prisma, in het algemeen genomen, bewezen is, van alle soorten van prisma's, in het bijzonder, gelden moet, zoo volgt hieruit: *dat een parallelopipedum door een vlak, dat evenwijdig aan ééne zijner zijden loopt, altijd in twee andere parallelopipedums verdeeld wordt, En, wanneer men eenige ribben van één der zijvlakken van een parallelopipedum of eenige ribbe van deszelfs grond- of bovenvlak in een zeker aantal gelijke deelen verdeelt, en door de deelpunten vlakken trekt, die of evenwijdig aan het grondvlak, of evenwijdig aan één der zijvlakken loopen; dan zal het parallelopipedum, door die vlakken, in even zoo veel gelijke en gelijkvormige parallelopipedums verdeeld zijn, als er deelen in die ribbe zijn genomen.*

§. 743. II. Gevolg. *Fig.* 343. *Wanneer men de drie ribben AB, AC en AD, van een parallelopipedum, welke éénen van deszelfs drievlakkige hoeken A bepalen, de eerste AB in p, de tweede AC in q, en de derde AD in r gelijke deelen verdeelt, en, door de deelpunten van de ribbe AB, vlakken, evenwijdig aan het parallelogram ACD; door de deelpunten van de lijn AC vlakken, evenwijdig aan het parallelogram ABD, en door de deelpunten van de ribbe AD vlakken, evenwijdig aan het parallelogram BAC trekt; dan zal het geheele parallelopipedum in een aantal van* $p \times q \times r$ *gelijke- en gelijkvormige parallelopipedums verdeeld zijn, welke alle aan elkander sluiten, en de ligchamelijke ruimte van het geheele paralllelepipedum vervullen.*

IV. Stelling. *Fig.* 344.

§. 744. *Wanneer de lengte (AB) van een regthoekig parallelopipedum (P) tot de zijde (EF) van eenen kubus (Q), in dezelfde re-*

reden staat, als het getal p, tot het getal q; de breedte (BC) tot de zijde (FG) van den kubus, gelijk het getal r, tot het getal s; de hoogte (CD) tot de zijde (GH) van den kubus, gelijk het getal t, tot het getal u; dan staat de inhoud van het parallelopipedum P tot den inhoud van den kubus Q in eene reden, welke uit die drie redens is zamengesteld; dat is als prt tot qsu.

BETOOG. Men zal, volgens de onderstelling, omdat $AB : EF = p : q$ is, de zijden AB en EF, in p en q gelijke deelen, verdeelen, en, door de deelpunten, vlakken, evenwijdig aan BCD en FGH, laten gaan. Om dezelfde reden, zal men, BC in r, en FG in q gelijke deelen kunnen verdeelen, en, door de deelpunten, lijnen, evenwijdig aan de vlakken ABI en EFK, kunnen brengen. Eindelijk zal men CD en GH, in t en u, gelijke deelen, verdeelen, en, door de deelpunten, vlakken, evenwijdig aan ABC en EFG, kunnen laten gaan. Het parallelopipedum P zal dan, (*II. Gev. III. Stell.*) in prt, en de kubus Q, in qsu gelijke- en gelijkvormige parallelopipedums verdeeld zijn, welke in beide ligchamen onderling gelijk zullen zijn. Volgens de *IX. Bep. II. Boek*, zal dan

$$Inh.\ P : Inh.\ Q = prt : qsu$$

zijn, en de kubus Q zal zoo menigmaal in het parallelopipedum P begrepen zijn, als het getal qsu in het getal prt verhouden is.

§. 745. I. GEVOLG. Men zal dan, wanneer de betrekkingen van de zijden van een parallelopipedum tot de zijde van eenen kubus gegeven zijn, altijd de betrekking van den inhoud van het parallelopipedum tot den inhoud van den kubus bepalen kunnen; en deze laatste betrekkingen zullen meetbaar of onmeetbaar zijn, naar dat de gegevene betrekkingen der ribben tot elkander meetbaar of onmeetbaar zijn.

§. 746. II. GEVOLG. Uit de betoogde evenredigheid volgt: (*V. St. II. B.*)

$$Inh.\ P = \frac{prt}{qsu} \times Inh.\ Q$$

Nu is $\frac{prt}{qsu} = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} \times \frac{t}{u}$, en de breuken $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ en $\frac{t}{u}$, drukken de betrekking van de zijden van het regthoekig parallelopipedum tot de zijden van den kubus uit, en zijn, of eigenlijke breuken, of geheele getallen, naar dat de ribbe van den kubus een onevenmatig of evenmatig deel van de ribben des parallelopipedums is. *Wanneer men derhalve de geheele of gebrokene getallen, welke de verhouding of de betrekking van de ribbe eens kubus op of tot de drie ribben van een regthoekig parallelopipedum uitdrukken, met elkander vermenigvuldigt, zal het product de verhouding of betrekking van dien cubus op of tot dit regthoekige parallelopipedum bepalen.*

§. 747. III. GEVOLG. Omdat dan de betrekking van een regthoekig parallelopipedum tot eenen kubus, door de vermenigvuldiging van geheele of gebrokene getallen, gevonden wordt: zegt men, bij bij verkorting, *de inhoud van een regthoekig parallelopipedum is gelijk aan het product*

duct van deszelfs lengte, breedte en hoogte, met elkander vermenigvuldigd; eene spreekwijs, welke altijd in denzelfden zin, als zoo even verklaard is, verstaan en uitgelegd moet worden.

§ 748. IV. Gevolg. *De inhouden der kuben, welke beschreven zijn op lijnen, die tot elkander in reden staan, als de getallen* 1, 2, 3, 4, 5, enz., *n*, enz. *staan tot elkander, als de derde magten dezer getallen; dat is, als* 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, enz. n^3, enz.

§ 749. V. Gevolg. *Wanneer de inhoud van een regthoekig parallelipipedum in kubieke éénheden gegeven is, en de lengte van twee zijner ribben; dan zal men de onbekende ribbe van het parallelopipedum vinden, wanneer men deszelfs gegeven inhoud door het product der bekende ribben deelt.*

§. 750. VI. Gevolg. *Wanneer de inhoud van eenen kubus in kubieke éénheden gegeven is, zal men vinden, hoeveelmaal de lengtemaat in de ribbe van den kubus begrepen is, wanneer men uit het gegevene getal kubieke éénheden den kubus-wortel trekt.* Zie, wegens deze worteltrekking. *Allereerste Grond. der Cijferk., II. Deel, LII. Les.*

§. 751. Aanmerking. Omdat gelijke kuben, in de lengte breedte en hoogte, aan elkander sluiten, wordt de kubus als de natuurlijke en eigenaardige maat der ligchamen aangezien, en men verkiest, onder alle kuben, den kubus, welke op de éénheid van de lengtemaat beschreven is; dat is: *de éénheid, op den meter beschreven.* Men noemt denzelven *kubieken meter*, bevattende duizend kubieke decimeters; de kubieke decimeter duizend kubieke centimeters; de cubieke centimeter duizend kubieke millimeters.

§. 752. XII. Bepaling. *Fig.* 344. In het vervolg, wordt de inhoud van een regthoekig parallelopipedum *P* uitgedrukt, door drie zijner ribben, *AB*, *BC*, *CD*, (welke één der drievlakkige hoeken *B* bepalen,) door het teeken van vermenigvuldiging te vereenigen. Aldus zal *Inh.* $P = AB \times BC \times CD$; en, *Fig.* 344, inhoud kubus $Q = EF^3$ zijn.

II. *Over de* Piramiden, *in het algemeen.*

§. 753. XIII. Bepaling. *Fig.* 345 *en* 346. Eene *piramide* is eene ligchamelijke uitgebreidheid, besloten binnen een zeker aantal driehoeken, welke in één toppunt *T* zamenkomen, en welker grondvlak de zijden van eenen driehoek of veelhoek zijn, die het grondvlak van deze piramide genoemd wordt. Zij ontstaat op de volgende wijze. Men neme een regtlijnige figuur, (drie- of veelhoek,) en, boven of beneden derzelver vlak, eenig punt *T*; door dit punt *T*, en door de zijden der regtlijnige figuur, late men vlakken gaan, welke elkander, volgens regte lijnen *AT*, *BT*, *CT*, *DT*, die van het toppunt *T*,

tot

tot de hoekpunten van het grondvlak loopen, doorfnijden, en de *zijvlakken* van de piramide genoemd worden. — De *hoogte eener piramide* is de loodlijn *TV*, die, uit het toppunt *T*, op het grondvlak valt.

§. 754. XIV. Bepaling. Men onderfcheidt de piramiden in *drie-*, *vier-* en *veelhoekige*, naar dat het grondvlak een drie- vier- of veelhoek is, *Fig.* 345. vertoont eene drie-, en *fig.* 346, eene vierhoekige piramide.

§. 755. Aanmerking. *De driehoekige piramide is het ligchaam, dat door het minst mogelijk aantal vlakken* (vier namelijk) *bepaald wordt* Zij bekleedt, onder de ligchamen, denzelfden rang, als de driehoek, onder de regtlijnige figuren. *De driehoekige piramide heeft de bijzondere eigenfchap, dat elk van hare zijvlakken als grondvlak kan aangenomen worden.*

§ 756. XV. Bepaling. Een piramide is regelmatig, wanneer, haar grondvlak een regelmatige veelhoek zijnde, haar toppunt nog bovendien gelegen is, in de lijn, welke, uit het middelpunt van het grondvlak, loodregt op dezelve ftaat. *De regelmatige piramide is bijgevolg ingefloten door een regelmatigen veelhoek, als grondvlak, en door even zooveel gelijke- en gelijkvormige gelijkbeenige driehoeken, als er zijden in het grondvlak der piramide beftaan.*

§. 757. XVI. Bepaling. *Fig.* 348. Indien men van eene drie- of veelhoekige piramide, door een vlak *a b c d e f*, dat evenwijdig loopt aan het grondvlak *ABCDEF*, het bovenfte ftuk affnijdt, dan wordt het onderfte ftuk, tusfchen die evenwijdige vlakken begrepen zijnde, eene *afgeknotte piramide* genoemd.

II. Vraagstuk. *Fig.* 347.

§. 758. *Het grondvlak, de hoogte en de projectie van het toppunt van eene drie- of veelhoekige piramide gegeven zijnde, de zijvlakken van dezelve, door conftructie, te vinden?*

Oplossing. Zij, bij voorbeeld de vijfhoek *ABCDE* het grondvlak het punt *V* de projectie van het toppunt *VT* de hoogte der vijfhoekige piramide; dan worden de zijvlakken door de volgende zeer eenvoudige conftructie gevonden.

Men late uit *V*, de projectie van het toppunt, op al de zijden van het grondvlak, loodlijnen *VF*, *VG*, *VH*, *VI* en *VK*, op de zijden *AB*, *BC*, *CD*, *DE* en *EA* vallen, en men verlenge dezelve onbepaaldelijk naar buiten. Men ftelle de hoogte *VT* der piramide loodregt op *VF*, en, na *FT* getrokken te hebben, zoo make men *FP* = *FT*, en trekke de

de lijnen *AP* en *BP*; dan is de driehoek *ABP* een zijvlak der piramide.

Want, indien men den regthoekigen driehoek *FVT* om de zijde *FV* laat omdraaijen, en regthoekig op het grondvlak *ABCDE* plaatst; dan wordt *T* het toppunt, en *TV* de hoogte der piramide. Dezen driehoek *FVT* in dien loodregten ſtand latende, late men den driehoek *ABP* om de zijde *AB* omdraaijen; dan zal (*Gev. V. Stell. VIII. B.*) de loodlijn *PF* in het vlak van den driehoek *FVT* blijven, en omdat *PF* = *FT* is zoo zal het punt *P* in het toppunt vallen; de driehoek *ABP* wordt dan natuurlijk een zijvlak der piramide.

Dit eene zijvlak gevonden zijnde, worden de andere gemakkelijk aldus geconſtrueerd. Men beſchrijve, uit *B*, met *BP* als ſtraal, eenen cirkelboog, die de loodlijn *VG* in *Q*; uit *C*, met *CQ* eenen cirkelboog, die de loodlijn *VH* in *R*; uit *D*, met *DR* eenen cirkelboog die *VI* in *S*; uit *E*, met *ES* eenen cirkelboog, die *VK* in *U* ſnijdt. Men trekke eindelijk de lijnen *BQ* en *CQ*, *CR* en *DR*, *DS* en *ES*, *EU* en *AU*; dan zullen de driehoeken *BCQ*, *CDR*, *DES* en *EAU*, de vier andere zijvlakken der piramide zijn.

Want, indien men de driehoeken *BCQ*, *CDR*, *DES* en *EAU*, om de zijden *BC*, *CD*, *DE* en *EA* laat omdraaijen, zoo zullen zij, aangezien *EQ* = *BP*, *CR* = *CQ*, *DR* = *DS* en *EU* = *ES* is alle, met hunne toppunten *Q*, *R*, *S*, *U*, in de punten *P* en *T* zamenkomen, en de piramide zal daargeſteld zijn.

Een bewijs of proef van de naauwkeurigheid dezer conſtructie is, dat, na het laatſte punt *U* gevonden te hebben, *AU* = *AP* moet zijn.

§. 759. Aanmerking. *Fig.* 348. Indien het grondvlak der piramide *ABCDE* met de zijvlakken van den drievlakkigen hoek *A*, benevens de opſtaande ribbe *AT* gegeven waren; dan zou men de piramide even gemakkelijk conſtrueren.

V. Stelling. *Fig.* 348.

§. 760. *Elke drie- of veelhoekige piramide heeft de eigenſchap: dat, wanneer zij geſneden wordt door een vlak, dat evenwijdig aan haar grondvlak loopt, het vlak van doorſnijding aan dit grondvlak altijd gelijkvormig zal zijn.*

Betoog. Laat de piramide, in de figuur afgebeeld, een zeshoekig grondvlak *ABCDEF* hebben, en door het vlak *abcdef*, evenwijdig aan dit grondvlak zijnde, geſneden worden; dan zal, omdat de evenwijdige vlakken *ABCDEF* of *abcdef*, door het vlak van den driehoek, *ABT*, volgens de lijnen, *AB* en *ab*, geſneden worden, (*XIX Stell. VIII. B.*) *ab* evenwijdig aan *AB* zijn. Om dezelfde reden, zijn de zijden *bc*, *cd*, *de*, *ef* en *fa*, van den veelhoek *abcdef*, evenwijdig aan de overeenkomſtige zijden *BC*, *CD*, *DE*, *EF* en *FA*, van den

veel-

veelhoek $ABCDEF$. Men heeft derhalve (*II. Gev. I. Stell. en VIII. Stell. IV. B.*)

$$AB : ab = BT : bT = BC : bc$$

terwijl (*Gev. XXIV. Stell. VIII. B.*) de hoek abc = den hoek ABC is. Om dezelfde redenen, zal

$$\text{hoek } bcd = \text{hoek } BCD; \text{ en } BC : bc = CD : cd$$
$$\text{hoek } cde = \text{hoek } CDE; \text{ en } CD : cd = DE : de$$
$$\text{hoek } def = \text{hoek } DEF; \text{ en } DE : de = EF : ef$$
$$\text{hoek } efa = \text{hoek } EFA; \text{ en } EF : ef = FA : fa$$
$$\text{hoek } fab = \text{hoek } FAB; \text{ en } FA : fa = AB : ab$$

zijn. Het blijkt hieruit: dat de veelhoeken $abcdef$ en $ABCDEF$, onderling gelijkhoekig zijn, en dat de zijden, welke om de gelijke hoeken ftaan, tot elkander dezelfde beftendige reden hebben; en zulke veelhoeken zijn (*II. Gev XII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig.

§. 761. Gevolg. *Fig.* 349. Laat eenige piramide, bij voorbeeld, eene driehoekige, door de vlakken DEF en GHI, evenwijdig aan het grondvlak ABC, gefneden worden; dan zijn (*XXV. Stell. VIII. B. en VII. Stell. IV.* B.)

$$(TG^2, TD^2, TA^2) :: (TH^2, TE^2, TB^2) :: (TI^2, TF^2, TC^2) :: (AB^2, DE^2, GH^2)$$

maar, daar de driehoeken GHI, DEF en ABC gelijkvormig zijn, zoo is (*XI Stell. IV. B.*)

$$(\text{drieh.} GHI, \text{drieh.} DEF, \text{drieh.} ABC) :: (GH^2, DE^2, AB^2)$$

wij hebben dus

$$(\text{drieh.} GHI, \text{drieh.} DEF, \text{drieh.} ABC) :: (FG^2, TD^2, TA^2)$$

De vlakken van doorfnijding, welke, in eene piramide, evenwijdig aan het grondvlak loopen, zijn derhalve evenredig aan de vierkanten, befchreven op de deelen, welke die vlakken van de opftaande ribben affnijden, gerekend van het toppunt tot aan die vlakken. — En laat men de loodlijn $TKLM$ op het grondvlak vallen; dan is, om dezelfde reden,

$$(\text{drieh.} GHI, \text{drieh.} DEF, \text{drieh.} ABC) :: (TK^2, TL^2, TM^2)$$

III. Vraagstuk. *Fig.* 350.

§. 762. *Om eene gegevene driehoekige piramide eenen bol te befchrijven?*

Constructie. Een veelvlakkig ligchaam wordt gezegd in eenen bol befchreven te zijn, wanneer de hoekpunten van dit ligchaam in het oppervlak van denzelven vallen. Wij onderftellen hier ftilzwijgend, dat de vier hoekpunten eener driehoekige piramide noodzakelijk in het oppervlak van eenen bol liggen; doch de tegenwoordige oplosfing zal de waarheid dezer onderftelling nader bevestigen.

Laat ABC het grondvlak der driehoekige piramide, E de projectie van

van het toppunt *D* van dezelve op het grondvlak, en de lijn *DE* de hoogte der piramide zijn.

Beschrijf om het driehoekige grondvlak *ABC* (zie *X. Stell. V. B.*) eenen cirkel *AHBC*, en laat van het punt *E*, door het middelpunt *F* van dien cirkel, eene lijn *EFH* tot aan den omtrek worden getrokken. Stel de lijnen *ED* en *FG*, loodregt op de lijn *HE*, en maak *ED* gelijk aan de hoogte der piramide. Vereenig de punten *D* en *H* door de lijn *DH*; deel *DH* in *I* in twee gelijke deelen $HI = DI$, en trek *IM* loodregt op *DH*. Deze lijn ontmoet de loodlijn *FG* in het punt *M*; indien men dan, van *D* tot *M*, de lijn *DM* trekt; *dan zal deze de straal zijn van den bol, die om de driehoekige piramide is beschreven.*

Betoog. Men trekke nog de lijn *HM*, en late het vlak van den driehoek *EHD*, met de lijnen *FG*, *IM*, *DM* en *MH*, die in hetzelve liggen, om de zijde *EH* omdraaijen, tot dat het loodregt op het grondvlak *ABC* staat; dan zullen (X. *Stell.* VIII. *B.*) de lijnen *ED* en *FG* beide loodregt op hetzelfde grondvlak geplaatst zijn, en dan zal *D* het toppunt der driehoekige piramide zijn (hetwelk, zoo als gezegd is, in *E* is geprojecteerd). Elk punt *M* van de loodlijn *FG* is dan (VI. *Stell.* VIII. *B.*) van al de punten *H* van den omtrek des cirkels, om den driehoek *ABC* beschreven, en dus ook van al de hoekpunten des driehoeks, evenver verwijderd. Nu is (zie XX. *Stell.* I. *B.*) $DM = MH = MA = MB = MC$; gevolgelijk staat het punt *M* evenver van de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D*, der piramide; *M*, is bijgevolg het middelpunt van den bol, die om dezelve beschreven is.

§. 763. I. Gevolg. *Binnen of buiten elke driehoekige piramide bestaat een punt, dat op gelijken afstand van al de hoekpunten der piramide verwijderd is — er bestaat slechts één enkel punt, dat die eigenschap bezit.*

§. 764. II. Gevolg. *Vier punten in de ligchamelijke ruimte aangenomen zijnde, zoo bestaat er slechts één enkele bol, wiens oppervlak door die punten gaat.* — Meer punten gegeven zijnde, zal men wel wel door vier van dezelve een bol kunnen beschrijven; maar de overige zullen binnen of buiten of in het oppervlak van dien bol kunnen liggen.

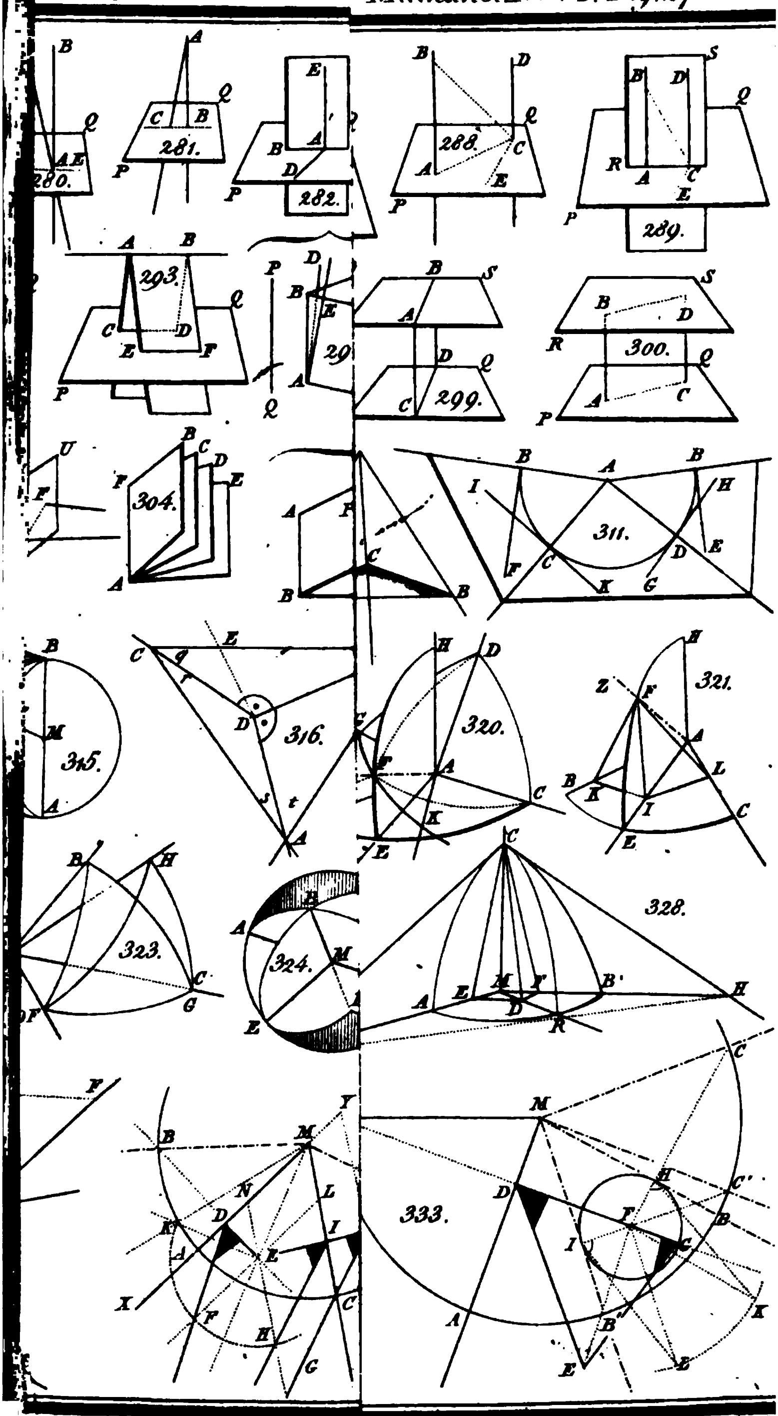
IV. Vraagstuk. *Fig.* 351 *en* 352.

§. 765. *In eene gegevene driehoekige piramide eenen bol te beschrijven?*

Oplossing. Een bol wordt gezegd in een veelvlakkig ligchaam beschreven te zijn, wanneer al de zijvlakken van dit ligchaam het oppervlak van den bol aanraken.

Binnen de ruimte van elken drievlakkigen hoek (fig. 351) *bestaat eene*

Ten-



280.
281.
282.
288.
289.
293.
299.
300.
304.
311.
315.
316.
320.
321.
323.
324.
328.
333.

onbepaalde lijn MZ, welke, uit het hoekpunt M voortkomende, met de zijvlakken gelijke hoeken ZME, ZMF en ZMG maakt. Of, binnen elken bolvormigen driehoek ABC, een punt D, zoodanig, dat, wanneer men uit hetzelve de loodregte bogen DE, DF en DG, op de zijden AB, BC en AC, laat vallen, die bogen DE, DF en DG gelijk zullen zijn. Want, laat de bogen *AD* en *BD* de bolvormige hoeken *BAC* en *ABC* (of liever laten de vlakken *ZMA* en *ZMB* de tweevlakkige hoeken *BAC* en *ABC* midden door deelen,) en laat, door het punt *D*, alwaar die bogen elkander ontmoeten, of door de lijn *MZ*, vlakken *ZME*, *ZMF*, *ZMG* gaan, die regthoekig op de vlakken *AMB*, *BMC* en *CMA* ſtaan; dan zijn, in de regthoekige bolvormige driehoeken *ADE* en *ADG*, zie II. *Vraagſt.* VIII *B.*, *sin. DE* = *sin. AD* × *sin. DAE*, en *sin. GD* = *sin. AD* × *sin DAG*; daar nu *hoek DAE* = *hoek GAD* is, zoo zal *sin. DE* = *sin. GD* en *DE* = *GD* zijn. Om dezelfde reden, zal *DF* = *DE* = *DG* zijn; daar nu, in de regthoekige bolvormige drichoeken *CDG* en *CDF*, *sin. DCG* = *sin. GD* : *sin. CD*, en *sin. DCF* = *sin. DF* : *sin. CD* is, zoo zal ook *hoek DCG* = *hoek DCF* zijn.

Uit dit alles volgt dan: *dat, wanneer men twee van de ſtandhoeken der zijvlakken van een drievlakkigen hoek door vlakken, gaande door twee ribben AM en BM, midden door deelt, de lijn MZ, volgens welke die twee vlakken elkander ſnijden, met derzelver projectien EM, FM en GM, op de zijvlakken, (en dus met dezelve) gelijke hoeken ZME, ZMF en ZMG zullen maken; terwijl het vlak ZMC den ſtandhoek der zijvlakken AMC en BMC in twee gelijke hoeken ACD en BCD zal verdeelen.*

Wanneer men dus den hoek *ZME* om de lijn *MZ* laat omdraaijen; dan zal de lijn *ME* eene regte cirkelvormige kegelvlakte beſchrijven, welke in den drievlakkigen hoek zal beſchreven zijn, en de zijvlakken van den drievlakkigen hoek, in de geheele uitgeſtrektheid der lijnen *ME*, *MF* en *MG*, zal aanraken. Indien men nu, uit eenig punt *D* van de lijn *MZ*, eene loodlijn *DH* op *ME* laat vallen; dan zal de bol, die uit dat punt, met *DH* als ſtraal, beſchreven wordt, de zijvlakken in de punten *H*, *I* en *K* moeten aanraken; zoodat de lijn *MZ* de plaats is van al de middelpunten der bollen, die al de zijvlakken van den drievlakkigen hoek aanraken.

De lijnen *ME*, *MF* en *MG*, welke de projectien van die meetkunſtige plaats *MZ* op de zijvlakken zijn, kunnen, door eene eenvoudige conſtructie, gemakkelijk worden gevonden. Want, indien men de vergelijkingen, $BE = AB - AE = BF$ en $CG = AC - AG = CF$, bij elkander optelt, zoo zal men (omdat $AE = AG$ is) verkrijgen $AB + AC - 2AE = BC$, en derhalve

$$AE = AG = \tfrac{1}{2}(AC + AB - BC)$$

door welke vergelijking de aanrakingslijnen *ME*, *MF* en *MG* ligtelijk kunnen gevonden worden.

Laat nu, *fig.* 352, *ABC* het grondvlak eener driehoekige piramide zijn; *ABD*, *ACD* en *BCD* de zijvlakken, naast het grondvlak uitgelegd zijnde, en *E* de projectie van het toppunt; zoodat de lijnen, die uit *E* tot de punten *D* getrokken worden, de zijden van het grondvlak regthoekig doorsnijden. De hoeken *DBC*, *CBA* en *ABD* zijn dan de zijvlakken van den drievlakkigen hoek, aan het hoekpunt *B*.

Beschrijf, uit *B*, met eenen straal, naar welgevallen, den cirkelboog *FGHI*; dan zijn de bogen *FG*, *GH* en *HI* de zijden van den bolvormigen driehoek, die tot den drievlakkigen hoek *B* behoort. Maak nu *boog HK* = *boog GF* en *boog KL* = *boog HI*; deel den boog *GL*, in het punt *M*, in twee gelijke deelen, *boog LM* = *boog GM*; dan zal de lijn *BV*, die van *B* door *M* getrokken wordt, de projectie zijn van de lijn, die, uit het hoekpunt *B*, binnen de ruimte van den drievlakkigen hoek getrokken zijnde, met deszelfs zijvlakken gelijke hoeken maakt; de meetkunstige plaats namelijk van de middelpunten van alle bollen, die al de zijvlakken van den hoek *B* aanraken.

Eene herhaling van dezelfde bewerking, op den drievlakkigen hoek *A*, zal de lijn *AV* geven, die de projectie zal zijn van de middelpunten van al de bollen, die de zijvlakken *BAD*, *BAC* en *CAD* van den drievlakkigen hoek *A* aanraken.

Die meetkunstige plaatsen van de middelpunten der bollen, die in de drievlakkige hoeken *B* en *A* beschreven worden, en in *BV* en *AV* geprojecteerd zijn, liggen beide in hetzelfde vlak; in het vlak namelijk, dat den standhoek der zijvlakken *BDA* en *BAC* midden door deelt. Die lijnen (in de figuur nog niet aangewezen,) snijden elkander in een punt, dat natuurlijk deszelfs projectie in *V* heeft, en welk punt derhalve het middelpunt van den bol is, die zoowel de zijvlakken van den drievlakkigen hoek *A*, als van den drievlakkigen hoek *B*, dat is, al de zijvlakken van de driehoekige piramide aanraakt; terwijl het punt *V* het punt zal zijn, alwaar de ingeschreven bol het grondvlak *ABC* aanraakt.

En nu kan de straal van den ingeschreven bol gemakkelijk gevonden worden. Men trekke *DE*, loodregt op *AB*, en beschrijve uit *N*, met *ND* als straal, eenen cirkelboog, die *EO* in *O* snijdt; dan zal (de lijn *NO* getrokken hebbende) *ONE* de standhoek der zijvlakken *BAD* en *BAC* zijn. Men deele dien standhoek *ENO*, door de lijn *NP*, in twee gelijke deelen; men late *VQ* loodregt op *AB* vallen, en stelle *VZ* loodregt op *VQ*; indien men dan *QZ* evenwijdig aan *NP* trekt; dan zal *VZ* de straal van den cirkel zijn, die in de driehoekige piramide kan beschreven worden.

Want, indien men den regthoekigen driehoek *QVZ*, om zijne regthoekszijde *QV*, laat omdraaijen, tot dat hij regthoekig staat op het grondvlak *ABC*; dan zal het vlak van de lijnen *AB* en *QZ*, in dien stand, het vlak zijn, dat den standhoek der zijvlakken *BAD* en *BAC* midden doordeelt: de lijnen, welke, in dien stand des driehoeks, van *B* en *A* door het punt *V* getrokken worden, zullen de plaatsen van de middelpunten der bollen zijn, die de zijvlakken der drievlakkige hoeken *B* en

A

H aanraken; *Z* zal dus het punt zijn, dat van al de vier zijvlakken der driehoekige piramide evenver afstaat; gevolgelijk zal *Z V* de straal zijn van den bol, welke in de driehoekige piramide kan beschreven worden.

Indien men *boog G a* = *boog G M*, *boog H b* = *boog H M* neemt, en de lijnen *E R* en *B T* trekt; dan zullen deze de projectien zijn van de lijn *Z B*, op de zijvlakken *A B D* en *C B D*. Even zoo zal men de projectien *A R* en *A S* van de lijn *A Z*, op de zijvlakken *B A D* en *C A D* vinden; als ook de projectien *C S* en *C T* van de lijn *C Z*, op de zijvlakken *C A D* en *C B D*. De punten *R*, *S* en *T* zijn de punten, in welke de ingeschrevene bol de opstaande zijvlakken der piramide aanraakt. Het is ook ligtelijk te zien: dat de lijnen die *V* met *R*, *V* met *T* en *V* met *S* vereenigen; de zijden *A B*, *B C* en *A C* van het grondvlak regthoekig moeten doorsnijden.

Er bestaan nog vier bollen; welke de verlengde zijvlakken der piramide aanraken. Zij worden, op dezelfde wijze, gevonden.

VI. STELLING. *Fig.* 353.

§. 766. *Wanneer twee veelvlakkige ligchamen zoodanig gesteld zijn: dat al de hoekpunten van het eene in al de hoekpunten van het andere, en al de ribben van het eene ligchaam langs al de ribben van het andere vallen; dan zal ook het eene ligchaam volkomen de plaats van het andere vervullen; dat is: het eene ligchaam zal in het andere passen, en de eveneens geplaatste zijvlakken zullen gelijk- en gelijkvormig zijn, en nog daarenboven gelijke standhoeken hebben.*

BETOOG. Laten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* en *H*, de hoekpunten van het veelvlakkige ligchaam, N°. 1, en *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* en *h*, de hoekpunten van het veelvlakkige ligchaam, N°. 2 zijn. Wanneer dan de hoekpunten *a*, *b*, *c*, *enz.* van het ligchaam, N°. 2, in de hoekpunten *A*, *B*, *C*, *enz.* van het ligchaam, N°. 1, geplaatst kunnen worden, zonder dat één van de hoekpunten van het eerste ligchaam buiten eenig hoekpunt van het andere valt; dan is het klaar: *dat men de hoekpunten van het eerste ligchaam, op eene andere wijze; dan de hoekpunten van het tweede ligchaam, door regte lijnen, kan vereenigen, zoo dat beide ligchamen dezelfde hoekpunten; en nogtans onderscheidene ribben kunnen hebben; en gevolgelijk, door onderscheidene vlakken ingesloten zijnde, niet altijd in alles gelijk zullen zijn.* Maar, wanneer de ribben dezer ligchamen; nog bovendien langs elkander vallen; dan sluiten ook de zijvlakken dezer ligchamen tegen elkander; zij zijn dus, in dit geval, gelijk- en gelijkvormig; en hebben diensvolgens denzelfden inhoud; en dan behoeft het ook geen verder betoog, dat de eveneens geplaatste zijvlakken ook gelijke standhoeken zullen hebben; aangezien zulks uit het voorgaande, en uit de XIV. *Bep. en* XXVII. *Stell.* VIII. *B.* overtuigend genoeg blijkt.

§. 767. XVII. Bepaling. Men noemt twee ligchamen *gelijk- en gelijkvormig, wanneer al de hoekpunten van het eene ligchaam in al de hoekpunten van het andere kunnen gebragt worden*, en tevens, *al de ribben van het eene ligchaam langs al de ribben van het andere vallen;* als 'wanneer de overeenkomstige zijvlakken dezer ligchaam gelijk zijn en gelijke standhoeken zullen hebben.

VII. STELLING. *Fig.* 353.

§. 768. *Wanneer men, uit al de hoekpunten van een veelvlakkig ligchaam, gelijke en evenwijdige lijnen trekt, en de uiteinden dezer lijnen, op dezelfde wijze, als de hoekpunten, uit welke zij getrokken zijn, door regte lijnen vereenigt; dan zal er, door die constructie, een veelvlakkig ligchaam ontstaan, dat aan het eerste gelijk- en gelijkvormig zal zijn.*

Betoog. Laten, bij voorbeeld, uit de punten *A*, *B* en *C*, de lijnen *Aa*, *Bb* en *Cc*, onderling gelijk en evenwijdig aan elkander getrokken worden; dan is (XXIII. *Stell.* VIII. *B.*) het zijvlak *abc*, evenwijdig aan het zijvlak *ABC*, en aan hetzelve gelijk- en gelijkvormig. Op dezelfde wijze, zal, wanneer men, uit al de hoekpunten van het ligchaam, N°. 1, gelijke en evenwijdige lijnen trekt, het zijvlak *acd*, evenwijdig en gelijk aan het zijvlak *ACD;* het zijvlak *ade*, aan het zijvlak *ADE*, *enz.* evenwijdig en gelijk zijn. Nu snijden (XXXI. *Stell* VIII. *B.*) evenwijdige vlakken elkander onder gelijke hoeken; al de standhoeken der zijvlakken van het ligchaam, N°. 2, zijn dan gelijk aan de standhoeken van de overeenkomstige zijvlakken van het ligchaam, N°. 1; uit al hetwelk dan blijkt, dat (XVII. *Bep.*) beide ligchamen gelijk- en gelijkvormig zullen zijn.

§. 769. Aanmerking. Het bewezene in deze Stelling is slechts een afzonderlijk geval van deze meer algemeene Stelling. *Wanneer men, uit al de punten van het oppervlak van een regelmatig, of onregelmatig, ligchaam, gelijke en evenwijdige lijnen trekt; dan zullen de uiteinden van alle deze evenwijdige lijnen gelegen zijn in het oppervlak van een ander ligchaam, hetwelk aan het eerste gelijk- en gelijkvormig zal zijn.* Eene stelling, welke op dezelfde wijze, als de *XXXII. Stelling* van het *I. Boek*, bewezen wordt.

III. *Over de symetrieke ligchamen, die, alhoewel zij door gelijke en gelijkvormige zijvlakken zijn ingesloten, nogtans niet in elkander passen en echter gelijken inhoud hebben.*

VIII. STELLING. *Fig.* 354.

§. 770. *Twee driehoekige piramiden (P en Q) zijn gelijk- en ge-*

gelijkvormig, wanneer de ribben van twee van derzelver drievlakkige hoeken (A en a) gelijk zijn, (AB = ab, AC = ac en AD = ad;) en derzelver zijvlakken, tusschen de gelijke ribben begrepen, insgelijks gelijk zijn, (hoek BAC = hoek bac; hoek CAD = hoek cad en hoek BAD = hoek bad).

BETOOG. Volgens de onderstelling, kan men den drievlakkigen hoek *a*, in den drievlakkigen hoek *A*, zoodanig plaatsen, dat het hoekpunt *a*, in het hoekpunt *A*, de ribben *ab*, *ac* en *ad*, langs de ribben *AB*, *AC* en *AD*, vallen; omdat dan *ab* = *AB*; *ac* = *AC* en *ad* = *AD* is, zoo zullen de punten *b*, *c* en *d*, in de punten *B*, *C* en *D*, vallen. Al de zijvlakken van de piramide *Q* vallen derhalve in al de overeenstemmende zijvlakken van de piramide *P*; deze piramiden zijn diensvolgens (XVII. *Bep.*) gelijk- en gelijkvormig.

IX. STELLING. *Fig.* 355.

§. 771. *Wanneer men, uit het toppunt A, van een gelijkbeenigen driehoek ABC (AB = AC zijnde) eene onbepaalde loodlijn, op het vlak van denzelven oprigt, en, in deze loodlijn, boven en beneden het vlak des driehoeks, de punten D en E zoodanig aanneemt, dat AD = AE zij; dan zullen, wanneer men de lijnen, CD, BD, CE en BE trekt, de piramiden ABCD en ABCE, gelijk- en gelijkvormig zijn en in elkander sluiten.*

BETOOG. Omdat *AD* loodregt op het vlak van den driehoek *ABC* staat, zijn (II. *Bep.* VIII. *B.*) de hoeken *BAD*, *BAE*, *CAD* en *CAE*, regte hoeken; en omdat (*onderst.*) *AB* = *AC* en *AD* = *AE* is, zoo zal men de piramide *ABCD*, in de piramide *ABCE*, zoodanig kunnen pasfen, dat het punt *A* in het punt *A*, *AD* langs *AE*, *AC* langs *AB*, en *AB* langs *AC* valt; als, wanneer de hoekpunten *B*, *D* en *C* in de hoekpunten *C*, *E* en *B* zullen vallen; ten bewijze, dat (XVII. *Bep.*) de piramiden gelijk- en gelijkvormig zullen zijn.

X. STELLING. *Fig.* 356.

§. 772. *Wanneer men, uit het middelpunt P, van eenen cirkel, welke, om een ongelijkzijdigen driehoek ABC, beschreven is, en welk middelpunt gevolgelijk even ver van de hoekpunten A, B en C afstaat, eene loodlijn PD op dezen driehoek oprigt, en PE gelijk PD neemt; dan zullen (de lijnen AD, BD, CD en AE, BE, CE, getrokken hebbende,) de paramiden ABCD en ABCE, wel niet meer in elkander pasfen; maar zij zullen nogtans denzelfden inhoud hebben.*

BETOOG. Aangezien de driehoeken *APD*, *BPD*, *CPD*, *APE*, *BPE* en *CPE*, in *P* regthoekig zijn, en, volgens de onderstelling, *AP* = *PB* = *PC* en *DP* = *EP* is, zoo zijn al deze driehoeken (X *Stell.* I. *B.*) gelijk- en gelijkvormig; derhalve is *AD* = *BD* = *CD* = *AE* = *BE* = *CE*, en (XIII. *Stell. I. B.*) *hoek ADC* = *hoek AEC*; *hoek ADB* = *hoek AEB*; en *hoek BDC* = *hoek BEC*. Wanneer men dan de piramide *ABCE*, met zijn toppunt *E* naar boven stelt, ziet men: dat de ligchamelijke hoeken *D* en *E*, (XXXIX. *Stell.* VIII. *B.*) slechts, bij oppositie of tegenoverstand, gelijk zijn, en niet in elkander pasfen; ten ware, dat de driehoek *ABC* gelijkbeenig of gelijkzijdig ware, iets, hetgeen hier niet ondersteld wordt. Vermits dan de ligchamelijke hoeken *D* en *E* niet in elkander sluiten; zullen ook de piramiden niet in elkander pasfen. Nogtans hebben deze piramiden dezelfde of gelijke inhouden. Want, volgens de voorgaande Stelling, is:

Piram. BCPE = *Piram. BCPD*
Piram. ACPE = *Piram. ACPD*
Piram. ABPE = *Piram. ABPD*

en, wanneer men nu deze gelijke piramiden optelt; dan verkrijgt men, (VIII. *Ax.*) *piramide ABCE* = *piramide ABCD*.

§. 773. LEERING. Men leert, uit het betoog dezer Stelling: *dat er ligchamen kunnen bestaan, welke, door een gelijk aantal van gelijke- en gelijkvormige vlakken, ingesloten zijn, en welke, alhoewel zij denzelfden inhoud hebben, nogtans niet in elkander pasfen.*

XI. STELLING. *Fig.* 357.

§. 774. *Wanneer men, uit het toppunt D eener driehoekige piramide ABCD, eene loodlijn DE op derzelver grondvlak ABC laat vallen, en het verlengde EF dezer loodlijn, naar beneden, gelijk aan deze loodlijn DE maakt, en voorts de lijnen AF, BF en CF trekt; dan zal de piramide ABCF, welke op deze wijze ontstaat, door zijvlakken zijn ingesloten, welke gelijk- en gelijkvormig zijn aan de zijvlakken der eerste piramide ABCD, met dit onderscheid: dat de buitenkanten der zijvlakken van de eerste piramide de binnenkanten van de zijvlakken der tweede zullen worden; en dat de drievlakkige hoeken van de eerste, bij tegenoverstand, aan de drievlakkige hoeken van de tweede gelijk zijn, en eindelijk deze piramiden denzelfden inhoud zullen hebben.*

BETOOG *van het eerste*. Men trekke de lijnen *AE*, *BE* en *CE*; dan zijn (*onderst. en* V. *Stell.* VIII. *B.*) de hoeken *DEA*, *DEB*, *DEC*, *FEA*, *FEB* en *FEC* regt, en (X. *Stell.* I. *B.*) de driehoeken *DEA*, *DEB*, *DEC*, zijn in rangorde met de driehoeken *FEA*, *FEB*, *FEC*, gelijk- en gelijkvormig; en daarom is *AF* = *AD*, *BF* = *BD*

en *CF* = *CD*. Volgens de XIII. *Stell.* I. *B.*, zijn dan de driehoeken *ABD*, *ACD* en *BCD*, gelijk- en gelijkvormig aan de driehoeken *ABF*, *ACF* en *BCF*. Wanneer men dus de eerste driehoeken *ABD*, *ACD* en *BCD*, om de zijden *AB*, *AC* en *BC*, naar beneden laat omdraaijen; dan zal *ABD* op *ABF*, *ACD* op *ACF* en *BCD* op *BCF* vallen, en de buitenkanten van de zijvlakken der piramide *ABCD*, worden de binnenkanten van de zijvlakken der piramide *ABCF*. Wegens de gelijk- en gelijkvormigheid van voornoemde driehoeken, zijn de zijvlakken der drievlakkige hoeken aan de toppunten *D* en *E*, en aan de hoekpunten van het grondvlak gelijk; namelijk, bij *D* en *F*, *hoek ADC* = *hoek AFC*, *hoek ADB* = *hoek AFB* en *hoek BDC* = *hoek BFC*; bij het hoekpunt *A*, *hoek BAC* = *hoek BAC*, *hoek BAD* = *hoek BAF*, *enz.*; doch (zoo als uit de figuur van zelf blijkt) de gelijke zijvlakken der overeenstemmende drievlakkige hoeken, zijn, aan elke twee overeenstemmende hoekpunten, in eene tegengestelde of omgekeerde volgorde, geplaatst, en de overeenstemmende drievlakkige hoeken zijn derhalve (*XXXIX. Stell. VIII. B.*) bij tegenoverstelling gelijk.

BETOOG *van het tweede.* Men neme, in de eerste piramide *ABCD*, een punt *P*, op gelijke afstanden van de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *D*, en, in de piramide, *ABCF*, het punt *Q*, insgelijks op gelijke afstanden van de hoekpunten *A*, *B*, *C* en *F*; dan liggen de punten *P* en *Q*, die eigenlijk de middelpunten der bollen zijn, die om de piramiden beschreven zijn, (*VI. Stell. VIII. B.*) in de loodlijn *PQ*, welke loodregt op *ABC*, door het middelpunt *G* van den cirkel gaat, welke om den driehoek *ABC* beschreven is; de loodlijnen *PQ* en *DF* liggen dan (*IX. Stell. VIII. B.*) in hetzelfde vlak en zijn onderling evenwijdig: in dit vlak liggen dan ook de lijnen *PD* en *QF*, welke, indien zij verlengd worden, het grondvlak in een punt *H* zullen ontmoeten. Indien nu de lijn *HGE* getrokken wordt; dan is *HE* : *HG* = *DE* : *PG* = *EF* : *QG*; maar *DE* = *EF* zijnde, zoo is ook *PG* = *QG*; volgens de *XX. Stell. I. B.*, is dan *HD* = *HF* en *PH* = *QH*; derhalve *PD* = *FQ*; dienvolgens ook (omdat de punten *P* en *Q* evenver van de hoekpunten der piramiden afstaan,) *AP* = *AQ*; *BP* = *BQ* en *CP* = *CQ*; en dus is (*X. St.*) piramide *ABCP* = piramide *ABCQ*. Wanneer men nu de piramide *ADCF* om de lijn *AC* omdraait, en de driehoek *ACD*, op den driehoek *ACF* stelt, zoo zal, om dezelfde reden, piramide *ACDP* = piramide *ACFQ* zijn. Wij hebben dan:

Piram. ABCP = *Piram. ABCQ*
Piram. ACDP = *Piram. ACFQ*
Piram. ABDP = *Piram. ABFQ*
Piram. BCDP = *Piram. BCFQ*

en telt men deze gelijke piramiden op; dan zal (*VIII. Ax.*) *piramide ABCD* = *piramide ABCF* zijn.

§. 775. AANMERKING. Zonder dat het noodig is, zulks verder in het breede aan te toonen, zal uit het betoogde volgen: *dat, wanneer twee drie-*

driehoekige piramiden, uit gelijke zijvlakken, zamengesteld zijn, zoodanig, dat de binnenkanten van de zijvlakken der eerste piramide de buitenkanten van de zijvlakken der tweede worden, deze piramiden alsdan een gelijken inhoud zullen hebben.

XII. STELLING. *Fig.* 358.

§. 776. *Wanneer men, uit al de hoekpunten, A, B, C, D,* enz. *van een veelvlakkig ligchaam, op een gegeven vlak MN, loodlijnen, AP, BQ, CR,* enz. *laat vallen, deze loodlijnen, aan den anderen kant van dit vlak MN, verlengt, en verder, op het verlengde van dezelve, de overeenkomstige punten a, b, c, d, e, f,* enz. *zoodanig aanneemt, dat aP = AP, bQ = BQ, cR = CR,* enz. *zij, en voorts deze overeenkomstige punten a, b, c, d,* enz. *op dezelfde wijze, door regte lijnen of ribben vereenigt, als de hoekpunten van het gegevene ligchaam vereenigd zijn; dan zal er, aan den anderen kant van het vlak MN, een veelvlakkig ligchaam ontstaan, hetwelk de eigenschap zal hebben:* 1°. *dat het door hetzelfde aantal zijvlakken, als het eerste bepaald is, en dat de zijvlakken van het tweede aan die van het eerste gelijk- en gelijkvormig zijn;* 2°. *dat de buitenkanten der zijvlakken van het eene ligchaam de binnenkanten der zijvlakken van het tweede zijn;* 3°. *dat de standhoek van twee aan elkander sluitende zijvlakken gelijk is aan den standhoek van de twee gelijke en overeenstemmende zijvlakken van het tweede ligchaam;* 4°. *dat de veelvlakkige hoeken, welke, in beide ligchamen, door gelijke zijvlakken bepaald worden, bij tegenoverstand, gelijk zijn;* 5°. *en dat eindelijk de ligchamelijke inhouden dezer ligchamen gelijk zullen zijn.*

BETOOG. Omdat de lijnen *AP* en *PQ*, (*anderst*) loodregt op het vlak *MN* staan, zijn zij (IX. *Stell.* VIII. *B.*) onderling evenwijdig en in hetzelfde vlak gelegen. Wanneer men dan het regthoekige trapezium *ABQP*, om de lijn *PQ* omdraait, en op het regthoekige trapezium *PQba* laat vallen; dan zal *AP* langs *aP*, en *BQ* langs *bQ* vallen; het punt *A* in *a* en het punt *B* in *b*; de ribbe *ab* is dan gelijk aan de ribbe *AB*.

Men bewijst, op dezelfde wijze, dat *bc = BC; cd = CD; de = DE; ef = EF; fb = FB; ac = AC; ad = AD; ae = AE; af = AF; gd = GD; ge = GE; gh = GH; gi = GI; hb = HB; hf = HF; he = HE; hi = HI; hg = HG; bi = BI; ci = CI; di = DI* en *gi = GI* zal moeten zijn.

Volgens de XIII. *Stelling I. Boek*, zijn dan de driehoeken *ABC, ACD, ADE, AEF, AFB, GDE, GEH, GHI, GID, HGE, HEF, HFB,*

HFB, *HBI*, *BIC*, *ICD* en *IDH*, gelijk- en gelijkvormig met de driehoeken *abc*, *acd*, *ade*, *aef*, *enz.* en de hoeken der zijvlakken van het tweede ligchaam zijn gelijk aan de hoeken der zijvlakken van het eerfte, welke door dezelfde letters zijn uitgedrukt. Men ziet tevens uit de figuur: dat de binnenkanten der zijvlakken van het gegevene ligchaam de buitenkanten der overeenkomftige en gelijke zijvlakken in het voortgebragte ligchaam worden,

Maar de ftandhoek van twee aan elkander liggende zijvlakken ABC en ACD, van het eerfte ligchaam is gelijk aan den ftandhoek van de overeenkomftige gelijke zijvlakken, abc en acd, in het tweede ligchaam. Verbeelden wij ons, om dit te betoogen: dat de punten *B* en *D*, door eene regte lijn *BD*, vereenigd zijn; dan zal wederom, als boven, volgen: dat *bd* = *BD* is, en de driehoek *bdc* zal aan den driehoek *BDC* gelijk- en gelijkvormig zijn. Men kan dan, om de punten *C* en *c*, zich twee drievlakkige hoeken verbeelden; de eerfte uit de hoeken *ACB*, *ACD* en *BCD*, en de tweede uit de daaraan gelijk zijnde hoeken *acb*, *acd* en *bcd*, zamengefteld, en dan is (*XXXIX. Stell. VIII. B. en Aanmerk.*) de ftandhoek van de zijvlakken *ABC* en *ACD*, gelijk aan den ftandhoek van de overeenkomftige zijvlakken *abc* en *acd*: en men zal, op dezelfde wijze, betoogen, dat elke andere twee aan elkander grenzende zijvlakken van het eene ligchaam met elkander eenen hoek zullen maken, welke gelijk is aan den hoek, onder welke de overeenkomftige zijvlakken van het tweede ligchaam elkander fnijden.

Het is nu ook gemakkelijk te zien: *dat de overeenkomftige veelvlakkige hoeken der ligchamen*, (welker toppunten in de figuur door dezelfde letters zijn aangewezen,) *bij tegenoverftand gelijk zijn*; want plaatst men zich in het punt *A*; dan liggen de hoeken *BAC*, *CAD*, *DAE*, *EAF* en *FAB*, in rangorde, van de regter naar de linkerhand, en plaatst men zich in het punt *a*, dan zijn de overeenkomftige gelijke hoeken *bac*, *cad*, *dae*, *eaf* en *fab*, anders om, van de linker naar de regterhand, geplaatst: daar nu bewezen is: dat de gelijkftandige zijden dezer ligchamelijke hoeken *A* en *a* elkander onder gelijke hoeken fnijden, zijn (*XXIII. Bep. VIII. B.*) de ligchamelijke hoeken *A* en *a*, bij tegenoverftelling gelijk. Men zal, door eene gelijke redenering, zich van de gelijkheid bij tegenoverftand van de andere overeenftemmende veelvlakkige hoeken dezer ligchamen overtuigen,

De twee ligchamen kunnen derhalve niet in elkander gepast worden: nogtans hebben zij gelijke inhouden. Nemen wij, om zulks te bewijzen, in het vlak *MN*, een punt *M*, en verbeelden wij ons, dat, van dit punt tot de punten *A*, *B* en *C*, en tot de punten *a*, *b* en *c*, de lijnen *AM*, *BM*, *enz.*, *aM*, *bM*, *enz.*, getrokken worden; dan zal uit de *XX. Stell. I. B.* volgen: dat *AM* = *aM*; *BM* = *bM*; *CM* = *cM* is; de piramiden *ABCM* en *abcM* zijn derhalve (*XIII. Stell. I. B. en boven*) door gelijke zijvlakken, die in eene tegenovergeftelde rangorde geplaatst zijn, bepaald; zij hebben derhalve (*Aanmerk. XI. St.*)

 ge-

gelijken inhoud. Wanneer men op al de zijvlakken der twee ligchamen, als grondvlakken, piramiden ftelt, welker toppunten in het punt *M* zamenkomen; dan zullen, om dezelfde reden, de piramiden, welke op die gelijke grondvlakken ftaan, aan elkander gelijk zijn. Nu beftaat de inhoud van het eerfte ligchaam, ter linkerhand van *M N*, klaarblijkelijk uit de fom van al de piramiden, welker toppunten in het punt *M* zamenkomen, en op de binnenkanten der zijvlakken geplaatst zijn, min de fom van de piramiden, welke op de buitenkanten der zijvlakken ftaan: hetzelfde heeft voor het tweede ligchaam, ter regterzijde van het vlak *M N* gelegen, plaats: daar nu de eveneens geplaatfte piramiden gelijke inhouden hebben, moeten (*VIII en IX. Ax.*) de inhouden van beide ligchamen gelijk zijn.

§. 777. I. Aanmerking. *Wanneer men, aan eenig hoekpunt van het gegeven veelvlakkig ligchaam, de ribben verlengt, en de verlengde ribben aan dezelve gelijk neemt; en voorts, uit al de overige hoekpunten van het ligchaam, door het hoekpuut A, hoekpuntslijnen trekt, en derzelver verlengde aan die hoekpuntslijnen gelijk neemt, en eindelijk de overeenkomftige punten a, c, d, e,* enz. *welke men door deze conftructie verkrijgt, op dezelfde wijze, door ribben vereenigt, als de hoekpunten van het gegevene ligchaam vereenigd zijn; dan kan men bewijzen: dat het ligchaam, hetwelk op deze wijze ontftaat, in alles bij tegenoverftelling gelijk- en gelijkvormig zal zijn aan het gegevene ligchaam.*

§. 778. II. Aanmerking. *De ligchamen, welke men, door ééne dezer twee conftructien, verkrijgt, hebben dan de eigenfchap, dat zij door gelijke en gelijkvormige zijvlakken bepaald zijn;* met dit onderfcheid, *dat de binnenkanten der zijvlakken van het ééne de buitenkanten van de zijvlakken van het tweede worden;* en uit deze conftructie blijkt het dan: *dat er maar ééne wijze mogelijk is, om het tweede ligchaam met behulp van het eerfte zamen te ftellen.* Wij noemen zulke ligchamen, welke, ten opzigte van elkander, op deze wijze zijn zamengefteld, *tegenovergeftelde ligchamen.*

§. 779. XVIII. Bepaling. *Tegenovergeftelde ligchamen* zijn derhalve ligchamen, welke door hetzelfde aantal gelijke- en gelijkvormige zijvlakken zijn ingefloten; zoodanig, dat de binnenkanten der zijvlakken van het eene ligchaam dé buitenkanten van de zijvlakken van het andere zijn. Wanneer men eenig ligchaam in eenen fpiegel befchouwt; dan is deszelfs beeld, ten opzigte van dit ligchaam, *tegenovergefteld.*

§. 780. Gevolg. Volgens het betoog der voorgaande Stelling, *zijn de veelvlakkige hoeken der tegenovergeftelde ligchamen, bij tegenover-*

overstelling, gelijk: deze ligchamen kunnen derhalve niet in elkander gepast worden en nogtans hebben zij eenen gelijken inhoud.

§. 781. III. Aanmerking. *Fig.* 359. Hetgeen van de veelvlakkige ligchamen in de voorgaande Stelling bewezen is, is ook van alle ronde en onregelmatige ligchamen waarheid. *Indien men, uit al de punten van het oppervlak van een ligchaam P, loodlijnen op een vlak MN laat vallen, en het verlengde dezer loodlijnen aan dezelve gelijk neemt; dan zullen de uiteinden dezer loodlijnen het oppervlak van een ligchaam Q bepalen, dat, bij tegenoverstand, aan het eerste ligchaam P gelijk- en gelijkvormig zal zijn.*

IV. *Hoe de inhouden der parallelopipedums en prisma's van derzelver grondvlakken en hoogten afhangen.*

XIII. Stelling. *Fig.* 360.

§. 782. *Men kan, door elke twee tegenoverstaande ribben (BF en DH) van een parallelopipedum, een vlak (BFHD) brengen, en dit vlak deelt dan het parallelopipedum in twee prisma's (ABDHFE en GHFBCD), welke bij tegenoverstelling gelijk zijn.*

Betoog. Vermits (*VII. Bep.*) de zijvlakken *ABFE* en *ADHE* parallelogrammen zijn, zoo zijn (*I. Bep. III. B.*) de ribben *BF* en *DH*, elk aan de ribbe *AE* evenwijdig; zij zijn dan ook (*XVII. Stell. VIII. B.*) in hetzelfde vlak. Men zal dan het parallelopipedum *AG* kunnen snijden volgens een vlak, hetwelk door de overstaande ribben *BF* en *DH* gaat, en voorts de grond- en bovenvlakken, volgens de lijnen *BD* en *FH*, doorsnijdt, en dit vlak van doorsnijding zal, omdat *BF* gelijk en evenwijdig aan *DH* is, (*XXXI. Stell. I. B. en I. Bep. III. B.*) het parallelogram *BFHD* zijn.

Dit parallelogram BFHD snijdt nu het parallelopipedum AG in twee symetrieke prisma's. Want *drieh. ABD* is (*I. Stell. III. B.*) $=$ *drieh. CDB*, en (*VII. Bep.*) *paralgr. BCGF* $=$ *paralgr. ADHE*, en *paralgr. DCGA* $=$ *paralgr. ABFE*; wanneer men dan het prisma *ABDHFE* op het prisma *BCDHFG* zoodanig plaatst, dat het punt *A* in *G*, en de ribbe *AD* langs de ribbe *CF* valt; dan zal (*I. Stell. en het bew.*) het punt *D* in *F*, en het punt *B* in *A* vallen, en dan blijkt het (*XII. Stell.*) dat deze prisma's symetriek en derzelver inhouden bijgevolg aan elkander gelijk zijn.

§. 783. Aanmerking. *Het parallelopipedum AG zal nog, door vlakken, welke door de overstaande ribben AE en CG, AB en GH, CD en EF, BC en EH, AD en FG, gaan, in twee gelijke symetrieke prisma's gesneden worden.* En men kan hier bijvoegen: *dat de vier hoek-*

hoekpuntslijnen, welke de overstaande hoekpunten A en G, B en H, C en E, D en F, vereenigen, elkander in hetzelfde punt M midden door deelen. Dit punt *M* kan men als het *middelpunt* van het parallelopipedum aanmerken; *omdat elk vlak, door dit punt gaande, het parallelopipedum in twee gelijke stukken verdeelt;* hetwelk te betoogen aan den Lezer zij overgelaten.

XIV. STELLING. *Fig.* 361, 362, 363, 364, *en* 365.

§. 784. *De inhouden van alle prisma's, (het zij driehoekige het zij veelhoekige,) welke op hetzelfde grondvlak staan en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken geplaatst zijn, (en derhalve gelijke hoogten hebben,) zijn gelijk.*

BETOOG. In deze eigenschap komen de prisma's met de parallelogrammen (zie VII. *Stell.* III. *B.*) overeen: maar, aangezien het grondvlak van een prisma, een drie- vier- of veelhoek kan zijn, zoo moet deze voorname grondstelling, welke op de algemeenste wijze voorgedragen is, in derzelver afzonderlijke gevallen, betoogd worden

A. *De parallelopipedums, welke op hetzelfde grondvlak en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken staan, zijn gelijk.* (Zie *fig.* 361, 362 en 363.) Laten de parallelopipedums, *AF* en *AK*, op hetzelfde grondvlak *ABCD* staan; en nemen wij, dat derzelver bovenvlakken, *GEFH* en *LIKM*, deelen van hetzelfde vlak zijn; dan kunnen de opstaande zijvlakken, *ABEG* en *ABIL*, 1°. in hetzelfde vlak, in *fig.* 361 en 362, of 2°. in onderscheidene vlakken liggen, gelijk in *fig.* 363.

1°. Nemen wij, *fig.* 361 en 362, dat de opstaande zijvlakken, *ABEG* en *ABIL*, in hetzelfde vlak liggen; dan liggen ook noodzakelijk de tegenoverstaande opstaande zijvlakken, *DCFH* en *DGKM*, als (VII. *Bep.*) evenwijdig aan de eerste zijnde, in hetzelfde vlak. Volgens het betoog der VII. *Stell.* III. *B.*, zijn de driehoeken *ALG* en *BIE*, gelijk- en gelijkvormig; en, wegens de gelijk- en gelijkvormigheid (VII. *Bep.*) van de tegenoverstaande zijvlakken der parallelopipedums *AF* en *AK*, is $AD = GH = LM = BC = EF = IK$; bovendien is *GH* aan *AD*, *LM* aan *AD*, en derhalve (XVII. *Stell.* VIII. *B.*) *GH* aan *LM* evenwijdig. Het ligchaam *ADMHGL* is dan (III. *Bep.*) een driehoekig prisma, hetwelk den driehoek *AGL* tot grondvlak heeft. Om dezelfde redenen, is het ligchaam *BCKFEI* een driehoekig prisma, dat den driehoek *BIE* tot grondvlak heeft. *De twee driehoekige prisma's, ADMHGL en BCKFEI, zijn nu gelijk- en gelijkvormig.* Want, wegens de gelijke- en gelijkvormige driehoeken *ALG* en *BIE*, is *hoek* $GAL =$ *hoek* EBI; en, omdat de overstaande zijvlakken van een parallelopipedum gelijke- en gelijkvormige parallelogrammen zijn, is *hoek* $GAD =$ *hoek* EBC, en *hoek* $LAD =$ *hoek* IBC; de drievlakkige hoeken, welke aan de hoekpunten *A* en *B* gevormd zijn, zijn dan (XXXVII. *Stell.* VIII. *B.*) bij superpositie of in elkander passing, gelijk: daar nu

reeds

reeds bewezen is, dat de ribben dezer drievlakkige hoeken gelijk zijn, zoo zijn (II. *Stell.*) ook de driehoekige prisma's *ADMHGL* en *BCKFEI*, gelijk- en gelijkvormig, en hebben denzelfden inhoud.

Dit betoogde geldt voor de figuren 361 *en* 362: maar om nu, uit deze gelijke driehoekige prisma's de gelijkheid der parallelopipedums te bewijzen, moeten de figuren 361 en 362, afzonderlijk overwogen worden.

a. Wanneer men in *fig*. 361, bij elk der gelijke prisma's, welke de driehoeken *ALG* en *BIE*, tot grondvlakken hebben, het prisma, dat het trapezium *ABEL* tot grondvlak heeft, optelt; dan zullen de sommen, dat is de parallelopipedums *AF* en *AK* (VIII. *Ax.*) gelijk van inhoud zijn.

b. Trekt men, in *fig*. 362, van de driehoekige prisma's, welke de driehoeken *ALG* en *BIE*, tot grondvlakken hebben, het driehoekig prisma, hetwelk den driehoek *NLE* tot grondvlak heeft, af, en telt men bij elk der overblijvende prisma's, welke de trapeziums *ANEG* en *NLIB*, tot grondvlakken hebben, het driehoekig prisma, dat *ABN* tot grondvlak heeft, op; dan zal men (VIII en IX *Ax.*) zien: dat ook, in dit geval, de parallelopipedums *AF* en *AK* een gelijken inhoud zullen moeten hebben.

2°. *Wanneer, fig*. 363, *geen der opstaande zijvlakken van de parallelopipedums* (gelijk in het voorgaande geval plaats had,) *in hetzelfde vlak liggen; dan zullen derzelver inhouden nogtans niet ophouden gelijk te zijn; mits slechts de parallelopipedums op hetzelfde grondvlak staan, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken zijn ingesloten.* Om zulks te betoogen, verlenge men in de gedachte de opstaande zijvlakken *BCFE* en *ADHG*, van het parallelopipedum *AF*, en de opstaande zijvlakken *ABIN* en *DCKM* van het parallelopipedum *AK*; dan zullen deze verlengde zijvlakken, door derzelver onderlinge snijding, het parallelopipedum *AP* doen geboren worden, aan hetwelk, (als met de parallelopipedums *AF* en *AK*, op hetzelfde grondvlak *ABCD*, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken staande) volgens het eerste gedeelte van het betoog, elk der parallelopipedums *AF* en *AK* gelijk zullen zijn: deze laatste (V *Ax.*) zullen dan insgelijks gelijk zijn En hier mede is de algemeene stelling voor de parallelopipedums, in alle mogelijke gevallen, bewezen.

B. *Wanneer de driehoekige prisma's ABCEDF en ABCIGH, fig*. 364, *op hetzelfde grondvlak ABC staan, en hunne bovenvlakken EFD en IHG deelen van hetzelfde vlak zijn, hetwelk evenwijdig aan het grondvlak ABC loopt; dan zullen ook de inhouden dezer prisma's gelijk zijn.*

Men trekke, om zulks te betoogen, de lijnen *CK* en *BK*, evenwijdig aan *AB* en *AC*, en de lijnen *KL* en *KM*, evenwijdig aan *CE* en *CI*; dan verkrijgt men, op hetzelfde grondvlak *ABKC*, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken, de parallelopipedums *CD* en *CG*, welker inhouden, volgens het eerste gedeelte des betoogs, gelijk zijn. Nu zijn

(XIII.

(XIII. *St.*) de helften van de inhouden dezer parallelopipedums (XIII. *Ax.*) onderling en respectievelijk gelijk aan de driehoekige prisma's *ABCEFD* en *ABCIHG*; deze driehoekige prisma's zullen derhalve denzelfden inhoud hebben.

C. Nu zal men, *fig.* 365, gemakkelijk bewijzen kunnen: *dat, in het algemeen genomen, alle veelhoekige prisma's, P en Q, welke op hetzelfde veelhoekig grondvlak ABCDE staan, en tusschen dezelfde evenwijdige vlakken geplaatst zijn, (en dus dezelfde hoogte hebben,) een gelijken inhoud zullen hebben.*

Want, wanneer men het gemeenschappelijke grondvlak, door de hoekpuntslijnen *AD* en *BD*, in driehoeken verdeelt, en voorts, door deze hoekpuntslijnen en de aanliggende ribben, *DF* en *DG*, vlakken laat gaan; dan zullen deze vlakken de prisma's *P* en *Q*, in even zoo veel driehoekige prisma's verdeelen, als het gemeenschappelijke grondvlak in driehoeken verdeeld is. Nu hebben, volgens het tweede gedeelte van ons betoog, de prisma's, welke op de driehoeken *ADE*, *ADB* en *BCD* geplaatst zijn, denzelfden inhoud; gevolgelijk hebben (VIII. *Ax.*) de prisma's *P* en *Q*, welke uit deze gelijke driehoekige prisma's zijn zamengesteld, denzelfden inhoud.

Het blijkt dan, uit alle deze onderscheidene deelen van het betoog: *dat, algemeen genomen, alle prisma's, welke op hetzelfde grondvlak staan en gelijke hoogten hebben, gelijk van inhoud zijn.*

§. 785. XIX. Bepaling. Twee prisma's worden gezegd eene *gelijke helling tot hunne grondvlakken te hebben*, wanneer deze grondvlakken, of, in één gemeenschappelijk vlak gelegen, of, onderling evenwijdig zijnde, ook tevens de ribben der opstaande zijden, in beide prisma's, onderling evenwijdig aan elkander zijn.

XV. Stelling. *Fig.* 366, 367, 368 *en* 369.

§. 786. *Wanneer men het grondvlak van een prisma verandert in een ander, dat denzelfden inhoud heeft, en op dit nieuwe grondvlak een prisma oprigt, met het eerste dezelfde helling en dezelfde hoogte hebbende; dan zal de inhoud van dit laatste prisma gelijk aan dien van het eerste zijn.*

Betoog. Om zich van de waarheid dezer algemeene Stelling te overtuigen, zal het noodig zijn, de volgende gevallen afzonderlijk in overweging te nemen.

A. Nemen wij, *fig.* 366, dat het parallelopipedum *AG* op het grondvlak *ABCD*, (een parallelogram zijnde,) staat. Wanneer men dan eene lijn *AI* trekt, en, evenwijdig aan deze, de lijn *BK*; dan zal (VII. *Stell.* III. *B.*) het parallelogram *ABKI* = het *paralgr. ABCD* zijn. Trekt men nu voorts door de punten *I* en *K*, de lijnen *IL* en *KM*, evenwijdig aan de opstaande ribben van het parallelopipedum *AG*, en einde-

delijk de lijnen *EL* en *FM*; dan ontstaat in de figuur het parallelopipedum *AM*, hetwelk met het parallelopipedum *AG* hetzelfde zijvlak *ABFE* dat men als derzelver gemeen grondvlak kan aanmerken, gemeen heeft; zijnde deze parallelopipedums tusschen dezelfde evenwijdige vlakken *ABFE* en *DKMH* geplaatst: het parallelopipedum *AM* is dan, XXV. *Stell.* met het parallelopipedum *AG*, gelijk van inhoud.

B. Wanneer men, *fig.* 366, de parallelopipedums *AG* en *AM* door vlakken, welke door de overstaande ribben *BF*, *DH* en *BF*, *IL* loopen, doorsnijden; dan zullen (XIII *en* XIV. *Stell.*) de driehoekige prisma's *ABDHEF* en *ABILEF*, welke op de gelijke grondvlakken *ABD* en *ABI* staan, als aan de helften der parallelopipedums *AG* en *AM* gelijk zijnde, denzelfden inhoud hebben.

C Bijaldien dan, *fig.* 367, eenig prisma een veelhoekig grondvlak *ABCDE* heeft; dan zal men (XV. *Stell.* III. *B.*) dit veelhoekige grondvlak in eene ander veelhoekig grondvlak *AFDE*, welke tevens ééne zijde minder heeft, kunnen veranderen. Wanneer men dan, door het hoekpunt *F*, eene lijn, evenwijdig aan de ribben van het prisma (welke uit de hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D* en *E* komen,) laat gaan; dan zal (zie boven B,) het driehoekig prisma op het grondvlak *BCD* gelijk zijn aan het driehoekig prisma op het grondvlak *BFD*, en, wanneer men dan bij deze gelijke driehoekige prisma's het prisma, op het grondvlak *ABDE* staande, optelt; dan zullen (VIII. *Ax.*) de prisma's, welke op de grondvlakken *ABCDE* en *AFDE* staan, hebben gelijken inhoud.

Gelijk men dan elken veelhoek in eenen driehoek kan veranderen; zoo ook zal men elk veelhoekig prisma in een driehoekig van denzelfden inhoud veranderen kunnen; mits men het nieuwe prisma dezelfde hoogte als het eerste late behouden.

D. *Wederom kan*, fig. 368, *een driehoekig prisma, op het grondvlak ABC staande, in een parallelopipedum veranderd worden, dat eenen regthoek tot grondvlak heeft.* Want, indien men *DCE* evenwijdig aan *AB*; *CF* loodregt op *AB* trekt, en de lijnen *AD* en *BE* evenwijdig aan *CF*; dan is (XIII. *Stell.*) het prisma op *ACD* = prisma op *ACF*, en het prisma op *BEC* = het prisma op *BCF*, en (VIII. *Ax.*) het prisma op *ABED* = het tweevoudig prisma op *ABC*. Indien men dan den regthoek *ABED*, door eene lijn *GH*, in twee gelijke deelen deelt; dan zullen de prisma's op *ABHG* en *GHED*, elk gelijk zijn aan het prisma, op *ABC* geconstrueerd zijnde.

E. *Eindelijk kan men*, fig. 369, *een prisma, dat eenen regthoek ABCD tot grondvlak heeft, veranderen in een prisma, dat een anderen regthoek AEFG tot grondvlak heeft, onder die bepaling, dat het grondvlak van dit nieuwe prisma eene gegevene lengte of breedte hebbe.* (Zie XXV. *Werkstuk*, *Bladz.* 208.) Al hetwelk, uit de bloote beschouwing der figuur, en hetgeen reeds betoogd is, van zelf blijkt.

Men kan dan alle prisma's in andere prisma's, en eindelijk in parallelopipedums veranderen, welke niet slechts eenen regthoek tot grondvlak-

vlakken hebben, maar zelfs eenen regthoek, welke eene gegevene lengte of breedte heeft. Uit dit alles is dan de waarheid van het gestelde, in al deszelfs bijzonderheden, bewezen.

§. 787. I. Gevolg. *Wanneer men, uit al de hoekpunten van het grondvlak van een scheef veelhoekig prisma, loodlijnen op hetzelve opregt, gaande tot aan het bovenvlak van het prisma; dan ontstaat er een regt veelhoekig prisma, dat met het gegevene prisma denzelfden inhoud heeft.* Daar men nu een veelhoekig prisma in een prisma, dat eenen regthoek tot grondvlak heeft, door constructie, veranderen kan, *zal ook elk prisma, door constructie, in een regthoekig parallelopipedum kunnen veranderd worden.*

§. 788. II. Gevolg. Een prisma dan in zulk een regthoekig parallelopipedum veranderd hebbende, *zoo zal men,* (*II. Gev. IV. Stell.*) *door te bepalen; hoeveelmaal de éénheid van de lengtemaat op de lengte, de breedte, en de hoogte van dit regthoekige parallelopipedum begrepen is, en door deze drie getallen met elkander te vermenigvuldigen, vinden, hoeveelmaal de cubieke éénheid op den ligchamelijken inhoud van dit prisma begrepen is.* Dan, gewoonlijk tracht men de noodige gegevens, waardoor de inhoud van het grondvlak in vierkante éénheden kan gevonden worden, door dadelijke meting te bepalen, *en men vermenigvuldigt dan den inhoud van dit grondvlak met het getal, dat te kennen geeft, hoevcelmaal de lengte-éénheid in de hoogte van het prisma begrepen is.* Men zegt daarom: *dat de inhoud van een prisma gelijk is aan het grondvlak vermenigvuldigd met de hoogte.*

Voorbeeld. Laat, *fig.* 364, de zijde *B C* van het grondvlak *A B C* van het driehoekig prisma *A B C D E F* gelijk $0^m,173$; de loodlijn, welke uit het hoekpunt *A* op de basis van den driehoek valt, gelijk $0^m,243$; en de hoogte, dat is, de afstand van de grond en bovenvlakken, gelijk $0^m,48$ zijn; dan zal de inhoud van het prisma, gelijk $\frac{1}{2} \times 0,173 \times 0,243 \times 0,48 = 0,01008936$ *cubieke meters*, of gelijk 10 *cubieke decimeters*, 89 *cubieke centimeters*, en 360 *cubieke milimeters* zijn.

XVI. Stelling. (XXIII). *Fig.* 370.

§. 789. *De inhoud van een scheef veelhoekig prisma* (*A K*) *is gelijk aan den inhoud van het vlak* (*U V W X Z*), *dat de opstaande ribben regthoekig doorsnijdt, met ééne dezer opstaande ribben* (*D K*) *vermenigvuldigd zijnde.*

Betoog. Wanneer het vlak *U V W X Y Z* ééne der ribben, *D K* bij voorbeeld, in *U* regthoekig doorsnijdt; dan zullen al de andere opstaande ribben van het prisma, welke (I. *Stell.*) onderling evenwijdig zijn, door

dit

dit vlak (XXIII. *Stell.* I. *B.* en IV en IX. *Stell.* VIII. *B.*) regthoekig gesneden worden; zoodat de hoeken bij de punten *U*, *V*, *W*, *X* en *Z*, regt zullen zijn, of de ribben *CI*, *BH*, *AG*, *EL* en *DK*, regthoekig op het vlak *UVWXZ* zullen staan.

Stellen wij dan, dat het prisma door het vlak *UVWXZ* regthoekig gesneden zij, en laat dan het stuk *P* zoodanig aan het stuk *Q* gevoegd worden, dat het punt *K* in het punt *D*, de lijn *KL* langs de lijn *DE* valle; omdat dan het vlak *GHIKL* (I. *Stell.*) gelijk- en gelijkvormig is aan het vlak *ABCDE*, zoo zal het punt *L* in *E*, *LG* langs *EA*, *G* in *A*, *GH* langs *AB*, *H* in *B*, *HI* langs *BC*, *I* in *C*, *IK* langs *CD* vallen.

Aangezien nu al de zijvlakken van het prisma (I. *Stell.*) parallelogrammen zijn, zoo is *hoek IKU* = *suppl. hoek CDU*, en *hoek UKL* = *suppl. hoek UDE*, *enz.* en daarom zal (VI. *Stell.* I. *B.*) *KU* het verlengde van *UD* zijn.

Om dezelfde reden, zal *IV* het verlengde van *VC*, *HW* van *WB*, *GX* van *XA* en *LZ* van *EZ* worden.

De stukken *P* en *Q* kunnen gevolgelijk zoo tegen elkander gesloten worden, dat uit het scheve prisma een regt prisma ontstaat, welks grondvlak is het vlak *UVWXZ*, in hetwelk ééne der ribben *DK*, bij voorbeeld, de hoogte is; weshalve de inhoud van het scheve prisma gelijk zal zijn aan het vlak *UVWXZ*, vermenigvuldigd met de ribbe *DK*.

§. 790. GEVOLG. *Fig.* 370. Aangezien de inhoud van elk parallelogram gelijk is aan de basis vermenigvuldigd met de hoogte, *zoo zal de som van de zijvlakken van een prisma gelijk zijn aan den omtrek van het vlak, dat de opstaande ribben regthoekig doorsnijdt, vermenigvuldigd met ééne dezer ribben.*

XVII. (XVI). STELLING.

§. 791. *De prisma's, onder gelijke grondvlakken en gelijke hoogten zamengesteld, hebben ook een gelijken inhoud.*

BETOOG. Men zal (I. *Gev.* XV. *Stell.*) elk prisma in een regthoekig parallelopipedum kunnen veranderen; en deze parallelopipedums zullen dan gelijke hoogten hebben. Nog zal men (XV. *St.*) een dezer regthoekige parallelopipedums in een ander kunnen veranderen, wiens grondvlak dezelfde lengte heeft, als het grondvlak van het andere; maar dan zal, omdat de grondvlakken gelijk zijn, de breedte van het grondvlak van dit veranderde parallelopipedum gelijk moeten zijn aan de breedte van het andere grondvlak; de prisma dan, in gelijke- en gelijkvormige parallelopipedums veranderd zijnde, moeten gevolgelijk denzelfden inhoud hebben.

XVIII. (XVII.) STELLING. *Fig.* 371, 372 *en* 373.

§. 792. *De inhouden der prisma's, welke gelijke hoogten hebben, ſtaan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne grondvlakken, en de inhouden der prisma's, welke op gelijke grondvlakken ſtaan, zijn in dezelfde reden, als hunne hoogten; wanneer eindelijk de grondvlakken en de hoogten van twee prisma's onderſcheiden zijn; dan ſtaan derzelver inhouden, in de zamengeſtelde reden van hunne grondvlakken en hoogten.*

BETOOG *van het eerſte.* Laten, *fig.* 371, de prisma's *P* en *Q* dezelfde hoogten hebben; maar op onderſcheidene grondvlakken, bij voorbeeld, *P* op een driehoekig en *Q* op een vijfhoekig, ſtaan: dan zal men (XV. *Stell.*) de prisma's *P* en *Q* in twee regthoekige parallelopipedums, *R* en *S*, (*fig.* 372,) welke dezelfde hoogte hebben, kunnen veranderen, zoodanig, dat $P = R$ en $Q = S$ zij, en dat de grondvlakken dezer parallelopipedums regthoeken *ABCD* en *EFGH* zijn, welke nog bovendien gelijke breedten $AD = EH$ hebben. Wanneer nu de lengten *AB* en *EF* meetbaar zijn en eene gemeene maat hebben, welke op *AB* en *EF* respectievelijk *m*- en *n*-maal (in de figuur *acht* en *elf* maal,) begrepen is; dan zal men *AB* in *m* (in de figuur in *acht*) en *EF* in *n* (in de figuur in *elf*) gelijke deelen kunnen verdeelen, en door de deelpunten vlakken laten gaan, welke evenwijdig aan de zijvlakken *ADIK* en *EHNM* loopen. Deze evenwijdige vlakken zullen (III. *Stell.*) de regthoekige parallelopipedums *R* en *S*, het eerſte in *m*, het tweede in *n* gelijke- en gelijkvormige parallelopipedums verdeelen, die alle gelijke grondvlakken *ADIK* en *EHNM*, en gelijke hoogten *AL* en *EO* hebben. Volgens de *Aanmerking* IX. *Bep. II. B.*, zijn dan de inhouden der parallelopipedums *R* en *S* tot elkander, in dezelfde reden, als de lengten *AB* en *EF*; maar deze lengten zijn, (XI. *Stell.* III. *B.*) omdat $AD = EH$ is, in dezelfde reden als de regthoeken *ABCD* en *EFGH*; derhalve is (I. *Stell.* II. *B.*)

$$R : S = regth.\ ABCD : regth.\ EFGH$$

Daar nu (*conſtr.*) $R = P$ en $S = Q$ en $ABCD =$ aan het grondvlak van *P* en $EFGH =$ aan het grondvlak van *Q* is, zoo zullen de prisma's *P* en *Q*, (die dezelfde hoogte hebben) tot elkander ſtaan, in dezelfde reden, als hunne grondvlakken. Wanneer de lijnen *AB* en *EF* onmeetbaar zijn; dan zal men, gelijk in de betoogen van de XI. *Stell.* III. *B. en* XVIII. *Stell.* V. *B.*, kunnen bewijzen, dat ook de inhouden der prisma's, in dezelfde reden, als hunne grondvlakken, zijn.

BETOOG *van het tweede. Fig.* 373. Laten *P* en *Q* twee prisma's zijn, het eerſte op een driehoekig grondvlak *ABC*, en het tweede op een vijfhoekig grondvlak *DEFGH* ſtaande: indien dan de inhouden dezer grondvlakken gelijk zijn; dan zal moeten betoogd worden: *dat de inhouden dezer prisma's in dezelfde reden zijn, als hunne hoogten.* Onder-

derstel, dat de hoogten (dat is, de loodlijnen, welke tusschen de grond- en bovenvlakken begrepen zijn,) meetbaar zijn, en dat derzelver gemeene maat op de hoogten der prisma's, *P* en *Q*, respectievelijk *m* en *n* (in de figuur *acht* en *vijf*) malen begrepen zij; dan zal men (III. *St.*) door de deelpunten dezer loodlijnen vlakken, evenwijdig aan de grond- en bovenvlakken, kunnen laten gaan; en deze evenwijdige vlakken zullen dan de prisma's, *P* en *Q*, het eerste in *m* of *acht*, en het tweede in *n* of *vijf* gelijke prisma's verdeelen. Omdat nu het grondvlak *ABC* gelijk is aan het grondvlak *DEFGH*, zoo zal (XIV. *Stell.*) het prisma *ACBI* gelijk aan het prisma *DEFGHK* zijn, en de prisma's *P* en *Q* zijn dan (*Aanm.* IX. *Bep.* II. *B.*) in dezelfde reden, als hunne hoogten. Wanneer de hoogten der prisma's onmeetbaar zijn; dan zullen derzelver inhouden nog in dezelfde reden als hunne hoogten staan: hetgeen langs denzelfden weg, als in de XI. *Stell.* III. *B.* of XVIII. *Stell.* V. *B.* kan betoogd worden.

BETOOG *van het derde.* Het blijkt dan, uit de twee voorgaande gevallen: dat de inhouden van twee prisma's zoodanig van derzelver grondvlakken en hoogten afhangen, dat, wanneer de grondvlakken, of de hoogten, dezelfde zijn, de inhouden der prisma's tot elkander in dezelfde reden staan, als de hoogten, of als de grondvlakken; deze inhouden zijn dan (XXII. *Bep.* II. *B.*) in de zamengestelde reden van hunne grondvlakken en hoogten.

§. 793. GEVOLG. *Indien twee prisma's gelijke inhouden hebben; dan staan hunne grondvlakken in de omgekeerde reden van hunne hoogten;* want, zoo veelmaal als de grondvlakken grooter of kleiner worden, even zooveelmaal zullen de hoogten kleiner of grooter worden.

V. *Over de verhouding, die er tusschen de inhouden der piramiden en prisma's bestaat.*

I. HULPSTELLING.

§. 794. *De som van de tweede magten der natuurlijke getallen* 1, 2, 3, 4, 5, enz. *zonder eenig getal over te slaan, tot het getal n ingesloten, is, hoe groot dit getal n mogt genomen worden, gelijk aan* $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

BETOOG. Stellen wij de som van $1^2+2^2+3^2+\text{enz.}+n^2 = S$; dan moet bewezen worden: dat, voor elke waarde van n, hoe groot men dit getal zou mogen nemen,

$$S = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

zal moeten zijn.

Dat die voorgestelde vergelijking of formule, waar is, indien men $n=1$, $n=2$, $n=3$, enz. stelt, zal bij de proef blijken; want, stelt men $n=1$; dan

dan wordt $S = \frac{1}{6} . 1 \times 2 \times 3 = 1$. Stelt men $n = 2$; dan wordt $S = \frac{1}{6} . 2 . 3 . 5 = 5 = 1 + 4$. Stelt men $n = 3$; dan vindt men $S = \frac{1}{6} . 3 . 4 . 7 = 14 = 1 + 4 + 9$; *enz.*

Indien men derhalve bewijzen kan: dat de gestelde formule, wanneer zij aan $n = r$ voldoet, ook aan $n = r + 1$ voldoen moet; dan zal er geen twijfel meer aangaande derzelver algemeenheid bestaan. Indien men $n = r$ stelt; dan is:

$$S = \frac{1}{6} r (r + 1) (2r + 1) = \frac{1}{6} (2r^3 + 3r^2 + r)$$

en stelt men $n = r + 1$; dan wordt

$$S' = \frac{1}{6} (r + 1) (r + 2) (2r + 3) = \frac{1}{6} (2r^3 + 9r^2 + 13r + 6)$$

Trekt men van deze laatste vergelijking de eerste af; dan zal men vinden:

$$S' - S = \frac{1}{6} (6r^2 + 12r + 6) = r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2$$

maar $S' - S$ moet, uit den aard der zake, gelijk zijn aan $(r + 1)^2$; want uit $S = 1 + 4 + 9 + enz. + r^2$, wordt $S' = 1 + 4 + 9 + enz. + r^2 + (r + 1)^2$ gevonden, wanneer men bij S den term $(r + 1)^2$ optelt.

Men ziet dus: dat, wanneer de formule aan $n = r$ voldoet, zij ook aan $n = r + 1$ zal moeten voldoen, ja zelfs hoe groot r genomen worde: nu voldoet de formule, indien men $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, stelt; bijgevolg voldoet zij aan alle waarden van n, tot in het oneindige.

II. Hulpstelling. *Fig.* 374.

§ 795. *Elk driehoekig (scheef of regt) prisma kan, door elke zijde van zijn grondvlak, in n gelijke deelen te verdeelen, verdeeld worden, in een aantal van n^2 prisma's, die alle denzelfden inhoud en met het geheele prisma dezelfde hoogte hebben.*

Betoog. Wanneer men, zie III. *Gev.* II. *Stell.* IV. *B.*, al de zijden AB, BC en AC, van het grondvlak ABC der driehoekige piramide, in, bij voorbeeld, *vijf* gelijke deelen verdeelt, en door de deelpunten lijnen, evenwijdig aan de zijden trekt; dan wordt het oppervlak van den driehoek ABC in *vijf-en-twintig* driehoekjes verdeeld, die alle gelijk- en gelijkvormig zijn aan het driehoekje BDE.

Men late nu door al de deelpunten van de zijden van het grondvlak vlakken gaan, evenwijdig aan de opstaande zijvlakken $ABba$, $BCcb$ en $ACca$ van de gestelde prisma loopende; dan zal het geheele prisma (II. *Bep*) in even zoo veel driehoekige prisma's (in de figuur in *vijf-en-twintig*) verdeeld zijn, als er gelijke- en gelijkvormige driehoeken in het grondvlak bestaan; namelijk de prisma's $BEDdeb$, $DEFfed$, *enz.* zoo als verder uit de figuur duidelijk te zien is.

Al die driehoekige prisma's $BEDdeb$, $DEFfed$, *enz.* hebben gelijke grondvlakken, en wijl zij alle tusschen de evenwijdige vlakken ABC en abc zijn ingesloten, gelijke hoogten; zij hebben dus alle (XVII. *St.*) denzelfden inhoud.

Uit

Uit deze bijzondere figuur, kan men nu ligtelijk opmaken, dat, wanneer elke zijde van het grondvlak in n gelijke deelen verdeeld wordt, op die wijze, door eene soortgelijke constructie, het geheele driehoekige prisma (hoe groot het getal n zou mogen zijn) in een aantal van n^2 gelijke prisma's zal kunnen verdeeld worden.

Deelt men verder ééne der opstaande ribben Bb insgelijks in vijf gelijke deelen $B\beta = \beta\eta = \eta\theta = \theta\kappa = \kappa b$, en deelt men het prisma, door vlakken, welke evenwijdig aan het grondvlak loopen, en door die punten gaan; dan zal het geheele prisma $ABCcba$ (*II. Stell.*) in vijf gelijke- en gelijkvormige prisma's zijn verdeeld, die elk in vijf-en-twintig gelijke prisma's $ABD\delta\beta\epsilon$ zullen verdeeld zijn.

§. 796. Gevolg. Hieruit volgt dan: *dat, wanneer elke ribbe van het grondvlak en elke ribbe der opstaande zijvlakken van een driehoekig prisma in n gelijke deelen verdeeld wordt, de inhoud van het geheele prisma door de vlakken, die door de deelpunten, evenwijdig aan de opstaande zijvlakken en aan het grond- of bovenvlak getrokken worden, in een aantal van n^3 gelijke driehoekige prisma's $BDE\epsilon\delta\beta$ zal verdeeld zijn.*

XIX. Stelling. *Fig.* 375.

§. 797. *Wanneer men, door één der hoekpunten (D) van het bovenvlak ($D\Delta\Gamma$) van een driehoekig (regt of scheef) prisma en de overstaande ribbe (AB) van het grondvlak (ABC), een vlak (ABD) laat gaan; dan zal dit vlak van het prisma eene piramide (ABCD) afsnijden, wiens inhoud één-derde zal zijn van den inhoud van het prisma ($ABCD\Delta\Gamma$).*

Betoog. Laat de opstaande ribbe CD van de piramide en van het prisma in een zeker aantal, bij voorbeeld, *acht*, gelijke deelen worden verdeeld, en door de deelpunten G, K, N, Q, T, W en Z, vlakken GEF, KHI, NLM, QOP, TRS, WUV en ZXY, evenwijdig aan het gemeenschappelijke grondvlak ABC van het prisma en van de piramide, geconstrueerd worden; dan zijn (*III. Stell.*) al die doorsnijdingsvlakken ZXY, WUV, TRS, QOP, NLM, KHI en GEF, gelijkvormig aan het grondvlak, en wij hebben dan, zie *Gev. V. Stell.*

(*drieh.* ZXY, *drieh.* WUV, *drieh.* TRS, *drieh.* QOP, *drieh.* NLM, *drieh.* KHI, *drieh.* GEF, *drieh.* ABC) : : (ZY^2, WV^2, TS^2, QP^2, NM^2, KI^2, GF^2, BC^2) : : (DZ^2, DW^2, DT^2, DQ^2, DN^2, DK^2, DG^2, DC^2) : : (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64).

derhalve zal *drieh.* ZXY *viermaal* in *drieh.* WUV, *negenmaal* in *drieh.* TRS, *zestienmaal* in *drieh.* QOP, *vijf-en-twintigmaal* in *drieh.* NLM, *zes-en-dertigmaal* in *drieh.* KHI, *negen-en-veertigmaal* in *drieh.* GEF en *vier-en-zestigmaal* in *drieh.* ABC begrepen zijn. Men zal dus (daar

al die driehoeken gelijkvormig zijn,) *drieh.* WUV in *vier*, *drieh.* TRS in *negen*, *drieh.* QOP in *zestien*, *drieh.* NLM in *vijf-en-twintig*, *drieh.* KHI in *zes-en-dertig*, *drieh.* GEF in *negen-en-veertig* en *drieh.* ABC in *vier-en-zestig* deelen, die alle aan den driehoek XYZ gelijk- en gelijkvormig zijn, kunnen verdeelen; hetwelk bovendien (indien men de figuur op eene grootere schaal teekent,) door het trekken van lijnen door de punten Y, V, S, P, M, I en F, evenwijdig aan CD loopende, van zelf blijkbaar is.

Laten nu Yy en Xx, evenwijdig aan ZD, en xy getrokken worden; dan verkrijgen wij een driehoekig prisma, tusschen de twee vlakken XYZ en xyD, en daar $Dy = \frac{1}{8} BC = \frac{1}{8} D\Delta$, $Dx = \frac{1}{8} AC = \frac{1}{8} D\Gamma$, en gevolgelijk $xy = \frac{1}{8} AB = \frac{1}{8} \Delta\Gamma$ is, en nog $DZ = CG = \frac{1}{8} DC$, *zoo zal* (Gev. II. Hulpst.) *het kleine driehoekige prisma* $XYZxyD$ *in het geheele prisma* $ABCD\Delta\Gamma$, *even zooveelmaal begrepen zijn, als door de derde-magt van het getal acht wordt voorgesteld*; dat is; *vijf-honderd-en-twaalf maal*.

Trekt men Vv en Uu, evenwijdig aan CD, verlengt men ZY en ZX tot in v en u, en trekt men de lijn vu; dan verkrijgt men het driehoekige prisma $WVUZuv$, in hetwelk de inhoud van prisma $ZXYDxy$, *hetwelk wij in het vervolg door de letter* Δ *zullen voorstellen*, zie *II. Hulpst.* *viermaal* zal begrepen zijn.

Trekt men verder Ss en Rr, evenwijdig aan CD, verlengt men WV en WU tot in s en r, en trekt men rs; dan zal het prisma Δ of $ZXYDxy$ in het prisma $TRSsrW$, *negenmaal* begrepen zijn.

Met diezelfde constructie, in de figuur, van laag tot laag, voortgaande, zal men bevinden;

Dat het prisma Δ in het prisma $QOPpoT$ *zestienmaal*, in het prisma $NMLlmQ$ *vijf-en-twintigmaal*, in het prisma $KIHhiN$ *zes-en-dertigmaal*, in het prisma $GFEefK$ *negen-en-veertigmaal* en in het prisma $ABCbaG$ *vier-en-zestigmaal* zal begrepen zijn.

De som der prisma's $ZXYyxD$, $WUVvuZ$, $TSRrsW$, $QOPpoT$, $NLMmlQ$, $KHIihN$, $GEFfeK$ en $CABbaG$ zal dan zooveelmaal den inhoud van het prisma $ZXYyxD$ of Δ bevatten, als door de som der vierkante getallen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 en 64 wordt voorgesteld; dat is, wanneer men in de formule

$$S = \tfrac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1)$$

zie *I. Hulpst.* $n = 8$ stelt, *twee-honderd-en-viermaal*.

De som dezer prisma's is grooter dan de inhoud der piramide $ABCD$; want, indien men van genoemde prisma afneemt de afgeknotte prisma's, die DYy, VvY, SsV, PpS, MmP, IiM, FfI en BbF tot grondvlak hebben; dan zal men den inhoud van de piramide $ABCD$ verkrijgen.

Indien men nu verder let op de driehoekige prisma's, welke XYZ, WUV, TRS, QOP, NLM, KHI en GEF tot bovenvlakken hebben en zeven in aantal zijn; dan zal in de som van de inhouden dezer prisma's het prisma Δ begrepen zijn, zooveelmaal, als door de som

van

van de tweede magten 1, 4, 9, 16, 25, 36 en 49 wordt voorgesteld, dat is, *honderd-en-veertigmaal*.

Maar de som dezer prisma's, die binnen de piramide staan, is kleiner dan de inhoud der piramide; terwijl dus de inhoud van het geheele prisma $= 512\,\Delta$ is, is de inhoud der piramide $ABCD > 140\,\Delta$ en $< 204\,\Delta$; een midden tusschen de twee getallen geeft voor den inhoud der piramide $ABCD$ nabij $172\,\Delta$ hetgeen iets grooter is dan $\frac{1}{3} \times 512\,\Delta = 170\frac{2}{3}\,\Delta$; dat is iets grooter dan één-derde van den inhoud van het prisma $ABCD\Delta F$, uit welke de piramide gesneden is.

Wanneer men, in plaats van de opstaande ribbe CD in acht gelijke deelen te verdeelen, dezelve in een grooter aantal deelen deelt, dezelfde constructie en berekening maakt; dan zal men nadere grenzen vinden, tusschen welke de inhoud der piramide $ABCD$ begrepen is.

Stellen wij, dat CD in n gelijke deelen is verdeeld, en noemen wij het bovenste prisma $ZXY\gamma xD = \Delta$; de som van de inhouden der n naar buiten staande prisma's $XYZzy\Delta$, $WVUuvZ$, *enz.* $= A$, en de som der $(n-1)$ naar binnen staande prisma's $= B$, en den inhoud der piramide $ABCD = I$; dan is (hetwelk uit de voorgaande verklaring ten duidelijkste blijkt,) zie *I. Hulpst.*

$$A = (1+4+9+\text{enz.}+n^2) \times \Delta = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\Delta$$

en, wanneer men in deze in plaats van n neemt $n-1$,

$$B = (1+4+9+\text{enz.}+(n-1)^2) \times \Delta = \tfrac{1}{6}n(n-1)(2n-1)\Delta$$

of, wanneer men de factoren die in deze vergelijkingen voorkomen, door eene dadelijke vermenigvuldiging, ontwikkelt,

$$A = (\tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n) \times \Delta$$

$$B = (\tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n) \times \Delta$$

of, wanneer men het tweede lid dezer vergelijkingen door $\frac{1}{3}n^3$ deelt, en daarna het quotient wederom met $\frac{1}{3}n^3$ vermenigvuldigt:

$$A = \tfrac{1}{3}n^3\Delta \times \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$\text{en}\quad B = \tfrac{1}{3}n^3\Delta \times \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

Nu is, zie boven, *inhoud prisma* $ABCD\Delta\Gamma = n^3\Delta$, en zulks altijd, hoe groot n mogt genomen worden; wij hebben derhalve:

$$A = \tfrac{1}{3}\,\textit{Inh. prisma}\,ABCD\Delta\Gamma \times \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

$$B = \tfrac{1}{3}\,\textit{Inh. prisma}\,ABCD\Delta\Gamma \times \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

Nu is, zoo als wij boven gezien hebben, $A >$ *inh. piram.* $ABCD$ en $B <$ *inh. piram.* $ABCD$; gevolgelijk is,

$$\textit{Inh. pir.}\,ABCD < \tfrac{1}{3}\,\textit{inh. prisma}\,ABCD\Delta\Gamma \times \left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \quad (a)$$

$$\text{en}\ \textit{Inh. pir.}\,ABCD > \tfrac{1}{3}\,\textit{inh. prisma}\,ABCD\Delta\Gamma \times \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \quad (b)$$

Beide deze vergelijkingen (*a*) en (*b*) zijn waar, en gelden voor elke

 waar-

waarde van n, hoe groot n zou mogen genomen worden. Laat nu n een getal zijn, dat uit twintig en meer cijfers bestaat; dan wordt $3:2n$ eene onbegrijpelijke kleine breuk, in vergelijking van welke de breuk $1:2n^2$ nog veel kleiner wordt; de getallenvormen $1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}$ en $1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}$, komen dan beide des te nader bij de éénheid, hoe grooter n gesteld wordt. Stelt men n oneindig groot; dan worden zij beide gelijk één, A en B worden dan gelijk, en veranderen derhalve in den inhoud der piramide $ABCD$; het blijkt dan ten klaarste, dat

$$\textit{Inh. pir. } ABCD = \tfrac{1}{3}\,.\ \textit{inh. prisma } ABCD\Delta\Gamma$$

moet zijn.

§. 798. I. Gevolg. *Fig.* 375. Indien men, in de figuur, nog de lijn $B\Gamma$ trekt; dan zal, om dezelfde reden, de inhoud van de piramide $BD\Delta\Gamma$ gelijk zijn aan één-derde van den inhoud van het prisma $ABCD\Delta\Gamma$, het driehoekig prisma $AB\Gamma D$, dat de driehoek $AB\Gamma$ tot grondvlak en D tot toppunt heeft, zal dan insgelijks één-derde gedeelte van den inhoud van het prisma $ABCD\Delta\Gamma$ bevatten. Het blijkt dus: *dat elk driehoekig prisma in drie driehoekige piramiden kan worden verdeeld, welke, alhoewel zij (vooral indien het grondvlak een ongelijkzijdigen driehoek en het prisma scheef is) ongelijkvormig zijn en niet in elkander sluiten, nogtans een gelijken inhoud hebben.* Het is van belang, dat men die drie onderscheidene piramiden construere.

§. 799. II. Gevolg. *Fig.* 376. *Zij $ABCDEF$ het grondvlak en $abcdef$ het bovenvlak van een veelhoekig prisma; indien men, dan uit één der hoekpunten b van het bovenvlak, de lijnen bA, bC, bD, bE en bF tot aan de hoekpunten van het grondvlak, trekt; dan zal de inhoud der piramide $ABCDEFb$, op deze wijze verkregen, gelijk zijn aan één-derde van den inhoud van het prisma, waaruit die piramide gesneden is.*

Want men late, door de ribbe Bb en de ribben Dd, Ee en Ff, de diagonaalvlakken $BbdD$, $BbeE$, $BbfF$ gaan; dan is, volgens het betoogde;

$$\textit{piram. } ABFb = \tfrac{1}{3}\ \textit{prisma } ABFfba$$
$$\textit{piram. } BEFb = \tfrac{1}{3}\ \textit{prisma } BEFfeb$$
$$\textit{piram. } BEDb = \tfrac{1}{3}\ \textit{prisma } BEDdeb$$
$$\textit{piram. } BCDb = \tfrac{1}{3}\ \textit{prisma } BCDdcb$$

Wanneer men nu deze vergelijkingen bij elkander optelt, zoo zal men, volgens de figuur en het *VIII. Ax.* verkrijgen:

$$\textit{piram. } ABCDEFb = \tfrac{1}{3}\ \textit{prisma } ABCDEFfedcba.$$

§. 800.

§. 800. AANMERKING. *Fig.* 377. Het is opmerkelijk: *dat, onder alle prisma's, de kubus de eenige is, die in drie gelijke- en gelijkvormige piramiden, namelijk de piramiden, die de vierkanten A B C D, A D G H en C D G F tot grondvlakken en het hoekpunt E tot toppunt hebben, kan verdeeld worden.* Hieruit kan echter niets bruikbaars gehaald worden, om de voorname grondstelling, welke wij thans betoogd hebben, eenvoudiger of gemakkelijker te betoogen.

§. 801. III. GEVOLG. *Fig.* 376. *De inhoud van elke piramide is gelijk aan den inhoud van het grondvlak, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte.*

Want, laat gegeven zijn de piramide *A B C D E F b*; indien men dan, uit het toppunt *b*, de loodlijn *b H* op het grondvlak laat vallen; dan zal deze de hoogte der piramide zijn. Men trekke nu, door de hoekpunten *A*, *F*, *E*, *D* en *C* van het grondvlak, lijnen *A a*, *F f*, *E e*, *D d* en *C c*, evenwijdig aan ribbe *B b*, en eindelijk *b a*, *a f*, *f e*, *e d*, *d c* en *c b*, evenwijdig aan *B A*, *A F*, *F E*, *E D*, *D C*, *C B*; dan verkrijgt men het prisma *A B C D E F f e d c b a*, hetwelk om de piramide beschreven is. Nu is, zie *II. Gev. XV. Stell.*

Inh. prisma A B C D E F f e d c b a = *grondv. A B C D E F* × *b H*
en $\frac{1}{3}$ *Inh. prisma A B C D E F f e d c b a* = $\frac{1}{3}$ *grondv. A B C D E F* × *b H*
maar $\frac{1}{3}$ *Inh. prisma A B C D E F f e d c b a* = *inh. piram. A B C D E F b*
derh. *Inh. piram. A B C D E F d* = $\frac{1}{3}$ *grondv. A B C D E F* × *b H*

VOORBEELD. Stel, dat men, op eene of andere wijze, gevonden heeft, dat de inhoud van het grondvlak *A B C D E F* = 3128,73 vierkante meters zij, de hoogte *b H* = 46,7 meters; dan zal de ligchamelijke inhoud der piramide *A B C D E F d* = $\frac{1}{3}$ × 3128,73 × 46,7 = 48703,897 *kubieke meters*, of 48703 *kub. met.* en 897 *kub. decimeters.*

XX. STELLING. *Fig.* 378.

§. 802. *Zoo een prisma (A B C D d c b a) en eene piramide (E F G e) gelijke grondvlakken (A B C D en E F G) en gelijke hoogten hebben; dan is de inhoud van de piramide gelijk aan één-derde van den inhoud van het prisma.*

BETOOG. Men construere, om de piramide *E F G e*, het driehoekige prisma *E F G g f e*, hetwelk natuurlijk met die piramide dezelfde hoogte heeft; aangezien nu, volgens de onderstelling, de grondvlakken, *A B C D* van het prisma, en *E F G* der piramide, gelijke inhouden hebben, en de hoogte van beide ligchamen gelijk zijn, zoo zal (*XIV. Stell.*)

inh. prisma E F G g f e = *inh. prisma A B C D d c b a*
en $\frac{1}{3}$ *inh. prisma E F G g f e* = $\frac{1}{3}$ *inh. prisma A B C D d c b a*, *XII. Ax.*
moeten zijn; maar nu is, zie *voorg. Stell.* en *Gevolgen*
inh. piram. E F G e = $\frac{1}{3}$ *inh. prisma E F G g f e*
dus *inh. piram. E F G e* = $\frac{1}{3}$ *inh. prisma A B C D d c b a.*

XXI. STELLING. *Fig.* 379.

§. 803. *Alle piramiden, die gelijke grondvlakken en gelijke hoogten hebben, hebben denzelfden inhoud.*

BETOOG. Laat *ABCDE* het vijfhoekige grondvlak van de piramide *ABCDEe*, en *FGHI* het vierhoekige grondvlak van de piramide *FGHIi* zijn. Stel, dat de inhouden der grondvlakken gelijk zijn, en dat beide piramiden dezelfde hoogte hebben; dan moet bewezen worden, dat de inhouden dezer piramiden gelijk zijn.

Laten, om beide piramiden, de prisma's *ABCDEedcba* en *EFGHIihgf* worden geconstrueerd; dan is, wegens de gelijke grondvlakken en gelijke hoogten (*XIV. Stell.*),

inh. prisma ABCDEedcba = *inh. prisma FGHIihgf*

en $\frac{1}{3}$ *inh. prisma ABCDEedcba* = $\frac{1}{3}$ *inh. prisma FGHIihgf*

maar, volgens de *XIX. Stell* is,

$\frac{1}{3}$ *inh. prisma ABCDEedcba* = *inh. piram. ABCDEe*

en $\frac{1}{3}$ *inh. prisma FGHIihgf* = *inh. piram. FGHIi*

derhalve wordt

inh. piram. ABCDEe = *inh. piram. FGHIi.*

XXII. (XXI.) STELLING.

§. 804. *De inhouden der piramiden staan tot elkander, in dezelfde reden, als hunne grondvlakken, indien hare hoogten gelijk zijn; of, in dezelfde reden als de hoogten, indien de grondvlakken gelijk zijn; doch, beide ongelijk zijnde, in de zamengestelde reden van de grondvlakken en hoogten.*

BETOOG. Want, omdat de inhouden der piramiden (*XX. Stell.*) gelijk zijn aan één-derde van de inhouden der prisma's, welke op de grondvlakken der piramiden geplaatst zijn, en met dezelve gelijke hoogten hebben; en (*XVIII. Stell.*) de prisma's tot elkander staan, als de grondvlakken, indien de hoogten gelijk zijn; als de hoogten, indien de grondvlakken gelijk zijn, en in de zamengestelde reden van de grondvlakken en de hoogten, indien beide ongelijk zijn, zoo zullen (*VI. St. II. B.*) de piramiden, welke met deze prisma's dezelfde grondvlakken en hoogten hebben, ook tot elkander in dezelfde verhouding, als deze prisma's, moeten staan.

§. 805. GEVOLG. *De grondvlakken der piramiden, welke denzelfden inhoud hebben, staan in de omgekeerde reden van derzelver hoogten.* Want, indien men het grondvlak *n* malen grooter of kleiner neemt; dan zal men de hoogte *n* malen kleiner of grooter moeten nemen, om denzelfden inhoud te behouden.

§. 806.

§. 806. Aanmerking. Om den inhoud van een veelvlakkig ligchaam te bepalen, zal men een punt binnen dit ligchaam nemen, en, uit hetzelve, tot aan al de hoekpunten, regte lijnen trekken: het veelvlakkige ligchaam zal daardoor in even zoo veel drie of veelhoekige piramiden verdeeld worden, als het ligchaam zijvlakken heeft. *Wanneer men dan de inhouden van elk dezer zijvlakken, benevens derzelver afstanden tot dit aangenomen punt bepalen kan; dan zal men den inhoud van elke piramide vinden, door den inhoud van het zijvlak van dit ligchaam met één-derde van deszelfs afstand tot dit aangenomene punt te vermenigvuldigen, en de inhouden dezer piramiden bij elkander op te tellen.* De inhouden van bijzondere ligchamen kunnen nogtans, zoo als uit de volgende Stellingen blijken zal, op bijzondere wijzen, verkregen worden.

VI. *Over de inhouden der afgeknotte prisma's en piramiden.*

XXIII. (XXII.) Stelling. *Fig.* 380.

§. 807. *De inhoud van elk driehoekig afgeknot prisma (ABC DEF) is gelijk aan de som van de inhouden der drie piramiden, welke met het afgeknotte prisma hetzelfde grondvlak (ABC) gemeen hebben, en welker toppunten (D, E en F) in de hoekpunten van het bovenvlak van dit afgeknotte prisma gelegen zijn.*

Betoog. Men deele het afgeknotte prisma $ABCDEF$, door de vlakken ACE en CEF, in de piramiden $ABCE$, $ACFE$ en $DCFE$. De eerste dezer piramiden $ABCE$ heeft den driehoek ABC tot grondvlak, en derzelver toppunt is in E. De piramiden $ABCE$ en $ACFE$, kunnen aangemerkt worden, als hebbende de driehoeken ABE en AEF, tot grondvlakken, en het punt C tot een gemeenschappelijk toppunt, volgens de *XXII. Stell.* is dan:

$$piram.\ ABCE : piram.\ ACFE = drieh.\ ABE : drieh.\ AEF$$

maar, omdat BE evenwijdig aan AF is, zoo hebben de driehoeken ABE en AEF gelijke hoogten, en daarom is (*XIV. Stell. III. B.*)

$$drieh.\ ABE : drieh.\ AEF = BE : AF$$

diensvolgens zal ook (*I. Stell. II. B.*)

$$piram.\ ABCE : piram.\ ACFE = BE : AF$$

moeten zijn. Eindelijk, kunnen de piramiden $ACFE$ en $CDFE$ aangemerkt worden, als staande op de grondvlakken ACF en DCF, en daar zij hetzelfde toppunt E hebben, is (*XXII. Stell. XIV. Stell. III. B.*)

$$piram.\ ACFE : piram.\ CDFE = drieh.\ ACF : drieh.\ CDF = AF : CD$$

en, vergelijkt men nu deze evenredigheid met de laatst voorgaande; dan heeft men (*I. Stell. II. B.*)

(*piram.*

(*piram. ABCE*, *piram. ACFE*, *piram. CDFE*) : : (*BE*, *AF*, *CD*)

Wanneer men zich nu verbeeldt: dat, uit de punten *D*, *E* en *F*, loodlijnen op het grondvlak *ABC* vallen; dan zullen deze loodlijnen, daar zij onderling evenwijdig zijn, met de onderling evenwijdig loopende ribben, *DC*, *EB* en *FA*, (*XXIV Stell. VIII. B.*) gelijke hoeken, en derhalve (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B. en VIII. Stell. IV. B.*) drie gelijkvormige driehoeken maken; en deze loodlijnen zullen derhalve met de ribben *CD*, *BE*, *AF*, evenredig zijn. Omdat dan de piramiden, welke op dezelfde grondvlakken ſtaan, in dezelfde reden, als hare hoogten zijn, zoo zal de piramide *ACFE* gelijk zijn aan de piramide, welke op *ABC* ſtaat, en haar toppunt in *F* heeft; en de piramide *CDFE* gelijk aan de piramide, welke op *ABC* ſtaat, en haar toppunt in *D* heeft; daar nu de ſom der piramiden *ABCE*, *ACFE* en *CDFE* ook gelijk is aan het afgeknotte prisma, zal dit afgeknotte prisma (*VIII. Ax.*) gelijk zijn aan de ſom der piramiden, welke elk den driehoek *ABC* tot grondvlak hebben, en tot toppunten de hoekpunten *D*, *E* en *F*.

§. 808. I. Gevolg. *Fig* 380. Indien het afgeknotte prisma regt is; dan zijn de opſtaande ribben *AF*, *BE* en *CD*, de hoogten der piramiden, welker ſom gelijk is aan het afgeknotte prisma, en die alle den driehoek *ABC* tot grondvlak hebben. In dit geval, zal derhalve

$$\textit{Inh.}\ ABCDEF = \tfrac{1}{3}(AF + BE + CD) \times \textit{drieh.}\ ABC$$

moeten zijn.

§. 809. II. Gevolg. *Fig* 381. Laat het afgeknotte prisma *ADF* door een vlak *PQR*, dat loodregt op de ribben ſtaat, worden doorgeſneden in de ſtukken *V* en *W*; dan is, *I. Gev.*

$$\textit{inhoud.}\ V = \tfrac{1}{3}(EP + DQ + AR) \times \textit{drieh.}\ PQR$$

$$\textit{inhoud.}\ W = \tfrac{1}{3}(FP + CQ + BR) \times \textit{drieh.}\ PQR$$

deze vergelijkingen bij elkander tellende, zoo wordt

$$\textit{inhoud.}\ ADF = \tfrac{1}{3}(AB + DC + EF) \times \textit{drieh.}\ PQR.$$

§. 810. III. Gevolg. *Fig.* 381. Laat *PS* loodregt op *QR* vallen; ſtel $AB = CD = a$, $EF = b$, $RQ = c$ en $PS = h$; dan verkrijgt men voor den inhoud van het afgeknotte prisma, op die wijze bepaald zijnde,

$$I = \tfrac{1}{6}(2a + b) \times ch.$$

§. 811. IV Gevolg. *Fig.* 382. Laat *ABCD* een regthoek zijn, het vlak *EFGH* evenwijdig aan het grondvlak *ABCD*; laten, door de lijnen *AB*, *BC*, *CD* en *DA*, vlakken gaan, zoo als het valt; dan zal *EFGH* een regthoek zijn en wij noemen het ligchaam, door die conſtructie ontſtaan zijnde, eene *prismoïde*.

Stel $AB = a$, $BC = b$, $HE = a'$, $EF = b'$; de hoogte $HI = h$. Laat het ligchaam door het vlak *BCGH* in twee afgeknotte driehoe-

ki-

kige prisma's verdeeld worden; dan is zie *III. gevolg.*

$$\text{inhoud } ABCDGH = \tfrac{1}{6}(2b+b') \times ah = \tfrac{1}{6}h(2ab+ab')$$

$$\text{inhoud } EFGHBC = \tfrac{1}{6}(2b'+b) \times a'h = \tfrac{1}{6}h(2a'b'+a'b)$$

en, deze vergelijkingen optellende,

$$\text{inhoud prismoïde} = \tfrac{1}{6}[ab+a'b'+(a+a')(b+b')] \times h$$

XXIV. (XXIII.) STELLING. *Fig.* 383.

§. 812. *De inhoud van eene afgeknotte driehoekige piramide is gelijk aan de som van de inhouden van drie piramiden, welke dezelfde hoogte als de afgeknotte piramide hebben, en welker grondvlakken gelijk zijn aan het grondvlak, het bovenvlak en een vlak, dat middenevenredig is tusschen het grondvlak en het bovenvlak dezer afgeknotte piramide.*

BETOOG. Men deele de afgeknotte piramide eerst door een vlak, hetwelk door de punten A, E en C gaat; dan is zij verdeeld in de driehoekige piramide $ABCE$, en in de vierhoekige piramide $ACDFE$. Men deele voorts deze laatste piramide door een vlak, hetwelk door de punten E, F en C gaat, in de twee driehoekige piramiden, $CDFE$ en $ACFE$; dan zal de afgeknotte piramide in drie driehoekige piramiden, $ABCE$, $ACFE$ en $CDFE$, verdeeld zijn, en dan is (*XXII. St.*)

$$\text{piram. } ABCE : \text{piram. } ACFE = \text{drieh. } ABE : \text{drieh. } AEF;$$

maar, omdat AB evenwijdig is aan EF, zoo is (*XIV. Stell. III. B.*)

$$\text{drieh. } ABE : \text{drieh. } AEF = AB : EF$$

derhalve is ook (*I. Stell II. B.*)

$$\text{piram. } ABCE : \text{piram. } ACFE = AB : EF.$$

Op dezelfde wijze betoogt men: dat

$$\text{piram. } ACFE : \text{piram. } CDEF = AC : FD$$

is: maar, omdat (*V. Stell.*) de driehoeken ABC en DEF, gelijkvormig zijn, zóo is (*VIII. Stell. IV. B.*) $AB : EF = AC : FD$; derhalve hebben wij (*I Stell. II B.*) de evenredigheid:

$$\text{piram. } ABCE : \text{piram. } ACFE = \text{piram. } ACFE : \text{piram. } CDEF.$$

Het blijkt hieruit: *dat de inhoud van de piramide $ACFE$ middenevenredig is, tusschen de inhouden der piramiden $ABCE$ en $CDEF$.*

De piramiden $ABCE$ en $CDEF$ hebben klaarblijkelijk, met de afgeknotte piramide, dezelfde hoogte; zij staan derhalve tot elkander, als hunne grondvlakken ABC en DEF. Laat nu P het grondvlak van eene piramide zijn, die dezelfde hoogte heeft; en nemen wij, dat

$$\text{drieh. } ABC : P = P : \text{drieh. } DEF$$

zij; dan zal, omdat (*XXII. Stell.*) de piramiden, welke gelijke hoogten hebben, tot elkander staan, als hunne grondvlakken, de piramide, welke P tot grondvlak heeft, middenevenredig zijn tusschen de piramiden $ABCE$ en $CDEF$; maar de piramide $ACFE$, is ook tusschen dezelfde piramiden

miden *ABCE* en *DCFE* (*zie boven*) middenevenredig; de piramide, welke *P* tot grondvlak heeft, is dan gelijk aan de piramide *ACFE*, en de afgeknotte piramide is derhalve gelijk aan de som der piramiden *ABCE*, *DEFC* en de piramide, welke *P*, of de middenevenredige tusschen de driehoeken *ABC* en *DEF*, tot grondvlak heeft.

§. 813. I. Gevolg. *Fig.* 383. Men stelle den inhoud van het grondvlak $ABC = G$, dien van het bovenvlak $DEF = g$; de hoogte of den afstand van het bovenvlak tot het grondvlak $= h$, den inhoud der afgeknotte piramide $= I$; dan is, volgens het betoogde:

$$I = (G + g + \sqrt{Gg}) \times \tfrac{1}{3} h \quad .$$

§. 814. II. Gevolg. *Fig.* 348. *Voor eene veelhoekige piramide geldt denzelfden regel.*

Laat de afgeknotte veelhoekige piramide, tusschen de vlakken *ABCDEF* en *abcdef* begrepen zijnde, door vlakken *aAE*, *aAD* en *aAC*, in de afgeknotte driehoekige piramiden, welke de driehoeken *AEF*, *AED*, *ADC* en *ABC* tot grondvlakken hebben, verdeeld worden. Stel, de inhouden dezer grondvlakken, *drieh.* $AFE = A$, *drieh.* $AED = B$, *drieh.* $ADC = C$ en *drieh.* $ABC = D$; de inhouden van de overeenkomstige bovenvlakken, *drieh.* $afe = a$, *drieh.* $aed = b$, *drieh.* $adc = c$ en *drieh.* $abc = d$; dan is, volgens het betoogde, en, omdat al de driehoekige afgeknotte piramiden, in welke de geheele piramide verdeeld is, dezelfde hoogte *h* hebben,

$$\begin{aligned}
&inh.\ afgekn.\ piram.\ AFE = (A + a + \sqrt{Aa}) \times \tfrac{1}{3} h \\
&inh.\ afgekn.\ piram.\ AED = (B + b + \sqrt{Bb}) \times \tfrac{1}{3} h \\
&inh.\ afgekn.\ piram.\ ADC = (C + c + \sqrt{Cc}) \times \tfrac{1}{3} h \\
&inh.\ afgekn.\ piram.\ ACB = (D + d + \sqrt{Dd}) \times \tfrac{1}{3} h
\end{aligned}$$

Telt men al die vergelijkingen bij elkander; dan zal men voor den inhoud der afgeknotte veelhoekige piramide, die *ABCDEF* tot grondvlak heeft, en dien wij $= I$ stellen, verkrijgen:

$$I = (A + B + C + D + a + b + c + d + \sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} \ldots . + \sqrt{Dd}) \times \tfrac{1}{3} h$$

Stel nu $A + B + C + D = G$, $a + b + c + d = g$; dan is *G* het grondvlak en *g* het bovenvlak van de zeshoekige afgeknotte piramide. Nu zeg ik: dat altijd, in alle gevallen, $\sqrt{Aa} + \sqrt{Bb} + \sqrt{Cc} + \sqrt{Dd} = \sqrt{Gg}$ zal moeten zijn.

Volgens *V. Stell.* en *Gev.* is $A : a = AT^2 : aT^2$; $B : b = AT^2 : aT^2$; $C : c = AT^2 : aT^2$; $D : d = AT^2 : aT^2$; wij hebben derhalve:

$$(A, B, C, D) :: (a, b, c, d)$$
$$A + B + C + D : a + b + c + d = A : a$$
$$\text{of } G : g = A : a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Uit de evenredigheid $A : a = AT^2 : aT^2$, volgt, $AA : Aa = AT^2 : aT^2$; derhalve $A : \sqrt{Aa} = AT : aT$. Om dezelfde reden, is $B : \sqrt{Bb} = C : \sqrt{Cc} = D : \sqrt{Dd} = AT : aT$; wij hebben dan nog:

$$(A, B, C, D) :: (\sqrt{Aa}, \sqrt{Bb}, \sqrt{Cc}, \sqrt{Dd})$$

$A +$

$$A+B+C+D : \sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd} = A : \sqrt{Aa}$$

$$\text{of } G : \sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd} = A : \sqrt{Aa} \quad . \; . \; . \; (2)$$

Uit de evenredigheid (1), volgt: $G^2 : Gg = A^2 : Aa$; derhalve

$$G : \sqrt{Gg} = A : \sqrt{Aa}$$

Deze evenredigheid met de evenredigheid (2) vergeleken hebbende, zoo verkrijgt men eindelijk:

$$G : \sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd} = G : \sqrt{Gg}$$

$$\text{derhalve } \sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{D} = \sqrt{Gg}$$

wij hebben dan eindelijk:

$$I = (G+g+\sqrt{Gg}) \times \tfrac{1}{3}h.$$

§. 815 AANMERKING. *Men kan dien regel, om den inhoud eener afgeknotte piramide te vinden, nog aldus betoogen.*

Zij G en g de inhouden van de grond- en bovenvlakken, h de hoogte der afgeknotte piramide, x de hoogte van het afgesnedene stuk; dan is *III. Gev. XIX. Stell.*

$$I = \tfrac{1}{3}G(h+x) - \tfrac{1}{3}gx = \tfrac{1}{3}[Gh+(G-g)x] \quad . \; . \; . \; (A)$$

Om nu uit deze vergelijking de onbekende x weg te maken, zoo merken wij aan, dat, zie *Gev. V. Stell.*

$$G : g = (h+x)^2 : x^2$$

$$\text{en } \sqrt{G} : \sqrt{g} = h+x : x \text{ is;}$$

uit welke evenredigheid dan onmiddellijk zal volgen:

$$x = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}$$

Men brenge deze waarde van x in de vergelijking (A) over; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$I = \tfrac{1}{3}\left[Gh + \frac{(G-g)h\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right] = \tfrac{1}{3}h \times \left[G + \frac{(G-g)\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right]$$

$$\text{of } I = \tfrac{1}{3}h \times \left[\frac{G\sqrt{g}-g\sqrt{g}}{\sqrt{G}-\sqrt{g}}\right] = (G+g+\sqrt{Gg}) \times \tfrac{1}{3}h.$$

VOORBEELD. *Laat het grondvlak der afgeknotte piramide een vierkant zijn, welks zijde 32 duimen het bovenvlak een vierkant, welks zijde 24 duimen is, de hoogte 84 duimen zijn?* dan is $G = 32 \times 32 = 1024$, $g = 24 \times 24 = 576$ en $\sqrt{Gg} = 32 \times 24 = 768$; gevolgelijk $G + g + \sqrt{Gg} = 2368$; nu is $\frac{1}{3}h = \frac{1}{3} \times 84 = 28$; derhalve $I = 2368 \times 28 = 66304$ kubieke duimen.

VII. *Over de gelijkvormigheid der ligchamelijke figuren, zoowel ronde, als veelvlakkige.*

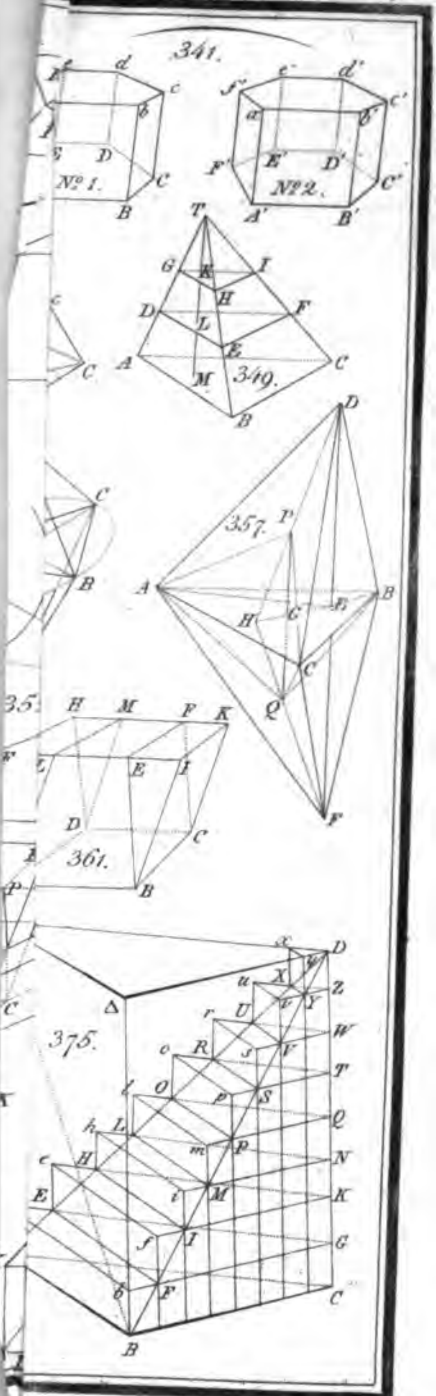
§. 816. *In de ligchamelijke figuren ontstaat de gelijkvormigheid door het trekken van evenwijdige lijnen, op dezelfde wijze, als zij in de vlakke figuren geboren wordt.*

Verklaring. Laat, *fig.* 384, *ABCD* eene driehoekige piramide voorstellen, in welke *ABC* het grondvlak, en *D* het toppunt is. Men neme er-

ergens in de ruimte een punt *d*, en trekke door hetzelve de lijnen *da*, *db*, *dc*, evenwijdig aan de ribben *DA*, *DB*, *DC* der opstaande zijvlakken, en in dezelfde rigting; dan is (*XXIV Stell. VIII. B.*) *hoek adb* = *hoek ADB*, *hoek bdc* = *hoek BDC* en *hoek adc* = *ADC*, en daarom zijn de drievlakkige hoeken aan de punten *D* en *d* (*XXXVIII. Stell. VIII. B.*) bij superpositie gelijk; terwijl de zijvlakken *adb*, *adc* en *bdc* (*XXIV. Stell. VIII. B.*) aan de zijvlakken *ADB*, *ADC* en *BDC* evenwijdig zijn. — Men neme verder, op de ribbe *da*, een punt *a*, zóó dat *da* grooter of kleiner dan *DA* zij, en men late door de ribbe *AB* en het punt *a* een vlak gaan; dan zal dit vlak (*XIX. Stell. VIII. B.*) het zijvlak *abd* volgens de lijn *ab* snijden, welke aan de ribbe *AB* evenwijdig zal zijn. Nog late men, door het punt *a* en de ribbe *AC*, een vlak gaan: dit vlak zal dan het zijvlak *adc*, volgens de lijn *ac*, evenwijdig aan de ribbe *AC* loopende, doorsnijden. Een vlak eindelijk, dat door de ribbe *BC* en het punt *b* gaat, zal het vlak *bdc* volgens de lijn *bc* snijden, die evenwijdig aan *BC* zal zijn; terwijl de lijnen *ac* en *bc* (omdat *AB* en *BC* in *C* zamenkomen,) elkander op de lijn *cd* in *c* zullen snijden. *Wij zeggen, dat de driehoekige piramide Q, op die wijze ontstaande, gelijkvormig is aan de driehoekige piramide P.*

Verbeelden wij ons nog, *fig.* 385, de vijfhoekige piramide *P*, in *F* haar toppunt hebbende. Men neme een punt *f*, naar wegevallen, en trekke door hetzelve de onbepaalde lijnen *fa*, *fb*, *fc*, *fd* en *fe*, evenwijdig aan de opstaande ribben *FA*, *FB*, *FC*, *FD* en *FE*, en in dezelfde rigting. Na *af* grooter of kleiner dan *AF* genomen te hebben, late men door *a* en *AB*, door *b* en *BC*, door *c* en *CD*, door *d* en *DE*, door *e* en *EA* vlakken gaan; dan zullen deze de vlakken *abf*, *bcf*, *cdf*, *def* en *aef*, die (*XXIV. Stell. VIII. B.*) evenwijdig aan de vlakken *ABF*, *BCF*, *CDF*, *DEF* en *AEF* loopen, volgens de lijnen *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, die (*XIX. Stell. VIII. B.*) evenwijdig aan *AB*, *BC*, *CD*, *DE* en *EA* zullen zijn, doorsnijden; en, daar deze laatste lijnen *AB*, *BC*, *enz.* in hetzelfde vlak, het grondvlak namelijk van de piramide *P*, liggen, zoo zullen *ab*, *bc*, *enz.* insgelijks in hetzelfde vlak moeten gelegen zijn, en het grondvlak van de vijfhoekige piramide *Q* daarstellen, *welke piramide Q, op die wijze voortgebragt, aan de piramide P gelijkvormig zal zijn.*

Door dezelfde constructie, zal men piramiden verkrijgen, die aan gestelde veelhoekige piramiden gelijkvormig zijn. Maar nu kunnen wij ons het ontstaan der gelijkvormige ligchamen, door slechts evenwijdige lijnen te trekken, veel algemeener voorstellen. Zij *P*, *fig.* 386, een veelvlakkig ligchaam van boven door zes, van onder door zes driehoeken, en in het midden door vierhoekige zijvlakken ingesloten. Men vestige zijne aandacht op één der hoekpunten, bij voorbeeld het hoekpunt *A*, aan hetwelk de zijvlakken *ABG*, *AGF*, *ABIH* en *AFNH*, en de ribben *AB*, *AG*, *AF* en *AH* zamenkomen. Uit dit hoekpunt *A*, kunnen nu, tot aan al de overige hoekpunten van het ligchaam *P*, de hoekpunts-



I. Schweickhardt sculps.

puntslijnen *AN*, *AI*, *AC*, *AD*, *AE*, *AK*, *AL*, *AM*, *AO* worden getrokken, door welke het ligchaam *P* in zoo veel aan elkander sluitende, en in het punt *A* zamenkomende, drie- en vierhoekige piramiden verdeeld wordt, als er, behalve de zijvlakken, die den viervlakkigen hoek *A* bepalen, zijvlakken in hetzelve bestaan; namelijk (in onze bijzondere figuur,) de piramiden, welke de driehoeken *BCG*, *CGD*, *DGE*, *EGF*, *HIO*, *IOK*, *KOL*, *LOM*, *MON*, *NOH*, en de vierhoeken *BCKI*, *CDLK*, *DEML* en *EFNM* tot grondvlakken hebben. *Hoe groot nu het aantal der zijvlakken van een veelvlakkig ligchaam zou mogen zijn, en op welke wijze ten opzigte van elkander geplaatst, men zal, uit elk hoekpunt van dit ligchaam tot aan de overige hoekpunten, hoekpuntslijnen kunnen trekken, en deze zullen het veelvlakkige ligchaam in een bepaald aantal drie- en veelhoekige piramiden verdeelen, welke alle met hunne toppunten aan dit hoekpunt zamenkomen, en tot grondvlakken zullen hebben de zijvlakken van dit veelvlakkige ligchaam, behalve die, welke aan het hoekpunt, den drie- of veelvlakkigen hoek vormen.*

Laat nu, in dezelfde figuur (*fig.* 386), buiten het ligchaam *P*, een punt *a* worden aangenomen, en door hetzelve de lijnen *af*, *ag*, *ab*, *ah*, evenwijdig aan de ribben *AF*, *AG*, *AB*, *AH*, en de lijnen *ac*, *ad*, *ae*, *ai*, *ak*, *al*, *am*, *an*, *ao*, evenwijdig aan de hoekpuntslijnen *AC*, *AD*, *AE*, *AI*, *AK*, *AL*, *AM*, *AN*, *AO* worden getrokken, altijd in dezelfde rigting. Men neme op *ab*, het punt *b* zóó, dat *ab* grooter of kleiner dan *AB* zij, en nu late men, door het punt *b* en de lijn *BG*, een vlak gaan; dan zal dit vlak het vlak *bag* (XXIV. *Stell.* VIII. *B.*) volgens *bg*, evenwijdig aan *BG* loopende, doorsnijden; voorts door *b* en *BC*, door *g* en *GC* een vlak, welke de vlakken *bca* en *cga*, volgens de lijnen *bc* en *cg*, evenwijdig zijnde aan *BC* en *CG*, zullen snijden, en alzoo de punten *c* en *g* van het ligchaam *Q* bepalen, *enz.* Of beknopter aldus. Na het punt *b* aangenomen te hebben, trekke men *bg*, evenwijdig aan *BG*; dan is het punt *g* bepaald; uit *g* de lijnen *gc*, *gd*, *ge*, *gf*, evenwijdig aan *GC*, *GD*, *GE*, *GF*; voorts *bc* aan *BC*, *cd* aan *CD*, *de* aan *DE*, *ef* aan *EF*, *ai* aan *AI*, *an* aan *AN*, *bi* aan *BI*, *ck* aan *CK*, *dl* aan *DL*, *em* aan *EM*, *fn* aan *FN*, *ih* aan *IH*, *hn* aan *HN*, *nm* aan *NM*, *ml* aan *ML*, *lk* aan *LK*, *ik* aan *IK*, *ho* aan *HO*, *io* aan *IO*, evenwijdig; dan verkrijgt men, al die evenwijdige lijnen getrokken hebbende, *eene ligchamelijke figuur Q*, *die aan P gelijkvormig zal zijn*, *en gelijkvormig genoemd wordt; omdat wij, indien de constructie naauwkeurig is uitgevoerd, in dezelve de figuur of gedaante van het ligchaam P herkennen.*

Uit deze opheldering blijkt nu ten klaarste: *dat de gelijkvormige ligchamelijke figuren, door het trekken van evenwijdige lijnen, op dezelfde wijze, worden verkregen, als de gelijkvormige veelhoekige vlakke figuren;* aangezien nu al die geconstrueerde lijnen, die aan het punt *a* en aan al de overige punten zamenkomen (XXIV. *Stell.* VIII. *B.*) op alle

 mo-

mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, hoeken maken, die gelijk zijn aan de hoeken, aan welker beenen zij evenwijdig zijn getrokken (*hoek bag* = *hoek BAG*, *hoek dlk* = *hoek DLK*, *enz.*) zoo kunnen wij van de veelvlakkige gelijkvormige ligchamen deze, op eene alzins mogelijke constructie berustende, bepaling geven.

§. 817. XX. Bepaling. *Fig.* 386. **Twee veelvlakkige ligchamen *P* en *Q* *zijn gelijkvormig*, wanneer al de ribben en hoekpuntslijnen, welke aan twee overeenstemmende punten *A* en *a* zamenkomen, zoo met elkander, als met al de andere overeenstemmende ribben dezer figuren, twee aan twee genomen, gelijke hoeken maken.**

De twee gelijkvormige veelvlakkige ligchamen *P* en *Q* hebben natuurlijk hetzelfde aantal hoekpunten, ribben en zijvlakken, welke, in beide figuren, ten opzigte van elkander, op dezelfde wijze geplaatst zijn, en daarom *overeenstemmende hoekpunten*, *ribben* en *zijvlakken* worden genoemd; zijnde, in *fig.* 384, 385 en 386, de overeenstemmende hoekpunten, ribben en zijvlakken, gemakshalve door dezelfde letters, *A* en *a*, *B* en *b*, *enz.* aangewezen.

XXV. Stelling. *Fig.* 384, 385 *en* 386.

§. 818. *Twee gelijkvormige veelvlakkige ligchamen hebben de volgende eigenschappen: 1°. staan de overeenstemmende ribben en hoekpuntslijnen tot elkander in dezelfde reden; 2°. elke twee ribben of hoekpuntslijnen, in de eerste figuur, snijden elkander onder hoeken, die gelijk zijn aan de hoeken, onder welke de overeenstemmende ribben of hoekpuntslijnen, in de tweede figuur, elkander snijden; 3°. elk tweetal overeenstemmende zijvlakken hebben gelijke standhoeken; 4°. de overeenstemmende veelvlakkige hoeken passen of sluiten in elkander; 5°. de overeenstemmende zijvlakken zijn gelijkvormige figuren.*

Betoog. Alhoewel het betoog dezer gewigtige leerstelling niet moeijelijk is, is het echter noodig, dat men hetzelve naga: 1°. in de driehoekige piramiden; 2°. in de veelhoekige piramiden, en 3°. voor de gelijkvormige veelvlakkige ligchamen, in het algemeen.

A. *Fig.* 384. Wanneer, in de gelijkvormige driehoekige piramiden *P* en *Q*, *A* en *a*, *B* en *b*, *C* en *c*, *D* en *d*, de overeenstemmende hoekpunten, *AB* en *ab*, *AC* en *ac*, *enz.* de overeenstemmende ribben zijn, (hoekpuntslijnen bestaan in dezelve niet,) dan is (XX. *Bep.*) *hoek adb* = *hoek ADB*, *hoek adc* = *hoek ADC*, *hoek bdc* = *hoek BDC*, *hoek dab* = *hoek DAB*, *hoek cad* = *hoek CAD*, en derhalve (IX. *Gev.* XIII. *Stell. I. B.*) *hoek abd* = *hoek ABD*, en *hoek acd* = *hoek ACD*; volgens de (III. *Bep.* IV. *B.*) zijn dan gelijkvormig *drieh. abd* met *drieh. ABD* en *drieh. acd* met *drieh. ACD*, en dan is (VIII. *Stell.* IV. *B.*)

$$ab : AB = ac : AC = bd : BD = cd : CD = ad : AD.$$

Nu

Nu is *hoek bdc* = *hoek BDC* (*onderst.*); gevolgelijk is (X. *Stell.* IV. *B.*) *drieh. bcd* gelijkvormig aan *drieh. BCD*; waaruit volgt:

$$bc : BC = bd : BD = ab : AB = ac : AC$$

en daarom is (IX. *Stell.* IV. *B.*) *drieh. abc* gelijkvormig aan driehoek *ABC*, of *hoek bac* = *hoek BAC*, *hoek abc* = *hoek ABC*, *hoek acb* = *hoek ACB*, *hoek cbd* = *hoek CBD*, *hoek bcd* = *hoek BCD*; de gelijkheid van welke twee laatste hoeken anders uit de XX. *Bep.* onmiddellijk volgt.

Uit dit alles blijkt dan: dat vooreerst de overeenstemmende ribben evenredig zijn; namelijk

$$(AB, BC, AC, AD, BD, CD) :: (ab, bc, ac, ad, bd, cd)$$

en ten anderen, dat de drievlakkige hoeken aan de overeenstemmende hoekpunten *A* en *a*, *B* en *b*, *C* en *c*, *D* en *d*, in elkander passen; maar dan moeten ook (XXXVIII. *Stell.* VIII. *B.*) de standhoeken der overeenstemmende zijvlakken, bij voorbeeld, *ABD* met *ADC* en *abd* met *adc*, gelijk zijn; terwijl uit den loop van het betoog de gelijkvormigheid der overeenstemmende zijvlakken *ABC* en *abc*, *ABD* en *abd*, *enz.* volledig gebleken is.

B. *Fig.* 385. Laten *F* en *f*, twee overeenstemmende punten der gelijkvormige vijfhoekige piramiden *P* en *Q* zijn; dan moeten, volgens de aangenomene bepaling der gelijkvormigheid, de opstaande ribben *af*, *bf*, *cf*, *df* en *ef*, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, hoeken met elkander maken, die gelijk zijn aan de hoeken der overeenkomstige ribben *AF*, *BF*, *CF*, *DF* en *EF*; namelijk *afb* = *AFB*, *bfc* = *BFC*, *cfd* = *CFD*, *dfe* = *DFE*, *efa* = *EFA*, *afc* = *AFC*, *afd* = *AFD*, *bfe* = *BFE*, *bfd* = *BFD* en *cfe* = *CFE*.

Uit hoofde van diezelfde bepaling, is verder *hoek fab* = *hoek FAB*, *hoek fae* = *hoek FAE*; en daarom (IX. *Gev.* XVIII. *Stell.* I. *B.*) *hoek fba* = *hoek FBA*, *hoek fea* = *hoek FEA*. Voorts *hoek fbc* = *hoek FBC*, *hoek fed* = *hoek FED*; waaruit dan wederom volgt: *hoek bcf* = *hoek BCF*, *hoek def* = *hoek DEF*. Uit de gelijkheid nu dezer hoeken volgt (III. *Bep.* IV. *B.*), dat de driehoeken *BCF*, *BAF*, *AEF* en *DEF* aan de driehoeken *bcf*, *baf*, *aef* en *def* gelijkvormig zijn; derhalve is (VIII. *Stell.* IV. *B.*)

$$(AB, BC, AE, ED, CF, BF, EF, AF) :: (ab, bc, ae, ed, cf, bf, ef, af)$$

Omdat nu *hoek cfd* = *hoek CFD* is, zoo is (X. *Stell.* IV. *B.*) *drieh. cdf* gelijkvormig aan *drieh. CDF*, en daarom *hoek fcd* = *hoek FCD* en *hoek fdc* = *hoek FDC*; gevolgelijk is (VIII. *Stell.* IV. *B.*)

$$CD : cd = CF : cf = BC : bc = AB : ab \text{ enz.}$$

Men trekke, in de grondvlakken, de hoekpuntslijnen *AC* en *AD*, *ac* en *ad*. Omdat dan (XX. *Bep.*) *hoek afc* = *hoek AFC* is, en *AF* : *CF* = *af* : *cf* (*bew.*), zoo zijn ook (X. *Stell.* IV *B.*) de driehoeken *AFC* en *afc* gelijkvormig, en om die reden, *hoek fac* = *hoek FAC*, *hoek acf* = *hoek ACF*, en *AC* : *ac* = *AF* : *af* = *AB* : *ab* = *AC* : *ac*; gevol-

ge-

gelijk is (IX. *Stell.* IV. *B.*) *drieh. ABC* gelijkvormig aan *drieh. abc*, en daarom (III. *Bep.* IV. *B.*) *hoek bac* = *hoek BAC*, *hoek abc* = *hoek ABC* en *hoek acb* = *hoek ACB*.

Om dezelfde reden, zullen de driehoeken *AFD* en *afd*, *BFE* en *bfe*, *CFE* en *cfe*, *BFD* en *bfd*, *ACD* en *acd*, *ADE* en *ade*, *ABE* en *abe*, *BCE* en *bce*, *CDE* en *cde* gelijkvormig zijn; uit al hetwelk dan eindelijk blijkt (IV. *Bep.* IV. *B.*), dat het grondvlak *ABCDE* gelijkvormig is aan het grondvlak *abcde*.'

Dit alles nu te zamen nemende, blijkt het: dat de overeenstemmende ribben en hoekpuntslijnen tot elkander in dezelfde reden staan, dat de overeenstemmende drievlakkige hoeken aan de grondvlakken, en de vijfvlakkige hoeken aan de toppunten in elkander sluiten; waaruit van zelf de gelijkheid van de standhoeken der zijvlakken volgt; en dat eindelijk al de overeenstemmende zijvlakken gelijkvormig zijn.

C. *Fig.* 386. Thans zal men gemakkelijk betoogen: *dat het gestelde voor alle gelijkvormige veelvlakkige ligchamen gelden zal.* De reeds boven beschrevene gelijkvormige veelvlakkige figuren *P* en *Q*, als grondslag des betoogs aannemende, en, uit twee der overeenstemmende hoekpunten *A* en *a*, alle mogelijke hoekpuntslijnen getrokken hebbende, zoo is het ligchaam *P* verdeeld in de aan elkander sluitende drie- en vierhoekige piramiden *AEFG*, *AEDG*, *ADCG*, *ABCG*, *ABCKI*, *ACDLK*, *ADEML*, *AEFNM*, *AHIO*, *AHNO*, *ANMO*, *ALMO*, *ALKO*, *AKIO*, met welke, in dezelfde volgorde, in fig. *Q*, de piramiden *aefg*, *aedg*, *adcg*, *abcg*, *abcki*, *acdkl*, *aideml*, *aefnm*, *ahio*, *ahno*, *anmo*, *almo*, *alko*, *akio*, overeenstemmen, die insgelijks alle aan elkander sluiten, en in het hoekpunt *a* zamenkomen.

Te betoogen, dat al die overeenstemmende piramiden gelijkvormig zijn, zou eene herhaling van het reeds betoogde zijn. Die gelijkvormigheid dan als bewezen aannemende, zoo, zijn uit kracht van het reeds betoogde, al de overeenstemmende hoekpuntslijnen en ribben tot elkander in dezelfde reden.

Maar, *behalve de hoekpuntslijnen, die, uit de overeenstemmende hoekpunten A en a, kunnen worden getrokken, zijn ook nog evenredig alle hoekpuntslijnen, die uit twee andere overeenstemmende hoekpunten B en b*, *C en C*, enz. *tot de overige hoekpunten worden getrokken.* Trekken wij, bij voorbeeld, de overeenstemmende hoekpuntslijnen *FK* en *fk*; dan is, in de driehoeken *AFK* en *afk*, volgens de constructie of algemeene bepaling, *hoek FAK* = *hoek fak* en *AF* : *af* = *AK* : *ak* (*bew.*); derhalve zijn (X. *Stell.* IV. *B.*) de driehoeken *AFK* en *afk* gelijkvormig, en daarom *hoek AKF* = *hoek akf*, *hoek AFK* = *hoek afk* en *FK* : *fk* = *AF* : *af* = *AB* : *ab* = *enz.* Ten opzigte van alle andere overeenstemmende hoekpuntslijnen, zal hetzelfde gelden; en ook ten opzigte van de overeenstemmende hoekpuntslijnen, welke in de vier- of veelhoekige zijvlakken bestaan.

Het

Het blijkt dan: dat de overeenstemmende zijvlakken gelijkvormige drie- of veelhoeken zijn; en wijl alle gelijkvormige drie- of veelhoeken onderling gelijkhoekig zijn, zoo zullen de drie- of veelvlakkige hoeken aan de overeenstemmende hoekpunten, in elkander sluiten; en daarom zijn ook de standkoeken der zijvlakken, die aan de overeenstemmende ribben zamenkomen, gelijk.

§. 819. I. AANMERKING. *Wanneer men, in de figuren* 384, 385 *en* 386, *die tot de beschrijving van de gelijkvormigheid gediend hebben,* $da = DA$ (*in* fig. 384 *en* 385) *en* $ab = AB$ (*in* fig. 386) *neemt; dan worden de figuren P en Q gelijk- en gelijkvormig;* dat is, *zij sluiten volkomen in elkander;* zoo als de figuren, N°. 1 en 2, *fig.* 353, die, door het trekken van evenwijdige en gelijke lijnen, verkregen worden.

§. 820. II. AANMERKING. *Fig.* 387. *De hoogten van twee gelijkvormige drie- of veelhoekige piramiden staan tot elkander, in dezelfde reden, als twee van derzelver overeenstemmende ribben.*

Want laten, uit de toppunten F en f, de loodlijnen FG en fg op de grondvlakken $ABCDE$ en $abcde$ vallen; en, in de overeenstemmende zijvlakken ABF en abf, de lijnen FH en fh loodregt op de overeenstemmende ribben AB en ab; indien men dan de lijnen HG en hg trekt; dan zijn (*VIII. Stell. VIII. B. en het bew.*) hoek FHG = hoek fhg; de driehoeken FGH en fgh, zijn dan (*III. Bep. IV. B.*) gelijkvormig; derhalve is (*VIII. Stell. IV. B.*)

$$FG : fg = FH : fh$$

Maar in de driehoeken ABF en abf, is (*II. Gev. VIII. St. IV. B.*)

$$FH : fh = AB : ab$$

derhalve is (*I. Stell. II. B.*) volgens het betoogde,

$$FG : fg = AB : ab = AF : af = BF : bf$$

Wanneer men, uit de punten G en g, tot aan de hoekpunten der grondvlakken, regte lijnen trekt; dan zal

$$(GH, GA, GB, GC, GD, GE) :: (gh, ga, gb, gc, gd, ge)$$

zijn, hetwelk ligtelijk te bewijzen is.

XXVI. (XXV.) STELLING. *Fig.* 388, 389 *en* 390.

§. 821. *Wanneer men, of binnen, of in, of buiten het oppervlak van een ligchaam, veelvlakkig of rond, ergens een punt* (*P*) *aanneemt, en, uit hetzelve, tot aan al de hoekpunten van het veelvlakkige ligchaam, of tot al de punten van het ronde ligchaam, lijnen trekt, en op dezelve, van dit punt* (*P*) *af te rekenen, deelen neemt, die tot de geheele lijnen, overal in dezelfde reden staan; dan zullen die punten het oppervlak van een ligchaam bepalen, dat aan het eerste gelijkvormig is.*

Betoog. Deze gewigtige leerstelling stemt overeen met de XIV *Stell.* van het IV *Boek*, en zou, zoo als dáár, ook in verscheidene gevallen en omstandigheden kunnen worden voorgesteld. Thans zullen wij ons echter tot de drie volgende gevallen bepalen.

A. *Fig.* 388. Stel, buiten het vlak *TU* een punt *P*. Indien dan, uit hetzelve tot aan eenige punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *enz.* in dit vlak lijnen *PA*, *PB*, *PC*, *PD*, *PE*, *enz.* worden getrokken, en, op dezelve, de punten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *enz.* zóó worden aangenomen, dat

(*Pa*, *Pb*, *Pc*, *Pd*, *Pe*, *enz.*) : : (*PA*, *PB*, *PC*, *PD*, *PE*, *enz.*)

is; dan liggen de punten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, in èen vlak, dat evenwijdig is aan het vlak *TU*; en de veelhoekige figuur *abcde*, die door de vereeniging der punten *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ontstaat, zal aan de figuur *ABCDE* gelijkvormig zijn.

Want, in den driehoek *PAB*, is *Pa* : *PA* = *Pb* : *PB* (*onderst.* of *constr.*), en daarom is (II. *Stell.* IV. *B.*) de lijn *ab* evenwijdig aan *AB*. Om dezelfde reden, zijn, in de driehoeken *PBC*, *PCD*, *PCE*, *PEA*, *PAD* en *PAC*, de lijnen *bc*, *cd*, *de*, *ea*, *ad* en *ac*, evenwijdig aan *BC*, *CD*, *DE*, *EA*, *AD*; en daarom is (XXIV. *Stell.* VIII *B.*) *hoek bac* = *hoek BAC*, *hoek cad* = *hoek CAD*, *hoek dae* = *hoek DAE*, *hoek abc* = *hoek ABC*, *hoek bcd* = *hoek BCD* en *hoek dea* = *hoek DEA*; terwijl de punten *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, in een vlak liggen, dat evenwijdig is aan het vlak *TU*; gevolgelijk is (IV. *Bep.* IV. *B.*) de veelhoek *abcde* gelijkvormig aan den veelhoek *ABCDE*.

Wanneer, in het vlak *TU*, eene onregelmatige kromlijnige figuur ware voorgesteld; dan zou men, door dezelfde constructie, eene figuur verkrijgen, die aan de gegevene gelijkvormig zou zijn; hetwelk op dezelfde wijze betoogd wordt.

B. *Fig.* 389. Laat *ABCDEFGH* een gedeelte van het oppervlak van een veelvlakkig ligchaam voorstellen, bestaande uit de vereeniging van de zijvlakken *ABCD*, *ADE*, *AEFG* en *AGHB*, die aan het hoekpunt *A* een viervlakkigen hoek *A* maken. Indien men nu, uit een punt *P*, tot aan al de hoekpunten der zijvlakken, lijnen *PA*, *PB*, *PC*, *PD*, *PE*, *PF*, *PG*, *PH* trekt, en, op die lijnen, de punten *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g*, *h* zóó aanneemt, dat

(*Pa*, *Pb*, *Pc*, *Pd*, *Pe*, *Pf*, *enz.*) : : (*PA*, *PB*, *PC*, *PD*, *PE*, *PF*, *enz.*)

is, en die punten voorts, door lijnen *ab*, *ad*, *enz.* op dezelfde wijze vereenigd worden, als in de gegevene figuur de overeenkomstige hoekpunten door ribben zijn vereenigd; dan zal de vereeniging der vlakken *abcd*, *ade*, *aefg* en *aghb*, een gedeelte zijn van het oppervlak van een ligchaam, dat gelijkvormig is aan het gegevene.

Want, volgens het eerste gedeelte van het betoog, zijn de vlakken *abcd*, *ade*, *aefg* en *aghb*, gelijkvormig aan de zijvlakken *ABCD*, *ADE*, *AEFG* en *AGHB*, en ook evenwijdig aan dezelve, en daarom zijn (XXXI. *Stell.* VIII. *B.*) de standhoeken der eerste vlakken, twee aan twee genomen, gelijk aan de standhoeken der overeenkomstige zijvlakken;

ken; de viervlakkige hoek *a* zal dan in den viervlakkigen hoek *A* sluiten.

Men vereenige de hoekpunten *B* en *E*, bij voorbeeld, door *BE* en de overeenkomstige punten *b* en *e* door *be*; dan is *hoek BPE* = *hoek bpe*, en *Pe* : *PE* = *Pb* : *PB*; de driehoeken *PBE* en *pbe* zijn dan (X. *Stell.* IV. *B.*) gelijkvormig, en daarom is *BE* : *be* = *PB* : *pb* = *AB* : *ab*. Hetzelfde zal voor al de andere overeenkomstige hoekpuntslijnen moeten plaats hebben; wij hebben dan:

(*BD*, *BF*, *BG*, *CG*, *CH*, *enz.*) : : (*bd*, *bf*, *bg*, *cg*, *ch*, *enz.*)

de figuur derhalve, door de voorgeschrevene constructie verkregen, zal dan (XXV. *Stell.*) aan de gestelde gelijkvormig zijn. — *En, wat wij nu van een gedeelte van het oppervlak van een veelvlakkig ligchaam bewezen hebben, zal van het geheel op dezelve wijze moeten plaats hebben.*

C. *Fig.* 390. Laat eindelijk *ABCDEF* eene kromme lijn zijn, die op het gebogene oppervlak van eenig ligchaam getrokken is, *P* een punt binnen of buiten dit ligchaam genomen, *G* en *H* punten in het oppervlak van hetzelve; indien men uit dit punt *P* lijnen *PA*, *PB*, *enz.* tot aan al de punten van het oppervlak en deszelfs omtrek trekt, en de overeenstemmende punten *a*, *b*, *enz.* onder de gestelde voorwaarde aanneemt; dan zal men een ligchaam verkrijgen, dat aan het gegevene gelijkvormig is. Dit wordt, op dezelfde wijze, als het derde gedeelte van de XIV. *Stell.* IV. *B.* betoogd.

§. 822. I. Aanmerking. Uit de twee laatste stellingen en derzelver betoogen, blijkt: *dat de gelijkvormige ligchamelijke figuren op dezelfde wijze ontstaan en bestaan, als de gelijkvormige vlakke figuren, en dat alles, wat in deze laatste plaats heeft, ook van de eerste zal moeten gelden.*

§. 823. II. Aanmerking. *Alle bollen zijn gelijkvormige figuren.* Want, wanneer men het middelpunt van den kleinsten bol in het middelpunt van den grootsten plaatst; dan zal het oppervlak van den kleinsten uit de voorgestelde constructie geboren worden, en dus gelijkvormig aan het oppervlak van den grootsten zijn.

§. 824. III. Aanmerking. *Fig.* 386. *Wanneer men, in figuur P, al de ribben en hoekpuntslijnen, die uit het hoekpunt A voorkomen, in eene tegenovergestelde rigting verlengt, en op die verlengde ribben en hoekpuntslijnen punten b, c, d,* enz. *zoo aanneemt, dat*

(*Ab*, *Ac*, *Ad*, *Ae*, enz.) : : (*AB*, *AC*, *AD*, *AE*, enz.)

is; dan zal men een ligchaam verkrijgen, ingesloten door zijvlakken, die aan de zijvlakken van het ligchaam P gelijkvormig zijn; doch welks veelvlakkige hoeken (daar de zijvlakken van dezelve, in eene omgekeerde volgorde, gelijk zijn,) *niet meer in de overeenkomstige veelvlakkige hoeken van het ligchaam zullen sluiten. Dit alzoo voortge-*

gebragte ligchaam zal dan, bij tegenoverstelling, aan het ligchaam P gelijkvormig zijn.

§. 825. XXI. Bepaling. De som van al de zijvlakken van een veelvlakkig ligchaam, noemt men *deszelfs omtrek*, en de som van al de platte of gebogene vlakken, welke een ligchaam in het algemeen bepalen den *omtrek* of het *oppervlak* van hetzelve.

§. 826. XXII. Bepaling. Een veelvlakkig ligchaam wordt gezegd, *in een rond of rondachtig ligchaam beschreven te zijn*, wanneer al deszelfs hoekpunten in het oppervlak van dit ligchaam liggen. Het wordt gezegd, *om dit ronde ligchaam beschreven te zijn*, wanneer al de zijvlakken van het veelvlakkige ligchaam het oppervlak van het ronde aanraken.

III. Hulpstelling. *Fig.* 391.

§. 827. *Laat de onregelmatige omtrek* A B C enz. G H I *de omtrek van een gedeelte van het oppervlak van een ligchaam voorstellen, dat door eenig gebogen vlak is ingesloten; en laat voorts, in dit gedeelte des oppervlaks, op zeer kleine afstanden van elkander punten* K, L, M, N, O, Q, R, S, T, enz. *worden aangenomen, en door regte lijnen zoodanig vereenigd, dat men eene aaneenschakeling van zeer kleine driehoekjes verkrijgt, (hetgeen altijd geschieden kan). Laat al verder, binnen dit ligchaam, een punt P worden aangenomen, en, uit hetzelve, tot aan al de hoekpunten dezer driehoekjes, lijnen worden getrokken; dan verkrijgt men een veelvlakkig ligchaam, zamengesteld uit een groot aantal driehoekige piramiden, die aan het punt P zamenkomen. Laat voorts eene lijn, door het punt P gaande, langs den kromlijnigen omtrek* A B C enz. *worden bewogen; dan zal men een kegelvormig ligchaam verkrijgen, ingesloten door het gebogene vlak, hetwelk door de beweging van die lijn wordt voortgebragt, en het eerst gestelde gebogene vlak. Nu zeg ik: dat de ligchamelijke inhoud van het veelvlakkige piramidaalvormig ligchaam, zoo veel te nader bij den inhoud van het kegelvormige, en de som van de inhouden van al de kleine driehoekjes* A B L, B L M, enz. *zoo veel te naderbij aan den inhoud van het gebogene oppervlak* A B C D enz. *komen zal, naarmate gezegde punten digter bij elkander genomen worden; en dat eindelijk die inhouden gelijk zullen worden, wanneer al die punten eindelijk in elkander vallen.*

Men

Men raadplege voor het betoog, of liever opheldering dezer stelling, de *Hulpstelling*, *IV. B. Bladz.* 116.

IV. HULPSTELLING.

§. 828. *Indien vier lijnen A, B, C en D evenredig zijn; dan zullen ook de inhouden van de kuben, op dezelve beschreven, eene evenredigheid uitmaken.*

BETOOG. Volgens de onderstelling is $A : B = C : D$. Men beschrijve dan op de lijnen A en B, regthoeken, die de lijn A, en op de lijnen C en D, regthoeken, die de lijn C tot hoogte hebben; dan is (XI. *Stell.* III. *B.*)

$$\text{vierk } A^2 : \text{regth. } AB = A : B = C : D$$
$$\text{vierk. } C^2 : \text{regth. } CD = C : D$$

derhalve is $\text{vierk. } A^2 : \text{regth. } AB = \text{vierk. } C^2 : \text{regth. } CD$

Plaatst men nu verder op de grondvlakken A^2 en AB regthoekige parallelopipedums, die A, en op de grondvlakken C^2 en CD dergelijke ligchamen, die C tot hoogte hebben; dan zal (XIV. *Stell.*)

$$\text{kub. } A^3 : \text{parallpp. } A^2 B = A^2 : AB = C^2 : CD$$
$$\text{kub. } C^3 : \text{parallpp. } C^2 D = C^2 : CD \text{ zijn;}$$

derh. $\text{kub. } A^3 : \text{parallpp. } A^2 B = \text{kub. } C^3 : \text{parallpp. } C^2 D$

en $\text{kub. } A^3 : \text{kub. } C^3 = \text{parallpp. } A^2 B : \text{parallpp. } C^2 D \ldots (A)$

Volgens de VII. *Stell.* III. *B.* is, $A^2 : B^2 = C^2 : D^2$. Beschrijft men op de twee eerste vierkanten A^2 en B^2, twee parallelopipedums, die B, en op de twee laatste twee parallelopipedums, die D tot hoogte hebben; dan is (XIV. *Stell.*)

$$\text{parallpp. } A^2 B : \text{kub. } B^3 = A^2 : B^2 = C^2 : D^2$$
$$\text{parallpp. } C^2 D : \text{kub. } D^3 = C^2 : D^2$$

derhalve $\text{parallpp. } A^2 B : \text{kub. } B^3 = \text{parallpp. } C^2 D : \text{kub. } D^3$

of $\text{parallpp. } A^2 B : \text{parallpp } C^2 D = \text{kub. } B^3 : \text{kub. } D^3$

Vergelijkt men deze laatste evenredigheid met de evenredigheid (A); dan verkrijgt men (I *en* VI. *Stell.* II.)

$$\text{kub. } A^3 : \text{kub. } C^3 = \text{kub. } B^3 : \text{kub. } D^3$$
$$\text{of kub. } A^3 : \text{kub. } B^3 = \text{kub. } C^3 : \text{kub. } D^3$$

§. 829. AANMERKING. Men zal ook gemakkelijk betoogen: *dat de zijvlakken en de ribben van vier evenredige kuben evenredig zijn.*

V. HULPSTELLING.

§. 830. *Indien vier lijnen A, B, C, D, eene meetkunstige rij uitmaken (dat is $A : B = B : C = C : D$), dan staan de vierkanten op de twee eerste lijnen beschreven, in dezelfde reden, als de eerste tot de derde; en de kuben op dezelve, als de eerste tot de vierde lijn; dat is $A^2 : B^2 = A : C$, en $A^3 : B^3 = A : C$.*

BETOOG. Volgens de onderstelling, is $A : B = B : C$. Vermenigvuldigt men deze evenredigheid met $A : B = A : B$; dan vindt men $A^2 : B^2 = A : C$. Vermenigvuldigt men deze laatste evenredigheid nog met $A : B = C : D$; dan verkrijgt men $A^3 : B^3 = A : D$.

XXVII. (XXX.) STELLING. *Fig.* 392, 385, 386 *en* 391.

§. 831. *De inhouden van gelijkvormige (veelvlakkige of ronde) ligchamen staan tot elkander in dezelfde reden, als de kuben; en de omtrekken dezer ligchamen, als de vierkanten, welke op de overeenstemmende ribben, hoekpuntslijnen, of op de afstanden der overeenstemmende punten zijn beschreven.*

BETOOG. Deze algemeene leerstelling moet, in de volgende gevallen overwogen worden.

A. *Voor de gelijkvormige driehoekige piramiden. Fig.* 392. Laten $ABCD$ en $abcd$ twee gelijkvormige driehoekige piramiden zijn, (in welke de overeenstemmende hoekpunten en zijvlakken door dezelfde letters A en a, *enz.* zijn aangewezen). Men beschrijve, op de overeenstemmende ribben AB en ab, de vierkanten $ABFG$ en $abfg$, en plaatse deze vierkanten met de grondvlakken ABC en abc, in hetzelfde vlak. Op deze vierkanten $ABFG$ en $abfg$, construere men de kuben $ABFGI$ en $abfgi$; dan is de eerste de kubus, op de ribbe AB, en de tweede de kubus, op de ribbe ab beschreven.

Men trekke de lijnen DG, DF en dg, df; dan verkrijgt men de vierhoekige piramiden $ABFGD$ en $abfgd$, die de vierkanten $ABFC$ en $abfg$ tot grondvlakken hebben. Men late nog, uit de toppunten D en d, de loodlijnen DE en de op de grondvlakken vallen; dan zijn deze de hoogten der piramiden $ABCD$ en $abcd$; en dan is (II. *Aanm.* XXV. *Stell.*) $DE : de = AB : ab = AC : ac$, *enz.* Eindelijk trekke men nog, uit de overeenstemmende hoekpunten I en i der kuben, de hoekpuntslijnen IB, IG, IA en ib, ig, ia; dan zijn (XIX. *Stell. en Aanm.*) de inhouden der vierhoekige piramiden $ABFGI$ en $abfgi$, gelijk aan de derde deelen van de inhouden der kuben, die op de ribben AB en ab zijn beschreven.

De piramiden $ABCD$ en $ABFGD$, hebben dezelfde hoogte DE; derhalve is (XXII. *Stell.*)

piram. $ABCD$: *piram.* $ABFGD$ = *drieh.* ABC : *vierk.* $ABFG$

maar, aangezien de piramiden $ABCD$ en $abcd$ gelijkvormig zijn, zoo is (XXV. *Stell.*) het grondvlak ABC gelijkvormig aan het grondvlak abc; en daarom is (XI. *Stell.* IV. *B.*)

drieh. ABC : *drieh.* abc = *vierk.* $ABFG$: *vierk.* $abfg$

of *drieh.* ABC : *vierk.* $ABFG$ = *drieh.* abc : *vierk.* $abfg$ (VII. *St.* II. *B.*)

en dus is, zie I. *Stell.* II. *B.*

piram. $ABCD$: *piram.* $ABFGD$ = *drieh.* abc : *vierk.* $abfg$

Nog

Nog hebben de piramiden *abcd* en *abfgd* dezelfde hoogte *de*, en daarom is (*XXII. Stell.*) wederom

piram. $abcd$: piram. $abfgd$ = drieh. abe : vierk. $abfg$

uit welke laatfte evenredigheid en de onmiddellijk voorgaande, (zie *I. St. II. B.*) zal volgen:

piram. $ABGD$: piram. $ABFGD$ = piram. $abcd$: piram. $abfgd$

of (*VII. Stell. II.*) bij verwisfeling van redens,

piram. $ABCD$: piram. $abcd$ = piram. $ABFGD$: piram. $abfgd$ (*A*)

In de eerfte figuur, ftaan de vierhoekige piramiden *ABFGH* en *ABFGI* op hetzelfde grondvlak, en daarom zijn (*XXII. Stell*) derzelver inhouden tot elkander in reden, als hunne hoogten *DE* en *IF*; dat is, omdat (*onderft.*) *AB* = *FI* is,

piram. $ABFGD$: piram. $ABFGI = DE : AB$

maar boven hebben wij reeds opgemerkt, dat $DE : AB = de : ab$ is; dus kan men, in plaats van de laatfte evenredigheid, fchrijven:

piram. $ABFGD$: piram. $ABFGI = de : ab$

In de tweede figuur, is, om dezelfde reden, als in de eerfte:

piram. $abfgd$: piram. $abfgi = de : ab$

derhalve is (*I. Stell. II. B.*)

piram. $ABFGD$: piram. $ABFGI$ = piram. $abfgd$: piram. $abfgi$

of (*VII. Stell. II. B.*) bij verwisfeling van redens,

piram. $ABFGD$: piram. $abfgd$ = piram. $ABFGI$: piram. $abfgi$ (*B*)

Wanneer men nu deze laatfte evenredigheid (*B*) vergelijkt, met de evenredigheid (*A*), die boven betoogd is; dan zal (*I. Stell. II. B*)

piram. $ABCD$: piram. $abcd$ = piram. $ABFGI$: piram. $abfgi$

en dan is ook, volgens de *VI. Stell. II. B.*

piram. $ABCD$: piram. $abcd$ = 3 piram. $ABFGI$: 3 piram. $abfgi$

dat is, volgens het bovenftaande:

piram. $ABCD$: piram. $abcd = AB^3 : ab^3$

Volgens de *XXV. Stell.* zijn de zijvlakken *ABC*, *ABD*, *BCD* en *ACD* gelijkvormig met de overeenftemmende zijvlakken *abc*, *abd*, *bcd* en *acd*; derhalve is (*XI. Stell. IV. B.*)

drieh. ABC : drieh. $abc = AB^2 : ab^2$
drieh. ABD : drieh. $abd = AB^2 : ab^2$
drieh. BCD : drieh. $bcd = BC^2 : bc^2$
drieh. ACD : drieh. $acd = AC^2 : ac^2$

omdat dan $AB^2 : ab^2 = BC^2 : bc^2 = AC^2 : ac^2$ is, zoo hebben wij:

(drieh. ABC, drieh. ABD, drieh. BCD, drieh. ACD) : :
(drieh. abc, drieh. abd, drieh. bcd, drieh. acd)

Stellen wij nu drieh ABC + drieh. ABD + drieh. BCD + drieh. $ACD = O$ en drieh. abc + drieh. abd + drieh. bcd + drieh. $acd = o$; dan is (*X. Stell. II B.*)

$O : o$ = drieh. ABC : drieh. $abc = AB^2 : ab^2$

B. *Betoog voor de gelijkvormige veelhoekige piramiden.* *Fig.* 385. Laten *P* en *Q* twee gelijkvormige vijfhoekige piramiden zijn, de vijfhoe-

hoeken *ABCDE* en *abcde* tot grondvlakken hebbende; indien men dan in deze grondvlakken, uit de overeenstemmende hoekpunten *E* en *e* de hoekpuntslijnen *BE*, *CE* en *be*, *ce* trekt, en door dezelve en de toppunten *F* en *f* vlakken laat gaan; dan worden beide piramiden *P* en *Q*, de piramide *P* in de driehoekige piramiden *ABEF*, *BCEF* en *CDEF*, en de piramide *Q* in de driehoekige piramiden *abef*, *bcef* en *cdef* verdeeld, en, volgens het betoogde, in *A*, is nu:

$$piram.\ ABEF : piram.\ abef = BF^3 : bf^3$$
$$piram.\ BCEF : piram.\ bcef = BF^3 : bf^3$$
$$piram.\ CDEF : piram.\ cdef = CF^3 : cf^3$$

daar nu (XXV. *Stell.*), $BF : bf = CF : cf$, en (IV. *Hulpst.*) $BF^3 : bf^3 = CF^3 : cf^3$ is, zoo hebben wij de aaneengeschakelde evenredigheid: $(pir. ABEF, pir. BCEF, pir. CDEF) :: (pir. abef, pir. bcef, pir. cdef)$ daar nu de som van de inhouden der drie eerste piramiden gelijk is aan den inhoud van *P*, en de som van de inhouden der drie laatsten gelijk aan den inhoud van *Q*, zoo zal (X. *Stell.* II. *B.*)

$$P : Q = piram.\ ABEF : piram.\ abef$$

maar, uit het betoogde in *A*, en uit de XXV. *Stell.* en IV. *Hulpst.* blijkt, dat

$$piram.\ ABEF : piram.\ abef = AB^3 : ab^3 = BC^3 : bc^3 = enz.$$

is. Wij hebben derhalve (I. *Stell.* II. *B.*)

$$inhoud\ P : inhoud\ Q = AB^3 : ab^3 = BC^3 : bc^3 = enz.$$

De zijvlakken van de piramide *P* zijn gelijkvormig aan de overeenstemmende zijvlakken van de piramide *Q*, en (XI. *Stell.* IV. *B.*) elke twee overeenkomstige zijvlakken staan in reden, als de vierkanten, op twee overeenkomstige ribben of hoekpuntslijnen, beschreven; daarom zal (X. *St.* II. *B.*) de som van de zijvlakken van *P* tot de som van de zijvlakken van *Q*, in reden staan, als het zijvlak *ABF*, tot het zijvlak *abf*; dat is

$$oppervl.\ P : oppervl.\ Q = drieh.\ ABF : drieh.\ abf$$
$$\text{maar}\ drieh.\ ABF : drieh\ abf = AB^2 : ab^2$$
$$\text{derh.}\ oppervl.\ P : oppervl.\ Q = AB^2 : ab^2$$

C. *Voor de gelijkvormige veelvlakkige ligchamen.* *Fig.* 386. Men neme, in de gelijkvormige veelvlakkige ligchamen *P* en *Q*, die reeds in §. 816 beschreven zijn, twee overeenstemmende hoekpunten *A* en *a*, en trekke, uit dezelve tot aan al de overige hoekpunten, hoekpuntslijnen; dan worden beide ligchamen in hetzelfde aantal gelijkvormige piramiden, *AGCB* en *agcb*, *AGFE* en *agfe*, *ADEG* en *adeg*, *ADGC* en *adgc*, *ABCKI* en *abcki*, *ACDLK* en *acdlk*, *ADELM* en *adelm*, *AEFNM* en *aefnm*, *AHIO* en *ahio*, *AIOK* en *aiok*, *AKLO* en *aklo*, *ALMO* en *almo*, *AMNO* en *amno*, *AHNO* en *ahno*, verdeeld, welker inhouden, volgens het betoogde, in dezelfde reden staan, als de kuben, op twee overeenstemmende ribben of hoekpuntslijnen, beschreven, als $AB^3 : ab^3 = AL^3 : al^3 = enz.$ De piramiden, uit welke het ligchaam *P* bestaat, maken dan met de overeen-

eenstemmende piramiden, in welke het ligchaam Q verdeeld is, eene aaneengeschakelde evenredigheid; en dus staat (X. *Stell.* II. *B.*) de som van de eerste tot de som van de tweede, als bij voorbeeld, de piramide $AGCB$, tot de piramide $agcb$; dat is:

$$inh.\ P : inh.\ Q = piram.\ ABCG : piram.\ abcg = AB^3 : ab^3$$

De overeenkomstige zijvlakken ABG en abg, *enz.* zijn (XXV. *St.*) gelijkvormig, en dus tot elkander in reden, als bij voorbeeld AB^2 tot ab^2; gevolgelijk maken de zijvlakken van P met de zijvlakken van Q (in dezelfde volgorde genomen,) eene aaneengeschakelde evenredigheid; gevolgelijk zal (X. *Stell.* II. *B.*) de som van al de zijvlakken van P tot de som van al de zijvlakken van Q, in dezelfde reden staan, als de inhoud van driehoek ABG, tot den inhoud van driehoek abg; dat is:

$$opperv l.\ P : opperv l.\ Q = drieh.\ ABG : drieh.\ abg = AB^2 : ab^2$$

D. *Voor gelijkvormige ligchamen, welke door gebogene oppervlakken zijn ingesloten. Fig.* 391. Laat, gelijk in de III. *Hulpst.* $ABCDEF$, *enz.* de omtrek van een gedeelte van het oppervlak van het ligchaam voorstellen; laten digt bij elkander eene groote menigte punten A, B, L, M, *enz.* in het oppervlak worden aangenomen, en zoo vereenigd, dat men eene groote menigte kleine driehoekjes verkrijgt. Laten dan uit een punt P, genomen binnen het ligchaam, tot aan al de hoekpunten van die driehoeken lijnen worden getrokken; dan verkrijgt men een veelvlakkig ligchaam, dat in het kromlijnige beschreven is.

Men construere dan op de lijnen PA, PB, *enz.* punten a, b, *enz.* zóó aan te nemen, dat $Pa : PA = Pb : PB$ *enz.* is, en men construere uit datzelfde punt een oppervlak $abcdef$ dat aan het gebogene oppervlak $ABCDEF$ gelijkvormig is.

Noem het kromlijnige ligchaam $PABC$ *enz.*, P en het kromlijnige ligchaam $pabc$ *enz.* Q; het veelvlakkige ligchaam dat in het eerste is beschreven A, en dat, wat in het tweede is beschreven a; dan is, volgens het betoogde:

$$inh.\ A : inh.\ a = AH^3 : ah^3 = AL^3 : al^3,\ enz.$$

$$opperv l.\ A : opperv l.\ a = AH^2 : ah^2 = AL^2 : al^2,\ enz.$$

Men verbeelde zich nu, dat door al de zijden van de kleine driehoekjes ABL, abl, *enz.* in twee gelijke deelen te verdeelen, elk van dezelve in vier kleinere driehoekjes verdeeld is, (en dat uit P door de hoekpunten dezer kleinere driehoekjes lijnen tot aan het gebogene oppervlak zijn getrokken,) dan ontstaan er op het oppervlak een viermaal grooter aantal kromlijnige driehoekjes, welker hoekpunten, door regte lijntjes vereenigd zijnde, een veelvlakkig ligchaam zullen voortbrengen, in het kromlijnige beschreven. In het gelijkvormige ligchaam door die constructie verkregen, bestaat een dergelijk veelvlakkig ligchaam dat aan het eerste gelijkvormig is. Noemen wij het eerste ligchaam B, en het tweede b; dan is wederom

$$inh.\ B : inh.\ b = AH^3 : ah^3$$

$$opperv l.\ B : opperv l.\ b = AH^2 : ah^2$$

Laten de zijden van de driehoekige zijvlakjes der ligchamen *B* en *b*, wederom elk in twee gelijke deelen worden verdeeld, en op dezelfde wijze twee gelijkvormige veelvlakkige ligchamen *C* en *c* worden geconstrueerd; dan zal wederom

$$inh.\ C : inh.\ c = AH^3 : ah^3$$

$$oppervl.\ C : oppervl.\ c = AH^2 : ah^2$$

moeten zijn.

Men construere, op dien voet voortgaande, gelijkvormige veelvlakkige ligchamen *D* en *d*, *E* en *e*, *F* en *f*, *G* en *g*, *enz.* in de gelijkvormige ligchamen *P* en *Q* beschreven zijnde; dan zal elk volgend veelvlakkig ligchaam *G* viermaal meer zijvlakken hebben dan het voorgaande *F* en

$$inh.\ G : inh.\ g = AH^3 : ah^3$$

$$oppervl.\ G : oppervl.\ g = AH^2 : ah^2$$

Volgens de *III. Hulpstelling*, zullen nu de inhouden en oppervlakken of omtrekken der gelijkvormige veelvlakkige ligchamen *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G*, *H*, *I*, *K*, *enz.* en *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i*, *k*, *enz.* minder van de inhouden en oppervlakken der gelijkvormige ligchamen *P* en *Q* verschillen, naar gelang men met de verklaarde constructie verder voortgaat; daar nu de inhouden en oppervlakken van die gelijkvormige veelvlakkige ligchamen tot elkander (tot in het oneindige toe) dezelfde reden van $AH^3 : ah^3$ en van $AH^2 : ah^2$ hebben, zoo zullen dan ook eindelijk de inhouden en oppervlakken der gelijkvormige ronde ligchamen *P* en *Q*, dezelfde reden hebben, te weten:

$$inh.\ P : inh.\ Q = AH^3 : ah^3$$

$$oppervl\ P : oppervl.\ Q = AH^2 : ah^2$$

§. 832. I. Gevolg. *Daar alle bollen gelijkvormige ligchamen zijn, staan derzelver inhouden tot elkander, als de kuben, op hunne stralen of middellijnen beschreven; en derzelver oppervlakken, als de vierkanten, op de stralen of middellijnen.*

§. 833. II. Gevolg. *Fig* 314. Nu blijkt het ook, *waarom alle bolvormige driehoeken BCD en bcd, en alle drievlakkige bolvormige sectors ABCD en Abcd, welke tot denzelfden drievlakkigen hoek BCDA behooren, gelijkvormige figuren zijn*, en waarom derhalve

$$bolv.sect.\ ABCD : bolv.sect.\ Abcd = AB^3 : Ab^3$$

$$bolv.\ drieh.\ BCD : bolv.\ drieh.\ bcd = AB^2 : Ab^2$$

is. Vergelijk *XXIX. Stell. VIII. B.*

V. Vraagstuk. *Fig.* 393.

§. 834. *Eéne der ribben of hoekpuntslijnen, of de afstand van twee punten van eenig ligchaam gegeven zijnde, de overeenstemmende ribbe, hoekpuntslijn of den afstand van twee overeenstemmende pun-*

punten van een ander ligchaam te vinden, dat aan het gegevene gelijkvormig is; onder die bepaling: dat de inhoud van het gegevene tot het gevraagde, in reden staat, als a tot b?

MEETKUNSTIGE OPLOSSING. *Fig.* 393. Laat AC de ribbe of hoekpuntslijn van het gegevene ligchaam zijn. Trek eene onbepaalde lijn AC, loodregt op AC; en, beide AB en AC onbepaaldelijk verlengd hebbende, zoo construeer $AB : AC = b : a$. Beschrijf, op de lijnen AC en AB, een regthoek $ABDC$, en trek de hoekpuntslijnen AD en BC; dan is E het middelpunt van den regthoek.

Neem nu een liniaal FG, en laat het om het hoekpunt D omdraaijen, tot dat $EF = EG$ worde; *dan zal BG de ribbe of de hoekpuntslijn van het gevraagde ligchaam zijn.*

BETOOG. Men trekke de lijnen EH en EI, loodregt op AC en AB; stel $AC = a$, $AB = b$, $BG = x$ en $CF = y$; dan geven de gelijkvormige driehoeken FCD en BDG, de evenredigheid $b : y = x : a$; derhalve is $xy = ab$.

Omdat verder, volgens de constructie, $EF = FG$ is, zoo is de driehoek EFG gelijkbeenig, en daarom is (II. *Gev.* XVIII. *Stell.* IV. *B.*) $FD \times DG = EF^2 - ED^2$. Maar de regthoekige driehoeken FHE en BEI geven (XVI. *Stell.* III. *B.*) $EF^2 = FH^2 + HE^2 = (y + \frac{1}{2}a)^2 + \frac{1}{4}b^2$ en $EB^2 = ED^2 = BI^2 + EI^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2$; en daarom is $FD \times DG = y^2 + ay$ en $2FD \times DG = 2y^2 + 2ay$. Tel hierbij $FD^2 + DG^2 = CF^2 + CD^2 + DB^2 + BG^2 = y^2 + b^2 + a^2 + x^2$; dan verkrijgt men $FG^2 = 3y^2 + 2ay + a^2 + b^2 + x^2$. Maar nu is $FG^2 = AF^2 + AG^2 = (y+a)^2 + (b+x)^2 = y^2 + 2ay + a^2 + b^2 + 2bx + x^2$. Deze twee laatste vergelijkingen van elkander afgetrokken hebbende, zoo zal men vinden $2y^2 - 2bx = 0$, of $y^2 = bx$; derhalve is y middenevenredig tusschen b en x.

Men betoogt, op dezelfde wijze, dat x middenevenredig is tusschen a en y.

De lijnen AC, BG, CF en AB (of a, x, y, b) maken dus eene gedurige evenredigheid of meetkunstige reeks. Volgens de V. *Hulpst.*, is dan $AC^3 : BG^3 = AC : AB = a : b$. De lijn BG zal derhalve de ribbe of hoekpuntslijn van het begeerde ligchaam zijn. Deze constructie is geheel werktuigelijk.

REKENKUNSTIGE OPLOSSING. Stel de ribbe of hoekpuntslijn van het gegevene ligchaam $= A$; de overeenstemmende ribbe of zijde van het gezochte ligchaam $= x$; dan moet $A^3 : x^3 = a : b$ zijn; derhalve $x^3 = A^3 \times \frac{b}{a} = A^3 \times \frac{a^2 b}{a^3}$; derhalve wordt

$$x = \frac{A}{a} \times \sqrt[3]{a^2 b}$$

VOORBEELD. *Zij $A = 28$ decimeters $a = 7$, $b = 12$?* dan is $x = \frac{28}{7} \sqrt[3]{588} = 33,513$ decimeters.

VIII.

VIII. *Betrekking tusschen de hoeken, ribben en zijvlakken van een veelvlakkig ligchaam.*

VI. Vraagstuk.

§. 835. *De betrekking te bepalen, welke er, in een veelvlakkig ligchaam, tusschen het aantal der veelvlakkige of ligchamelijke hoeken, het getal der zijvlakken en het getal der ribben bestaat?*

Oplossing. Men neme, binnen het ligchaam, een punt naar welgevallen, en trekke, uit dat punt, tot aan al de hoekpunten, regte lijnen; voorts plaatse men, in dit aangenomen punt, het middelpunt van eenen bol, welks oppervlak de straks getrokkene lijnen, in even zooveel punten ontmoeten, als er hoekpunten in het ligchaam voorkomen. Men vereenige nu, op het oppervlak van den bol, deze punten door bogen, op dezelfde wijze, als de hoekpunten van het ligchaam, door de ribben, vereenigd zijn; dan ontstaan er, op het oppervlak van den bol, even zoo veel bolvormige driehoeken of veelhoeken, als er zijvlakken in het ligchaam zijn; stemmende met elk zijvlak van het ligchaam een bolvormige veelhoek (welke even zooveel zijden, als het zijvlak heeft,) overeen; terwijl de som van al die bolvormige drie- en veelhoeken gelijk is aan het oppervlak van den bol.

Stellen wij nu, na deze opheldering, het getal der ligchamelijke hoeken $= h$; het getal der zijvlakken $= z$; en het getal der ribben $= r$; stellen wij voorts het getal van de zijden der zijvlakken, en bijgevolg het getal der zijden van de overeenkomstige bolvormige veelhoeken n, n', n'', n''', *enz.* de som van de hoeken dezer bolvormige veelhoeken S, S', S'', S''', *enz.* en de inhouden dezer bolvormige veelhoeken I, I', I'', I''', *enz.*; omdat dan (*Gev.* XVII. *Stell.* VIII. *B.*)

$$I = \frac{S - 2nR + 4R}{8R} \times \Omega$$

is, (zijnde $R = 90°$ en Ω de inhoud van het oppervlak van den bol,) zoo zal, aangezien

$$I + I' + I'' + I''' + \text{enz.} = \Omega$$

en, omdat het getal der zijvlakken z is, noodzakelijk

$$\frac{S + S' + S'' + \text{enz.} - 2(n + n' + n'' + \text{enz.}) \times R + 4zR}{8R} \times \Omega = \Omega$$

zijn, of wel, na door Ω gedeeld, en met $8R$ vermenigvuldigd te hebben,

$$S + S' + S'' + \text{enz.} - 2(n + n' + n'' + \text{enz.}) \times R + 4zR = 8R$$

De som der hoeken, om hetzelfde punt, op het oppervlak, waar de bolvormige veelhoeken aan elkander sluiten, is $= 4R$, en het getal dezer punten is gelijk h; daarom is $S + S' + S'' + S''' + \text{enz.} = 4hR$ Voorts is elke ribbe van het ligchaam eene zijde van twee aan elkander sluitende zijvlakken; en, om die reden, is $n + n' + n'' + n''' + \text{enz.} = 2r$; de laatste vergelijking verandert derhalve in:

$h \times$

$$h \times 4R - r \times 4R + z \times 4R = 8R$$

en deelt men dezelve door $4R$; dan verkrijgt men:

$$h + z = r + 2$$

dat is: *het getal der hoeken en der zijvlakken, te zamen genomen, is altijd twee meer dan het getal der ribben.*

§. 836. Gevolg. Volgens de *XIX. Stell. I. B.* is de som der hoeken van een zijvlak, dat n hoeken heeft, $= (n-2) \times 2R = 2nR - 4R$; gevolgelijk wordt de som van de hoeken van al de zijvlakken, welke som wij Σ stellen, door de vergelijking:

$$2(n + n' + n'' + n''' + enz.) \times 2R - 4zR = \Sigma$$

gevonden; of, omdat $n + n' + n'' + enz. = 2r$ is, door $\Sigma = 4rR - 4zR$; maar $r - z = h - 2$ zijnde, zoo is $\Sigma = (h-2) \times 4R$. Dat is: *de som van al de hoeken der zijvlakken is gelijk aan zoo-veelmaal vier regte hoeken als het getal der veelvlakkige hoeken min twee.* — Men kan uit deze oplossing vele leerzame gevolgen afleiden.

IX. *Over de vijf regelmatige Ligchamen.*

§. 837. XXIII. Bepaling. *Regelmatige Ligchamen* zijn ligchamen, welke door gelijke- en gelijkvormige regelmatige veelhoeken zijn ingesloten.

VII. Vraagstuk. *Fig.* 394–403.

§. 838. *Het aantal der mogelijke regelmatige ligchamen te bepalen, en derzelver wijze van zamenstelling te beschrijven?*

Oplossing. Vermits tot de zamenstelling van een ligchamelijken of veelvlakkigen hoek, ten minste drie vlakken vereischt worden, zoo zijn alle regelmatige veelhoeken, welke meer dan vijf zijden hebben, tot de zamenstelling der regelmatige ligchamen onbruikbaar. Er blijven dan geene andere regelmatige veelhoeken, dan de gelijkzijdige driehoek, het vierkant en de regelmatige vijfhoek over, welke alleenlijk, tot die zamenstelling, kunnen gebruikt worden.

Omdat nu de som der zijden van eenen veelvlakkigen hoek minder dan 360° moet zijn, en de hoek van een gelijkzijdigen driehoek 60° bedraagt, *zoo zal men drie, vier of vijf gelijke gelijkzijdige driehoeken tot eenen drie-, vier- of vijfvlakkigen hoek kunnen vereenigen, en men zal derhalve, met gelijke- en gelijkzijdige driehoeken, drie onderscheidene soorten van regelmatige ligchamen kunnen zamenstellen.*

1°. Wanneer men, *fig.* 394, drie gelijke- en gelijkzijdige driehoeken ABC, ADC en BCD, met derzelver hoekpunten C aan elkander voegt, zoodat de ribben AC, BC en DC aan elkander sluiten; dan

wordt de gelijkzijdige driehoek *ABD* gevormd, welke aan elken der drie zamengevoegde driehoeken gelijk is, en men verkrijgt eene ligchamelijke ruimte, besloten binnen vier gelijke- en gelijkzijdige driehoeken, in welke, zoo als duidelijk te zien is, al de drievlakkige hoeken gelijk zijn. Men noemt dit ligchaam *regelmatige driehoekige piramide*, *Tetraëdrum*, of *regelmatig Viervlak*. Men kan, om en in hetzelve, eenen bol beschrijven.

2°. Men verbeelde zich, *fig.* 395, een vierkant *ABCD*, welks zijden gelijk zijn aan de zijden der gelijke- en gelijkzijdige driehoeken, waaruit men het ligchaam wil zamenstellen. Men late twee driehoeken *ABE* en *BCE*, om de zijden *AB* en *BC*, draaijen, tot dat twee van derzelver ribben *BE* langs *BE* zamenkomen: dit gedaan hebbende, zal men, op de zijde *DC*, een derden driehoek *DCE*, aan het punt *E*, kunnen vereenigen, en de zijden *AD*, *DE* en *AE* zullen een vierden gelijkzijdigen driehoek maken, die aan de drie eerste gelijk is. Op dezelfde wijze, zal men, beneden het vierkant *ABCD*, vier gelijke en gelijkzijdige driehoeken *ABF*, *BCF*, *CDF* en *ADF* kunnen zamenvoegen, en men zal, zoo doende, een ligchaam verkrijgen, dat binnen acht gelijke- en gelijkzijdige driehoeken is ingesloten. Men zal nu gemakkelijk kunnen bewijzen: dat de lijnen *BE*, *ED*, *DF* en *BF* in hetzelfde vlak liggen en een vierkant maken; dat de zes viervlakkige hoeken *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F*, bij superpositie gelijk zijn, en dat men, in en om dit ligchaam, eenen bol beschrijven kan. Men noemt dit ligchaam *Octaëdrum* of *regelmatig Achtvlak*.

3°. Laat verder, *fig.* 396, *ABCDE* een regelmatige vijfhoek zijn, welks zijden gelijk zijn aan de zijden der driehoeken; dan kan men (gelijk in N°. 2.) vijf gelijkzijdige driehoeken *ABF*, *BCF*, *CDF*, *DEF* en *AEF*, bij *F* zamenvoegen, en men verkrijgt alzoo, op het grondvlak *ABCDE*, eene regelmatige vijfhoekige piramide. Men plaatse voorts, op de zijden van den vijfhoek, vijf gelijkzijdige driehoeken *ABG*, *BCH*, *CDI*, *DEK*, *AEL*; zoodanig, dat zij, met de driehoeken *ABF*, *BCF*, *CDF*, *DEF* en *AEF*, dezelfde standhoeken maken, als twee der aan elkander grenzende zijvlakken der piramide; dan is het ligtelijk te betoogen: dat de hoeken *GBH*, *HCI*, *IDK*, *KEL* en *GAL*, alle hoeken van 60° zijn, en dat alzoo, de lijnen *GH*, *HI*, *IK*, *KL*, *LG*, getrokken hebbende, deze lijnen de zijden van eenen regelmatigen vijfhoek zijn, op welke eene regelmatige piramide, gelijk aan de bovenste, door middel der gelijke- en gelijkzijdige driehoeken *GHM*, *HIM*, *IKM*, *KLM* en *LGM*, kan zamengesteld worden. Het ligchaam, op deze wijze zamengesteld, is tusschen twintig gelijke- en gelijkzijdige driehoeken besloten; de twaalf vijfvlakkige hoeken, welke door deze zijden gemaakt worden, zijn gelijk. Daar men nu ligtelijk bewijzen kan: dat de lijnen, welke de overstaande hoekpunten vereenigen, even lang zijn en elkander in hetzelfde punt midden door deelen, hetwelk van al de zijvlakken denzelfden afstand heeft, zal men, in en om dit ligchaam, eenen

bol

bol kunnen beschrijven. Men noemt dit ligchaam *Icosaëdrum* of *regelmatig Twintigvlak*.

4°. Wanneer zes gelijke vierkanten, als in *fig.* 397, aan elkander gevoegd worden; dan ontstaat er een kubus, welke, in den rang der regelmatige ligchamen, *Hexaëdrum* of *regelmatig Zesvlak* genoemd wordt. Om en in hetzelve kan een bol beschreven worden. Dit ligcham is het eenige regelmatige, dat door vierkanten kan ingesloten worden.

5°. Wanneer men, *fig.* 398, een regelmatigen vijfhoek *ABCDE* als grondvlak aanneemt; dan zal men met dezen vijf andere gelijke regelmatige veelhoeken *ABHFG*, *BCKIH*, *CDMLK*, *DEONM* en *AEOPG*, kunnen zamenvoegen, welke aan de hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D* en *E*, gelijke drievlakkige hoeken maken. Wanneer men nu, binnen elken dezer drievlakkige hoeken, lijnen denkt, welke met de drie ribben gelijke hoeken maken, zullen deze lijnen elkander in hetzelfde punt ontmoeten, dat van elk der hoekpunten van de zes regelmatige vijfhoeken, als ook van diezelfde vijfhoeken, even ver afstaat. Men zal nu gemakkelijk bewijzen kunnen: dat de standhoeken van twee dezer regelmatige vijfhoeken overal gelijk zijn: men zal dan nog vijf andere aan de voorgaande gelijke regelmatige vijfhoeken *IKLST*, *LMNRS*, *NOPQR*, *PGFUQ*, *FHITU*, met de voorgaande kunnen zamenvoegen, welke aan de punten *T*, *S*. *R*, *Q* en *U*, sluiten zullen, en aldaar eenen anderen regelmatige vijfhoek *QRSTU* zullen maken; en men zal aldus een ligchaam verkrijgen, besloten binnen twaalf gelijke regelmatige vijfhoeken, in en om hetwelk eenen bol kan beschreven worden. Men noemt dit ligchaam *Dodecaëdrum* of *regelmatig Twaalfvlak*.

Deze zijn de vijf mogelijke ligchamen, welke, door gelijke- en regelmatige veelhoeken, kunnen ingesloten, en, om en in welken, een bol kan beschreven worden. Wanneer men zich nu een zinnelijk denkbeeld van deze ligchamen wenscht te maken, zoo snijde men uit kartonpapier de figuren 399—403, welke men, volgens de lijnen, in die figuren voorkomende, omvouwt, en men zal dan de straks beschrevene ligchamen, verkrijgen.

VIII. VRAAGSTUK. *Fig.* 404.

§. 839. *De formulen te vinden, waardoor men de standhoeken van de zijvlakken der vijf regelmatige ligchamen, benevens de middellijnen der in- en omgeschrevene bollen, en de inhouden dezer ligchamen vinden kan?*

OPLOSSING. Laten, *fig.* 404, *ABC* en *ABD*, twee middelpuntsdriehoeken van twee aan elkander sluitende zijvlakken zijn; zoodanig, dat *AB* ééne der ribben is. Men late, uit de middelpunten, *C* en *D*, der zijvlakken, de apothemata *CE* en *DE*, op de ribbe *AB*, vallen; dan is de hoek *CED* de standhoek van twee der zijvlakken. Men late voorts, door deze apothemata, een vlak gaan, en deele den hoek

CED, door de lijn *EM*, midden door. Men trekke de lijn *CM*, loodregt op *CE*; wanneer men dan lijn *MD* trekt; dan zal deze lijn ook loodregt op *ED* ſtaan; terwijl de lijnen *MC* en *MD*, die (X. *Stell.* I. *B.*) gelijk zijn, loodregt op de zijvlakken ſtaan, en de ſtralen van den ingeſchrevenen bol zullen zijn. Indien men de lijnen *AM* en *BM* trekt, dan zullen deze ſtralen van den omgeſchrevenen bol zijn. Men denke nu, in het gemeene middelpunt *M* van het ligchaam en der in- en omgeſchrevene bollen, eenen bol, welks ſtraal *Ma* gelijk aan de éénheid van de lengtemaat zij; het oppervlak van den bol maakt dan den bolvormigen driehoek *abc*, welke, omdat de vlakken *CDM* en *ABM* elkander regthoekig ſnijden, regthoekig is in *b*; omdat dan *CM* loodregt ſtaat op *ABC*, is *hoek cab* = *hoek ACE*, gelijk aan den halven centerhoek van den veelhoek, die één der zijvlakken van het ligchaam is. De boog *ab* is de maat van den hoek *CME*, de maat van het complement van den halven ſtandhoek *CED*; en de hoek *acb* is de ſtandhoek der vlakken *ACM* en *AME*. Men ſtelle nu den ſtandhoek *CED* der zijvlakken $= C$; $AB = a$; $AM = R$ en $CM = r$; het getal der zijden van elk zijvlak $= n$, het getal der zijvlakken van elken veelvlakkigen hoek van het ligchaam $= m$; dan is $cab = 180^\circ : n$, en $c = 180^\circ : m$; nu is, in den regthoekigen bolvormigen driehoek *abc*, $cos.\, ab = cos.\, c : sin.\, a$; dat is:

$$sin.\ \tfrac{1}{2}\, C = cos.\ \frac{180^\circ}{m} : sin.\ \frac{180^\circ}{n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (1)$$

door welke vergelijking de ſtandhoeken der zijvlakken gevonden worden.

Dezelfde driehoek geeft nog $cos.\, ac = cot.\, a \times cot.\, c = cos.\, CMA$; nu is $R : r = 1 : cos.\, CMA$; derhalve is

$$\frac{R}{r} = tang.\ \frac{180^\circ}{n} \times tang.\ \frac{180^\circ}{m} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

eene vergelijking, waardoor de betrekking van de ſtralen der om- en ingeſchrevene bollen bekend wordt. Eindelijk geeft nog de driehoek *abc* de vergelijking $cos.\, bc = cos.\, a : sin.\, c$: maar *bc* is de maat van den hoek *AME*, en is het complement van *EAM*; derhalve $cos.\, bc = sin.\, EAM$. Hieruit volgt nu, met weinig moeite,

$$R = \tfrac{1}{2} a \times \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$sin.\ \frac{180^\circ}{m} : \sqrt{\left[-cos.\left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{180^\circ}{m}\right) \times cos.\left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{180^\circ}{m}\right)\right]} \quad (3)$$

Door deze en de voorgaande formulen, zal men de ſtralen der in- en omgeſchrevene bollen kunnen vinden; of ook wel door (2); en, deze volgende

$$R^2 = r^2 + \tfrac{1}{4} a^2 : sin^2.\ \frac{180^\circ}{n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Veel gemakkelijker zal het nogtans zijn, eerst den ſtandhoek der zijvlakken te zoeken, en daarna *R* en *r* door

$$R = \tfrac{1}{2} a \times tang.\ \frac{180^\circ}{m} \times tang.\ \tfrac{1}{2}\, C \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

$r =$

$$r = \tfrac{1}{2}\, a \times cot.\ \frac{180^\circ}{n} \times tang.\ \tfrac{1}{2}\, C \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (6)$$

uit welke dan eindelijk volgen zal:

$$a = 2\, R \times cot.\ \frac{180^\circ}{m} \times cot.\ \tfrac{1}{2}\, C \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7)$$

vergelijking, waardoor de zijden der regelmatige ligchamen, in denzelfden bol beschreven zijnde, gevonden kunnen worden.

Eindelijk is de inhoud van het zijvlak $\frac{1}{4}\, n\, a^2 \times cot.\ \frac{180^\circ}{n}$. Stellende dan het getal der zijvlakken $= p$; dan is het geheele oppervlak $= \frac{1}{4}\, p\, n\, a^2 \times cot.\ \frac{180^\circ}{n}$; dit met één-derde van r vermenigvuldigd hebbende, zoo verkrijgt men, voor den inhoud van het ligchaam, de formule:

$$Inhoud = \tfrac{1}{24}\, p\, n\, a^3 \times cot^2.\ \frac{180^\circ}{n} \times tang.\ \tfrac{1}{2}\, C \quad .\ .\ .\ (8)$$

Men behoeft nu slechts, voor elk regelmatig ligchaam, de waarde van n en m, in de gevondene vergelijkingen, te stellen, om de standhoek der zijvlakken, de stralen der om- en ingeschrevene bollen, en den inhoud van dit ligchaam te vinden. Men raadplege diengaangaande het nevenstaande tafeltje.

	n	m
Viervlak	3	3
Zesvlak	4	3
Achtvlak	3	4
Twaalfvlak	5	3
Twintigvlak	3	5

De vergelijking (2) is, voor het zesvlak en achtvlak,

$$R : r = tang.\ 60^\circ \times tang.\ 45^\circ$$

en voor het twaalfvlak en twintigvlak,

$$R : r = tang.\ 60^\circ \times tang.\ 36^\circ$$

waaruit volgt: *dat, wanneer het zesvlak en achtvlak, het twaalfvlak en twintigvlak, in denzelfden bol beschreven zijn, dezelfde bol in het zes- en achtvlak, en dezelfde bol, in het twaalf- en twintigvlak, zal passen.*

Door de toepassing der formulen, zal men vinden:

1°. Voor het viervlak: $n = 3$; $m = 3$; $p = 4$; $cos.\ C = \frac{1}{3}$; $sin.\ C = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $tang.\ C = 2\sqrt{2}$; $tang.\ \frac{1}{2}\, C = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $R = \frac{1}{4}\, a\sqrt{6}$; $r = \frac{1}{12}\, a\sqrt{6}$; $a = \frac{2}{3}\, R\sqrt{6}$; $Inhoud\ \frac{1}{12}\, a^3\sqrt{2}$.

2°. Voor het zesvlak: $n = 4$; $m = 3$; $p = 6$; $cos.\ C = 0$; $sin.\ C = 1$; $tang.\ \frac{1}{2}\, C = cot.\ \frac{1}{2}\, C = 1$; $R = \frac{1}{2}\, a\sqrt{3}$; $r = \frac{1}{2}\, a$; $Inhoud = a^3$.

3°. Voor het achtvlak: $n = 3$; $m = 4$; $p = 8$; $cos.\ C = -\frac{1}{3}$; $sin.\ C = \frac{2}{3}\sqrt{2}$; $tang.\ C = -2\sqrt{2}$; $tang.\ \frac{1}{2}\, C = \sqrt{2}$; $R = \frac{1}{2}\, a\sqrt{2}$, $r = \frac{1}{6}\, a\sqrt{6}$; $Inhoud = \frac{1}{3}\, a^3\sqrt{2}$.

4°. Voor het twaalfvlak: $p = 12$; $n = 5$; $m = 3$; $cos.\ C = -\frac{1}{5}\sqrt{5}$; $sin.\ C = \frac{2}{5}\sqrt{5}$; $tang.\ C = -2$; $tang.\ \frac{1}{2}\, C = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$; $R = \frac{1}{4}\, a \times (\sqrt{3}+\sqrt{15})$; $r = \frac{1}{4}\, a\sqrt{(10+4\frac{2}{5}\sqrt{5})}$; $Inhoud = \frac{1}{4}\, a^3 \times (15 \times 7\sqrt{5})$.

5°. Voor het twintigvlak: $p = 20$; $m = 5$; $n = 3$; $cos.\ C = -\frac{1}{3}\sqrt{5}$; $sin. = \frac{2}{3}$; $tang.\ C = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$; $tang.\ \frac{1}{2}\, C = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$; $R = .\ .\ .\ .\ \frac{1}{4}\, a\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$; $r = \frac{1}{12}\, a \times (3\sqrt{3}+\sqrt{15})$ en $Inhoud\ \frac{5}{12}\, a^3 \times (3+\sqrt{5})$.

§. 840. Bijvoegsel. Men zal, uit alle deze waarden gemakkelijk de gronden van de volgende constructie, *om, in een gegevenen bol; de vijf regelmatige ligchamen te construeren*, kunnen nagaan.

Laat, *fig.* 405, *AB* de middellijn van den bol, *AEB* zijn halve groote cirkel, *C* zijn middelpunt zijn. Neem $BD = \frac{1}{3}\,AB$; *DF* loodregt op *AB*; dan is *AF* de ribbe van het viervlak, en *BF* de ribbe van het zesvlak. Trek *EC* loodregt op *AB*; dan is *AE* de ribbe van het achtvlak. Stel *AG* loodregt op *AB*, maak $AG = AB$, en trek *CG*; dan is *AH* de ribbe van het twintigvlak. Men deele eindelijk *BF*, in *N*, in de uiterste en middelste reden; dan is het grootste stuk *BN* de ribbe van het twaalfvlak. De Lezer zoeke zelf het betoog, dat niet moeijelijk te vinden is.

Er zijn ook nog verscheidene veelvlakkige ligchamen, die door regelmatige veelhoeken van verschillende soort bepaald zijn. Men raadplege over dezelve de uitmuntende commentatie van den zeer geleerden Heer G. J. Verdam, *vide Ann. Acad., Groning.* A°. 1824.

TIEN-

TIENDE BOEK.

(*Het twaalfde van den tweeden druk.*)

Over de eenvoudigste ronde ligchamen, de cilinders, kegels en bollen; inzonderheid over den regten cilinder, den regten kegel en den afgeknotten regten kegel; de inhouden en oppervlakken dezer ligchamen. Hoe de kromme lijnen van de eerste orde, de ellips, parabola *en* hyperbola, *uit de snijding van den regten kegel, ontstaan; voorstelling van derzelver algemeene vergelijkingen en onderlinge verwandschap. Nadere beschouwing van de eigenschappen van den bol. Grondslag van de* stereographische projectie. *Inhouden en oppervlakten van den bol en van deszelfs onderscheidene deelen.*

---

§. 841. De cilinders, kegels en bollen zijn, onder de ligchamen, die door gebogene vlakken zijn ingesloten, de eenvoudigste en te gelijk de merkwaardigste; de twee eerste zijn slechts kromlijnige prisma's en piramiden; en de bol, waarvan wij reeds eenige eigenschappen kennen, is, onder alle ronde ligchamen, het eenvoudigste en merkwaardigste.

I. *Over de Cilindervlakken en de Cilinders.*

§. 842. I. Bepaling. *Fig.* 406. Een *cilindervlak*, op de algemeenste wijze genomen, is een vlak, hetwelk aldus geboren wordt. Laat eene kromme lijn *A B C D E F*, welker deelen in hetzelfde vlak liggen, of in onderscheidene vlakken, gelegen zijn, (en daarom *lijnen van tweederlei kromte* genoemd worden,) gegeven zijn; indien men dan eene onbepaalde lijn *A a*, evenwijdig aan zich zelve laat bewegen; dat is, zoodanig, dat zij, in elken bijzonderen stand, evenwijdig blijft aan eene gegevene lijn *P Q*, en dat zij tevens altijd langs de kromme lijn *A B C D E F* heenschuift; dan loopt deze lijn, in hare beweging, door eene vlakte, welke *cilinder-vlakte* genoemd wordt. Men kan de kromme lijn *A B C D E F*, als de grondlijn of grondslag van het cilindervlak aanmerken.

§. 843. Aanmerking. Wanneer men, in plaats van de kromme lijn *A B C D E F*, eene regte lijn neemt; dan wordt het *cilindervlak*,

het-

hetwelk, op de voorschrevene wijze, geboren wordt, een plat vlak. *Het platte vlak kan derhalve als een cilindervlak, welke eene regte lijn tot grondslag heeft, aangemerkt worden.*

§. 844. II. Bepaling. *Fig.* 406. Een *cilinder* is een ligchaam, besloten tusschen een gedeelte van een cilindervlak, en tusschen twee evenwijdige vlakken *ABCDEF* en *abcdef*, welke het *grond-* en *bovenvlak* genoemd worden. De cilinder is *regt* of *scheef*, naar dat de rigtlijn *PQ*, regt of scheefhoekig op het grondvlak staat. Eéne der lijnen *Aa*, *Bb*, *enz.*, welke in het oppervlak van den cilinder, evenwijdig aan de rigtlijn *PQ* getrokken wordt, wordt eene *zijde* van den cilinder genoemd.

§. 845. I. Aanmerking. Tot de cilinders behooren alle ligchamen, welke eene kromlijnige vlakte, of eene vlakte, welke gedeeltelijk door kromme en regte lijnen bepaald wordt, tot grondvlakken hebben. *De cilinder is eigenlijk niets anders dan een kromlijnig prisma.*

§. 846. II. Aanmerking. *Fig.* 407. In het bijzonder, zullen wij ons, in dit Boek, bij de beschouwing der regte cirkelvormige cilinders bepalen. *Eene regte cirkelvormige cilinder*, in het vervolg, eenvoudig cilinder genoemd, *heeft een cirkel tot grondvlak en kan begrepen worden, door de omwenteling van eenen regthoek ABCD, om éene zijner zijden BC, geboren te worden. De zijden AB en CD, beschrijven de grond- en bovenvlakken, en de zijde AD het buitenste oppervlak. De lijn BC, om welke de regthoek omdraait, wordt de as van den cilinder genoemd.*

I. Stelling. *Fig* 406.

§. 847. *Wanneer een cilindervlak gesneden wordt, door een vlak, dat evenwijdig aan het grondvlak (ABCDEF) loopt; dan is de kromme lijn (abcdef), volgens welke dit vlak het cilindervlak doorsnijdt, gelijk- en gelijkvormig aan het grondvlak.*

Betoog. Verbeelden wij ons de bewegende lijn *Aa*, in de standen *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, *Ff*, in welke zij evenwijdig aan *PQ* is; dan zijn (*XVII Stell. VIII. B.*) deze lijnen, twee aan twee genomen, evenwijdig; en, omdat (*constr.*) *abcdef* evenwijdig aan *ABCDEF* is, zoo zijn (*XXII. Stell. VIII. B.*) de lijnen *Aa*, *Bb*, *Cc*, *enz.* alle even lang; de lijnen *AB*, *BC*, *CD*, *EF*, *enz.* *AC*, *AD*, *enz.* zijn dan ook (*XXXI. Stell. I. B.*) gelijk- en evenwijdig aan de lijnen *ab*, *bc*, *cd*, *ef*, *enz.* *ac*, *ad*, *enz.* en dus is (*XXIV. Stell. VIII. B.*) hoek $abc =$ hoek ABC;

ABC; *hoek bcd* = *hoek BCD*; *enz.* Uit dit alles volgt dan: dat de kromme lijn *abcdef*, op de kromme lijn *ABCDEF*, kan gepast worden, zoodanig, dat de punten *a*, *b*, *c*, *d*, *e* en *f*, in de punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F*, vallen; en dat zulks ook, op dezelfde wijze, van de overige punten der kromme lijn *abcdef* gelden zal, welke in den omtrek van *ABCDEF* zullen vallen; de kromme lijn *abcdef* is dan (*II. Ax.*) gelijk- en gelijkvormig aan de kromme lijn *ABCDEF*.

II. STELLING. *Fig.* 406.

§. 848. *De inhoud van elken cilinder is gelijk aan den inhoud van zijn grondvlak, vermenigvuldigd met zijne hoogte.*

BETOOG. Laten, in den omtrek van het grondvlak, de punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, genomen, en door dezelve de lijnen *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, *Ff*, evenwijdig aan de rigtlijn *PQ*, worden getrokken; dan kunnen deze lijnen aangemerkt worden, als de opstaande ribben van een prisma, hetwelk den veelhoek *ABCDEF* tot grondvlak heeft, en in den cilinder beschreven is. De inhoud van dit prisma is (*II. Gev. XV. Stell. IX. B.*) gelijk aan het grondvlak, vermenigvuldigd met de hoogte van het prisma, welks hoogte klaarblijkelijk de hoogte van den cilinder is. Hetzelfde zal plaats blijven hebben, wanneer men de punten *A*, *B*, *C*, *enz.* digter, dan in de figuur wordt voorgesteld, bij elkander neemt. Doch, hoe digter men deze punten bij elkander neemt, des te minder verschilt het veelhoekige grondvlak van het prisma van het kromlijnige grondvlak des cilinders, en ook zooveel te minder verschilt de inhoud van het prisma, dat in den cilinder beschreven is, van den inhoud des cilinders. Wanneer men dan de punten *A*, *B*, *C*, *enz.* tot in het oneindige vermenigvuldigt en naast elkander neemt; dan zullen de grondvlakken en inhouden der ingeschrevene prisma's van het grondvlak en den inhoud van den cilinder niet meer onderscheiden zijn; de inhoud des cilinders zal derhalve gelijk zijn aan zijn grondvlak, vermenigvuldigd met zijne hoogte.

§. 849. GEVOLG. *Fig.* 407. *De inhoud van een regten cirkelvormigen cilinder is dan ook gelijk aan het cirkelvormig grondvlak*, cirk. *AB*, *vermenigvuldigd met de hoogte, of met de opstaande zijde AD. Dat is*, (XIII. Stell. VI. B., III. Reg. Bladz. 187.)

$$\text{Inhoud cilinder} = \tfrac{1}{4}\pi \times AE^2 \times AD = \pi \times AB^2 \times AD.$$

§. 850. AANMERKING, *Fig.* 406. *Wanneer men den cilinder snijdt door een vlak, dat ééne der zijden Aa regthoekig ontmoet; dan zal deszelfs inhoud gelijk zijn aan den inhoud van dit vlak, vermenigvuldigd met de opstaande zijde Aa.* Vergelijk *XVI. Stell. IX. B.*

III. STELLING. *Fig.* 407.

§. 851. *Het buitenste oppervlak van een regten cirkelvormigen cilinder is gelijk aan den omtrek van het grondvlak, vermenigvuldigd met de as (BC) of de opstaande zijde (AD).*

Betoog. Wanneer het buitenste oppervlak van den cilinder niet gelijk is aan den omtrek van het grondvlak, vermenigvuldigd met de hoogte; dan zal dit oppervlak gelijk zijn aan den omtrek van een grooteren of kleineren cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte.

Stellen wij het oppervlak gelijk aan den omtrek van eenen grooteren cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte, en laat dan die cirkel, met zijn middelpunt, in het middelpunt van het grondvlak geplaatst worden; dan zal men, om het cirkelvormige grondvlak, een regelmatigen veelhoek kunnen beschrijven, welks hoekpunten binnen den omtrek van den buitensten cirkel vallen. Wanneer men dan, op dezen regelmatigen veelhoek, als grondvlak, een regt veelhoekig prisma stelt, hetwelk met den cilinder dezelfde hoogte heeft; dan zal het buitenste oppervlak van dit prisma gelijk zijn aan den omtrek van dien veelhoek, vermenigvuldigd met de hoogte: maar nu is het oppervlak van dit veelhoekig prisma klaarblijkelijk grooter dan het oppervlak van den cirkelvormigen cilinder; omdat nu de omtrek van den veelhoek kleiner is dan den omtrek van den buitensten cirkel, dan zal de omtrek van den buitensten cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte, grooter zijn dan het oppervlak van het veelhoekig prisma, en diensvolgens ook grooter dan het oppervlak van den cilinder. Het oppervlak van den cilinder kan derhalve niet gelijk zijn aan den omtrek van eenen cirkel, grooter dan het grondvlak, met de hoogte vermenigvuldigd. Op dezelfde wijze, betoogt men: dat de inhoud van het oppervlak des cilinders niet gelijk kan zijn aan den omtrek eens cirkels, kleiner dan het grondvlak, vermenigvuldigd met de hoogte: de inhoud van het buitenste oppervlak des cilinders is derhalve gelijk aan den omtrek van het grondvlak, vermenigvuldigd met de hoogte.

§. 852. Gevolg. *Fig.* 406. Men zal, op dezelfde wijze, betoogen: *dat het oppervlak van een scheven cilinder gelijk is aan den omtrek van het vlak, dat de opstaande zijde regthoekig doorsnijdt, met die opstaande zijde vermenigvuldigd.*

II. *Over de Kegelvlakken en Kegels, inzonderheid over de regte cirkelvormige Kegels.*

§. 853. III. Bepaling. *Fig.* 408. Een *kegelvlak* wordt aldus geboren. Laat, in eenig vlak, eene kromme lijn, *ABCDEF*, benevens een punt *P*, buiten hetzelve, gegeven zijn. Wanneer men dan aanneemt: dat eene onbepaalde lijn *AP*, langs deze kromme

lijn

lijn *ABCDEF*, bewogen worde, zoodanig, dat zij altijd in het punt *P* blijve; dan zal het vlak, door hetwelk deze lijn loopt, in het algemeen een kegelvlak zijn. Men noemt *P* het *toppunt* van het kegelvlak; de kromme lijn *ABCDEF* de *grondlijn*. De ligchamelijke ruimte, begrepen tusschen het toppunt, het grondvlak en het kegelvlak, wordt *Kegel* genoemd. *Het kegelvlak bestaat klaarblijkelijk uit twee tegen over elkander staande gebogene vlakken, waarvan het ééne boven en het andere beneden het toppunt gelegen is; die men in de* onderste *en* bovenste kegelvlakken *onderscheidt*. Elke lijn, welke, uit het toppunt van den kegel, in de kegelvlakte getrokken wordt, wordt eene *zijde* van den kegel genoemd.

§. 854. Aanmerking. Wanneer, men voor het grondvlak van het kegelvlak, eene regte lijn neemt; dan is het kegelvlak zelve een plat vlak. *Het platte vlak kan dan* (*zie* Aanm. I. Bep.) *als eene bijzondere soort van kegelvlakte, zoowel als eene bijzondere soort van cilindervlakte aangemerkt worden.*

§. 855. IV. Bepaling. Een *afgeknotte kegel* is een ligchaam dat overblijft, indien men van eenen kegel, door een vlak, dat evenwijdig aan het grondvlak loopt, het bovenstuk afsnijdt.

§. 856. V. Bepaling. Een *omwentelings-ligchaam* ontstaat, wanneer een regt of kromlijnig vlak, om eene regte lijn, als *as*, omwentelt, de ligchamelijke ruimte, welke dit vlak doorloopt is het omwentelings-ligchaam. De lijn, om welke die vlakte omwentelt, noemt men de *as* van dit ligchaam.

§. 857. Gevolg. *Wanneer derhalve eenig omwentelings-ligchaam gesneden wordt, door een vlak, dat loodregt op de as staat; dan zal dit vlak het oppervlak des ligchaams, volgens eenen cirkel doorsnijden.*

IV. Stelling. *Fig.* 408.

§. 858. *Wanneer een kegelvlak gesneden wordt, door een vlak* (*abcdef*), *evenwijdig aan het grondvlak* (*ABCDEF*) *loopende; dan zal de kromme lijn* (*abcdef*), *volgens welke dit vlak het kegelvlak snijdt, gelijkvormig zijn aan het grondvlak* (*ABCDBF*) *der kegelvlakte.*

Betoog. Men verbeelde zich twee onderscheidene standen van de lijn *AaP*; te weten, *AaP* en *BaP*; dan liggen deze lijnen (*II. St. X. B.*) in hetzelfde vlak. Dit vlak snijdt de vlakken, *BBCDEF* en *abcdef*, volgens de lijnen, *AB* en *ab*, welke, omdat deze vlakken, volgens de onderstelling evenwijdig zijn, (*XIX. Stell. VIII. B.*) insgelijks evenwijdig

loo-

loopen. De driehoeken ABP en abP, zijn dan (*I en X. Stell. IV. B.*) gelijkvormig, en (*VIII. Stell. IV. B.*) $AB : ab = AP : aP$.

Om dezelfde reden, zal $AC : ac = AP : aP$, $AD : ad = AE : ae = AF : af = BC : bc = BD : bd = BE : be = BF : bf = CD : cd = CE : ce$ *enz.* $AP : aP$ zijn; de kromlijnige figuur $abcdef$, is dan (*XIV. Stell. IV. B.*) aan het grondvlak $ABBDEF$ gelijkvormig.

§. 859. I. Aanmerking. *Fig.* 408. *Wanneer het bovenste deel van het kegelvlak gesneden wordt, door een vlak* ($a'b'c'd'e'f'$), *hetwelk aan het grondvlak* ($ABCDEF$) *evenwijdig loopt; dan zal dit vlak van doorsnijding insgelijks gelijkvormig zijn aan het grondvlak* ($ABCDE$); *doch het zal, in dit geval, ten opzigte van het grondvlak, in eene omgekeerde, of tegenovergestelde, stelling geplaatst zijn.*

§. 860. II. Aanmerking. De kegels, dat is de ligchamen, welke tusschen kegelvlakken en derzelver grondvlakken zijn ingesloten, maken met de piramiden eene bijzondere klasse van ligchamen uit, waaraan men den algemeenen geslachtsnaam van *piramiden* geven kan; en *dan zal een kegel eene piramide zijn, welke een kromlijnig grondvlak heeft.* Wanneer nu dit grondvlak een cirkel is; dan zal men den kegel eenen *cirkelvormigen kegel* noemen, *en deze cirkelvormige kegel zal regt zijn, wanneer het toppunt gelegen is in de lijn, welke loodregt, uit het middelpunt van het grondvlak, op dezelve is opgerigt.*

§. 861. III. Aanmerking. *Fig.* 409. *Een regt cirkelvormig kegelvlak kan begrepen worden te ontstaan, door de omwenteling van een stelsel van twee lijnen ABC en DBE, welke met elkander een scheven hoek ABE maken; wanneer namelijk (die hoek ABE onveranderd blijvende,) dit stelsel, om ééne dezer lijnen DBE bewogen wordt;* want alsdan beschrijft AB het benedenste, en BC het bovenste deel van het kegelvlak, waarvan de lijn DBE de as genoemd wordt; terwijl eenige loodlijn AE, loodregt op BE staande, eenen cirkel beschrijft, welke als het grondvlak van een regten cirkelvormigen kegel kan aangemerkt worden.

§. 862. IV. Aanmerking. *Fig.* 409. Wanneer de lijn ABC loodregt op de as staat; dan beschrijft (*Gev. V. Stell. X. B.*) deze lijn een plat vlak. *Het platte vlak kan dan, in zekeren zin, als een kegelvlak worden aangemerkt.* *Zie* Aanm. III. Bep.

V.

V. STELLING. *Fig.* 408.

§. 863. *De inhoud van elken kegel is gelijk aan zijn grondvlak, vermenigvuldigd met één-derde van zijne hoogte.*

BETOOG. Men neme, in den omtrek van het grondvlak, op zeer kleine afstanden, de punten *A*, *B*, *C*, *enz.* en trekke, van deze punten tot aan het toppunt *P*, de lijnen *AP*, *BP*, *CP*, *enz.*; dan ontstaat er eene veelhoekige piramide, welke in den kegel beschreven is, en met denzelven hetzelfde toppunt heeft; en de inhoud van deze veelhoekige piramide is (*Gev. XX. Stell. VIII. B.*) gelijk aan het veelhoekige grondvlak, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte der piramide, of des kegels. Hoe nader nu deze punten *A*, *B*, *C*, *enz.* bij elkande genomen worden, zooveel te minder zullen het grondvlak en de inhoud der ingeschrevene piramide van het grondvlak en den inhoud des kegels, waarin de piramide beschreven is, verschillen. Dit verschil wordt eindelijk niets, wanneer de punten *A*, *B*, *C*, *enz.* naast elkander genomen worden of in elkander vallen; waaruit dan het gestelde van zelve volgt.

§. 864. *Fig.* 405. *Fig.* 409. *De inhoud van een regten cirkelvormigen kegel is gelijk aan zijne cirkelvormige grondvlakte, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte; dat is, met één-derde van de as AE. Dat is*, (*zie* Bijv. op het VI. B. Bladz. 164.)

$$\textit{Inhoud kegel} = \tfrac{1}{3}\pi \times AE^2 \times BE.$$

VI. STELLING. *Fig.* 410.

§. 865. *Het oppervlak van een regten cirkelvormigen kegel is gelijk aan den omtrek van het grondvlak, vermenigvuldigd met de helft van de opstaande zijde des cirkels.*

BETOOG. Laat, *TM* de as van den regten cirkelvormigen kegel zijn; *M* derhalve het middelpunt van zijn grondvlak, *ABC* een gedeelte van deszelfs cirkelvormigen omtrek.

Laat *ACM* de middelpuntsdriehoek van een regelmatigen *n*-hoek zijn, in het cirkelvormig grondvlak beschreven. Men deele *AC* in *F*, in twee gelijke *AF* = *FC*, en trekke den straal *MFB*, *DE* loodregt op *MB*; dan is *DEM* de middelpuntsdriehoek van den regelmatigen *n*-hoek, om het cirkelvormige grondvlak beschreven.

Trek van het toppunt *T* de lijnen *TA*, *TD*, *TB*, *TF*, *TC* en *TE*; dan staan (*VIII. Stell. VIII. B.*) de lijnen *TF* en *TB* loodregt op *AC* en *DE*, en de driehoeken zijn (*X. Stell. I. B.*) gelijkbeenig. De driehoek *ACT* is dan één van de *n* opstaande zijvlakken van de regelmatige piramide, welke *in*- en de driehoek *DET* één der opstaande zijvlakken van de regelmatige piramide, welke *om* den regten kegel is beschreven. Het buitenste oppervlak (het grondvlak niet mede gerekend,)

van

van de ingeschrevene regelmatige piramide, is dan gelijk aan n-maal drieh. *ACT*, en het buitenste oppervlak van de omgeschrevene regelmatige n-hoekige piramide, is gelijk aan n-maal den drieh. *DET*.

Uit dit verklaarde volgt nu: dat het buitenste oppervlak van de ingeschrevene piramide gelijk is aan den omtrek van den n-hoek in het grondvlak beschreven, vermenigvuldigd met ½ *TF*; en het buitenste oppervlak van de omgeschrevene piramide gelijk is aan den omtrek van den n-hoek, om het grondvlak beschreven, vermenigvuldigd met ½ *BT*. Nu is (*XI. Stell. VI. B.*) de omtrek van den ingeschrevenen veelhoek kleiner dan die van den omgeschrevenen en *TF* < *BT*; het oppervlak van de ingeschrevene piramide zal dus kleiner zijn, dan het oppervlak der omgeschrevene. Daar nu het gedeelte van het oppervlak des kegels, tusschen den boog *ABC*, en de opstaande zijden *AT* en *CT* begrepen, grooter dan de driehoek *ACT*, en kleiner dan de driehoek *DET* is, en n-maal dit gedeelte gelijk is aan het geheele buitenste oppervlak des kegels, zoo zal het oppervlak van den kegel grooter zijn dan het oppervlak van de ingeschrevene, en kleiner dan het oppervlak van de omgeschrevene piramide.

Het verschil van de oppervlakken der in- en omgeschrevene piramiden zal (*XI. Stell. VI. B.*) minder worden, naarmate n grooter of boog *ABC* kleiner is; het verschil der lijnen *BT* en *FT*, wordt dan ook kleiner. Men zal echter n zoo groot kunnen nemen, dat het verschil tusschen de oppervlakken der in- en omgeschrevene piramiden minder is dan de kleinste vlakte, die men zich kan voorstellen; daar nu het oppervlak van den kegel aan beide oppervlakken gelijk wordt, wanneer men n oneindig groot neemt; zoo zullen de omtrekken der n-hoeken in- en om- het grondvlak beschreven, gelijk aan den omtrek van het grondvlak en *TF* = *BF*; het oppervlak van den kegel is dan gelijk aan den omtrek van het grondvlak, vermenigvuldigd met de helft van de opstaande zijde *BT*.

§. 866. I. Gevolg. *Fig.* 411. *Wanneer men dan, uit het toppunt C van eenen kegel, als middelpunt, met BC, als straal, eenen cirkelboog BD beschrijft, welks lengte gelijk is aan den omtrek van het grondvlak; dan zal de inhoud van den cirkelsector BCD gelijk zijn aan het buitenste oppervlak van den kegel.*

Want, neem de *boog BD* = *omtr. BF*, en vermenigvuldig deze gelijkheid met ½ *BC*; dan is, *boog BD* × ½ *BC* = *omtr. BF* × ½ *BC*; dat is, (*I. Gev. XIII. Stell. VI. B. en VI. Stell.*) *sector BCD* = *het oppervlak van den kegel.*

§. 867. II. Gevolg. *Het oppervlak van den kegel zal ook gelijk zijn aan een regthoekigen driehoek CBE, welke de opstaande zijde CB, en eene lijn BE, gelijk aan den omtrek van het grondvlak des kegels zijnde, tot regthoekszijden heeft.*

§. 868. Aanmerking. Volgens het *III. Gev. XVIII. Stell. V. B.*, is *omtr.* BC : *boog* $BD = 360^\circ$: *hoek* BCD: maar *omtr.* $BC = 2\pi \times BC$, en *boog* $BD =$ *omtr.* $BF = 2\pi \times BF$ zijnde, is $2\pi \times BC$: $2\pi \times BF = 360^\circ$: *hoek* BCD; of (*VI. Stell. II. B.*) $BC : BF = 360^\circ$: *hoek* BCD; waaruit volgt:

$$\text{hoek } BCD = \frac{BF}{BC} \times 360^\circ$$

Door deze vergelijking, kan de hoek gevonden worden, welke de stralen van den sector, die aan het oppervlak van den kegel gelijk is, met elkander maken.

VII. Stelling. *Fig.* 412.

§. 869. *De inhoud eens afgeknotten kegels is gelijk aan de som van het grondvlak, het bovenvlak en een vlak, dat, tusschen het grondvlak en het bovenvlak, middenevenredig is, vermenigvuldigd met één-derde van de hoogte. — En het buitenste oppervlak van den afgeknotten kegel is gelijk aan deszelfs opstaande zijde, vermenigvuldigd met de halve som van de omtrekken van de grond- en bovenvlakken.*

Ophelderingr. Zij AEG een regthoekige driehoek, in welken CF evenwijdig is getrokken aan de basis AG. Indien dan die driehoek, om de regthoekszijde EG, omwentelt; dan beschrijft de geheele driehoek AGE den geheelen kegel, de driehoek CEF de afgesneden kegel, het trapezium $AGFC$ den afgeknotten kegel; de lijnen AE, CE en AC de oppervlakken van de kegels en van den afgeknotten.

Men stelle $AG = A$, $CF = a$, $FG = h$, $EF = x$, $AC = d$, $CE = y$; de inhoud van den afgeknotten kegel $= I$, en deszelfs buitenste oppervlak, door de beweging van de opstaande zijde AC voortgebragt, $= O$; dan is (*XIII. Stell. VI. B.*)

$$I = \tfrac{1}{3}\pi\,(A^2 + Aa + a^2) \times h$$

$$O = \pi\,(A + a) \times d$$

Betoog *van het eerste.* Volgens de *V. Stell.* is,

$$\textit{Inh. kegel } ABE = \tfrac{1}{3}\pi A^2 \times (h + x)$$

$$\textit{Inh. kegel } CDE = \tfrac{1}{3}\pi a^2 \times x$$

Men trekke deze vergelijkingen van elkander af; dan verkrijgt men: × h

$$I = \tfrac{1}{3}\pi A^2 + \tfrac{1}{3}\pi\,(A^2 - a^2)\,x \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Nu is, wegens de gelijkvormige driehoeken AEG en ~~CFG~~, CEF

$$AG : CF = EG : EF; \text{ of } A : a = h + x : x$$

derhalve is $x = \dfrac{ah}{A - a}$

Brengt

Brengt men deze waarde van x in de vergelijking (A) over; dan zal men vinden:

$$I = \frac{1}{3}\pi A^2 h + \frac{1}{3}\pi (A^2 - a^2) \times \frac{a\,h}{A - a} = \frac{1}{3}\pi (A^2 + a^2 + A\,a) \times h$$

Betoog *van het tweede.* De omtrek van het grondvlak AB, is (*XIII. Stell. IV. B.*) gelijk $2\pi A$, en de omtrek van het bovenvlak CD gelijk $2\pi a$; nu is (*VI. Stell.*)

$$\textit{oppervl. kegel } ABE = \pi A \times (d + y)$$
$$\textit{oppervl. kegel } CDE = \pi a y.$$

Het verschil dezer vergelijkingen geeft

$$O = \pi A d + \pi (A - a) y \quad \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

In de gelijkvormige driehoeken AEG en AEF, is

$$AG : CF = AE : CE, \text{ of } A : a = d + y : y$$

$$\text{derhalve } y = \frac{a\,d}{A - a}$$

indien men nu deze waarde van y in de vergelijking (B) overbrengt; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$O = \pi (A + a) d.$$

§. 870. Aanmerking. Vermits de cilinders en kegels inderdaad niets anders dan kromlijnige prisma's en piramiden zijn, welke, met de drie- en veelhoekige prisma's en piramiden, dezelfde hoofdeigenschappen hebben, zoo zal ook alles, wat van deze laatste soort van figuren, in de XIV, XVII en XVIII. *Stellingen*, IX. *Boek*, en derzelver gevolgen, betoogd is, op gelijke wijze, van de cilinders en kegels gelden. 1°. *Zullen de cilinders en kegels tot elkander staan, in dezelfde reden, als de grondvlakken, indien de hoogten gelijk zijn*, 2°. *in dezelfde reden, als de hoogten, wanneer de grondvlakken gelijk zijn*, 3°. *in de zamengestelde reden van de grondvlakken en hoogten, indien beide ongelijk zijn*, 4°. *en, wanneer de cilinders en kegels een gelijken inhoud hebben; dan zijn hunne grondvlakken in de omgekeerde reden van de hoogten.* Met betrekking eindelijk tot de regte cirkelvormige cilinders en kegels, welke begrepen kunnen worden, door de omwenteling van eenen regthoek en van een regthoekigen driehoek, te ontstaan, verdient nog te worden aangemerkt: *dat, indien deze regthoeken of regthoekige driehoeken gelijkvormig zijn, de cilinders en kegels, welke door hunne omwenteling ontstaan, insgelijks gelijkvormig zullen zijn*; eene waarheid, waarvan men zich, bij een weinig nadenkens, gemakkelijk overtuigen zal. *De gelijkvormige regte cirkelvormige cilinders en kegels staan voorts tot elkander, als de kuben van de middellijnen hunner grondvlakken, of als de kuben van hunne hoogten, of als de kuben*

van

van hunne opſtaande zijden. Waarheden, welke, daar zij in het algemeene betoog van de *XXIII. Stell. IX. B.* begrepen zijn, in geene afzonderlijke ſtellingen behoeven voorgeſteld en betoogd te worden.

III. *Over de kromme lijnen, die uit de ſnijding van den regten Kegel ontſtaan.*

§. 871. VI. BEPALING. *Fig.* 413. Wanneer een onbepaalde regte cirkelvormige kegel, voortgebragt door de omwenteling van het ſtelſel der lijnen *VW* en *XT*, om de lijn *VW*, geſneden wordt door een vlak, dat loodregt op de as *VW* ſtaat (*III. Aanm. IV. Stell.*), dan zal de doorſnede altijd een cirkel zijn; maar ſnijdt men de kegel door een vlak, hetwelk door de as *VW* gaat; dan noemt men deze doorſnijding eene *centrale doorſnijding*; zulk eene is in de figuur de hoek *ATC*. Laat nu uit een punt *P* genomen in de opſtaande zijde *TC*, in dit centrale vlak, de lijnen *PD*, *PE* en *GPF* getrokken worden; de eerſte zoodanig, dat zij de opſtaande zijde *TT* ergens in *D* ſnijdt, de tweede evenwijdig aan dezelve, en de derde zoodanig, dat zij het verlengde van die opſtaande zijde *TT* (namelijk *TX*) ergens in *F* ontmoet. Indien men dan, loodregt op het centrale vlak *ATC*, door gezegde lijnen *PD*, *PE* en *PF*, vlakken laat gaan; dan zullen die vlakken het kegelvlak, volgens kromme lijnen ſnijden, die men, in navolging van de oude Meetkunſtenaars, *Ellips*, *Parabola* en *Hyperbola* noemt; de ellips door het vlak *PD*, de parabola door het vlak *PE*, en de hyperbola door het vlak *PF*.

I. VRAAGSTUK. *Fig.* 414, 415 *en* 416.

§. 872. *Het vlak van de centrale ſnijding eens regten cirkelvormigen kegels gegeven zijnde, de punten der drie kegelſneden (der Ellips, Parabola en Hyperbola), door conſtructie te bepalen, en voorts de vergelijkingen dezer drie kromme lijnen te vinden?*

OPLOSSING. A. *Voor de ellips. Fig.* 414. Zij *YTW* de centrale doorſnijding van een regten cirkelvormigen kegel; *AB* de lijn, volgens welke het vlak van de elliptiſche ſnijding het centrale vlak ſnijdt. Neem *TE* = *TA*, en trek ergens, door een punt *Q* van die lijn *AB*, eene lijn *CQD*, evenwijdig aan *AE*; beſchrijf op deze lijn *CD*, als middellijn, eenen cirkel; trek door *Q* de koorde *RS*, loodregt op de middellijn, dan is (*VIII. Stell. V. B.*) *QS* = *QR*. Nog trekke men, door het punt

Q, eene lijn PQP', loodregt op AB; men make $PQ = P'Q = QR = QS$; dan zijn P en P' punten van de ellips.

Want, indien men het vlak $APBP'$ van de ellips, om de lijn AB, en het vlak van den cirkel $CRDS$, om de middellijn CD laat omdraaijen, tot dat zij beide loodregt op het vlak YTW staan; dan zullen, in dien stand, de lijnen RQS en PQP' langs elkander vallen, en (omdat $PQ = RQ$ en $P'Q = QS$ is,) het punt P in R en P' in S; de omtrek van den cirkel $CRDS$ valt dan in het oppervlak van den kegel; de punten P en P' behooren derhalve tot de ellips, welker overige punten, op dezelfde wijze, worden gevonden.

Om de vergelijking van deze ellips te vinden, make men *hoek* AEF = *hoek* BAW. Men stelle $AB = 2a$, $AF = p$, $AQ = x$; derhalve $BQ = 2a - x$ en $PQ = P'Q = y$. De driehoeken BAE en BQC zijn (omdat AE evenwijdig is aan CQ,) gelijkvormig; daarom is (*VIII. Stell. IV. B.*)

$$BQ : CQ = AB : AE$$

Nog zijn de driehoeken AEF en QAD gelijkvormig; omdat, volgens de constructie, *hoek* AEF = *hoek* QAD, en (wegens de evenwijdige lijnen QD en AE,) *hoek* EAF = *hoek* AQD is; en daarom is (*VIII. Stell. IV. B.*)

$$AQ : QD = AE : AF$$

Uit deze twee evenredigheden volgt nu (*VIII. Stell. IV. B.*)

$$AQ \times BQ : CQ \times DQ = AB \times AE : AE \times AF = AB : AF$$

Maar, volgens de *XXI. Stell. V. B.*, is $CQ \times DQ = QR^2 = PQ^2 = P'Q^2$; de laatste evenredigheid wordt derhalve:

$$AQ \times BQ : PQ^2 = AB : AF$$

dat is, in de getallen, die wij voor de lijnen, in deze evenredigheid voorkomende, hebben aangenomen:

$$x \times (2a - x) : y^2 = 2a : p$$

of, wanneer men uit deze evenredigheid y^2 oplost,

$$y^2 = px - \frac{px^2}{2a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

en deze is dan de vergelijking van de Ellips.

B. *Voor de parabola. Fig.* 415. Zij wederom YTW het vlak van de centrale doorsnijding des regten cirkelvormigen kegels, AU evenwijdig aan TY. Deze is, *VI. Bep.* de lijn, volgens welke de parabolische doorsnijding het centrale vlak snijdt. Neem wederom $TE = AT$, trek door een punt Q van de lijn AU de lijn CD, evenwijdig aan AE, en beschrijf op CD als middellijn eenen cirkel, in welken men door het punt Q de koorde RQS, loodregt op de middellijn CD trekt. Na eindelijk, door hetzelfde punt Q, eene onbepaalde loodlijn op AU te hebben getrokken, neme men $QP = QR$ en $QP' = QS$; dan zijn P en P' punten der parabolische doorsnede.

Want, indien men wederom de vlakken PAP' en $CRDS$, om de lijnen AU en CD laat omdraaijen, tot dat zij loodregt op het centrale vlak

vlak *TTW* staan; dan zullen de lijnen *PQ* en *QR* langs elkander vallen en loodregt op het centrale vlak staan, en daar de omtrek van den cirkel *CRDS* in het oppervlak van den kegel valt, zoo zullen de punten *P* en *P'* insgelijks in hetzelve liggen, en punten van de parabolische doorsnijding zijn, welker overige punten, door de herhaling van dezelfde constructie, zullen gevonden worden.

Men make, om de vergelijking van de parabola te vinden, wederom *hoek AEF* = *hoek UAW*, en stelle $AQ = x$, $AF = p$, $QP = QP' = QR = QS = y$; dan hebben wij, in de driehoeken *AEF* en *QDA*, die, om dezelfde reden als boven, gelijkvormig zijn (*VIII. Stell. IV. B.*) de evenredigheid:

$$AE : AF = AQ : QD$$

maar aangezien (*constr. en onderst.*) *CQAE* een parallelogram is, zoo is (*I. Stell. III. B.*) $CQ = AE$; de laatste evenredigheid wordt derhalve

$$CQ : AF = AQ : QD$$

en daarom is (*V. Stell. IV. B.*)

$$AF \times AQ = CQ \times QD$$

maar nu is (*XXI. Stell. V B.*) $CQ \times DQ = QR^2 = PQ^2 = P'Q^2$; derhalve is $AF \times AQ = PQ^2 = P'Q^2$; dat is, in de aangenomene notatie

$$y^2 = px \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (B)$$

en deze is dan de vergelijking der Parabola.

C. *Voor de hyperbola. Fig.* 416. Dezelfde lijnen en dezelfde letters beteekenen hier hetzelfde, als in de twee voorgaande figuren; alleenlijk snijdt de lijn *AB*, volgens welke het hyperbolische vlak loodregt op het centrale vlak geplaatst is, het verlengde van *TT*; waaruit men al ten eerste ziet: dat het hyperbolische vlak beide kegelvlakken (het bovenste en het onderste) zal doorsnijden. Na (even als boven) $TE = TA$ genomen er *AE* getrokken te hebben, trekke men door een punt *Q* de lijn *CD*, evenwijdig aan *AE*, men beschrijve op *CD* als middellijn eenen cirkel en trekke, door het punt *Q*, de koorde *RS*, loodregt op de middellijn; en *PQP'*, loodregt op *AQ*, en men neme $QP = QR$ en $QP' = QS$; dan zullen *P* en *P'* punten van de bovenste tak der hyperbola zijn. Alle andere punten van de bovenste en onderste takken der hyperbola worden op dezelfde wijze gevonden.

Dat *P* en *P'* inderdaad punten der hyperbola zijn, wordt, op dezelfde manier als boven, betoogd

Men make, om de vergelijking van de hyperbola te vinden, *hoek AEF* = *hoek WAF*; dan zijn, om dezelfde redenen, als boven, de driehoeken *ABE* en *AEF* aan de driehoeken *BCQ* en *ADQ* gelijkvormig, en daarom is (*VIII en V. Stell. IV. B.*)

$$BQ : CQ = AB : AE$$

$$AQ : QD = AE : AF$$

$$AQ \times BQ : CQ \times QD = AB \times AE : AE \times AF = AB : AF$$

dat is, omdat (*XXI. Stell. V. B.*) $CQ \times QD = DR^2 = DS^2 = QP^2 = P'Q^2$ is,

$$AQ \times BQ : QP^2 = AB : AF$$

Men ftelle dan $AB = 2a$, $AF = p$, $BQ = x$; dan is $BQ = x + 2a$ en $PQ = y$; de laatfte evenredigheid wordt derhalve:

$$x(x+2a) : y^2 = 2a : p$$

en, wanneer men uit deze evenredigheid y^2 oplost; dan verkrijgt men eindelijk:

$$y^2 = px + \frac{px^2}{2a} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (C)$$

voor de vergelijking van de Hyperbola.

§. 873. I. Aanmerking. De eerfte dezer kegelfneden, de Ellips namelijk, is eene kromme lijn, die, even als de cirkel, in zich zelve terug keert; doch welker punten niet meer evenver van het midden M van de as AB (*fig.* 414) afftaan. Wanneer men in de vergelijking (A) $AQ = x = a$ ftelt; dan wordt $PQ^2 = P^1Q^2 = \frac{1}{2}ap$ en $P^1P^2 = 2ap$; dus $PP^1 = \sqrt{2ap}$.

Men noemt $BA = 2a$ de *groote as*, de ftandvastige grootheid p de *parameter* en de lijn P^1P, die door het midden M van de groote as gaat, en gelijk aan $\sqrt{2ap}$ of eene middenevenredige tusfchen de groote as en den parameter is, de *kleine as*; AQ en QB de *abfcisfen*, en PQ de *ordinaat* van het Punt P. — Indien men de kleine as gelijk $2b$ ftelt; dan is $2b = \sqrt{2ap}$, $4b^2 = 2ap$ en $p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$. Stelt men deze waarde van P in de vergelijking (A); dan wordt zij:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

Stelt men den oorfprong van de telling der coördinaten in M, zoodat $MQ = x$, $PQ = y$, de halve groote as $= a$, en de halve kleine gelijk b is; dan wordt de vergelijking:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \text{ of } bx^2 + ay^2 = a^2b^2$$

De tweede dezer kromme lijnen, *fig.* 415, is de *parabola*. Indien men den kegel, zoo als het hier behoort, voorftelt, als, naar boven en naar beneden, tot in het oneindige te zijn uitgeftrekt; dan ziet men, zoo uit de conftructie, als uit de vergelijking $y^2 = px$, dat de takken AP en AP^1 der parabola zich meer en meer van de lijn AU verwijderen en nimmer kunnen zamenkomen. Men noemt AU de *as van de parabola*, $p = AF$ hare *parameter*, $AQ = x$ en $PQ = y$ de abfcis en de ordinaat, of de *coördinaten* van het punt P.

De derde kegelsnede, *fig.* 416, de hyperbola namelijk, bestaat uit twee tegenoverstaande takken, die, bij nader onderzoek, blijken gelijk- en gelijkvormig te zijn; waarvan de eerste in het bovenste, en de tweede in het benedenste kegelvlak ligt. Indien men, in de vergelijking (C), $x = -a$ stelt, om te vinden, welke punten met die abscis overeenstemmen; dan verkrijgt men $y^2 = -\frac{1}{2}ap$, dus $4y^2 = -2ap$ en $2y = \sqrt{-2ap}$, hetwelk eene onbestaanbare grootheid is. Indien men echter $2ap = 4b^2$ stelt; dan wordt, even als voor de ellips, $p = \frac{4b^2}{2a} = \frac{2b^2}{a}$, en men zal deze waarde van p in de vergelijking (C) kunnen overbrengen, welke dan worden zal:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$$

en zoo men den oorsprong van de telling der coördinaten in het punt M, in het midden van AB, overbrengt; dan zal men verkrijgen:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 + x^2), \text{ of } a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2$$

De lijn $AB = 2a$ wordt nu de *eerste* of *voorname*, de lijn $2b$, de *tweede of dwarse as*, $p = AF$ de *parameter* der hyperbola genoemd; AQ en BQ zijn de abscissen, en PQ de ordinaat van het punt P.

§. 874. II. Aanmerking. Indien men, in *fig.* 414, de lijn AB, om het punt A, naar den kant van W, laat omdraaijen, zoo dat de hoek WAB vermindert; dan zal de eerste as AB grooter worden, en ook zal de parameter AF veranderen; maar de constructie zal dezelfde blijven, de vorm der vergelijking (A) zal dus niet veranderen; alleenlijk zullen, voor elken anderen stand van de lijn AB, a en p eene andere waarde hebben. Op den oogenblik, dat de bewegende lijn AB evenwijdig aan TT valt, zal de ellips (vergelijk *fig.* 415) in eene parabola veranderen, en, oogenblikkelijk daarna, zal de parabola in eene hyperbola overgaan. *De parabola is alzoo de overgang van de ellips tot de hyperbola. Ook zijn de vergelijkingen* (A), (B) *en* (C) *alle in denzelfden vorm begrepen;* want, wanneer men, in de vergelijking (A), a oneindig groot neemt; dan verkrijgt men de vergelijking (B), en neemt men a negatief; dan ontstaat de vergelijking (C).

§. 875. III. Aanmerking. De kennis van de eigenschappen dezer kromme lijnen, die algemeen onder de naam van *Kegelsneden*, en, in de Hoogere Meetkunst, onder dien van *kromme lijnen van de*

eerste orde bekend zijn, zijn de grond van hoogere kundigheden. In de Natuur- en Sterrekunde zijn zij onontbeerlijk. Zij worden, in het eerste gedeelte onzer Hoogere Meetkunst, opzettelijk overwogen, en uit den scheven cirkelvormigen kegel afgeleid. — De Lezer betooge: dat, *wanneer een regte cirkelvormigen cilinder gesneden wordt door een vlak, dat met de as des cilinders een scheven hoek maakt, dit vlak de cilindervlakte volgens eene ellips zal doorsnijden.*

IV. *Over de verdere eigenschappen van den bol; inzonderheid over deszelfs oppervlak en inhoud.*

§. 876. Men kent reeds, uit de XVI en volgende bepalingen van het VIII. *Boek*, den bol; men weet, hoe hij, door de omwenteling van eenen cirkel, om ééne van deszelfs middellijnen, wordt voortgebragt; *zoodat de bol, even als de regte cirkelvormige cilinders en kegels, tot de omwentelings ligchamen behoort.* Verder hebben wij gezien: *dat, wanneer een bol door een plat vlak gesneden wordt, de doorsnijding van dit vlak met het oppervlak altijd eenen cirkel maakt, die een* groote cirkel *genoemd wordt, zoo het snijdende vlak door het middelpunt gaat; een* kleine cirkel, *zoo het buiten het middelpunt loopt.* Ook weten wij reeds: *dat een vlak, hetwelk loodregt op het uiteinde van den straal of de middellijn van eenen bol staat, denzelven in dit enkele punt aanraakt.* Eindelijk zijn wij met de bolvormige strooken, drie- en veelhoeken, alsmede met de twee-, drie- en veelhoekige sectors van eenen bol bekend geworden. Thans moeten wij nog de verdere eigenschappen van den bol leeren kennen.

§. 877. VII. Bepaling. *Fig.* 417. Zij *AMB* de middellijn van een halven cirkel; *EMe* eene middellijn, die regthoekig op dezelve staat; *CG*, *DH* en *FI* loodlijnen, die, uit de punten *G*, *D* en *F* van den omtrek, loodregt op de middellijn *AB* vallen; *CK* eene lijn, die den cirkel in *C* aanraakt en het verlengde van *AB* in *K* snijdt; *AL* en *BN* loodregt op de uiteinden van de middellijn; *AB* en *LN* evenwijdig aan *AB*, den cirkel in *E* aanrakende, en alzoo *ALNB* een regthoek, welke om den halven cirkel beschreven is; en eindelijk *AC* en *AF* de koorden van de bogen *AC* en *ACF*. Laat nu deze figuur om de middellijn *AB* omwentelen; dan zal het volgende gebeuren. 1°. De vlakte van den halven cirkel *AEB* zal eenen bol, deszelfs omtrek het oppervlak van dien bol voortbrengen; 2°. de loodregte straal *EM* een grooten cirkel van den bol,

bol, wiens vlak loodregt op het vlak van den bewegenden cirkel en loodregt op de as *AB* ſtaat; *CG* en *FI* kleine cirkels van den bol, die, insgelijks loodregt op de as *AB* ſtaande, onderling evenwijdig zijn. 3°. Het halve ſegment *ACG* zal een *bolvormig ſegment*, de ſector *ACM* een *kegelvormigen bolvormigen ſector*, het ſtuk *CDHG*, tusſchen twee evenwijdige ordinaten begrepen, zal eene *bolvormige ſchijf* voortbrengen; de boog *AC* het buitenſte oppervlak van het bolvormige ſegment *CAc*, de boog *CD* het buitenſte oppervlak van de bolvormige ſchijf *CcdD*. 4°. De regte cirkelvormige kegelvlakte, welke door de omwenteling van de lijn *KC* ontſtaat, wordt gezegd om den bol beſchreven te zijn; en die kegelvlakte raakt het oppervlak van den bol, in al de punten van den omtrek des kleinen cirkels *CGc*. De cilinder, welke door de omwenteling van den regthoek *ABNL* ontſtaat, wordt gezegd om den bol beſchreven te zijn; deszelfs buitenſte oppervlak raakt het oppervlak van den bol aan, in den omtrek van den grooten cirkel *EMe*, en deszelfs grond- en bovenvlak, in de punten *B* en *A*. 5°. De regte cirkelvormige kegel, ontſtaande uit den regthoekige driehoek *AFI*, wordt gezegd in den bol beſchreven te zijn; de kleine cirkel *FIf* is deszelfs grondvlak.

Een *bolvormig ſegment* is alzoo een gedeelte van den bol, tusſchen een kleinen cirkel en een gedeelte van deszelfs oppervlak begrepen. Men noemt dien kleinen cirkel deszelfs grondvlak; de loodlijn, welke, uit het middelpunt van het grondvlak, loodregt op hetzelve ſtaat, de *hoogte*; het uiteinde van die loodlijn (in het oppervlak van den bol liggende) het *toppunt*.

Eene *bolvormige ſchijf* is een gedeelte van den bol, tusſchen twee evenwijdige kleine cirkels begrepen, (één van welke echter een groote cirkel kan zijn). Eén dezer cirkels noemt men het *grondvlak*, de andere het *bovenvlak*; de lijn of as, die de middelpunten dezer cirkels vereenigt, de *hoogte* der bolvormige ſchijf.

Een *kegelvormige bolvormige ſector* ontſtaat uit de vereeniging van een bolvormig ſegment en een naar beneden ſtaande regten cirkelvormigen kegel, wiens toppunt in het middelpunt van den bol valt.

§. 878. Aanmerking. *Fig.* 417. Het blijkt uit de voorgaande beſchrijving: *dat al de punten van den omtrek van een kleinen cirkel CGc evenver van de uiteinden van de middellijn van den bol, welke door het middelpunt van dien cirkel gaat, afſtaan.*

§. 879. VIII. Bepaling. *Elke groote of kleine cirkel van eenen*

 bol

bol heeft zijne bijzondere as en zijne bijzondere aspunten. De *as* van een grooten cirkel is de middellijn van den bol, die loodregt op den grooten cirkel ſtaat. De *as* van een kleinen cirkel is insgelijks eene middellijn van den bol, die, door het middelpunt van den kleinen cirkel gaande, loodregt op deszelfs vlak ſtaat. De uiteinden dezer asſen noemt men de *polen* of *aspunten* van den grooten of kleinen cirkel. *Elk ééne der polen eens grooten of kleinen cirkels ſtaat even-ver van al de punten van deszelfs omtrek.*

De bol heeft met den cirkel de volgende eigenſchappen gemeen.

VIII. STELLING.

§. 880. *Alle groote cirkels van den bol hebben gelijke omtrekken en middellijnen.* Zie *XVI. Bep. VIII. B.*

IX. STELLING.

§. 881. *De lijn, die, uit het middelpunt van eenen bol, door het middelpunt van éénen van deszelfs kleine cirkels getrokken wordt, ſtaat loodregt op het vlak van dien cirkel.* Zie *VI. Stell. VIII. B.*

X. STELLING.

§. 882. *De lijn, die, door het middelpunt van een kleinen cirkel, loodregt op deszelfs vlak wordt getrokken, gaat door het middelpunt van den bol. Zij is de as van dien kleinen cirkel.*

XI. STELLING.

§. 883. *De hoek, welke de asſen van twee cirkels, groote of kleine, met elkander, aan het middelpunt van den bol maken, is gelijk aan den ſtandhoek van derzelver vlakken.* Zie *XXIX. St. VIII. B.*

XII. STELLING.

§. 884. *De ſtralen, omtrekken en inhouden van kleine cirkels, op gelijke afſtanden van het middelpunt van den bol geplaatst zijnde, zijn gelijk.*

XIII. Stelling.

§. 885. *De stralen, omtrekken en inhouden van kleine cirkels worden kleiner, naarmate zij verder van het middelpunt van den bol verwijderd zijn.*

XIV. Stelling.

§. 886. *De oppervlakken van twee bollen snijden elkander in den omtrek van een kleinen cirkel, welks middelpunt met de middelpunten van die bollen in dezelfde regte lijn ligt, die loodregt op het vlak van dien kleinen cirkel staat.*

XV. Stelling.

§. 887. *Even zoo als het bij cirkels plaats heeft, kunnen bollen elkander uit- of inwendig aanraken. In beide gevallen, liggen de middelpunten der bollen, met het raakpunt, in dezelfde regte lijn. Bij eene uitwendige aanraking, is de afstand van de middelpunten der bollen gelijk aan de som, en, bij eene inwendige aanraking, gelijk aan het verschil van derzelver stralen.*

XVI. Stelling.

§. 888. *Indien men, uit eenig punt, buiten een bol genomen, eene menigte lijnen trekt, die het oppervlak van denzelven aanraken; dan liggen al die lijnen in eene regte cirkelvormige kegelvlakte en al de aanrakingspunten in den omtrek van een kleinen cirkel van den bol, op welks vlak de as van den kegel, die tevens door het middelpunt van den cirkel en van bol gaat, regthoekig geplaatst is.*
De eigenschappen van den bol in deze negen leerstellingen voorgesteld, zijn zoo eenvoudig en volgen zoo onmiddellijk uit de verklaarde *fig.* 417, dat wij het opstellen der betoogen aan den Lezer gerustelijk kunnen overlaten.

II. Vraagstuk. *Fig.* 428.

§. 889. *Een bol, of een gedeelte van denzelven, gegeven zijnde, deszelfs middellijn door constructie te vinden?*

Constructie. Men neme, op het oppervlak van den bol, ergens een punt A, naar welgevallen, en beschrijve, door middel van eenen passer

met kromme beenen, uit dit punt, op het oppervlak van den bol, eene kromme lijn *BCGD*; deze zal in hetzelfde vlak liggen, en een grooten of kleinen cirkel zijn, zijnde het punt *A* één van deszelfs polen. In den omtrek van dien cirkel, neme men drie punten *B*, *C* en *D*, naar welgevallen, en verbeelde zich, dat die punten binnen het ligchaam van den bol door regte lijnen vereenigd zijn; dan verkrijgt men den driehoek *BCD*, in den cirkel *BCD* beschreven. Men brenge nu in een plat vlak den drieheek *BCD* over; dat is, men construere, in een plat vlak, een driehoek *B'C'D'*, die aan den driehoek *BCD* gelijk- en gelijkvormig is; hetwelk door middel van dienzelfden krommen passer volbragt wordt. Men beschrijve om dien driehoek *B'C'D'* eenen cirkel; door het middelpunt *E* van dien cirkel eene middellijk *FG* getrokken hebbende, trekke men door het middelpunt *E* eene onbepaalde loodlijn *AH*; uit *F* met eenen straal, gelijk aan dien, waarmede men uit *A*, op den bol, den cirkel *BCD* heeft beschreven, eenen cirkelboog, die *AH* in *A* snijdt, en eindelijk *GH* loodregt op *AF*; *dan zal AH de middellijn van den gegevenen bol zijn.*

Betoog. Want, indien men het vlak van den cirkel *B'C'D'* om deszelfs middellijn *FG* laat omdraaijen, tot dat het loodregt op het vlak van den cirkel *AFH* staat; dan staan al de punten van den omtrek van dien kleinen cirkel (VI. *Stell.* VIII. *B.*) evenver van het punt *A*; dit punt *A* kan dus als een aspunt van den cirkel *BCD* worden aangemerkt; aangezien nu hoek *AFH* een regte hoek is, zoo moet, gelijk bekend is, *AH* de middellijn zijn van een grooten cirkel, die door het punt *A* gaat en regthoekig op den kleinen cirkel *BCD* staat; gevolgelijk is zij de middellijn van den gegevenen bol.

XVII. Stelling. *Fig.* 419.

§. 890. *Indien OATB den omtrek van een grooten cirkel van eenen bol voorstelt, waarvan OT de middellijn is, en tevens de as van den grooten cirkel, die AMB tot middellijn heeft, en welke derhalve loodregt op het vlak van den grooten cirkel OATB staat; indien verder de koorde CD de middellijn is van een kleinen cirkel CFD, die insgelijks loodregt op het vlak van den grooten cirkel OATB staat; wanneer men dan dien kleinen cirkel CFD, als het grondvlak en het punt O als het toppunt van een cirkelvormigen kegel aanneemt; dan zal het vlak van dien cirkelvormigen kegel, het vlak van den grooten cirkel, die AB tot middellijn, en OT tot as heeft, in den omtrek van een cirkel KNL snijden, wiens middellijn de lijn KL zal zijn.*

Betoog. De kromme lijn, volgens welke het vlak van den grooten cirkel *AB* het kegelvlak snijdt, is natuurlijk eene kromme lijn, die in

zich

zich zelve wederkeert; maar, dat die kromme lijn een cirkel is, moet bewezen worden.

De lijnen *OC* en *OD*, die, uit het toppunt *O* van den kegel tot aan de punten *C* en *D* getrokken worden, fnijden de middellijn *AB* in de punten *K* en *L*, welke natuurlijk punten van de kromme lijn *KNL* zijn.

Men trekke, van het punt *O*, tot eenig punt *E* van de middellijn *CD* des kleinen cirkels *CFD* de lijn *OE*, en *EF* loodregt op *CD* tot aan den omtrek van den kleinen cirkel. Nog trekke men *EH* loodregt op *OE*; en, na $EH = EF$ gemaakt te hebben, trekke men de lijn *OH* en *GI* evenwijdig aan *EH* en *GN* loodregt op *KL*. Men late nu het vlak van den cirkel *CFD*, om de middellijn *CD*, het vlak van den driehoek *OEH*, om de lijn *OE*, en het vlak van de doorfnijding *KNL*, om de lijn *KL* omdraaijen, tot dat deze drie vlakken alle loodregt op het vlak *OATB* ftaan; dan zullen de lijnen *EF*, *EH*, *IG* en *GN*, (IV. *Bep.* VIII. *B.*) loodregt op het vlak *OATB* ftaan, de lijn *EH* zal langs de lijn *EF*, en de lijn *GI* langs de lijn *GN* vallen; daar nu $EH = EF$ genomen is, zoo zal ook het punt *H* in het punt *F* vallen, en, in dien ftand, zal dan de lijn *OH*, in het oppervlak van den kegel liggen, het punt *I* in het vlak van den grooten cirkel *AB*; dit punt *I* zal alzoo een punt *N* van de fnijding van het kegelvlak met het vlak van den grooten cirkel *AB* moeten zijn; zoo dat $GI = GN$ zal zijn; indien wij dan bewijzen kunnen; dat GI^2 of $GN^2 = KG \times GL$ is; dan zal de ftelling bewezen zijn.

Men trekke, door het punt *G*, de lijn *PQ*, evenwijdig aan *CD*; dan zijn, wegens de evenwijdige lijnen, gelijkvormig de driehoek *OIG* aan den driehoek *OHE*, de driehoek *OGP* aan den driehoek *OEC*, de driehoek *OGQ* aan den driehoek *OED*, de driehoek *OPQ* aan den driehoek *OCD*.

Nog is de driehoek *OKL* gelijkvormig aan den driehoek *ODC*; want de hoek *OKB* wordt (XX *Stell.* V. *B.*) gemeten door de halve fom der bogen *BO* en *AC*, en de hoek *ODC* door de helft van den boog *OAC*; aangezien nu *boog* $AO =$ *boog* $BO = 90°$ is, (*onderft.*) zoo is *boog* $OAC =$ *boog* $BO +$ *boog* *AC*, en daarom $\frac{1}{2} OAC = \frac{1}{2}(BO + AC)$; de hoeken *OKL* en *ODC* zijn dus gelijk. Om dezelfde redenen, is *hoek* $OLK =$ *hoek* *OCD*; de driehoeken *OKL* en *ODC*, zijn dan (III. *Bep.* IV. *B.*) gelijkvormig.

En dus is ook de driehoek *OKL* gelijkvormig aan den driehoek *OQP*, en eindelijk (hetgeen nu van zelf blijkt,) de driehoek *GKP* gelijkvormig aan den driehoek *GQL*.

Nu is, in de gelijkvormige driehoeken *OEC* en *OGP*, (VIII. *St.* IV. *B.*)

$$CE : PG = OE : OG$$

en, in de gelijkvormige driehoeken *OED* en *OGQ*, is

$$DE : GQ = OE : OG$$

uit de twee twee evenredigheden, volgt dan de evenredigheid:

$$CE \times DE : PG \times GQ = OE^2 : OG^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Uit

Uit de gelijkvormige driehooken *GKP* en *GQL* volgt (VIII *en* V. *Stell.* IV. *B.*)

$$PG : KG = GL : GQ, \text{ en } PG \times GQ = KG \times LG$$

De evenredigheid (1), wordt derhalve:

$$CE \times DE : KG \times GL = OE^2 : OG^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

De gelijkvormige driehoeken *OEH* en *OGI* geven (VIII *en* VII. *Stell.* IV. *B.*) de evenredigheden;

$$OE : OG = EH : GI$$

$$OE^2 : OG^2 = EH^2 : GI^2$$

de evenredigheid (*a*) verandert dan wederom in deze:

$$CE \times DE : KG \times GL = EH^2 : GI^2$$

Maar boven hebben wij gezien: dat $EH = EF$ en $GI = GN$ is; wij hebben derhalve (V. *Stell.* II. *B.*)

$$CE \times DE : KG \times GL = EF^2 : GN^2$$

Nu is (XXI. *Stell.* V. *B.*) $CE \times DE = EF^2$; daarom moet (IV. *Stell.* II. *B.*) ook $KG \times GL = GN^2$; het punt *N* ligt alzoo in den omtrek van eenen cirkel, wiens middellijn de lijn *KL* is.

§. 891. Aanmerking. Deze fraaije eigenschap van den bol, is de grond van de *ſtereographiſche projectie*, waarvan men zich doorgaans, in de conſtructie van algemeene landkaarten, bedient. Het vlak van den grooten cirkel *AB*, noemt men het *vlak van projectie*, *O* het *oogpunt*. *Alle groote en kleine cirkels van eenen bol kunnen aangemerkt worden, als de grondvlakken van regte of ſcheve kegels, welker toppunten alle in het oogpunt O zamenkomen.* De cirkels, volgens welke al die kegelvlakken het projectie vlak *AB* ſnijden, zijn de *projectien* of *afteekeningen* van de groote en kleine cirkels van den bol, op dit projectie vlak.

I. Hulpstelling. *Fig.* 420.

§. 892. *Het buitenſte oppervlak van een regten afgeknotten kegel, voortgebragt door de omwenteling van een regthoekig trapezium ABCD, om deszelfs regthoekszijde CD, is gelijk aan het buitenſte oppervlak van een regten cirkelvormigen cilinder, welke met dien afgeknotten kegel dezelfde hoogte CD, en tot grondvlak heeft eenen cirkel, wiens ſtraal gelijk is aan de loodlijn EI, die, uit het midden E van de opſtaande zijde des afgeknotten kegels, tot aan de omwentelings as CD of derzelver verlengde getrokken is; dat is:*

$$\text{oppervl. afgekn. kegel } ABCD = 2\pi \times EI \times CD.$$

Betoog. Omdat $AE = BE$ onderſteld wordt. zoo zal, wanneer men *EF* en *BH*, evenwijdig aan *AD* en *CD* trekt, in de gelijkvormige driehoeken *AHB* en *EGB* (VIII. *Stell.* IV. *B.*) $AB : BE = AH : EG$ zijn; nu is $AB = 2BE$; derhalve $AH = 2EG$.

Voorts,

Voorts, omdat $BCDH$ een regthoekig parallelogram is, zoo is $BC = HD$ en $BH = CD$. Men telle $AH = 2EG$, $HD = GF$ en $BC = GF$ bij elkander; dan wordt (VIII. *Ax.*) $AH + HD + BC$, of $AD + BC = 2EG + 2GF = 2EF$.

Nu is (VII. *Stell.*) het oppervlak van den afgeknotten kegel $ABCD$

$$\text{oppervl. } AB = \pi(AD + BC) \times AB$$

dat is, omdat $AD + BC = 2EF$ is,

$$\text{oppervl. } AB = 2\pi \times EF \times AB \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

De driehoeken ABH en IEF zijn gelijkvormig. Want, wegens de evenwijdige lijnen AD en EF, is *hoek* $DAB =$ *hoek* BEF. Nu is *hoek* $BAD +$ *hoek* $ABH =$ *hoek* $BEF +$ *hoek* $FEI = R$; indien men nu van deze vergelijking *hoek* $BAD =$ *hoek* BEF aftrekt; dan zal men (IX. *Ax.*) overhouden, *hoek* $ABH =$ *hoek* FEI; en daarom zal, omdat de driehoeken ABH en IEF regthoekig zijn, *hoek* $A =$ *hoek* I zijn: die driehoeken zijn dus (III. *Bep.* IV. *B.*) gelijkvormig, en daarom is (VIII. *Stell.* IV. *B.*) $AB : BH = EI : EF$; gevolgelijk $EF = BH \times EI : AB = CD \times EI : AB$.

Men brenge nu deze waarde van EF in de vergelijking (1) over; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$\text{oppervl. } AB = 2\pi \times EI \times CD$$

nu is $2\pi \times EI$ de omtrek van den cirkel, die met EI als straal beschreven is; derhalve, *enz.*

II. HULPSTELLING. *Fig.* 422.

§. 893. *Laat, in hetzelfde vlak, een driehoek ABC, en buiten denzelven eene lijn PQ zijn gegeven; indien men dan, uit de hoekpunten van dien driehoek, de loodlijnen Aa, Bb en Cc, op die lijn PQ laat vallen en aanneemt, dat de geheele figuur, om de lijn PQ, omwentelt; dan zal de driehoek ABC een ringvormig ligchaam voortbrengen, welks inhoud gelijk zal zijn aan den inhoud van den driehoek ABC, vermenigvuldigd met den omtrek van eenen cirkel, wiens straal gelijk is aan één-derde van de som der loodlijnen Aa, Bb en Cc; dat is:*

$$\text{inhoud ligch. } ABC = \text{inh. drieh. } ABC \times \tfrac{2}{3}\pi(Aa + Bb + Cc)$$

BETOOG. Het blijkt uit de figuur, dat de inhoud van het ringvormige ligchaam, door de omwenteling van den driehoek ABC voortgebragt, gelijk is aan de som der afgeknotte kegels $ACca$, $ABba$, verminderd met den afgeknotten kegel $BCcb$.

Nu is, volgens de VII. *Stelling*, de inhoud van den afgeknotten kegel $ABba$ gelijk aan

$$\tfrac{1}{3}\pi(Aa^2 + Aa \times Bb + Bb^2) \times ab$$

de inhoud van den afgeknotten kegel $ACca$ gelijk aan

$\tfrac{1}{3}\pi$.

$$\frac{1}{3}\pi(Aa^2 + Aa \times Cc + Cc^2) \times ac$$

en de inhoud van den afgeknotten kegel $BCcb$ gelijk aan

$$\frac{1}{3}\pi(Bb^2 + Bb \times Cc + Cc^2) \times (ab + ac)$$

De inhoud van het ringvormige ligchaam, dat wij gelijk I ftellen, zal dan gelijk zijn aan de fom van de twee eerften inhouden, verminderd met den derden; dat is, na ontwikkeling,

$$I = \frac{1}{3}\pi\,[Aa^2 \times ab + Aa \times Bb \times ab + Bb^2 \times ab \ldots$$
$$\ldots + Aa^2 \times ac + Aa \times Cc \times ac + Cc^2 \times ac \ldots$$
$$\ldots - Bb^2 \times ab - Bb \times Cc \times ab - Cc^2 \times ab \ldots$$
$$\ldots - Bb^2 \times ac - Bb \times Cc \times ac - Cc^2 \times ac]$$

In deze vergelijking kan men vooreerst, omdat $ab + ac = ab$ is, de termen $Aa^2 \times ab$ en $Aa^2 \times ac$ tot den enkelen $Aa^2 \times bc$, de termen $-Bb \times Cc \times ab$ en $-Bb \times Cc \times ac$ tot den enkelen term $-Bb \times Cc \times bc$ vereenigen; en daar nu de termen $+Bb^2 \times ab$ en $-Bb^2 \times ab$; en, voorts de termen $+Cc^2 \times ac$ en $-Cc^2 \times ac$ elkander vernietigen; zoo verkrijgen wij deze meer eenvoudige uitdrukking, voor den inhoud van het ringvormige ligchaam:

$$I = \frac{1}{3}\pi\,[Aa^2 \times bc + Aa \times Bb \times ab - Bb^2 \times ac - Cc^2 \times ab] \quad (a)$$
$$+ Aa \times Cc \times ac$$
$$- Bb \times Cc \times bc$$

Deze vergelijking kan nu aldus getransformeerd worden. De inhoud van den driehoek ABC is gelijk aan de fom van de trapeziums $ACca$ en $ABba$, min het trapezium $BCcb$. Nu is, volgens het *Gevolg* van de XV. *Stell.* III. *B.*

$$inh.\ drieh.\ ABC = \tfrac{1}{2}(Aa + Bb)ab + \tfrac{1}{2}(Aa + Cc)ac \ldots$$
$$- \tfrac{1}{2}(Cc + Bb)(ab + ac)$$

of, bij nadere ontwikkeling en herleiding,

$$inh.\ drieh.\ ABC = \tfrac{1}{2}Aa \times bc - \tfrac{1}{2}Cc \times ab - \tfrac{1}{2}Bb \times ac$$

Men vermenigvuldige beide leden dezer vergelijking met $2(Aa + Bb + Cc)$; dan zal men verkrijgen:

$$2\,inh.\ drieh.\ ABC \times (Aa + Bb + Cc) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Aa^2 \times bc - Aa \times Bb \times ac - Aa \times Cc \times ab$$
$$+ Aa \times Bb \times bc - Bb^2 \times ac - Bb \times Cc \times ab$$
$$+ Aa \times Cc \times bc - Bb \times Cc \times ac - Cc^2 \times ab$$

dat is, wanneer men, met behulp van de figuur, de gelijkflachtige termen vereenigt:

$$2\,inh. drieh. \times (Aa + Bb + Cc) = Aa^2 \times bc + Aa \times Bb \times ab - Bb^2 \times ac - Cc^2 \times ab$$
$$+ Aa \times Cc \times ac$$
$$- Bb \times Cc \times bc$$

Brengt men nu het tweede lid dezer vergelijking, in het tweede lid van de vergelijking (a), over; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$I = \tfrac{2}{3}\pi\,(Aa + Bb + Cc) \times inh.\ drieh.\ ABC$$

§. 894. Gevolg. *Fig.* 420. Laat in *fig.* 420, in welke (zie *II. Hulpst.*) $AE = BE$ en $2EF = AD + BC$ is, en EI loodregt

regt op AB staat, de lijnen AI en BI worden getrokken; dan is (*XX. Stell. I. B.*) $AI = BI$ en ABI is alzoo een gelijkbeenige driehoek; volgens het betoogde, is nu de inhoud van het ligchaam, dat door de omwenteling van den driehoek ABI wordt voortgebragt,

$$I = inh.\ drieh.\ ABI \times \tfrac{2}{3}\pi\,(AD + BC)$$

maar $AD + BC = 2\,EF$, en inhoud drieh. $ABI = \tfrac{1}{2} AB \times EI$ zijnde, zoo wordt deze vergelijking:

$$I = \tfrac{2}{3}\pi \times AB \times EI \times EF$$

Uit het betoog van de *I. Hulpstelling*, is nu gebleken, dat $2\pi \times AB \times EF$ gelijk is aan het buitenste oppervlak van den afgeknotten kegel, welke door de omwenteling van de lijn AB om de as CD wordt voortgebragt; gevolgelijk is:

$$I = inh.\ oppervl.\ AB \times \tfrac{1}{3} EI$$

dat is: *indien men door het hoekpunt van den hoek, welke, in een gelijkbeenigen driehoek, de gelijke beenen met elkander maken, eene lijn buiten den driehoek, maar in deszelfs vlak, trekt, en dien driehoek om die lijn laat omwentelen; dan zal de inhoud van het ligchaam, door omwenteling van dien driehoek voortgebragt, gelijk zijn aan het buitenste oppervlak van den afgeknotten kegel, die door de omwenteling van de derde zijde AB wordt voortgebragt, vermenigvuldigd met één-derde van de loodlijn des driehoeks.*

XVIII. Stelling. *Fig.* 417.

§. 895. *De inhoud van het bovenste oppervlak van een bolvormig segment ($CGcA$), voortgebragt wordende door de omwenteling van een cirkelboog (AC) om de middellijn (AB), die door deszelfs uiteinde gaat, is gelijk aan den omtrek van den grooten cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte (AG) van dit bolvormig segment; en het oppervlak van den geheelen bol, is gelijk aan viermaal den inhoud van deszelfs grooten cirkel. Eindelijk is de inhoud van een kegelvormigen bolvormigen sector ($MCAc$), voortgebragt door de omwenteling van een cirkel-sector (CMA), gelijk aan het buitenste oppervlak (CAc) van dien bolvormigen sector, vermenigvuldigd met één-derde van den straal; en de geheele ligchamelijke inhoud van den bol gelijk aan deszelfs oppervlak, insgelijks vermenigvuldigd met één-derde van deszelfs straal.*

Betoog. Laat, *fig.* 423. in den halven cirkel *AHQ* een regelmatigen veelhoek *AB enz. PQ*, van bij voorbeeld veertien zijden zijn beschreven, en, uit het middelpunt *M*, op de zijden dezes veelhoeks, de apothema's *Mr*, op de zijden *AB*, *BC*, *enz.* vallen; en voorts, uit de hoekpunten van dien veelhoek de lijnen *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee*, *enz.* loodregt op de middellijn *AQ* vallen. Indien men dan den halven cirkel *AHQ* met den veertienhoek, die in denzelven beschreven is, om de middellijn *AQ* laat omwentelen; dan zal die halve cirkel eenen bol en deszelfs omtrek het oppervlak van dien bol voortbrengen; het halve cirkel-segment *AFf* zal het bolvormige segment *FAF'*, en de boog *AF* deszelfs buitenste oppervlak. De cirkel-sector *AMF* zal voortbrengen de kegelvormige bolvormige sector *AFMF'*, en eindelijk de regelmatige veertienhoek, die in den halven cirkel is beschreven, een ligchaam, dat in den bol is beschreven en aangemerkt kan worden, als te bestaan, uit twee regte cirkelvormige kegels, aan de punten *A* en *Q*, voortgebragt door de omwenteling van de regthoekige driehoeken *ABb* en *PQp*, en uit de regte afgeknotte cirkelvormige kegels, die worden voortgebragt door de omwenteling van de regthoekige trapeziums *BCcb*, *CDdc*, *DEed*, *enz.* *LNnl*, *NOon* en *OPpo*. Ook kan dit ligchaam beschouwd worden, als te zijn voortgebragt, door de omwenteling van de gelijkbeenige driehoeken *ABM*, *BCM*, *CDM*, *enz.* *NOM*, *OPM*, *PQM*, die alle, bij het middelpunt van den bol, aan elkander sluiten.

Wanneer men de figuur, op die wijze geconstrueerd zijnde, aandachtig beschouwt; dan ziet men, dat reeds, voor den regelmatigen veertienhoek, die in den halven cirkel beschreven is, de inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van denzelven voortgebragt, alhoewel kleiner zijnde dan de inhoud van den bol, in welke het beschreven is, van dien laatsten inhoud niet veel zal verschillen, en dat ook het oppervlak van dit ligchaam, alhoewel het insgelijks kleiner is dan het oppervlak van den bol, ook zeer weinig van dit laatste oppervlak zal verschillen; want het behoeft geen betoog, dat het oppervlak, hetwelk door de omwenteling van den boog *CD* (bij voorbeeld,) wordt voortgebragt, grooter zal zijn dan het oppervlak van den afgeknotten kegel, welke door de koorde van dien boog beschreven wordt.

Verbeelden wij ons nu, dat in dienzelfden halven cirkel een veelhoek van een dubbel aantal zijden — een acht-en-twintighoek — worde beschreven; dan zal de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, uit de omwenteling van dien acht-en-twintighoek geboren, grooter zijn dan de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, dat door de omwenteling van den veertienhoek ontstaat; en evenwel nog kleiner dan de inhoud en het oppervlak van den bol, in welke dit ligchaam is ingeschreven..

Gaat men voort, met op die wijze, in den halven cirkel, regelmatige 56, 112, 224, 448, 896, 1792, 3584, 7168, 14336, 28672, *enz.* hoeken te beschrijven, en die veelhoeken insgelijks, om de middellijn te laten

om-

omwentelen; *dan zal de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, dat, door de omwenteling van een volgenden veelhoek, uit die rij van veelhoeken, wordt voortgebragt, iets grooter zijn dan de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, dat door de omwenteling van den onmiddellijk voorgaanden veelhoek is voortgebragt; terwijl de inhoud van elk dezer ligchamen iets minder blijft, dan de inhoud van den bol, in welken al die ligchamen beschreven zijn.*

Men ziet dus, dat, wanneer men onophoudelijk voortgaat, met het getal der zijden van de regelmatige veelhoeken, die in den halven cirkel beschreven zijn, te verdubbelen, men door de omwenteling van dezelve eene rij van ligchamen, in den bol beschreven, verkrijgen zal, onder welke, tot in het oneindige, de inhoud en het oppervlak van elk volgend ligchaam iets grooter dan de inhoud en het oppervlak van het voorgaande zal worden, zonder echter noch den inhoud noch het oppervlak van den bol in grootte te kunnen bereiken.

Niet eer zal de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, door zulk eenen veelhoek voortgebragt, aan den inhoud en het oppervlak van den bol gelijk zijn, voor dat het aantal van de zijden des veelhoeks oneindig groot wordt.

Opdat dienaangaande geene de minste twijfel meer zou overblijven, zoo laten wij ons verbeelden: dat, in- en om- den halven cirkel, een veelhoek van 28672 zijden zij beschreven; dan zal de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van den omgeschrevenen 28672 hoek, altijd iets grooter zijn dan de inhoud en het oppervlak van den bol, om welken die veelhoek is beschreven; *de inhoud en het oppervlak van den bol, zullen dan kleiner zijn dan de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, door de omwenteling van den omgeschrevenen* 28672 *hoek, en grooter dan de inhoud en het oppervlak van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van den ingeschrevenen* 28762 *hoek.* Die in- en omgeschrevene veelhoeken verschillen nu in inhoud en omtrek (zie XI. *Stell.* VI. *B.*) minder van elkander, naarmate het aantal der zijden grooter is, en worden eindelijk, zoodra het aantal der zijden oneindig groot is, aan elkander gelijk.

Wie nu het ontwijfelbare hiervan met innige overtuiging inziet, zal de betoogen van de onderscheidene deelen der voorgestelde leerstelling, zonder moeite, kunnen volgen.

A. Beschouwen wij het ligchaam, dat door omwenteling van de veelhoekige figuur $ABCDEFf$ wordt voortgebragt; dan bestaat deszelfs buitenste oppervlak uit de vereeniging van de kegelvlakte AB met de afgeknotte kegelvlakken BC, CD, DE en EF, en deszelfs inhoud uit de vereeniging van den kegel ABB', en de afgeknotte kegels $BB'C'C$, $CC'D'D$, $DD'E'E$, $EE'F'F$. — Nu is volgens de I. *Hulpst.* en *Gevolg:*

$$\text{opperv}l.\ AB = \text{omtr.}\ Mr \times Ab$$
$$\text{opperv}l.\ BC = \text{omtr.}\ Mr \times bc$$
$$\text{opperv}l.\ CD = \text{omtr.}\ Mr \times cd$$

oppervl. DE = *omtr.* $Mr \times de$

oppervl. EF = *omtr.* $Mr \times ef$

Wanneer men nu deze vergelijkingen bij elkander optelt; dan zal men (VIII. *Ax.*) verkrijgen:

oppervl. $ABCDEF$ = *omtr.* $Mr \times Af$

Dat is: *het oppervlak van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van den veelhoekige figuur* $ABCDEFf$, *om de as* AQ, *is gelijk aan den omtrek van den cirkel, welke met de apothema* Mr *als straal beschreven is, vermenigvuldigd met de hoogte* Af.

Om dezelfde reden, zal de inhoud van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van de veelhoekige figuur $ABCDEFGHIKk$, om de as AQ, gelijk zijn aan den omtrek van den cirkel, met de apothema Mr beschreven, vermenigvuldigd met de hoogte Ak.

En telt men de waarde van de oppervlakken der kegels en afgeknotte kegels, door de zijden des veelhoeks, in den halven cirkel beschreven, (AB, BC *enz* NO, OP *enz.* PQ) bij elkander; *dan zal het oppervlak van het ligchaam, in den bol beschreven, bevonden worden gelijk te zijn aan den omtrek des cirkels, met de apothema* Mr *beschreven, vermenigvuldigd met de middellijn* AQ *van den bol, in welken dit ligchaam is beschreven.*

Wanneer wij nu de zijden der veelhoeken in de halve segmenten AFf, $AFKk$, en in den halven cirkel beschreven, zonder ophouden verdubbelen; de oppervlakken der ligchamen, in de halve segmenten AFf, $AFKf$, en den halven cirkel AHQ beschreven O_1, O_2, O_3, O_4, *enz.* O_n; o_1, o_2, o_3, o_4, *enz.* o_n; Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4, *enz.* Ω_n, en de overeenstemmende apothema's r_1, r_2, r_3, r_4, *enz.* r_n stellen; dan zal, om dezelfde reden, als boven,

O_1 = *omtr.* $r_1 \times Af$

O_2 = *omtr.* $r_2 \times Af$, *enz.*

O_n = *omtr.* $r_n \times Af$ . . . . (1)

o_1 = *omtr.* $r_1 \times Ak$

o_2 = *omtr.* $r_2 \times Ak$, *enz.*

o_n = *omtr.* $r_n \times Ak$ . . . . (2)

Ω_1 = *omtr.* $r_1 \times AQ$

Ω_2 = *omtr.* $r_2 \times AQ$, *enz.*

Ω_n = *omtr.* $r_n \times AQ$ . . . . (3)

zijn, en zal dit altijd blijven plaats hebben, hoe onzaggelijk groot het aantal van zijden der veelhoeken wordt, welke, door het onophoudelijk verdubbelen van de zijden des eersten veelhoeks, ontstaan.

Wanneer men nu met dit verdubbelen der zijden tot in het oneindige is voortgegaan; dan wordt O_n het oppervlak van het bolvormige segment, door de omwenteling van den boog AF; o_n het oppervlak van het bolvormig segment door de omwenteling van den boog AFK, en Ω_n het oppervlak van den geheelen bol, door de omwenteling van den halven cirkel voortgebragt; terwijl alsdan de apothema r_n gelijk wordt

aan

aan den ſtraal van den halven cirkel, dat is, $r_n = AM$; de vergelijkingen (1), (2) en (3), worden dan, in dit geval:

$$\text{oppervl. boog } AF = \text{omtr. } AM \times Af$$
$$\text{oppervl. boog } AFK = \text{omtr. } AM \times Ak$$
$$\text{oppervl. bol } AHQ = \text{omtr. } AM \times AQ$$

dat is: *het oppervlak van eenen bol is gelijk aan den omtrek van deszelfs grooten cirkel, vermenigvuldigd met de middellijn; gelijk derhalve aan viermaal den inhoud van zijn grooten cirkel.*

B. Beſchouwen wij eindelijk het ligchaam, dat door de omwenteling van de veelhoekige figuur *MABCDEFM* wordt voortgebragt. Het beſtaat uit de vereeniging der ligchamen, die door gelijktijdige omwenteling der middelpunts driehoeken *ABM*, *BCM*, *CDM*, *DEM* en *EFM* ontſtaan; nu is II. *Hulpſt.* en *Gevolg*,

$$\text{inh. ligch. } ABM = \text{inh. oppervl. } AB \times \tfrac{1}{3}\, Mr$$
$$\text{inh. ligch. } BCM = \text{inh. oppervl. } BC \times \tfrac{1}{3}\, Mr$$
$$\text{inh. ligch. } CDM = \text{inh. oppervl. } CD \times \tfrac{1}{3}\, Mr$$
$$\text{inh. ligch. } DEM = \text{inh. oppervl. } DE \times \tfrac{1}{3}\, Mr$$
$$\text{inh. ligch. } EFM = \text{inh. oppervl. } EF \times \tfrac{1}{3}\, Mr$$

Indien men deze vergelijkingen bij elkander optelt; dan zal men (VIII. *Ax.*) verkrijgen:

$$\text{inh. ligch. } MABCDEFM = \text{inh. oppervl. } ABCDEF \times \tfrac{1}{3}\, Mr$$

dat is: *de inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van de veelhoekige figuur MABCDEFM voortgebragt, is gelijk aan den inhoud van het oppervlak, voortgebragt door de figuur ABCDEF, vermenigvuldigd met één-derde van de apothema Mr.*

Om dezelfde reden, zal ook zijn

$$\text{inh. ligch. } MAB \text{ enz. } HIKM = \text{inh. oppervl. } AB \text{ enz. } HIK \times \tfrac{1}{3}\, Mr$$

en, wanneer men de inhouden van alle ligchamen, uit de omwenteling van al de gelijkbeenige middelpunts driehoeken *ABM*, *BCM*, *enz.* tot *PQM* ingeſloten, vereenigt; dan zal men vinden: *dat de inhoud van het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van den regelmatigen veelhoek, in den halven cirkel beſchreven, gelijk is aan den inhoud van het oppervlak van dit ligchaam, vermenigvuldigd met één-derde van de apothema dezes veelhoeks.*

Wat wij hier bewezen hebben, zal waarheid blijven, hoe groot men het aantal zijden ſtelle van den regelmatigen veelhoek, die in den halven cirkel is beſchreven. Verdubbelen wij, als boven, onophoudelijk de zijden der veelhoeken, welke in de cirkelbogen *AF*, *AFK*, en in den halven cirkel beſchreven zijn; noemen wij de inhouden der ligchamen, in den kegelvormigen bolvormigen ſector $AFMF'$ beſchreven, P_1, P_2, P_3, *enz.* P_n, die, welke in den kegelvormigen bolvormigen ſector $AFKMK'F'A$ zijn beſchreven, p_1, p_2, p_3, *enz.* p_n, en de inhouden der ligchamen, in den geheelen bol beſchreven, Π_1, Π_2, Π_3, *enz.* Π_n; zoo zal

$$P_n = O_n \times \tfrac{1}{3} r_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$p_n = o_n \times \tfrac{1}{3} r_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$
$$\Pi_n = \Omega_n \times \tfrac{1}{3} r_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

zijn, en steeds blijven, hoe groot het getal van de zijden der ingeschrevene veelhoeken gesteld worde.

Men stelle nu dit aantal oneindig groot; dan wordt (zoo als wij boven bewezen hebben,) P_n de inhoud van den kegelvormigen bolvormigen sector *AFMF'A*, O_n het buitenste oppervlak van dien sector door den boog *AF* voortgebragt, en de apothema r_n gelijk aan den straal *AM*; ook wordt dan p_n de inhoud van den kegelvormigen bolvormigen sector *AFKMK'F'A*, o_n deszelfs buitenste oppervlak, en $r_n = AM$; eindelijk wordt, in diezelfde onderstelling, Π_n, de ligchamelijke inhoud van den bol, Ω_n deszelfs oppervlak; en de drie vergelijkingen (4), (5) en (6), veranderen dan in de drie volgende:

inh. bolv. sect. $AFMF' =$ *inh. oppervl. boog* $AF \times \tfrac{1}{3} AM$
inh. bolv. sect. $AFKMK' =$ *inh. oppervl. boog* $AFK \times \tfrac{1}{3} AM$
inhoud geheelen bol $=$ *inh. oppervl. bol* $\times \tfrac{1}{3} AM$

Dat is: *de inhoud van eenen bol, is gelijk aan deszelfs oppervlak, vermenigvuldigd met één-derde van deszelfs straal, en de inhoud van een kegelvormigen bolvormigen sector, gelijk aan het bovenste oppervlak van denzelven, vermenigvuldigd met één-derde van den straal.*

§. 896. I. Gevolg. *Fig.* 423. *In denzelfden bol, staan de buitenste oppervlakken der bolvormige segmenten, en schijven tot elkander, in dezelfde reden, als derzelver hoogten.*

Want (XIII. *Stell.* VI. *B.*) de omtrek van den grooten cirkel van den bol, is gelijk aan $\pi \times AQ$, en daarom is, volgens het betoogde,

oppervl. segm. $ADD' = \pi \times AQ \times Ad$
oppervl. segm. $AFF' = \pi \times AQ \times Af$
oppervl. segm. $AKK' = \pi \times AQ \times Ak$

Men trekke van deze vergelijkingen de eerste van de tweede, en de tweede van de derde; dan wordt

oppervl. schijf $DFF'D' = \pi \times AQ \times df$
oppervl. schijf $FKK'F' = \pi \times AQ \times fk$

en hier uit volgen dan de evenredigheden:

oppervl. segm. ADD' : *oppervl. segm.* $AFF' = Ad : Af$
oppervl. schijf $DFF'D'$, *oppervl. schijf* $TKK'F' = df : fk$

§. 897. II. Gevolg. *Fig.* 423. *Het oppervlak van een bolvormig segment AFK' is gelijk aan den inhoud van den cirkel, welke beschreven wordt met de koorde AF van den boog ADF, door welks omwenteling het oppervlak van dit segment wordt voortgebragt.*

F'

Want, volgens de (XXIII. *Stell.* VI. *B.*) is $AF^2 = AQ \times Af$; derhalve is $\pi AF^2 = \pi AQ \times Af$; maar (XIII. *Stell.* VI. *B.*) is πAF^2 de inhoud van den cirkel, die, met *AF* als straal, beschreven wordt, en

πAQ

$\pi AQ \times Af$ gelijk aan het oppervlak van het bolvormige fegment AFF'; derhalve is de inhoud van den cirkel, met AF befchreven, gelijk aan het oppervlak van het fegment, door de omwenteling van den boog ADF voortgebragt.

§. 898. III. Gevolg. *Wanneer men derhalve de middellijn van eenen bol in verfcheidene deelen verdeelt, en door de deelpunten vlakken laat gaan, die alle loodregt op die middellijn ftaan, en bijgevolg onderling evenwijdig zijn; dan zullen die vlakken den bol in ftukken verdeelen, welker buitenfte oppervlakken, in dezelfde reden ftaan, als de overeenkomftige deelen van de middellijn.*

§. 899. IV. Gevolg. *Fig.* 417. *Wanneer de halve cirkel ACEFB, om welken de regthoek ALNB is befchreven, om de middellijn AB omwentelt; dan verkrijgt men eenen cilinder, wiens grondvlak aan den grooten cirkel van den bol, en wiens hoogte aan de middellijn van denzelven gelijk is, in welken de bol gezegd wordt befchreven te zijn; indien men nu de figuur fnijdt door een vlak PCcp, loodregt door de as AB; dan zal het buitenfte oppervlak van het bolvormige fegment CAc, gelijk zijn aan het buitenfte oppervlak van den overeenkomftige cilinder, welke door de omwenteling van den regthoek ALPG ontftaat.*

Want dit buitenfte oppervlak van dien cilinder, is volgens de III. *St.* gelijk aan den omtrek van het gondvlak (cirkel PG) vermenigvuldigd met PL; maar $PL = AG$ en het grondvlak gelijk zijnde aan den grooten cirkel van den bol, zoo is het oppervlak PL gelijk aan den omtrek van den grooten cirkel, vermenigvuldigd met AG; dat is gelijk aan het oppervlak van het bolvormige fegment CAc.

§. 900. V. Gevolg. *Indien men den ftraal van eenen bol $= r$ en deszelfs middellijn $= m$ ftelt; dan is de ligchamelijken inhoud van den bol, dien wij I ftellen, gelijk aan den kubus van den ftraal, vermenigvuldigd met vier-derde of gelijk aan den kubus van de middellijn, vermenigvuldigd met één-zesde van het Ludolphiaanfche getal; dat is:*

$$I = \tfrac{4}{3}\pi r^3, \text{ of } I = \tfrac{1}{6}\pi m^3$$

Want (XIII. *Stell.* VI. *B.*) de inhoud van den grooten cirkel van den bol is πr^2; derhalve is de inhoud van deszelfs oppervlak $= 4\pi r^2$; dien inhoud met één-derde van den ftraal vermenigvuldigd hebbende, zoo wordt $I = \frac{4}{3}\pi r^3$. Voorts, omdat $m = 2r$ of $r = \frac{1}{2}m$ is, zoo is $r^3 = \frac{1}{8}m^3$; de laatfte vergelijking wordt dus $I = \frac{1}{6}\pi m^3$.

§. 901. VI. Gevolg. *Fig.* 417. *De ligchamelijke inhoud van den bol is gelijk aan twee-derde van den inhoud van den cilinder, in welken hij befchreven is, en gelijk aan tweemaal den inhoud van den*

den regten cirkelvormigen kegel, die den grooten cirkel van den bol tot grondvlak, en de middellijn van denzelven tot hoogte heeft.

Want de inhoud van het grondvlak van den cilinder is (XIII. *Stell.* VI. *B.*) gelijk aan $\frac{1}{4}\pi m^2$; dien inhoud met de hoogte m vermenigvuldigd hebbende, zoo vindt men voor den inhoud van den cilinder, in welken den bol beschreven is, $\frac{1}{4}\pi m^3$; maar de inhoud van den bol is $\frac{1}{6}\pi m^3$; derhalve

$$inh.\ cil. : inh.\ bol = \tfrac{1}{4}\pi m^3 : \tfrac{1}{6}\pi m^3 = \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{6} = 3 : 2$$

$$inh.\ bol = \tfrac{2}{3} \times inh.\ cil.$$

De inhoud van den kegel die door de omwenteling van den regthoekigen driehoek *ABN* ontstaat, is (V. *Stell.*) gelijk aan één-derde van den inhoud des cilinders, in welken de bol is beschreven, gelijk aan één-derde van $\frac{1}{4}\pi m^3 = \frac{1}{12}\pi m^3$; derhalve is

$$inh.\ bol : inh.\ kegel = \tfrac{1}{6}\pi m^3 : \tfrac{1}{12}\pi m^3 = 2 : 1$$

$$inh.\ bol = 2 \times inhoud\ kegel.$$

§. 902. VII. GEVOLG. *Fig.* 417. *De ligchamelijke inhouden van eenen kegel, eenen bol en eenen cilinder, genomen onder die bepaling, dat de grondvlakken van den kegel, en den cilinder aan den grooten cirkel, en de hoogte dezer ligchamen aan de middellijn van den bol gelijk zijn, staan tot elkander in reden, als de getallen, één, twee en drie.*

§. 903. VIII. GEVOLG. *Fig.* 423. *De inhoud van den bolvormigen sector, die door de omwenteling van den cirkel-sector AMF wordt voortgebragt, is gelijk aan* $\frac{2}{3}\pi AM^2 \times Af$.

Want, volgens het betoogde, is de inhoud van dit ligchaam gelijk aan het oppervlak, voortgebragt door den boog *AF*, vermenigvuldigd met één-derde van den straal, en het oppervlak, door *AF* voortgebragt, is gelijk aan den omtrek van den grooten cirkel, vermenigvuldigd met *Af*; de omtrek van den grooten cirkel is gelijk aan aan $2\pi \times AM$; het oppervlak van het bolvormige segment *AFF'* is dus gelijk aan $2\pi \times AM \times Af$. Vermenigvuldigt men dus dit oppervlak met één-derde van den straal *AM*; dan verkrijgt men, voor den inhoud van den bolvormigen sector *AFMF'*, de formule $\frac{2}{3}\pi AM^2 \times Af$.

XIX. STELLING. *Fig.* 424.

§. 904. *Wanneer een cirkelsegment EKC, hetwelk geheel aan dezelfde zijde van de middellijn AB van eenen cirkel gelegen is, om die middellijn omwentelt; dan is de inhoud van het ligchaam, hetwelk daardoor geboren wordt, gelijk aan* $\frac{1}{6}\pi \times CE^2 \times DF$, *(zijnde* π *de verhouding van de middellijn op den omtrek.)*

BETOOG. De ligchamen, welke door de omwenteling der sectors *AEM* en *ACM* worden voortgebragt, zijn (VIII. *Gev.* XVIII. *Stell.*) elk gelijk

lijk aan $\frac{2}{3}\pi \times CM^2 \times AF$ en $\frac{2}{3}\pi \times CM^2 \times AD$; de inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van den fector ECM voortgebragt, is klaarblijkelijk het onderfcheid dezer ligchamen en gelijk aan $\frac{2}{3}\pi \times CM^2 \times DF$. Nu is wederom (*Gev.* II. *Hulpſ.*) de inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van den driehoek ECM geboren, gelijk aan $\frac{2}{3}\pi \times MI^2 \times DF$, (zijnde MI de loodlijn, welke, uit het middelpunt M, op de koorde EC valt,) en, wanneer men den inhoud van die laatfte ligchaam van dien van het voorgaande aftrekt, zoo zal men den inhoud van het ligchaam, dat door de omwenteling van den fector EKC geboren wordt, overhouden, en die inhoud zal gelijk zijn aan $\frac{2}{3}\pi \times (CM^2 - MI^2) \times DF$: maar (XVI. *Stell.* III. *B.*) $CM^2 - MI^2 = CI^2 = \frac{1}{4} CE^2$ zijnde, zal deze inhoud door $\frac{2}{3}\pi \times \frac{1}{4} CE^2 \times DF = \frac{1}{6}\pi \times CE^2 \times DF$ worden uitgedrukt.

§. 905. GEVOLG. *Fig* 424. Indien CK evenwijdig is aan DF; dan is ook $CE = DF$; *en de formule voor den inhoud van het ligchaam, door het cirkelſegment* EKC *beſchreven, wordt dan* $\frac{1}{6}\pi \times CE^3$; *dat is, gelijk aan den bol, welke* CE *tot middellijn heeft.*

XX. STELLING. *Fig.* 424.

§. 906. *De ligchamelijke inhoud van elke bolvormige ſchijf* ($ECGH$,) *begrepen tusſchen twee evenwijdige cirkels,* (*cirk.* CD *en cirk.* EF,) *is gelijk aan de halve ſom van het grond- en bovenvlak, vermenigvuldigd met de hoogte, of as* (DF) *van deze ſchijf, te zamen genomen met den inhoud van den bol, welke deze as, of hoogte* (DF) *tot middellijn heeft.*

BETOOG. Het blijkt, uit de figuur: dat de inhoud van den bolvormige fchijf $ECGH$ gelijk is aan den afgeknotten kegel, welke door de omwenteling van het trapezium $CDFE$ ontftaat, opgeteld met het ligchaam, dat door de omwenteling van den ~~fector~~ EKC geboren wordt. De inhoud des afgeknotten kegels is (VII. *Stell.*) gelijk aan $\frac{1}{3}\pi \times (EF^2 + EF \times CD + CD^2) \times DF$, en de inhoud van het ligchaam, door de omwenteling van het fegment EKC voortgebragt, is (XIX. *Stell.*) gelijk aan $\frac{1}{6}\pi \times EC^2 \times DF$; derhalve zal de inhoud der bolvormige fchijf $ECGH$ worden uitgedrukt door

$$\frac{1}{6}\pi \times (2EF^2 + 2EF \times CD + 2CD^2 + EC^2) \times DF \quad \ldots . (a)$$

Men trekke nu de loodlijn CL op EF; dan zal (XVI. *Stell.* III. *B.*) $EC^2 = EL^2 + CL^2 = EL^2 + DF^2$ zijn: maar nu is $EL = EF - LF = EF - CD$; derhalve $EL^2 = (EF - CD)^2 = EF^2 - 2EF \times CD + CD^2$ en $CE^2 = EF^2 + CD^2 + DF^2 - 2EF \times CD$. Stelt men nu deze waarde van CE^2, in de zoo even gevondene uitdrukking (a); dan zal men voor den inhoud der bolvormige fchijf, vinden:

$$\frac{1}{6}\pi \times (3EF^2 + 3CD^2 + DF^2) \times DF$$

Deze uitdrukking kan nu, door dezelve in twee deelen te scheiden, onder de volgende gedaante gesteld worden:

$$Inhoud\ schijf = \left\{ \frac{\pi \times EF^2 + \pi \times CD^2}{2} \right\} \times DF + \times \tfrac{1}{6} \pi \times DF^3$$

. Nu zijn $\pi \times EF^2$ en $\pi \times CD^2$ de inhouden der cirkels, met EF en CD, als stralen, beschreven: de uitdrukking $\frac{1}{2}(\pi \times EF^2 + \pi \times CD^2) \times DF$ is dan de halve som van het onder- en bovenvlak, vermenigvuldigd met de hoogte; en de term $\frac{1}{6}\pi \times DF^3$ is, (zie I. *Gev.* XVIII. *Stell.*) de inhoud van den bol, welke de hoogte DF tot middellijn heeft, en hieruit blijkt dus de waarheid van het gestelde.

§. 907. Gevolg. *Fig.* 424. Wanneer het bovenvlak nader aan het aspunt A komt, wordt het steeds kleiner, en verdwijnt, wanneer hetzelve door A gaat: in dit geval, is $CD = 0$; de inhoud van het bolvormig segment AEH wordt dan:

$$Inh. EAH = \tfrac{1}{2} \pi EF^2 \times AF + \tfrac{1}{6} \pi \times AF^3$$

De inhoud van een bolvormig segment is dan gelijk aan de som van de helft van den cilinder, welke met dit segment dezelfde basis en dezelfde hoogte heeft, opgeteld met den bol, welks middellijn aan de hoogte van dit segment gelijk is.

V. *Verzameling van gewone en Logarithmische formulen, voor het berekenen van de oppervlakken en inhouden der regte cilinders, kegels en der bollen.*

A. *Voor den regten cirkelvormigen cilinder.* Zij de straal van het cirkelvormige grondvlak $= r$, de hoogte of as $= h$, het buitenste oppervlak $= O$, de ligchamelijke inhoud $= I$; dan is de omtrek van het grondvlak $= 2\pi r$, en de inhoud van het grondvlak πr^2; derhalve is

$$O = 2\pi r h, \quad \text{en } I = \pi r^2 h$$

$$Log. O = Log. r + Log. h + 0{,}7981798\ 7$$

$$Log. I = 2\, Log. r + Log. h + 0{,}4971498\ 7$$

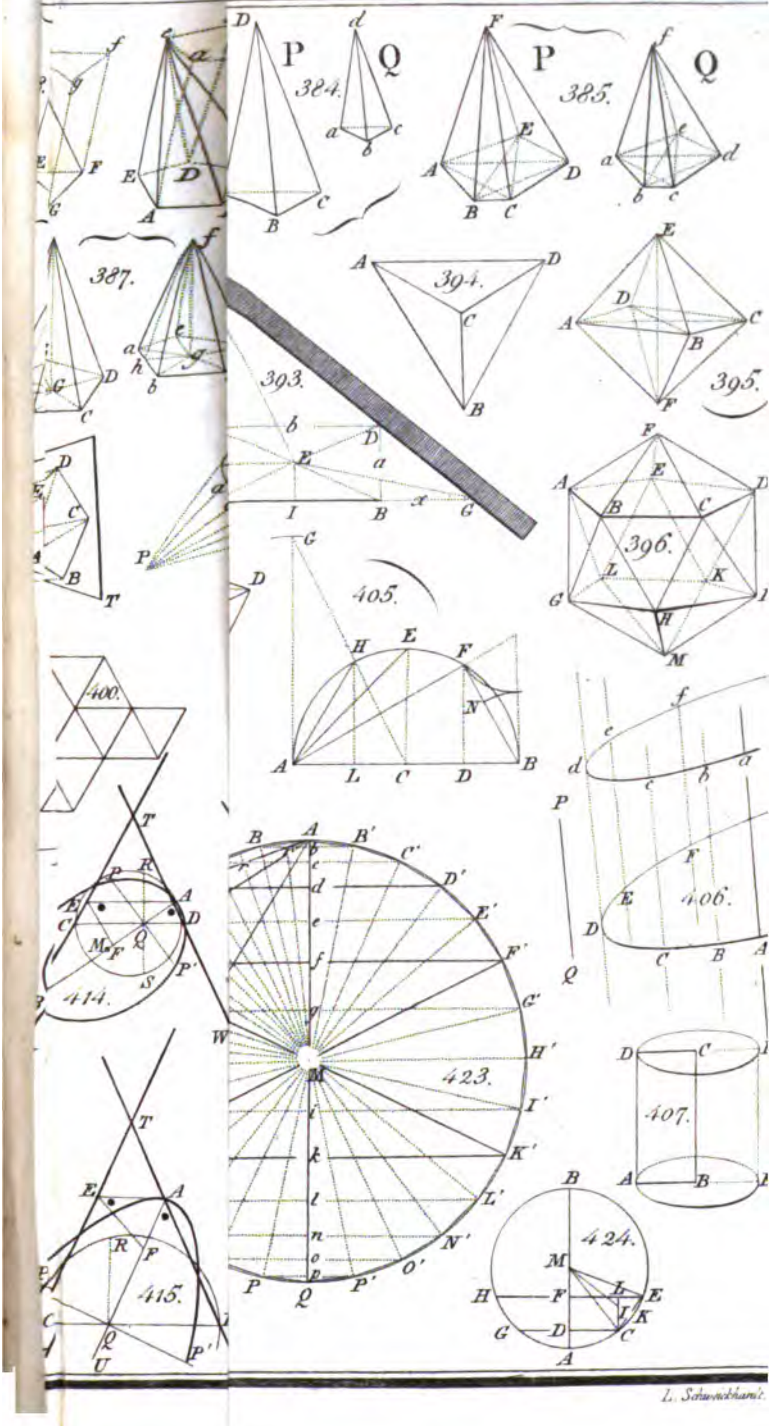
Indien men het geheele oppervlak van den cilinder, dat is, den buitenste omtrek met het grond- en bovenvlak, te zamen genomen, verkiest te bepalen; dan moet nog bij $O = 2\pi r h$ opgeteld worden $2\pi r^2$, en dan is dit geheele oppervlak $= o$ stellende,

$$o = 2\pi r (h + r)$$

$$Log. o = Log. r + Log. (h + r) + 0{,}7981798\ 7$$

B. *Voor den regten cirkelvormigen kegel.* Men noeme den straal van het grondvlak r, de hoogte h, de opstaande zijde a; dan is

$a =$



L. Schwickhardt.

$a = \sqrt{(h^2 + r^2)}$, de omtrek van het grondvlak $2\pi r$, en de inhoud van hetzelve πr^2. Men ſtelle het buitenſte oppervlak O, de ligchamelijke inhoud I, de ſom van het grondvlak en het buitenſte oppervlak o; dan is

$$O = \pi r a = \pi r \sqrt{(h^2 + r^2)},\quad I = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$o = \pi r \times [r + \sqrt{(h^2 + r^2)}]$$

$$Log.\,O = Log.\,r + \tfrac{1}{2} Log.\,(h^2 + r^2) + 0,4971498\,7$$

$$Log.\,I = 2\,Log.\,r + Log.\,h + 0,0200286\,2$$

$$Log.\,o = Log.\,r + Log.\,[r + \sqrt{(h^2 + r^2)}] + 0,4971498\,7$$

C. *Voor den regten cirkelvormigen afgeknotten kegel.* Laten R en r de ſtralen van de cirkelvormige grond- en bovenvlakken, h de hoogte verbeelden, a de opſtaande zijde; dan is $a = \sqrt{[h^2 + (R - r)^2]}$. Zij O het buitenſte oppervlak, en I de inhoud; dan is

$$I = \tfrac{1}{3}\pi (R^2 + Rr + r^2) h = \tfrac{1}{3}\pi [(R + r)^2 - Rr] \times h$$

$$O = \pi (R + r) \times \sqrt{[h^2 + (R - r)^2]}$$

$$Log.\,I = Log.\,[(R - r)^2 - Rr] \times Log.\,h + 0,0200286\,2$$

$$Log.\,O = Log.\,(R + r) + \tfrac{1}{2} Log.\,[h^2 + (R - r)^2] + 0,4971498\,7$$

D. *Voor den bol.* Zij r de ſtraal en m de middellijn van een bol (zijnde $m = 2r$, $m^2 = 4r^2$, $m^3 = 8r^3$), het oppervlak van den bol Ω, en de ligchamelijke inhoud I; dan is

$$\Omega = 4\pi r^2 = \pi m^2 \quad\text{en}\quad I = \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{6}\pi m^3$$

$$Log.\,\Omega = 2\,Log.\,r + 1,0992098\,7 = 2\,Log.\,m + 0,4971498\,7$$

$$Log.\,I = 3\,Log.\,r + 0,62208861 = 3\,Log.\,m + 9,71899862 - 10$$

Laten R en r de ſtralen van het grond- en bovenvlak van eene bolvormige ſchijf, en h de hoogte van dezelve zijn, de inhoud $= I$; dan is

$$I = \tfrac{1}{2}\pi (R^2 + r^2) h + \tfrac{1}{6}\pi h^3$$

$$\text{of}\quad I = \tfrac{1}{2}\pi [R^2 + r^2 + \tfrac{1}{3} h^2] h$$

$$Log.\,I = Log.\,(R^2 + r^2 + \tfrac{1}{3} h^2) + Log.\,h + 0,19611988$$

Wanneer in deze formule $r = 0$ wordt; dan wordt de inhoud van een bolvormig ſegment, welks grondvlak R tot ſtraal heeft, en welks hoogte h is

$$I = \tfrac{1}{2}\pi (R^2 + \tfrac{1}{3} h^2) h$$

$$Log.\,I = Log.\,(R^2 + \tfrac{1}{3} h^2) + Log.\,h + 0,19611988$$

Einde van het Eerſte Deel.

BEGINSELEN

DER

MEETKUNST;

TWEEDE GEDEELTE.

INHOUD

VAN HET TWEEDE DEEL.

ELFDE BOEK. (het VIII. van den II. Druk). *Algemeene Regels, ter beoordeeling van de positieve en negatieve toestanden der Lijnen en Hoeken. Over de wording der Goniometrische Lijnen. Gevallen, in welke zij als positief of als negatief moeten beschouwd worden. Onderlinge afhankelijkheid der goniometrische lijnen, die tot denzelfden hoek of boog behooren. Over de sinus en cosinus van de som en het verschil van twee bogen; groote verscheidenheid van formulen, die uit dezelve worden afgeleid. Formulen voor het verdeelen der hoeken en bogen. Reeksen, dienende, om de goniometrische lijnen uit de lengte der bogen te berekenen, tot welke zij behooren; en, omgekeerd. Eenvoudige manier, om de* Quadratuur *van den cirkel te benaderen. Over de Differentsen der goniometrische lijnen. Constructie der natuurlijke en Logarithmen sinus-tafel.* Bladz. 1

TWAALFDE BOEK. (het IX. van den II. Druk.) *Algemeene gronden van overeenstemming tusschen de zijden en hoeken, en den inhoud van eenen driehoek. Toepassing van die algemeene gronden op het berekenen van de eenvoudige gevallen, welke gewoonlijk in de Driehoeksmeting worden voorgesteld. Gebruik der Driehoeksmeting in het Landmeten, de Geodesie, Zeevaart- en Sterrekunde. Verdere uitbreidingen.* Bladz. 108

DERTIENDE BOEK. *Over de Bolvormige Driehoeken, in het algemeen. Ontvouwing van derzelver eerste en voornaamste eigenschappen, uit welke de overeenstemming tusschen derzelver hoeken en zijden blijkt. Oplossing van alle gevallen der regthoekige en scheefhoekige bolvormige driehoeken. Verdere beschouwing van meer bijzondere eigenschappen en kunstgrepen ter berekening van een bolvormigen driehoek. Nuttig gebruik der bolvormige driehoeksmeting in het meten der ligcha-*

chamen. Verscheidenheid van Vraagstukken, uit welke het gebruik der bolvormige driehoeken in de Aardrijks-, Sterre- en Zeevaartkunde blijkt. . . . . *Bladz.* 328

VEERTIENDE BOEK. *Over de Theorie der* Transversalen, *benevens eene korte aanwijzing van derzelver gebruik.* . . . *Bladz.* 395

VIJFTIENDE BOEK. *Over de eerste beginselen der Veelhoeksmeting* (Polygonometrie) *en over de Eigenschappen der veelvlakkige Ligchamen* (Polyedrometrie) . . . *Bladz.* 422

BERIGT AAN DEN BINDER.

De vijf platen, tot dit tweede deel behoorende, moeten geplaatst worden, als volgt:

Plaat	I. tegen over Bladzijde	128
—	II. —	144
—	III. —	272
—	IV. —	400
—	V. —	448

en moet het wit aan de platen gelaten worden, zoo dat de figuren geheel buiten het boek uitslaan.

BEGINSELEN

DER

MEETKUNST.

DERDE DEEL.

OVER DE MEETKUNST DER HOEKEN EN DER PLATTE EN BOLVORMIGE DRIEHOEKEN.

ELFDE BOEK.

(*Het achtste van den tweeden Druk.*)

Over de Goniometrie, of de Meetkunst der Hoeken.

Algemeene Regels, ter beoordeeling van de positieve en negatieve toestanden der Lijnen en Hoeken. Over de wording der Goniometrische Lijnen. Gevallen, in welke zij als positief of als negatief moeten beschouwd worden. Onderlinge afhankelijkheid der goniometrische lijnen, die tot denzelfden hoek of boog behooren. Over de sinus en cosinus van de som en het verschil van twee bogen; groote verscheidenheid van formulen, die uit dezelve worden afgeleid. Formulen voor het verdeelen der hoeken en bogen. Reeksen, dienende, om de goniometrische lijnen uit de lengte der bogen te berekenen, tot welke zij behooren; en, omgekeerd. Eenvoudige manier, om de Quadratuur *van den cirkel te benaderen. Over de Differentien der goniometrische lijnen. Constructie der natuurlijke en Logarithmen sinus-tafel.*

---

§. 908. I. BEPALING. De *Goniometrie* (de *Meetkunst der Hoeken*) is een bijzonder gedeelte van de Beginselen der Meetkunst, waarin geleerd wordt, hoe zekere regte lijnen, in eenigen cirkelboog, die de betrekkelijke grootte van eenen hoek voorstelt, onder zekere be-

palingen, geconstrueerd zijnde, en die daarom *Goniometrische Lijnen* genoemd worden, zoo van elkander, als van den boog, tot welken zij behooren, afhangen.

Uit de korte schets van de voornaamste regels der platte driehoeksmeting, op het einde van het *vierde Boek* (*I. Deel*) voorkomende, zal de Lezer reeds met de goniometrische lijnen voorloopig zijn bekend geworden; als ook met de voornaamste regels, om, wanneer in een platten driehoek genoeg gegevens zijn, welke denzelven bepalen, door middel van eene tafel, welke, voor elken hoek of boog, de naauwkeurige grootte dezer lijnen bevat, de onbekende zijden en hoeken dezes driehoeks te berekenen. Ook is, op het einde van het *tiende Boek*, geleerd: hoe, door middel van diezelfde tafel, (ten minste in de voornaamste gevallen) uit drie gegevens van een bolvormigen driehoek, de drie onbekenden zijden of hoeken door berekening kunnen worden bepaald. Dit alles echter bevatte slechts eene zeer oppervlakkige schets van een uitgebreider geheel, hetwelk wij thans uitvoeriger zullen voordragen; van een geheel van merkwaardige zaken, hetwelk niet slechts den toegang tot de Hoogere Meetkunst zal moeten openstellen; maar vooral ook aangemerkt moet worden, als één van de voornaamste hulpmiddelen der Werktuigkunde en andere Wetenschappen, welker beoefening de hulp der Reken- en Meetkunst behoeft.

Wij moeten dan thans de Meetkunst der hoeken en der platte en bolvormige driekoeken dieper uit den grond ophalen, en het gebruik van derzelver regels op velerlei zaken leeren toepassen.

Dan, om in dit alles regelmatig te werk te gaan en geene de minste duisterheid, ook zelfs in de moeijelijkste dingen, over te laten, moeten wij vooral, bij de nadere verklaring van de goniometrische lijnen, die met derzelver hoeken of bogen veranderen, duidelijk leeren onderscheiden, in welke gevallen zij als positief of negatief moeten beschouwd worden; en daarom is het noodig vooraf de regels te herinneren, door welke het positief of negatief zijn van lijnen en hoeken moet worden beoordeeld.

I. *Algemeene Regels, om de positieve en negatieve toestanden van lijnen en hoeken te beoordeelen.*

§. 909. I. Regel. *In elke figuur, welke tot het betoog van eene meetkunstige leerstelling, of ter oplossing van eenige meetkunstig vraagstuk dient, moeten, ten zij het, om redenen (die echter nimmer noodzakelijk zijn) anders wordt aangenomen, als positief beschouwd worden. Sommige van die lijnen of hoeken zullen dan, wanneer men de figuur, onder zekere bepalingen, als veranderlijk stelt, negatief kunnen worden.*

§. 910.

§. 910. II. REGEL. *Fig.* 1. *Elk punt O, genomen op eene onbepaalde lijn XY, verdeelt dezelve in twee tegen over elkander liggende streken, OX en OY. De eerste OX wordt de positieve en de tweede OY de negatieve streek genoemd. De afstand van eenig punt A, liggende in de positieve streek OX, tot het aangenomen punt O, wordt een positieven afstand; maar de afstand van eenig punt B, in de negatieve streek genomen, tot datzelfde punt O, wordt een negatieve afstand genoemd. Positieve en negatieve afstanden worden, op eene regte lijn altijd, van een vast of veranderlijk punt op die lijn, in twee tegen overgestelde streken geteld.*

Bij de opgave van deze regels, onderstellen wij, dat de Lezer, uit de *Beginselen der Stelkunst*, als ook uit de *Allereerste Gronden van dezelve*, wete, dat, in het afgetrokkene, het positief en negatief zijn der getallen gegrond is in de algemeene vergelijking $y = a - x$, in welke a als standvastig beschouwd wordt; terwijl in dezelve aan x alle mogelijke waarden kunnen gegeven worden. Wij onderstellen, dat hij reeds wete, dat *positief* en *negatief* twee algemeene woorden zijn, die, in plaats van *ter regter-* en *ter linkerkand*, *voorwaarts* en *achterwaarts*, *naar boven* en *naar beneden*, *enz.* gebruikt worden; en dan is, bijaldien, in de figuur, de afstand OA als positief beschouwd wordt, de afstand OB negatief. Men zie, ter nadere opheldering, *Allereerste Grond. der Stelk. II. Afd. II. Hoofdst., Bladz.* 34 *en verv.*, en verder *Bladz.* 47 *en verv.* alwaar de gronden van het positief en negatief zijn der afstanden, zoo tot vaste, als tot veranderlijke punten, uitvoerig en in alle bijzonderheden verklaard zijn.

§. 911. III. REGEL. *De onderscheiding tusschen positieve en negatieve streken en tusschen positieve en negatieve afstanden, op eene onbepaalde regte lijn XY* (fig. 1.), *ten opzigte van eenig bepaald punt O, moet op dezelfde wijze verstaan worden, het zij die lijn XY* (*gelijk in* fig. 1.) *onbewegelijk op hare plaats blijve, het zij zij* (*gelijk in* fig. 2.) *evenwijdig aan zich zelve bewogen wordende, in den stand X′O′Y′ kome, het zij zij* (*zoo als, in* fig. 3.) *om het punt O omdraaijende, een anderen stand X′OY′ verkregen hebbe. In al die gevallen, blijft OX′ de positieve OY′ de negatieve streek, OA′ een positieve OB′ een negatieve afstand van het vaste of veranderlijke punt O.*

§. 912. IV. REGEL. *Fig.* 4. *Om, in eenige onbepaalde vlakte, de ligging van punten, ten opzigte van elkander, te bepalen,* (hetgeen op onderscheidene wijzen geschieden kan,) *neemt men doorgaans twee onbepaalde lijnen XY en VZ, in die vlakte, ergens naar welgevallen aan; mits dat die lijnen elkander in het punt O*

 lood-

loodregt doorsnijden, en alzoo de geheele vlakte in vier regte hoeken XOV, VOT, TOZ en ZOX verdeelen. Die lijnen worden, in de Hoogere Meetkunst, coördinaten-assen genoemd. Nu wordt een punt P gezegd gegeven te zijn, wanneer de afstanden PQ en PR van hetzelve tot die assen XT en VZ bekend of gegeven zijn. Is nu, let wel! het punt P ter regterhand van VZ gelegen; dan is deszelfs afstand PR tot de verticale coördinaten-as positief; maar valt het punt P ter linkerhand van die lijn VZ; dan is die afstand negatief. Valt het punt P boven de horizontale XT; dan is de afstand PQ positief; in het tegengestelde geval, is hij negatief.

Aloo is, als volgt:

voor het punt *P*, de afstand *PQ posit.* de afstand *RP posit.*
voor het punt *P'*, de afstand *P'Q' posit.* de afstand *P'R' negat.*
voor het punt *P"*, de afstand *P"Q" negat.* de afstand *P"R" negat.*
voor het punt *P'''*, de afstand *P'''Q''' negat.* de afstand *P'''R''' posit.*

Men herleze hier het *Bijvoegsel* op de *XXI. Stell. V. Boek*, uit hetwelk blijkt: hoe, door middel van zulke coördinaten-assen, de coördinaten van al de punten van eene regte of kromme lijn in eene algemeene vergelijking worden voorgesteld.

§. 913. V. Regel. *Fig. 5. Om de betrekkelijke ligging der punten, in de ligchamelijke ruimte, te bepalen, neemt men drie regthoekig op elkander staande assen NZ, OW en TV aan, die elkander in een punt A doorsnijden,* (zijnde de hoeken *NAO*, *OAZ*, *ZAW*, *WAN*, *TAN*, *TAO*, *TAZ*, *TAW*, *VAN*, *VAO*, *VAZ* en *VAW* alle regt,) *dan staan de vlakken NOZW, TNVZ en TOVW, alle onderling loodregt op elkander, en verdeelen de onbegrensde ligchamelijke ruimte in acht gelijkzijdige regthoekige drievlakkige hoeken. Laat nu, in de ruimte van den drievlakkigen hoek TOZA, een punt P gesteld worden: indien men dan uit dit punt P de loodlijn PQ op het vlak ZAO, en voorts QR loodregt op AZ en QS loodregt op AO laat vallen; dan is PQ de afstand van het punt P tot het vlak ZAO, QR gelijk aan den afstand van het punt P tot het vlak TAZ en QS gelijk aan den afstand van hetzelfde punt P tot het vlak TAO. Deze afstanden nu worden de coördinaten van het punt P genoemd. Indien men nu de coördinaten van het punt liggende in den drievlakkigen hoek TOZA als positief aanneemt; dan zullen de coördinaten der punten, die in de zeven overige drievlakkige hoeken liggen, naar het aangenomen beginsel, in den* II. Regel, *positief of negatief zijn; zoo als in het volgende tafeltje wordt opgegeven.*

In

In den drievl. hoek.		PQ	AR	AS
	TOZA	+	+	+
	TONA	+	—	+
	TNWA	+	—	—
	TWZA	+	+	—
	VOZA	—	+	+
	VONA	—	—	+
	VNWA	—	—	—
	VWZA	—	+	—

§. 914. AANMERKING. *Fig.* 5. Indien men de lijn *AQ* trekt en evenwijdig aan dezelve, in het vlak *TAPQ*, de lijn *PU* evenwijdig aan *AQ*; dan is *PQAU* een parallelogram, en daarom (*I. Stell. III. B.*) $AU = PQ$; de lijn *AU* is alzoo gelijk aan den afstand van het punt *P* tot het vlak *ZAO*. Men kan dus, wanneer de afstanden van het punt *A* tot de coördinaten-vlakken gegeven zijn, het punt *P* bepalen. Laat, bij voorbeeld, de afstanden van het punt *P* tot de coördinaten-vlakken *TAZ*, *TAO* en *ZAO* gegeven zijn 10, 8 en 7 deelen: maak dan $AR = 8$, $AS = 10$ en $AU = 7$ deelen. Trek *RQ* en *QS*, evenwijdig aan *AO* en *AZ*, *PQ* loodregt op het vlak *ZAO*, en *UP* evenwijdig aan het vlak *ZAO*; dan zal *P* het begeerde punt.

Al de punten der platte en gebogene vlakken, die op eenigerlei wijze in de ruimte zijn geplaatst, hebben, ten opzigte van drie coördinaten-vlakken, drie coördinaten, welke alle in dezelfde stelkunstige vergelijking van drie veranderlijke coördinaten begrepen zijn, welke de vergelijking van dit oppervlak genoemd wordt.

§. 915. VI. REGEL. *Fig.* 6. *Zij AX eene onbepaalde lijn. Stellen wij, dat eene andere onbepaalde lijn AY, die langs dezelve ligt, om het punt A omdraaijende, den hoek XAY, en eenig punt C dezer bewegende lijn den cirkelboog BC voortbrenge; dan zal die lijn tot in het oneindige kunnen omwentelen. Wanneer nu de hoek XAY en de boog BC, op die wijze voortgebragt, als positief beschouwd worden; dan zullen, indien de lijn AY, van de lijn AX af te rekenen, in eene tegenovergestelde rigting, bewogen wordt, de hoek XAZ en de boog BD, op die wijze voortgebragt, voor negatief moeten gehouden worden.*

Die onderscheiding is gegrond op dezelfde reden, als om welke de afstanden ter regter- en linkerhand van zeker punt op eene regte lijn positief en negatief genoemd worden; de beenen zijn de grenzen van eenen hoek, zoo als twee punten de grenzen van eene lijn zijn; naarmate nu de hoeken van eene vaste lijn *AX* van de regter- naar de lin-

kerhand, of, omgekeerd, van de linker- naar de regterhand, worden geteld; dat is, van *AX* naar *AY*, of naar *AZ*, worden zij voor positief of negatief gehouden; en alzoo moet het ook verstaan worden van de bogen *BC* en *BD*, die de hoeken meten, welke van het punt *B*, op den omtrek, naar *C* of naar *D* geteld worden.

§. 916. Aanmerking. Dat deze manier van beschouwen en de regels, welke op dezelve berusten, van het uitgestrekste nut zijn, en dat zij ook al de mogelijke gevallen, welke in eenige figuur, door het veranderen van rigtingen en afstanden, kunnen plaats hebben, met elkander in de volmaakste overeenstemming brengen, zullen wij door een eenvoudig voorbeeld ophelderen.

Laat, *fig.* 7, *ABC* een driehoek zijn. Stellen wij, dat de zijde *AC* en de hoek *CAB* standvastig blijven; maar dat de zijde *CB*, om het hoekpunt *C*, naar binnen draaije, zoodat de hoek *ACB* verminderè; dan zal ook de inhoud van den driehoek verminderen; zoowel die hoek, als die inhond en ook de basis *AB*, zullen nul worden, zoodra de lijn *BC* op *AC* valt. Blijft die draaijende lijn in dezelfde rigting voortgaan; dan zal, aan den anderen kant van de lijn *AC*, een driehoek *AB'C* ontstaan, wiens inhoud daarom, omdat hij aan den tegenovergestelden kant van de standvastige grenszijde *AC* gelegen is; naar den regel, noodzakelijk negatief zal moeten zijn; terwijl de basis *AB'* en de hoek *ACB'* insgelijks negatief zullen zijn geworden. Wat de veranderlijke hoek *CBA* aangaat: deze zal, zoo lang *AB* nog positief is, toenemen. Op den oogenblik, dat *CB* langs *CA* valt, gelijk aan den hoek *CAX*, en, in den stand van de lijn *CB'*, in den hoek *CB'X* veranderd zijn; want de hoek *CB'A* kan, in dien toestand der figuur, voor denzelven niet worden gehouden; omdat, in elken stand der bewegende lijn, *CBX* de hoek is, die de lijn *CB* met *BX* maakt.

Alles stemt nu overeen. De standvastige hoek *BAC* is dezelfde gebleven, en dus is hij ook de hoek aan de basis van den negatieven driehoek *AB'C*; gelijk nu, in den positieven driehoek *ABC*,

$$\text{hoek } CBX + \text{hoek } CAB + \text{hoek } BCA = 2\,R$$

is, zoo is ook (omdat hoek *ACB'* negatief is,) in den negatieven driehoek *ACB'*,

$$\text{hoek } CB'X + \text{hoek } CAB - \text{hoek } B'CA = 2\,R$$

en dus is, in beide gevallen, de som der hoeken, zoo als het behoort, gelijk aan twee regte hoeken.

De loodlijn *CD* is standvastig en positief. Nu is $\frac{1}{2} AB \times CD =$ inhoud driehoek *ABC* positief; maar, daar *AB'*, in den negatieven driehoek, negatief is, zoo is $\frac{1}{2} AB' \times CD$ insgelijks negatief.

In onze *Proeve over de positieve en negatieve toestanden der grootheden, vooral in de Meetkunst*, zal men vele zulke beschouwingen en opheldering aantreffen, uit welke blijken zal, hoe verkeerdelijk men de waren aard der positieve en negatieve toestanden verklaard, en daardoor gelegenheid gegeven heeft, om aan de Algemeene Rekenkunst af-

wij-

wijkingen van de gesteldheid der Meetkunstige figuren toe te schrijven, die waarlijk niet bestaan. De Lezer, die voorspoedig wenscht te vorderen, en vooral grondig te leeren verstaan, wat hij naar formulen uitwerkt, zal zijnen tijd niet beklagen, wanneer hij gezegde Proeve aandachtig bestudeert.

II. *Over de Goniometrische Lijnen en derzelver toestanden, voor alle positieve en negatieve hoeken of bogen.*

§. 917. II. BEPALING. *Fig.* 8. Laat *BAC* een scherpe hoek zijn. Indien men dan het been *BA* onbepaaldelijk naar den anderen kant, in de rigting van *AD*, verlengt; en *AE*, loodregt uit het hoekpunt *A* op *BA* trekt; dan wordt de hoek *DAC* het *supplement* en de hoek *EAC* het *complement* van den hoek *BAC* genoemd. En, indien men, uit het hoekpunt *A*, met *AG*, gelijk zijnde aan de lengtemaat, als straal, eenen cirkel beschrijft; dan worden de hoeken *BAC*, *DAC* en *EAC* door de bogen *GH*, *KIH* en *IH* gemeten; de boog *KIH* wordt dan het *supplement* en de boog *IH* het *complement* van den boog *GH* genoemd.

Volgens de figuur, zal, indien de hoek *BAC* een scherpe hoek is,

$$\text{hoek } DAC = 180^\circ - \text{hoek } BAC$$
$$\text{hooek } EAC = 90^\circ - \text{hoek } BAC$$

zijn; dat is, indien men hoek $BAC = A$ stelt;

$$\text{suppl.}\, A = 180^\circ - A$$
$$\text{compl.}\, A = 90^\circ - A$$

Van de metende bogen, die de betrekkelijke grootte der hoeken voorstellen, zal hetzelfde gelden. Want, indien de boog $GH = a$ gesteld wordt; dan is ook

$$\text{suppl.}\, a = 180^\circ - a$$
$$\text{compl.}\, a = 90^\circ - a$$

Indien men het been *BA* van den hoek *BAC* in dezelfde rigting laat blijven, maar het andere been *AC*, om het hoekpunt *A*, naar *AE*, omdraaijen en dus den hoek *BAC* als veranderlijk beschouwt; dan wordt *BA* als den *oorsprong van de telling der positieve en negative hoeken BAC* beschouwd; *DA* als *den oorsprong van de telling der supplements-hoeken DAC*, en *AE* als *den oorsprong van de telling der complements-hoeken EAC*. Het punt *G* is het punt, van waar de positieve of negatieve bogen *GH* geteld worden; *K* en *I* de punten, van waar de supplementen en complementen van den boog

GH, op den omtrek des cirkels, in tegen overgestelde rigtingen, geteld worden.

Men noemt, indien *AE* onbepaaldelijk verlengd is, de regte hoeken *BAE*, *EAD*, *DAF*, *FAB*, *BAE enz.*, en ook de bogen *GI*, *IK*, *KL*, *LG*, *GI enz.* (die alle één-vierde van den omtrek zijn) de *eerste*, *tweede*, *derde*, *vierde*, *vijfde* enz. *quadranten.*

Laat men de lijn *AC* naar *AE* omdraaijen en verder altijd in dezelfde rigting voortgaan; *dan zal de hoek BAC en zijn boog GH gezegd worden in het eerste, tweede, derde en vierde quadrant te vallen*, naar dat het bewegende been *AC* zich binnen de regte hoeken *BAE*, *EAD*, *DAF*, *FAB* bevindt.

§. 918. Gevolg. Aangezien de telling van den hoek *BAC* en van deszelfs supplement en complement, van de beenen *BA*, *DA* en *EA*, naar het bewegende been *AC* plaats heeft, zoo volgt uit de boven verklaarde beginselen; *dat, wanneer men, in het eerste quadrant, den hoek BAC met deszelfs supplement en complement als positief beschouwt*, 1°. *de supplementen van alle hoeken en bogen, die grooter zijn dan twee regte hoeken, negatief zijn;* 2°. *dat insgelijks negatief zijn de complementen der hoeken en bogen, die grooter dan regt zijn.*

Laat men het bewegende been *AC* van den oorsprong der telling (van de lijn *AB*) andersom draaijen; dan verkrijgt men (zie *IV. Regel*) negatieve hoeken; daar nu de supplementen en complementen van deze altijd van de lijnen *AD* en *AE* geteld worden, zoo ziet men: *dat de supplementen en complementen van alle negative hoeken of bogen, zonder onderscheid, positief zijn.*

§. 919. III. Bepaling. *Fig.* 9. Men trekke, door het uiteinde *H* van den metenden boog *GH*, éene onbepaalde lijn *PQ*, loodregt op *AM* (dat is, op den oorsprong van de telling der hoeken *BAC*) en bijgevolg evenwijdig aan *AE;* dan wordt die lijn *PQ de lijn der sinussen* genoemd; *MP* de *positieve* en *MQ* de *negative streek* van dezelve. Men late nu (zoo als in *fig.* 8) het been *AC*, in de positieve rigting, naar *AE*, en verder, de geheele vlakte door, omdraaijen; en stelle, dat de lijn der sinussen *PQ* met het bewegende been *AC* zoodanig worde medegevoerd, dat zij steeds evenwijdig aan *EF* of loodregt op *AB* blijve, en bovendien het bewegende been *AC*, in den omtrek des cirkels, in het uiteinde *H* van den metenden boog *GH*, doorsnijde; *dan is de sinus van den hoek BAC, of van deszelfs metenden boog GH, dat bepaalde gedeelte HM van de lijn der sinus*

nusfen, dat gelegen is tusfchen het punt M en het punt, alwaar de lijn der finusfen het bewegende been AC van den hoek BAC doorfnijdt. Anders, de finus is de afftand MH van het uiteinde van den metenden boog GH tot den oorfprong AB van de telling van den veranderlijken hoek ABC.

Men verbeelde zich de bewegende lijn *AC* in de ftanden *AC*, *AC'*, *AC''* en *AC'''*; dan worden de hoeken *BAC*, *BAC'*, *BAC''* en *BAC'''*, door de bogen *GH*, *GHIH'*, *GHIH'KH''* en *GHIH'KH''LH'''* gemeten. De eerfte dezer hoeken of bogen vallen in het eerfte, de tweede in het tweede, de derde in het derde, de vierde in het vierde quadrant. Nu is, volgens de bepaling, *MH* de finus van den boog *GH* of hoek *BAC*; *M'H'* de finus van den boog *GHIH'* of van den hoek *BAC'*, *M''H''* de finus van den boog *GHIH'KH''* of van den hoek *BAC''* en de lijn *M'''H'''* de finus van den boog *GHIH'KH''LH'''* of van den hoek *BAC'''*. De finusfen *MH* en *M'H'* der twee eerfte bogen *GH* en *GHIH'* zijn, omdat zij op de pofitieve ftreek *MP* van de lijn der finusfen vallen, pofitief; maar de finusfen *M''H''* en *M'''H'''* der twee laatfte bogen *GHIH'KH''* en *GHIH'KH''LH'''* zijn, daar zij op de negatieve ftreek van die lijn vallen, negatief.

Indien men dus het bewegende been *AC*, van *AB* af te rekenen, eene geheele omwenteling laat volbrengen; dan zal het blijken: 1°. *dat de finusfen der hoeken en bogen, die in het eerfte en tweede quadrant vallen, pofitief, en die der hoeken, in het derde en vierde quadrant, negatief zijn*; 2°. *dat* $\sin.\ 0° = 0$, $\sin.\ 90° = 1$, $\sin.\ 180° = 0$ *en* $\sin.\ 270° = -1$ is.

Men ziet verder, uit de befchouwing der *fig.* 9: *dat, voor de negatieve bogen GH''', GH'''LH'', GH'''LH''KH', GH'''LH''KH'IH, de finusfen, in de twee eerfte quadranten, negatief; maar, in de twee volgende quadranten, pofitief zijn.*

§. 920. IV. Bepaling. *Fig.* 10. Indien men, door het uiteinde van den metenden boog *GH*, eene onbepaalde lijn *RS*, loodregt op den oorfprong van de telling der complements-hoeken laat vallen (eene lijn, die dus aan *BAD* evenwijdig loopt); dan wordt die lijn *RS de lijn der cofinusfen* genoemd, en, volgens den *I Regel*, *NR* de *pofitieve* en *NS* de *negatieve ftreek* van dezelve. Men onderftelle nu, dat het bewegende been *AC* van den hoek *BAC*, de vier quadranten der vlakte doorloopende, de lijn der cofinusfen *RNS*, evenwijdig aan *BD* blijvende, zoodanig medevoere, dat die lijn altijd door het uiteinde van den metenden boog *GH* ga; *dan zal de cofinus van eenigen hoek BAC, of van deszelfs metenden boog GH, dat bepaalde gedeelte NH van de lijn der cofinusfen zijn, dat begrepen is tusfchen het vaste punt N, op de lijn EF gelegen zijnde, en het uit-*

einde C van den metenden boog; of wel de afstand HN van het uiteinde H van den metenden boog tot aan den oorsprong AE van de telling der complements-hoeken.

Men late het bewegende been *AC*, in de gedachte, de vier positieve quadranten doorloopen; dan zal men zien: dat, in overeenkomst met deze bepaling, de cosinusfen van de bogen *GH*, *GHIH'*, *GHIH'KH''* en *GHIHKH''LH'''* zullen zijn, *NH* op de positieve, *N'H'*, *N''H''* beide op de negatieve, en *N'''H'''* wederom op de positieve streek van de lijn der cosinusfen; het zal dan al verder blijken: *dat* $cos. 0^\circ = 1$, $cos. 90^\circ = 0$, $cos. 180^\circ = -1$ *en* $cos. 270^\circ = 0$ *is; en dat eindelijk de cosinusfen der hoeken, die in het eerste en vierde der positieve quadranten vallen positief; maar dat de cosinusfen der hoeken en bogen, die in het tweede en derde quadrant vallen, positief zijn.*

Laat men het bewegende been *AC* de negatieve quadranten doorloopen; dan zal men zien: *dat N'''H''', N''H'', N'H' en NH de cosinusfen der negatieve bogen GH''', GH'''LH'', GH'''LH''KH' en GH'''LH''LH'IH zijn; en dat dus, voor negatieve hoeken en bogen, zoowel als voor positieve, de cosinusfen in het eerste en vierde quadrant positief; maar in het tweede en derde negatief zijn.*

§. 921. I. Gevolg. *Fig.* 10. Volgens de *III. Bep.* is *NH* de sinus van den hoek *EAC* of van den boog *IH*. Men kan dan zeggen: *dat de cosinus van eenen hoek of boog dezelfde goniometrische lijn is, als de sinus van zijn complement.* Men heeft derhalve, in het algemeen:

$$cos. a = sin. (90^\circ - a)$$

§. 922. II. Gevolg. *Fig.* 9 en 10. Men trekke, in *fig.* 9, *HN* evenwijdig aan *AB* en in *fig.* 10., *HM* evenwijdig aan *AE*; dan verkrijgt men, in beide figuren, de regthoeken *AMHN*; daar nu, in beide figuren, de hoek *BAC* als het complement van den hoek *EAC* kan aangemerkt worden, zoo kan men ook stellen:

$$sin. a = cos. (90^\circ - a)$$

En, omdat in den regthoek *AMHN*, $AN = HM$ en $AM = HN$ is, zoo blijkt hier uit: *dat voor de sinusfen der bogen, in beide figuren aangewezen, de abscisfen of afgesnedene stukken AN, AN', AN'' AN''' op de lijn EF, en voor de cosinusfen de afgesnedene stukken AM, AM', AM'' en AM''' kunnen worden genomen, welke, volgens den II* Regel, *in dezelfde gevallen, even zoo als de sinusfen en cosinusfen zelve, positief en negatief zijn.*

§. 923. V. Bepaling. *Fig.* 9 *of* 10. *De afstand van den oorsprong G van den metenden boog GH (de lijn MG namelijk) tot de sinus van den hoek BAC of van den boog GH, en die, op de lijn*

lijn BD, altijd van G naar D geteld wordt, wordt de sinus-versus van den boog GH of van den hoek BAC genoemd. Men heeft dus klaarblijkelijk:

$$sin. vers. a = 1 - cos. a.$$

De lijn *KM* is, volgens deze bepaling, de sinus-versus van den hoek *DAC*, of van den boog *KH'IH*; dat is de sinus-versus van het supplement van den hoek *BAC*, of van den boog *GH*. Men noemt die lijn de *susinus-versus* van den hoek *BAC* of van den boog *GH*. *De susinus-versus van een hoek of boog is alzoo de sinus-versus van het supplement van dien hoek of boog.* Volgens de figuur, is dan:

$$susin. vers. a = sin. vers. (180° - a)$$
$$susin. vers\ a = 1 + cos. a.$$

In dezelfde figuren, is de lijn *IN* de sinus-versus van den hoek *EAC* of van den boog *IH*; dat is de sinus-versus van het complement van den hoek *BAC* of van den boog *GH*. Men noemt die lijn de *cosinus-versus* van den hoek *BAC* of van den boog *GH*. *De cosinus-versus van eenen hoek of boog is alzoo de sinus-versus van het complement van dien hoek of boog.* Volgens de figuur, is

$$cosin. vers. a = sin. vers. (90° - a)$$
$$cosin. vers. a = 1 - sin. a$$

Men kan de lijn *LN* de *sucosinus-versus* van den hoek *BAC* of van den boog *GH* noemen; doch deze lijn is tot nog toe van weinig gebruik.

Wanneer men het bewegende been *AC*, van *AB* af te rekenen, de vier positieve quadranten laat doorloopen; dan ziet men: dat de sinus-versus, van nul graden af tot 180° toe, bestendiglijk toeneemt, en dan wederom van 180° tot 360° afneemt; zoodat *sin. vers.* 0° = 0, *sin. vers.* 90° = 1, *sin. vers.* 180° = 2, *sin. vers.* 270° = 1, *sin. vers.* 360° = 0 is, enz. *De sinus-versus van alle bogen zijn derhalve (hoe groot zij zijn, en in welke positieve of negatieve quadranten zij vallen,) altijd positief. De sinus-versussen en susinus-versussen, en ook de cosinus-versussen, zijn in hetzelfde geval; zij zijn alle positief.* Men ziet, in deze goniometrische lijnen, een voorbeeld van den bekenden regel: *dat, namelijk eene veranderlijke grootheid nul kan worden, zonder daarom van den positieven tot den negatieven toestand over te gaan.* Vergelijk hierover *Allereerste Grond. der Stelk.*, *I. Afd. II. Hoofdst. art.* 73 *en verv.*

§. 924. VI. Bepaling. *Fig.* 11. Men trekke, door den oorsprong *G* van den metenden boog *GH*, eene onbepaalde loodlijn *TU* op den straal *AG*, of op den oorsprong van de telling der hoeken; dan

zal

zal die lijn (den metenden cirkel in het punt G aanrakende) de *lijn der tangenten* genoemd worden; GT derzelver *positieve* en GU derzelver *negatieve streek.* Verlengt men het bewegende been AC, naar den anderen kant, onbepaaldelijk tot in V; dan zal de lijn CV de *lijn der secanten*, AC derzelver *positieve* en AV derzelver *negatieve streek* worden genoemd. *Nu is de tangens van den hoek BAC, of van deszelfs metenden boog GH, dat bepaalde gedeelte GO van de lijn der tangenten, begrepen tusschen den oorsprong G van den metenden boog GH, en het punt O, alwaar de bewegende lijn der secanten CV de lijn der tangenten TU doorsnijdt. En de secans van den hoek BAC, of van den metenden boog GH, is dat bepaalde gedeelte AO van de lijn der secanten, gerekend van het hoekpunt A tot aan het punt O, in hetwelk de lijnen der secanten en tangenten elkander snijden.*

Men late, om de positieve en negatieve toestanden der tangenten en secanten, in de verschillende quadranten, na te gaan, het bewegende been AC (of dat hetzelfde is) de lijn der secanten CV, van AB af, de vier eerste quadranten doorloopen; dan zal blijken: vooreerst, dat *tang.* $0° = 0$ en *sec.* $0° = 1$ is; dat in het eerste quadrant de tangens en secans beide positief zijn, en steeds aangroeijen; doch, wanneer de bewegende lijn, in den stand AE, zal gekomen zijn, en alzoo aan de tangenten-lijn evenwijdig loopen; dan zal er geene doorsnijding meer plaats hebben, of liever zal het punt O, op een oneindig verren afstand, van de punten A en G verwijderd zijn, en daarom *zijn de tangens en secans van* $90°$ *beide oneindig groot.* Zoodra de bewegende lijn der secanten, in het tweede quadrant, in de stelling $C'V'$, komt; dan snijdt niet meer de positieve streek van de lijn der tangenten die der secanten, maar de negatieve streken dezer lijnen (namelijk AV' en GU) snijden elkander in O'; de lijn GO' is dan de tangens en AO' de secans van den hoek BAC' of van den boog $GHIH'$; beide lijnen zijn, volgens den *I. Regel*, negatief. Gaat de lijn $C'V'$ der secanten in het tweede quadrant voort; dan worden de negatieve tangens en secans kleiner. Valt de lijn $C'V'$ in DB; dan wordt de *tang.* $180° = 0$ en *sec.* $180° = -1$. Laat verder de lijn der secanten in de stelling $C''AV''$, dat is, in het derde quadrant, zijn gekomen; dan zal de negatieve streek der secanten-lijn de positieve streek der tangenten-lijn doorsnijden; de tangens van den boog $CHIH'KH''$ is dan de positieve lijn GO'', en de secans de negatieve lijn AO''. Komt, bij den overgang uit het derde in het vierde quadrant, de secanten-lijn in de stelling FE; dan heeft er, wegens de evenwijdigheid der tangenten- en secanten-lijnen, geene doorsnijding meer plaats; en dus is *tang.* $270° = +\infty$ en *sec.* $270° = -\infty$. Wanneer eindelijk de secanten-lijn, in het vierde quadrant, in den stand $C'''AV'''$, is gekomen; dan snijdt derzelver po-

sitieve streek de negatieve streek van de lijn der tangenten. De boog $GHIH'KH''LH'''$ heeft dus de negatieve lijn GH''' tot tangens, en de positieve lijn AH^{v} tot secans.

Laat men de secanten-lijn CAV, van den oorsprong AB af, de negatieve quadranten doorloopen; dan zal het, zoo uit de bepaling der tangenten en secanten, als uit de boven opgegevene regels, blijken: dat de tangenten der negatieve bogen GH'''', $GH'''LH'$, $GH'''LH'KH'$, $GH''LH'KH'IH$ zullen zijn de lijnen GO''', GO'', GO' en GO, derzelver secanten AO''', AO'', AO', AO: waaruit blijkt: *dat de tangenten der negatieve bogen, in alle quadranten in een tegengestelden positieven of negatieven toestand zijn van die der positieve bogen; maar de secanten der negatieve bogen; hebben, in alle quadranten, dezelfde positieve en negatieve toestanden, als die der positieve bogen.*

§. 925. VII. Bepaling. *Fig.* 12. Eene onbepaalde lijn WX, welke, door den oorsprong I van de telling der complements-bogen, loodregt op den straal AI, of op den oorsprong der complementshoeken, getrokken wordt, noemt men de *lijn der cotangenten*, en wel IW derzelver *positieve* en IX derzelver *negatieve streek*; de bewegende lijn CAV, die, in de voorgaande figuur, de lijn der secanten genoemd is, wordt hier de *lijn der cosecanten* genoemd, AO derzelver *positieve* en AV derzelver *negatieve streek* genoemd. *Nu is de cotangens van eenen hoek BAC, of van deszelfs metenden boog GH, dat bepaalde gedeelte IT van de lijn der cotangenten, hetwelk begrepen is tusschen het punt I (den oorsprong van de telling der complements-bogen en het punt T, in hetwelk de lijn der cosecanten die der cotangenten snijdt; en de cosecans van dienzelfden hoek of boog is dat bepaalde gedeelte AT van de lijn der cosecanten, hetwelk van het hoekpunt A geteld wordt, tot aan het punt T, alwaar die lijn de lijn der cotangenten doorsnijdt.*

Wanneer men de lijn der cosecanten van den oorsprong AB, door al de positieve quadranten laat ronddraaijen; dan zal men zien: *dat in de eerste, tweede, derde en vierde positieve quadranten, de cotangenten positief, negatief, positief en negatief; en de cosecanten positief, positief, negatief en negatief zijn; maar dat, in de vier negatieve quadranten, de cotangenten negatief, positief negatief en positief, en de cosecanten negatief, negatief positief en positief zijn.* Verder blijkt het, dat $cot.\ 0^{0} = \infty$, $cosec.\ 0^{0} = \infty$, $cot.\ 90^{0} = 0$, $cosec.\ 90^{0} = +1$, $cot.\ 180^{0} = \infty$, $cosec.\ 180^{0} = \infty$, $cot.\ 270^{0} = 0$ en $cosec.\ 270^{0} = -1$ is.

§. 926. Gevolg. *Fig.* 12. Uit de VI. *Bep.* blijkt: dat IT de tangens en AT de secans van den hoek EAC of van den boog IH is; dat is, de tangens en secans van den hoek BAC of van den boog GH: *de cotangens en cosecans van eenen hoek of boog zijn dan*

de

de tangens en secans van het complement van dien hoek of boog; en omgekeerd; wij hebben dus deze vergelijkingen:

$$cot.\ a = tang.\ (90^\circ - a)$$
$$cosec.\ a = sec.\ (90^\circ - a)$$
$$tang.\ a = cot.\ (90^\circ - a)$$
$$sec.\ a = cosec.\ (90^\circ - a)$$

§. 927. VIII. Bepaling. *Fig.* 13. Stellen wij, dat, door den oorsprong *G* van de telling der metende bogen, eene onbepaalde lijn *TZ* wordt getrokken, die, om het punt *B*, beweegbaar is; dan noemen wij, in die figuur, die bewegende lijn *TZ* de *lijn der koorden*, *GT* derzelver *positieve* en *GZ* derzelver *negatieve streek.* Laat nu het bewegende been *AC* de vier positieve quadranten doorloopen, en de lijn der koorden zoodanig met zich mede voeren, dat beide lijnen elkander altijd in het uiteinde *H* van den boog *GH*, in den omtrek van den metenden cirkel, doorsnijden; *dan is de koorde van den hoek BAC of van deszelfs metenden boog GH, dat bepaalde gedeelte GH van de lijn der koorden, hetwelk de uiteinden G en N van den metenden boog vereenigt.*

De koorden der bogen *GH*, *GHIH'*, *GHIH'KH''* en *GHIH'KH''KH'''*, zijn dus de lijnen *GH*, *GH'*, *GH''*, *GH'''*. Van 0° tot 180°, groeijen de koorden van nul tot twee; maar nemen, van 180° tot 360°, van twee tot nul af. *De koorden zijn dan in de vier eerste positieve quadranten positief.* Maar gedurende den tijd, dat het bewegende been *AC* ééne geheele omwenteling volbrengt, volbrengt de lijn *TZ* der koorden slechts ééne halve omwenteling, en staat die lijn, nadat het punt *H'''* in *G* gekomen is in eene omgekeerde stelling, de positieve streek naar beneden, en de negatieve streek naar boven; begint dus de bewegende lijn *AC* de vijfde en volgende quadranten door te loopen; dan zal zij de negatieve streek van de lijn der koorden doorsnijden, en zullen de koorden der bogen, in het vijfde, zesde, zevende en achtste quadrant vallende, negatief zijn.

Laat men de beweging in een omgekeerden zin, dat is, in de negatieve quadranten, plaats hebben; dan zal het blijken: *dat de koorden der bogen, in de vier eerste negatieve quadranten, negatief, in de vier volgende positief zijn.* enz.

§. 928. I. Aanmerking. Op de beschrijving der goniometrische lijnen in de voorgaande bepalingen en ophelderingen van dezelve, berusten de twee tafels, op *Bladz.* 16 en 17 voorkomende; in de eerste van welke de waarde van de goniometrische lijnen van positieve of negatieve bogen, die veelvouden van quadranten zijn, voorkomen; en in de tweede de positieve en negatieve toestanden der goniome-

fche lijnen, in de verfchillende pofitieve en negatieve quadranten; door de befchouwing van welke tafels, alles, wat boven verklaard is, beter in zijnen zamenhang, zal kunnen worden overzien.

§. 929. II. Aanmerking. Wanneer, in fig. 9, 10, 11 en 12, het bewegende been AC de vier eerfte pofitieve of de vier eerfte negatieve quadranten is doorgeloopen; dan zal zij onophoudelijk alle volgende omwentelingen kunnen volbrengen, en zal, bij elke nieuwe omwenteling, op nieuw in de ftanden AC, AC', AC'' en AC''' komen. *De bogen*, $GH + n \times 360°$, $GHIH' + n \times 360°$, $GHIH'KH'' + n \times 360°$ *en* $GHIH'KH''LH''' + n \times 360°$ *zullen derhalve, zoo wel ten aanzien van het teeken, als ten aanzien van de lengte, dezelfde zijn, voor alle geheele en pofitieve waarden, die men aan het getal n geven kan.*

§. 930. III. Aanmerking. Uit de voorgaande bepalingen en uit de tafel van de pofitieve en negatieve toeftanden der goniometrifche lijnen volgen terftond de zoo eenvoudige als belangrijke vergelijkingen:

$sin.\ (-a) = -\ sin.\ a$	$sin.\ a = -\ sin.\ (-a)$
$cos.\ (-a) = +\ cos.\ a$	$cos.\ a = +\ cos.\ (-a)$
$tang.\ (-a) = -\ tang.\ a$	$tang.\ a = -\ tang.\ (-a)$
$cot.\ (-a) = -\ cot.\ a$	$cot.\ a = -\ cot.\ (-a)$
$sec.\ (-a) = +\ sec.\ a$	$sec.\ a = +\ sec.\ (-a)$
$cosec.\ (-a) = -\ cosec.\ a$	$cosec.\ a = -\ cosec.\ (-a)$

waaruit blijkt: 1°. dat er geen onderfcheid tusfchen $cos.\ (a-b)$ en $cos.\ (b-a)$ en tusfchen $sec.\ (a-b)$ en $sec.\ (b-a)$ beftaat; 2°. dat voor $sin.\ (a-b)$ kan gefchreven worden $-\ sin.\ (b-a)$, *enz.*

§. 931. IV. Aanmerking. *Fig.* 14. Men make *hoek* $C'AD =$ *hoek* ABC; dan is klaarblijkelijk *hoek* $BAC' =$ *hoek* $DAC =$ *fupplem. hoek* ABC; en het is uit de figuur ligtelijk op te maken: dat $H'M' = HM$, $H'N = HN$, $GO' = GO$, $AO' = AO$, $IT' = IT$ en $AT' = AT$ is. Men ftelle nu de boog $GH = a$; dan volgen uit de voorgaande bepalingen de volgende vergelijkingen:

$$sin.\ suppl.\ a = \quad sin.\ a, \text{ of } sin.\ (180° - a) = \quad sin.\ a$$
$$cos.\ suppl.\ a = -\ cos.\ a, \text{ of } cos.\ (180° - a) = -\ cos.\ a.$$
$$tang.\ suppl.\ a = -tang.\ a, \text{ of } tang.\ (180° - a) = -\ tang.\ a$$
$$cot.\ suppl.\ a = -\ cot.\ a, \text{ of } cot.\ (180° - a) = -\ cot.\ a$$
$$sec.\ suppl.\ a = -\ sec.\ a, \text{ of } sec.\ (180° - a) = -\ sec.\ a$$
$$cosec.\ suppl.\ a = \quad cosec.\ a, \text{ of } cosec.\ (180° - a) = \quad cosec.\ a$$

Bij welke vergelijkingen nog de volgende:

zie vervolg, Bladz. 18

I. Ta-

I. TAFEL, *bevattende de waarden der* Goniometrische lijnen *van positieve en negatieve bogen, die veelvouden van een regten hoek zijn.*

	0°	90°	180°	270°	360°	450°	*enz.*
	I. *Voor* positieve *Hoeken.*						
SINUS	0	$+1$	0	-1	0	$+1$	*enz.*
COSINUS	$+1$	0	-1	0	$+1$	0	*enz.*
TANGENS	0	∞	0	∞	0	∞	*enz.*
COTANGENS	∞	0	∞	0	∞	0	*enz.*
SECANS	1	∞	-1	∞	$+1$	∞	*enz.*
COSECANS	∞	$+1$	∞	-1	∞	$+1$	*enz.*
KOORDE	0	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	*enz.*
SINUS-VERS.	0	1	2	1	0	1	*enz.*
SUSIN. VERS.	2	1	0	1	2	1	*enz.*
	II. *Voor* negatieve *Hoeken.*						
SINUS	0	-1	0	$+1$	0	-1	*enz.*
COSINUS	$+1$	0	-1	0	$+1$	0	*enz.*
TANGENS	0	∞	0	∞	0	∞	*enz.*
COTANGENS	∞	0	∞	0	∞	0	*enz.*
SECANS	$+1$	∞	-1	∞	$+1$	∞	*enz.*
COSECANS	∞	-1	∞	$+1$	∞	-1	*enz.*
KOORDE	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$+\sqrt{2}$	*enz.*
SINUS-VERS.	0	1	2	1	0	1	*enz.*
SUSIN. VERS.	2	1	0	1	2	1	*enz.*

II. TA-

II. TAFEL *van de* positieve *en* negatieve toestanden *der* Goniometrische lijnen, *zoowel voor positieve als negatieve hoeken of bogen.*

	1e. *Quadr* *van* 0° *tot* 90°	2e. *Quadr.* *van* 90° *tot* 180°	3e. *Quadr.* *van* 180° *tot* 270°	4e. *Quadr* *van* 270° *tot* 360°	5e. *Quadr.* *van* 360° *tot* 450°	6e. *Quadr* *van* 450° *tot* 540°	*enz.*
	I. *Voor* positieve *Hoeken.*						
SINUS	+	+	−	−	+	+	*enz.*
COSINUS	+	−	−	+	+	−	*enz.*
TANGENS	+	−	+	−	+	−	*enz.*
COTANGENS	+	−	+	−	+	−	*enz.*
SECANS	+	−	−	+	+	−	*enz.*
COSECANS	+	+	−	−	+	+	*enz.*
KOORDE	+	+	+	+	−	−	*enz.*
SINUS-VERS.	+	+	+	+	+	+	*enz.*
SUSIN. VERS.	+	+	+	+	+	+	
	II. *Voor* negatieve *Hoeken.*						
SINUS	−	−	+	+	−	−	*enz.*
COSINUS	+	−	−	+	+	−	*enz.*
TANGENS	−	+	−	+	−	+	*enz.*
COTANGENS	−	+	−	+	−	+	*enz.*
SECANS	+	−	−	+	+	−	*enz.*
COSECANS	−	−	+	+	−	−	*enz.*
KOORDE	−	−	−	−	+	+	*enz.*
SINUS-VERS.	+	+	+	+	+	+	*enz.*
SUSIN. VERS.	+	+	+	+	+	+	*enz.*

$sin. (90° - a) = cos. a \qquad cos. (90° - a) = sin. a$
$tang. (90° - a) = cot. a \qquad cot. (90° - a) = tang. a$
$sec. (90° - a) = cosec. a \qquad cosec. (90° - a) = sec. a$

kunnen gevoegd worden, die, met de voorgaande te zamen genomen, in het herleiden en transformeren der goniometrische formulen van een uitgestrekt gebruik zijn.

§. 932. V. Aanmerking. Wanneer de goniometrische lijnen voor alle bogen van het eerste quadrant, bij voorbeeld, van tien tot tien secunden, berekend en in eene tafel vereenigd zijn; dan noemt men zulk eene tafel *natuurlijke sinus-tafel*, in welke de *éénheid*, dat is, *de lengtemaat voor den straal is aangenomen*, en de lengte der goniometrische lijnen, in tiendeelingen van die éénheid, berekend zijn; *en dan is deze tafel toereikend, om de goniometrische lijnen voor alle andere positieve en negatieve bogen te vinden, hoe groot dezelve ook mogten gegeven zijn.* Men volgt tot dat einde den volgenden regel.

Regel. *Indien de gegeven hoek of boog grooter dan* 360° *is, deel dan denzelven door* 360°, *en let op het overschot der deeling, hetwelk in het eerste, tweede, derde of vierde quadrant zal vallen. Is de rest der deeling kleiner dan* 90°; *dan zoekt men, met deze rest, in de tafel de goniometrische lijn, welke men begeert; valt deze rest in het tweede quadrant; dan moet men dezelve van* 180° *aftrekken; is deze rest grooter dan* 180° *en kleiner dan* 270°; *dan moet men* 180° *van dezelve aftrekken; en is dezelve eindelijk grooter dan* 270°; *dan moet zij van* 360° *worden afgetrokken; in deze drie laatste gevallen zal men, met het verkregene verschil, in de tafel de begeerde goniometrische lijn zoeken, aan welke men dan, naar aanwijzing der tafel van* Bladz. 17, *het positieve of negatieve teeken, hetwelk aan deze goniometrische lijn toekomt, zal moeten toeeigenen.*

I. Stelling. *Fig.* 15 *en* 16.

§. 933. *Elke hoek of boog heeft slechts ééne sinus, cosinus, tangens, secans, cosecans, koorde,* enz. *maar tot elke goniometrische lijn, behoort een onbepaald aantal, zoo wel negatieve, als positieve hoeken of bogen, welke in rekenkunstige reeksen opklimmen of afdalen.*

Betoog. Het eerste gedeelte dezer stelling volgt onmiddellijk uit de voorgaande bepalingen, en uit de aandachtige beschouwing der figuren 9, 10, 11, 12 en 13; en daarom behoeft het geen verder betoog.

Laat, *fig.* 15, uit eenig punt *A*, met eenen straal *AG*, gelijk aan de éénheid, een cirkel worden beschreven, en trek door het middelpunt *A*

twee

twee onbepaalde loodlijnen BD en AE, die den omtrek in vier quadranten verdeelen. Laat eene positieve lijn, die kleiner dan de éénheid moet zijn, (die, bij voorbeeld, de waarde van $+ 0,7312571$ heeft,) beschouwd worden, als zijnde de finus van eenigen hoek of boog; dan zal men de hoeken of bogen, tot die positieve finus behoorende, door de volgende eenvoudige constructie verkrijgen.

Men neme, op de positieve streek van de onbepaalde lijn AE, de lijn $AP = 0,7312571$; dan valt het punt P binnen den omtrek des cirkels; zoodat, wanneer men door hetzelve eene lijn HPH', evenwijdig aan BD trekt, die lijn den omtrek des cirkels in de punten H en H' zal doorsnijden.

Indien men nu, door die punten H en H', uit het middelpunt A de onbepaalde lijnen AC en AC' trekt; dan zullen de hoeken BAC en BAC', of de bogen GH en $GHIH'$, die dezelve meten, eene lijn tot finus hebben, die aan de lijn $AP = 0,7312571$ gelijk is.

Want, indien men de lijnen HM en $H'M'$, uit de punten H en H', op de lijn BD laat vallen; dan is HM de finus van hoek BAC, of boog GH en $H'M'$ de finus van hoek BAC' of van den boog $GHIH'$; maar, omdat, volgens de constructie, $AMHP$ en $APH'M'$ regthoeken zijn, zoo is $HM = H'M' = AP = 0,7312571$; de hoeken BAC en BAC', of de bogen GH en $GHIH'$, hebben derhalve dezelfde bepaalde lijn tot finus.

Volgens de XIV. *Stell.* V. *B.*, is *boog* $GH =$ *boog* $H'K$; stellen wij dus *boog* $GH =$ *boog* $KH' = a$; dan is *boog* $GHIH' = 180^\circ -$ *boog* $KH' = 180^\circ - a$. Indien dus a de boog uit het eerste quadrant is, die $0,7312571$ tot finus heeft; dan zal de boog $180^\circ - a$ in het tweede quadrant vallen en dezelfde positieve finus $0,7312571$ hebben.

Men stelle, om te bekorten, $90^\circ = R$, en late het been AC, door de positieve quadranten, onophoudelijk omdraaijen; dan is het duidelijk te zien: dat men bij de twee bogen a en $R - a$ onophoudelijk $4R$, of vier regte hoeken, zal moeten optellen, om de bogen te verkrijgen, die alle $AP = 0,7312571$ tot finus hebben; want, is de bewegende lijn in den stand AC gekomen, zal zij vier regte hoeken moeten doorloopen, om op nieuw in denzelfden stand te komen; en, in den stand AC' gekomen zijnde, zal zij insgelijks vier regte hoeken moeten doorloopen, om voor de tweede maal den stand AC' te bereiken.

Men heeft alzoo deze twee oneindig voortloopende rekenkunstige rijen van positieve bogen, die hetzelfde getal tot finus hebben; namelijk

$$a,\ 4R+a,\ 8R+a,\ 12R+a,\ 16R+a,\ \text{enz.}\ \ldots \quad (1)$$
$$2R-a,\ 6R-a,\ 10R-a,\ 14R-a,\ 18R-a,\ \text{enz.}\ \ldots \quad (2)$$

Maar er bestaat ook eene oneindigheid van negatieve bogen, welke dezelfde positieve finus AP hebben. Om deze te vinden, late men de lijn AC de vier negatieve quadranten GL, LK; KI en IG doorloopen; dan ziet men: dat de eerste negatieve boog, die de positieve finus $H'M' = AP$ heeft, is de boog $GLKH'$, en de tweede negatieve boog, die

$$sin.(90^\circ - a) = cos.a \qquad cos.(90^\circ - a) = sin.a$$
$$tang.(90^\circ - a) = cot.a \qquad cot.(90^\circ - a) = tang.a$$
$$sec.(90^\circ - a) = cosec.a \qquad cosec.(90^\circ - a) = sec.a$$

kunnen gevoegd worden, die, met de voorgaande te zamen genomen, in het herleiden en transformeren der goniometrische formulen van een uitgestrekt gebruik zijn.

§. 932. V. Aanmerking. Wanneer de goniometrische lijnen voor alle bogen van het eerste quadrant, bij voorbeeld, van tien tot tien secunden, berekend en in eene tafel vereenigd zijn; dan noemt men zulk eene tafel *natuurlijke sinus-tafel*, in welke de *éénheid*, dat is, *de lengtemaat voor den straal is aangenomen*, en de lengte der goniometrische lijnen, in tiendeelingen van die éénheid, berekend zijn; *en dan is deze tafel toereikend, om de goniometrische lijnen voor alle andere positieve en negatieve bogen te vinden, hoe groot dezelve ook mogten gegeven zijn.* Men volgt tot dat einde den volgenden regel.

Regel. *Indien de gegeven hoek of boog grooter dan* 360° *is, deel dan denzelven door* 360°, *en let op het overschot der deeling, hetwelk in het eerste, tweede, derde of vierde quadrant zal vallen. Is de rest der deeling kleiner dan* 90°; *dan zoekt men, met deze rest, in de tafel de goniometrische lijn, welke men begeert; valt deze rest in het tweede quadrant; dan moet men dezelve van* 180° *aftrekken; is deze rest grooter dan* 180° *en kleiner dan* 270°; *dan moet men* 180° *van dezelve aftrekken; en is dezelve eindelijk grooter dan* 270°; *dan moet zij van* 360° *worden afgetrokken; in deze drie laatste gevallen zal men, met het verkregene verschil, in de tafel de begeerde goniometrische lijn zoeken, aan welke men dan, naar aanwijzing der tafel van* Bladz. 17, *het positieve of negatieve teeken, hetwelk aan deze goniometrische lijn toekomt, zal moeten toeeigenen.*

I. Stelling. *Fig.* 15 *en* 16.

§. 933. *Elke hoek of boog heeft slechts ééne sinus, cosinus, tangens, secans, cosecans, koorde,* enz. *maar tot elke goniometrische lijn, behoort een onbepaald aantal, zoo wel negatieve, als positieve hoeken of bogen, welke in rekenkunstige reeksen opklimmen of afdalen.*

Betoog. Het eerste gedeelte dezer stelling volgt onmiddellijk uit de voorgaande bepalingen, en uit de aandachtige beschouwing der figuren 9, 10, 11, 12 en 13; en daarom behoeft het geen verder betoog.

Laat, *fig.* 15, uit eenig punt A, met eenen straal AG, gelijk aan de éénheid, een cirkel worden beschreven, en trek door het middelpunt A

twee

twee onbepaalde loodlijnen BD en AE, die den omtrek in vier quadranten verdeelen. Laat eene positieve lijn, die kleiner dan de éénheid moet zijn, (die, bij voorbeeld, de waarde van + 0, 7312571 heeft,) beschouwd worden, als zijnde de sinus van eenigen hoek of boog; dan zal men de hoeken of bogen, tot die positieve sinus behoorende, door de volgende eenvoudige constructie verkrijgen.

Men neme, op de positieve streek van de onbepaalde lijn AE, de lijn $AP = 0, 7312571$; dan valt het punt P binnen den omtrek des cirkels; zoodat, wanneer men door hetzelve eene lijn HPH', evenwijdig aan BD trekt, die lijn den omtrek des cirkels in de punten H en H' zal doorsnijden.

Indien men nu, door die punten H en H', uit het middelpunt A de onbepaalde lijnen AC en AC' trekt; dan zullen de hoeken BAC en BAC', of de bogen GH en $GHIH'$, die dezelve meten, eene lijn tot sinus hebben, die aan de lijn $AP = 0, 7312571$ gelijk is.

Want, indien men de lijnen HM en $H'M'$, uit de punten H en H', op de lijn BD laat vallen; dan is HM de sinus van hoek BAC, of boog GH en $H'M'$ de sinus van hoek BAC' of van den boog $GHIH'$; maar, omdat, volgens de constructie, $AMHP$ en $APH'M'$ regthoeken zijn, zoo is $HM = H'M' = AP = 0, 7312571$; de hoeken BAC en BAC', of de bogen GH en $GHIH'$, hebben derhalve dezelfde bepaalde lijn tot sinus.

Volgens de XIV. *Stell.* V. *B.*, is *boog* GH = *boog* $H'K$; stellen wij dus *boog* GH = *boog* $KH' = a$; dan is *boog* $GHIH' = 180° -$ *boog* $KH' = 180° - a$. Indien dus a de boog uit het eerste quadrant is, die 0, 7312571 tot sinus heeft; dan zal de boog $180° - a$ in het tweede quadrant vallen en dezelfde positieve sinus 0, 7312571 hebben.

Men stelle, om te bekorten, $90° = R$, en late het been AC, door de positieve quadranten, onophoudelijk omdraaijen; dan is het duidelijk te zien: dat men bij de twee bogen a en $R - a$ onophoudelijk $4R$, of vier regte hoeken, zal moeten optellen, om de bogen te verkrijgen, die alle $AP = 0, 7312571$ tot sinus hebben; want, is de bewegende lijn in den stand AC gekomen, zal zij vier regte hoeken moeten doorloopen, om op nieuw in denzelfden stand te komen; en, in den stand AC' gekomen zijnde, zal zij insgelijks vier regte hoeken moeten doorloopen, om voor de tweede maal den stand AC' te bereiken.

Men heeft alzoo deze twee oneindig voortloopende rekenkunstige rijen van positieve bogen, die hetzelfde getal tot sinus hebben; namelijk

$$a,\ 4R+a,\ 8R+a,\ 12R+a,\ 16R+a,\ enz. \ldots \ (1)$$
$$2R-a,\ 6R-a,\ 10R-a,\ 14R-a,\ 18R-a,\ enz. \ldots \ (c)$$

Maar er bestaat ook eene oneindigheid van negatieve bogen, welke dezelfde positieve sinus AP hebben. Om deze te vinden, late men de lijn AC de vier negatieve quadranten GL, LK; KI en IG doorloopen; dan ziet men: dat de eerste negatieve boog, die de positieve sinus $H'M' = AP$ heeft, is de boog $GLKH'$, en de tweede negatieve boog,

 die

die deze zelfde finus $HM = AP$ heeft, is de boog $GLKH'IH$. Nu is boog $KH' =$ boog $GH = a$; derhalve hebben de negatieve bogen $-2R-a$ en $-4R+a$ dezelfde positieve finus.

Men late nu de lijn AC verder, in eenen negatieven zin, verscheidene omwentelingen volbrengen; dan zal men bevinden: dat de negatieve bogen, welke dezelfde positieve finus hebben, in de twee volgende rekenkunstige reeksen afdalen:

$$-2R-a,\ -6R-a,\ -10R-a,\ -14R-a,\ -18R-a,\ enz.\ (3)$$
$$-4R+a,\ -8R+a,\ -12R+a,\ -16R+a,\ -20R+a,\ enz.\ (4)$$

Uit de vierde en de eerste, en uit de derde en de vierde dezer reeksen, worden nu deze twee onafgebrokene rekenkunstige reeksen gemaakt:

$$enz.\ -20R+a,\ -16R+a,\ -12R+a,\ -8R+a,\ -4R+a,\ a,\ \ldots 4R+a,\ 8R+a,\ 12R+a,\ 16R+a,\ enz.\ \ldots\ (a)$$
$$enz.\ -18R-a,\ -14R-a,\ -10R-a,\ -6R-a,\ -2R-a,\ 2R-a,\ \ldots 6R-a,\ 10R-a,\ 14R-a,\ enz.\ \ldots\ (b)$$

Wanneer nu n een zeker geheel en positief getal beteekent; dan zullen de termen van de reeks (b) in den algemeenen vorm $\mp(4n+2)R-a$ en de termen van de tweede reeks (a) in den algemeenen vorm $\mp 4nR+a$ zijn begrepen, of eenvoudig in de vormen $(4n+2)R-a$ en $4nR+a$; mits men voor het getal n alle mogelijke positieve en negatieve waarden in geheele getallen aanneme. Wij hebben dus:

$$sin.\ a = sin.\ [(4n+2)R-a] = sin.\ (4nR+a)$$

of, schrijft men, in plaats van $2R$ of twee regte hoeken, de letter π (die dan, in het vervolg, eens 180°, en dan wederom, wanneer de bogen niet in graden, maar in deelen van den straal zijn uitgedrukt, het Ludolphiaansche getal 3, 14159 *enz.* zal voorstellen;) dan wordt die vergelijking:

$$sin.\ a = sin.\ [(2n+1)\pi-a] = sin.\ [2n\pi+a]\ \ldots\ (A)$$

Wanneer, in plaats van eene positieve finus, eene negatieve gegeven is; dan zal de kleinste positieve boog, welke die negatieve lijn tot finus heeft, zijn $180^\circ+a$ (a kleiner zijnde dan 90°) en de positieve boog, die op dien kleinsten volgt, zal zijn $360^\circ-a$; of (naar de aangenomene schrijfwijze,) zullen de twee eerste positieve bogen, die eene negatieve finus hebben, zijn $\pi+a$ en $2\pi-a$. Telt men hierbij $2n\pi$, die alle veelvouden van den omtrek voorstellen; dan wordt

$$sin.\ (\pi+a) = sin.\ [(2n+1)\pi+a] = sin.\ [2n\pi-a]\ \ldots\ (p)$$

Neemt men de negatieve bogen, die eene gegeven negatieve finus hebben; dan zijn de eerste negatieve bogen, die tot dezelve behooren $-a$ en $-\pi+a$; telt men hierbij $-2n\pi$; dan vindt men:

$$sin.\ (-a) = sin.\ [-(2n+1)\pi+a] = sin.\ [-2n\pi-a]\ \ldots\ (q)$$

welke vergelijkingen in de vergelijkingen (p) klaarblijkelijk begrepen zijn.

Indien men nu de vergelijkingen (p) en (q) met de vergelijking (A) vergelijkt; dan ziet men, dat zij in dezelve begrepen zijn, en dat men slechts in (A) aan het getal a het negatieve teeken zal moeten geven,

in-

indien de gegevene finus negatief is. Wij ftellen derhalve:

$$sin. (\pm a) = sin. [(2n + 1)\pi \mp a] = sin. [2n\pi \pm a] \quad . \quad (A)$$

in welke vergelijking de bovenfte of onderfte teekens moeten genomen worden, naar dat de gegevene finus, tot welke al die bogen behooren, pofitief of negatief is.

Men ftelle, *fig.* 16, dat eenige pofitieve lijn, kleiner dan één zijnde, de cofinus zij van zekeren hoek of boog. Men make AP gelijk aan die gegevene cofinus, en trekke door P eene lijn HH', evenwijdig aan AE en late de lijnen NH en $N'H'$ loodregt op AE vallen; dan zijn de pofitieve bogen GH en $GHIKLH'$ de kleinfte pofitieve bogen, die de pofitieve lijn AP tot cofinus hebben. Indien men nu $GH = a$ ftelt; dan zijn a en $360° - a$, of a en $2\pi - a$, de pofitieve bogen, die dezelfde pofitieve cofinus hebben; de negatieve bogen, die dezelfde negatieve cofinus hebben, zijn $-a$ en $-2\pi + a$. Laat men nu de lijn AC, in een pofitieven of negatieven zin, omwentelen; dan zal men bevinden: dat al de pofitieve of negatieve bogen, die dezelfde pofitieve cofinus hebben, in de vergelijking:

$$cos. a = cos. [2n\pi - a] = cos. [2n\pi + a] \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

begrepen zijn.

Wanneer echter de gegevene cofinus negatief is; dan zullen alle bogen, welke die negatieve cofinus hebben, in de algemeene vergelijking:

$$cos. (\pi - a) = cos. [(2n + 1)\pi - a] = cos. [(2n + 1)\pi + a] \quad (C)$$

zijn begrepen. In welke vergelijkingen (B) en (C) voor n alle pofitieve en negatieve geheele getallen kunnen worden genomen.

Uit de befchouwing van *fig.* 11 en 12, zal men ligtelijk vinden: dat alle bogen, die eene gegevene pofitieve of negatieve tangens of cotangens hebben, begrepen zijn in deze twee vergelijkingen:

$$tang. \pm a = tang. [n\pi \pm a] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (D)$$

$$cot. \pm a = cot. [n\pi \pm a] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

in welke formulen aan n alle pofitieve en negatieve waarden in geheele getallen moeten gegeven worden.

Al de bogen, welke tot dezelfde gegevene fecans en cofecans behooren, zijn in dezelfde formulen begrepen, als boven voor de cofinus en finus zijn uitgebragt.

§. 934. AANMERKING. Het verklaarde in deze Leerftelling is, in alle deelen der Meetkunst, van het grootfte belang. Stellen wij eens, bij voorbeeld: dat men in eene getallen-formule de waarde van de finus van zekeren onbekenden hoek gevonden hebbe. Laat die waarde zijn, bij voorbeeld, 0,5381721; dan zal men, met dit getal, in de natuurlijke finus-tafel, die niet verder dan tot het eerfte quadrant ten einde loopt, den fcherpen hoek vinden, welke die finus heeft; indien men nu dien hoek van 180° afirekt; dan zal men een ftompen hoek verkrijgen, die hetzelfde getal tot finus heeft: beide die hoeken voldoen

doen aan de voorwaarden van de vraag, welke dus, indien men de hoeken niet grooter dan 180° neemt, twee oplossingen heeft.

III. *Hoe de goniometrische lijnen van denzelfden hoek of boog van elkander afhangen.*

II. STELLING. *Fig.* 17—21.

§. 935. *De goniometrische lijnen, welke tot denzelfden boog behooren, hebben de volgende eigenschappen.* 1°. *De som van de vierkanten der sinus en cosinus is gelijk aan het vierkant van den straal.* 2°. *Het vierkant van de secans is gelijk aan de som der vierkanten van den straal en de tangens.* 3°. *Het vierkant van de cosecans is gelijk aan de som der vierkanten van den straal en de cotangens.* 4°. *De cosinus staat tot de sinus, in dezelfde reden, als de straal tot de tangens.* 5°. *De sinus staat tot de cosinus, in dezelfde reden, als de straal tot de cotangens.* 6°. *De straal is middenevenredig tusschen de tangens en de cotangens.* 7°. *Zij is ook middenevenredig tusschen de cosinus en de secans.* 8°. *En ook middenevenredig tusschen de sinus en de cosecans.* 9°. *De koorde van elken boog is gelijk aan tweemaal de sinus van de helft van dien boog.* 10°. *De sinus-versus van elken boog is gelijk aan den straal min de cosinus; en de susinus-versus gelijk aan den straal, opgeteld met de cosinus.*

De voornaamste deelen dezer Leerstelling, zijn reeds oppervlakkig in de XXIII. *Stell.* IV. *B.* voorgedragen en betoogd. Thans zullen wij zien, dat het gestelde voor alle positieve en negatieve hoeken, zonder uitzondering, algemeen is. Zij, *fig.* 17, 18, 19 en 20, *ABC* een hoek, en laat, uit het hoekpunt *B*, van dien hoek, met eenen straal, gelijk de *eenheid* zijnde, een cirkelboog *DE* beschreven worden, en trek *BE* loodregt op *AB*; dan is de boog *DE* de betrekkelijke maat van den hoek *ABC*. Trek de lijn *DL*, loodregt op *AB*, en *FM*, loodregt op *BE*; *EI* en *EK* loodregt op *BD* en *BF*; dan is $EI = sin. DE = sin. a$, $EK = cos. DE = cos. a$, $DL = tang. DE$, $FM = cot. DE = cot. a$, $BL = sec. a$, $BM = cosec. a$, $DI = sin. vers. a$, $GI = susin. vers. a$, $FK = cos. vers. a$. Men vergelijke nu, in de betoogen van de verschillende deelen der stelling, *fig.* 17 met de *fig.* 18, 19 en 20.

BETOOG *van het eerste.* De sinus, cosinus en straal zijn, in alle quadranten, de zijden van een regthoekigen driehoek *BIE*, in welke de hypothenusa de straal, de regthoekszijde *EI* de sinus en de regthoekszijde *BI* de cosinus van den boog $DE = a$ is. Nu is XVI. *St.* III. *B.* $BE^2 = EI^2 + BI^2$; dat is, $1 = sin^2. a + cos^2. a$.

BETOOG *van het tweede.* In den regthoekigen driehoek *BDL*, is de hy-

hypothenusa BL de secans, de regthoekszijde DL de tangens van den boog $DE = a$, en de regthoekszijde BD de straal of de éénheid; omdat nu $BL^2 = BD^2 + DL^2$ is, zoo heeft men $sec^2.\ a = 1 + tang^2.\ a$.

Betoog *van het derde.* In den regthoekigen driehoek BFM, is wederom de hypothenusa BM de cosecans van boog a, FM de cotangens van a en BF de straal of de éénheid; daar nu $BM^2 = BF^2 + FM^2$ is, zoo heeft men: $cosec^2.\ a = 1 + cot^2.\ a$.

Betoog *van het vierde.* De regthoekige driehoeken BIE en BDL zijn (omdat *hoek* $I =$ *hoek* $D = R$, en daarom IE evenwijdig aan DL is, en dus *hoek* $BEI =$ *hoek* BLD is,) gelijkvormig; gevolgelijk is, VIII. *Stell.* IV. *B.*, $BI : IE = BD : BL$; dat is, $cos.\ a : sin.\ a = 1 : tang.\ a$; gevolgelijk wordt $tang.\ a = \frac{sin.\ a}{cos.\ a}$.

Betoog *van het vijfde.* Om dezelfde reden, zijn de regthoekige driehoeken BKE en BFM gelijkvormig; en daarom is, VIII. *St.* IV *B.*, $BK : KE = BF : FM$; dat is, $sin.\ a : cos.\ a = 1 : cot.\ a$, en gevolgelijk wordt $cot.\ a = \frac{cos.\ a}{sin.\ a}$.

Betoog *van het zesde.* De driehoeken BDL en BFM zijn gelijkvormig; want *hoek* $BDL =$ *hoek* $BFM = R$; en, omdat DL en BF evenwijdig zijn, is *hoek* $BLD =$ *hoek* FBM. Nu is VIII. *Stell.* IV. *B.*, $DL : BD = BF : FM$; dat is, $tang.\ a : 1 = 1 : cot.\ a$; uit welke evenredigheid de vergelijking $tang.\ a \times cot.\ a = 1$ volgt; eene vergelijking, die men ook verkrijgen zal, wanneer men de vergelijkingen $tang.\ a = sin.\ a : cos.\ a$, en $cot.\ a = cos.\ a : sin.\ a$, met elkander vermenigvuldigt.

Betoog *van het zevende.* Uit de gelijkvormige driehoeken BDL en BIE, volgt nog de evenredigheid, $BI : BE = BD : BL$; dat is, $cos.\ a : 1 = 1 : sec.\ a$; uit welke de vergelijking $sec.\ a \times cos.\ a = 1$ onmiddellijk volgt.

Betoog *van het achtste.* Uit de gelijkvormige driehoeken BKE en BFM, volgt nog de evenredigheid $BK : BE = BF : BM$, of $sin.\ a : 1 = 1 : cosec.\ a$; en daarom is $cosec.\ a \times sin.\ a = 1$.

Betoog *van het negende. Fig.* 21. Men trekke, uit het hoekpunt B, of het middelpunt van den metenden cirkel, de lijn BG loodregt op de koorde DE; dan is (VIII. *Stell.* V. *B.*) $DI = EI$ en *boog* $DH =$ *boog* EH; gevolgelijk *hoek* $ABG =$ *hoek* CBG; $EI = DI$ is klaarblijkelijk de sinus van den boog DH. Men stelle boog $DE = a$; dan is *boog* $DH =$ *boog* $EH = \frac{1}{2}a$. Omdat nu $DE = 2DI = 2EI$ is, zoo is *koorde* $a = 2\ sin.\ \frac{1}{2}a$.

Betoog *van het laatste. Fig.* 17. Volgens de figuur, is $DI = BD - BI$ en $GI = BD + BI$; dat is, $sin.\ vers.\ a = 1 - cos.\ a$ en $sussin.\ vers.\ a = 1 + cos.\ a$. Op dezelfde wijze, zal uit de figuur blijken, dat $cos.\ vers.\ a = 1 - sin.\ a$ is.

§. 936 I. Aanmerking. De formulen of vergelijkingen, welke uit de figuur zijn afgeleid, zijn de volgende:

$$\sin^2.a + \cos^2.a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sec^2.a = 1 + \text{tang}^2.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\text{cosec}^2.a = 1 + \cot^2.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\text{tang}.a = \frac{\sin.a}{\cos.a} \text{ en } \cot.a = \frac{\cos a}{\sin.a} \quad \ldots\ldots \quad (4 \text{ en } 5)$$

$$\text{tang}.a \times \cot.a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\sec.a \times \cos.a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

$$\text{cosec}.a \times \sin.a = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$\text{koord}.a = 2 \sin.\tfrac{1}{2} a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\text{sin. vers}.a = 1 - \cos a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$\text{susin. vers}.a = 1 + \cos.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

$$\text{cos vers}.a = 1 - \sin.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

De elementen, uit welke de termen dezer vergelijkingen bestaan, zijn *sin. a*, *cos. a*, *tang. a*, *cot. a*, *sec. a*, *cosec. a*, enz. *Deze moeten als getallen worden aangemerkt, die de preciese lengte der goniometrische lijnen voorstellen, en dan beteekent sin². a de tweede magt van het getal, dat de lengte van de sinus van den boog a voorstelt. Al die vergelijkingen zijn derhalve getallen-vergelijkingen, die, naar de bekende regels, welker kennis wij thans in den Lezer onderstellen, kunnen behandeld worden;* en dan volgen, uit de vergelijking (1), de vergelijkingen:

$$\cos^2.a = 1 - \sin^2.a \text{ en } \cos.a = \pm\sqrt{(1 - \sin^2.a)} \quad . \quad (13)$$

uit de vergelijking (2), volgen de vergelijkingen:

$$\text{tang}^2.a = \sec^2.a - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$\sec.a = \pm\sqrt{(1 + \text{tang}^2.a)} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$$\text{tang}.a = \pm\sqrt{(\sec^2.a - 1)} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

uit de vergelijking (3), volgen de vergelijkingen:

$$\cot^2.a = \text{cosec}^2.a - 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\text{cosec}.a = \pm\sqrt{(1 + \cot^2.a)} \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

$$\cot.a = \pm\sqrt{(\text{cosec}^2.a - 1)} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

uit de vergelijkingen (4 en 5), volgen de vergelijkingen:

$$\sin.a = \cos.a \times \text{tang}.a. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$\cos.a = \sin.a : \text{tang}.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\cos.a = \sin.a \times \cot.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

$$\sin.a = \cos.a : \cot.a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

uit de vergelijking (6), volgen de vergelijkingen:

$$\text{tang}.a = \frac{1}{\cot.a} \text{ en } \cot.a = \frac{1}{\text{tang}.a} \quad \ldots \quad (24 \text{ en } 25)$$

uit de vergelijking (7), de vergelijkingen:

$$\sec.a = \frac{1}{\cos.a} \text{ en } \cos.a = \frac{1}{\sec.a} \quad \ldots\ldots \quad (26 \text{ en } 27)$$

uit

uit de vergelijking (8), de vergelijkingen:

$$cosec.\, a = \frac{1}{sin.\, a} \text{ en } sin.\, a = \frac{1}{cosec.\, a} \quad . \; . \; . \; (28 \text{ en } 29)$$

§. 937. II. AANMERKING. Wanneer de ſinus van eenigen boog van *a* graden bekend is; dan zal men door formule (13) de coſinus, door de vergelijkingen (4) en (5) de tangens en cotangens van dien boog, en door de vergelijkingen (26 en 28) de ſecans en coſecans van denzelven kunnen berekenen. *Het komt dan alles aan op het berekenen van de ſinusſen der gegevene hoeken of bogen.* Hoe deze thans, in den tegenwoordigen ſtaat der kunst, onmiddellijk kunnen gevonden worden, zal verder (*V. Vraagſtuk*) worden geleerd. Eertijds behielp men zich met de zijden der regelmatige veelhoeken, die in eenen cirkel, wiens ſtraal de éénheid is, beſchreven zijn. Door die zijden, kan men, met behulp van de vergelijking (9), namelijk $sin.\, \frac{1}{2} a = \frac{1}{2}\, koorde\; a$, de ſinusſen van ſommige bogen vinden. Omdat, bij voorbeeld, de zijde van een regelmatigen zeshoek gelijk is aan den ſtraal van den cirkel, in welken hij beſchreven is, en gelijk aan de koorde van $\frac{1}{6} \times 360^{\circ} = 60^{\circ}$, zoo is $sin.\, 30^{\circ} = \frac{1}{2}\, koorde\; 60^{\circ} = \frac{1}{2} = 0,5$. Even zoo zal $sin.\, 45^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, en $sin.\, 18^{\circ} = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5})$ zie V. *Boek* II *en* V. *Stell.* Met de ſinusſen dezer hoeken, kan men, met behulp der formulen, die, in de III. *Stell.* en derzelver *Gevolgen*, zullen betoogd worden, de ſinusſen, coſinusſen en tangenten der bogen van 3° tot 3° vinden, zoo als zij, in de tafels III en IV, op de twee volgende *Bladzijden*, voorkomen, en welker preciefe bepaling in tiendeelige breuken, alleen van tweede-magts wortel-trekkingen afhangt.

§. 938. III. AANMERKING. *Al de formulen of vergelijkingen, van* (1) *tot* (29), *zijn niet ſlechts voor poſitieve, maar ook voor negatieve hoeken; niet ſlechts voor bogen, die in het eerſte quadrant vallen, maar ook voor bogen, hoe groot men dezelve zou mogen ſtellen, volſtrekt algemeen*, zoo als men, uit het onderling vergelijken der *fig.* 17, 18, 19 en 20, in alle bijzonderheden, zal kunnen zien. Men zal namelijk vinden: *dat de algemeene ſtelkundige regels, welke het poſitief en negatief zijn der producten, quotienten en magten bepalen, volmaakt overeenſtemmen met de II. Tafel, Bladz.* 17. Alzoo wordt, in het eerſte quadrant, eene poſitieve ſinus door eene poſitieve coſinus; in het tweede, eene poſitieve ſinus door eene negatieve coſinus; in het derde, eene negatieve ſinus door eene negatieve coſinus; in het vierde, eene negatieve ſinus door eene poſitieve coſinus gedeeld, om de tangens te verkrijgen; volgens de ſtelkundige regels voor de poſitieve en negatieve teekens, moeten dan de tangenten, in de eerſte, tweede, derde en vierde quadranten, noodzakelijk +, —, +, — zijn; zoo als ook uit meetkunſtige gronden gebleken is, te moeten plaats hebben.

§. 939. IV. AANMERKING. In de vergelijking,

$$cos.\, a = \pm \sqrt{(1 - sin^2.\, a)}$$

zie vervolg, Bladz. 28.

III. TAFEL *van de naauwkeurige waarden der sinussen en cosinussen, van 3 tot 3 sexagesimale graden.*

$\sin. 0° = \cos. 90° = 0$

$\sin. 3° = \cos. 87° = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5}) - \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).$
$\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$\sin. 6° = \cos. 84° = -\frac{1}{8}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

$\sin. 9° = \cos. 81° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$\sin. 12° = \cos. 78° = -\frac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{3}) + \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

$\sin. 15° = \cos. 75° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

$\sin. 18° = \cos. 72° = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$

$\sin. 21° = \cos. 69° = -\frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}).$
$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$\sin. 24° = \cos. 66° = \frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) - \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$\sin. 27° = \cos. 63° = -\frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$\sin. 30° = \cos. 60° = \frac{1}{2}$

$\sin. 33° = \cos. 57° = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).$
$\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$\sin. 36° = \cos. 54° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$\sin. 39° = \cos. 51° = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) - \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).$
$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$\sin. 42° = \cos. 48° = -\frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$

$\sin. 45° = \cos. 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin. 48° = \cos. 42° = \frac{1}{8}(\sqrt{15}-\sqrt{3}) + \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

$\sin. 51° = \cos. 39° = \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}).$
$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$\sin. 54° = \cos. 36° = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$

$\sin. 57° = \cos. 33° = -\frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(1+\sqrt{3}).$
$\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$\sin. 60° = \cos. 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin. 63° = \cos. 27° = \frac{1}{8}(\sqrt{10}-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

$\sin. 66° = \cos. 24° = \frac{1}{8}(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

$\sin. 69° = \cos. 21° = \frac{1}{16}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).(1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}(-1+\sqrt{3}).$
$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$\sin. 72° = \cos. 18° = \frac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$

$\sin. 75° = \cos. 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\sin. 78° = \cos. 12° = \frac{1}{8}(-1+\sqrt{5}) + \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$

$\sin. 81° = \cos. 9° = \frac{1}{4}\sqrt{(3+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

$sin. 84^\circ = cos. 6^\circ = \frac{1}{8}(\sqrt{15}+\sqrt{3})+\frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

$sin. 87^\circ = cos. 3^\circ = \frac{1}{16}(\sqrt{6}-\sqrt{2}).(-1+\sqrt{5})+\frac{1}{8}(1+\sqrt{3}).\sqrt{(5+\sqrt{5})}$

IV. *Tafel van de naauwkeurige waarden der tangenten, van 3 tot 3 sexagesimale graden.*

$tang. 3^\circ = 2+\sqrt{5}+\sqrt{(15+6\sqrt{5})}-\frac{1}{2}[\sqrt{(50+22\sqrt{5})}+3\sqrt{3}+\sqrt{15}]$
$tang. 6^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}-\frac{1}{2}\sqrt{15}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$tang. 9^\circ = 1+\sqrt{5}-\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$
$tang. 12^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{(50-22\sqrt{5})}$
$tang\ 15^\circ = 2-\sqrt{3}$
$tang. 18^\circ = \sqrt{(1-\frac{2}{5}\sqrt{5})}$
$tang. 21^\circ = (15-6\sqrt{5})-2+\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{(50-22\sqrt{5})}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 24^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(50+22\sqrt{5})}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 27^\circ = -1+\sqrt{5}-\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$
$tang. 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$tang. 33^\circ = \sqrt{(15+6\sqrt{5})}-2-\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{(50+22\sqrt{5})}+\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 36^\circ = \sqrt{(5-2\sqrt{5})}$
$tang. 39^\circ = \sqrt{(15-6\sqrt{5})}+2-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{(50-22\sqrt{5})}-\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 42^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}+\frac{1}{2}\sqrt{15}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$tang. 45^\circ = 1$
$tang. 48^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(50-22\sqrt{5})}+\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 51^\circ = \sqrt{(15-6\sqrt{5})}+2-\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{(50-22\sqrt{5})}+\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 54^\circ = \sqrt{(1+\frac{2}{5}\sqrt{5})}$
$tang. 57^\circ = \sqrt{(15+6\sqrt{5})}-2-\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{(50+22\sqrt{5})}-\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 60^\circ = \sqrt{3}$
$tang. 63^\circ = -1+\sqrt{5}+\sqrt{(5-2\sqrt{5})}$
$tang. 66^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}+\frac{1}{2}\sqrt{15}-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$tang. 69^\circ = \sqrt{(15-6\sqrt{5})}-2+\sqrt{5}+\frac{1}{2}\sqrt{(50-22\sqrt{5})}+\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 72^\circ = \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$
$tang. 75^\circ = 2+\sqrt{3}$
$tang. 78^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}+\frac{1}{2}\sqrt{15}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$tang. 81^\circ = 1+\sqrt{5}+\sqrt{(5+2\sqrt{5})}$
$tang. 84^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{(50+22\sqrt{5})}+\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{15}$
$tang. 87^\circ = 2+\sqrt{5}+\sqrt{(15+6\sqrt{5})}+\frac{1}{2}\sqrt{(50+22\sqrt{5})}+\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{15}$

zal

zal mogelijk het dubbele teeken ± bij sommige eene bedenking doen ontstaan, hierop nederkomende. *Wanneer*, zal men zeggen, *de boog a in het eerste quadrant valt, dan is zoowel de cosinus, als de sinus van derzelven positief; hoe kan dan de cosinus zoowel negatief als positief zijn?* Om, deze zwarigheid weg te nemen, moet men bedenken: dat eigenlijk niet de hoek of boog *a*; maar wel een positief getal, dat de sinus voorstelt van eenen boog, die in het eerste quadrant valt, gegeven is, en niet de boog *a* zelve: nu behooren (zie I. *Stell.*) tot *sin. a* de bogen *a* en 180° — *a*; de cosinus van *a* is positief; maar de cosinus van 180° — *a* is negatief, en daarom behooren tot eene positieve sinus een onnoemelijk aantal bogen, welker cosinussen beurtelings positief en negatief zijn. Op dezelfde wijze, moeten de dubbele teekens worden verklaard, welke in de overige goniometrische formulen voorkomen.

§. 940. V. Aanmerking. Uit de formulen (24—29) leert men: 1°. *dat, met eene tangens of cotangens te vermenigvuldigen of te deelen, hetzelfde is, als met eene cotangens of tangens te vermenigvuldigen, en, omgekeerd;* 2°. *dat met eene cosinus of secans te deelen hetzelfde is, als met eene secans of cosinus te vermenigvuldigen;* 3°. *en dat eindelijk, met eene sinus of cosecans te deelen, hetzelfde is, als met eene cosecans of sinus te vermenigvuldigen.*

IV. *Over de vier goniometrische grond-formulen. Groote verscheidenheid van nuttige en onmisbare formulen, die uit dezelve worden afgeleid.*

III. Stelling. *Fig.* 22.

§. 941. *Wanneer de sinussen en cosinussen van twee bogen a en b (van welke a de grootste en b de kleinste is) als bekend worden aangenomen; dan zal* 1°. *de sinus van de som dezer bogen gelijk zijn aan de sinus van den grootsten boog, vermenigvuldigd met de cosinus van den kleinsten, opgeteld met de sinus van den kleinsten boog, vermenigvuldigd met de cosinus van den grootsten;* 2°. *de sinus van het verschil dezer bogen zal gelijk zijn aan het eerste dezer producten verminderd met het tweede;* 3°. *de cosinus van de som der bogen zal gelijk zijn aan het product der cosinussen, verminderd met het product der sinussen;* 4°. *en de cosinus van het verschil der bogen gelijk aan het product der cosinussen, opgeteld met het product der sinussen; dat is:*

$$\sin.(a+b) = \sin.a \times \cos.b + \sin.b \times \cos.a \quad . \quad . \quad (30)$$

$$\sin.(a-b) = \sin.a \times \cos.b - \sin.b \times \cos.a \quad . \quad . \quad (31)$$

$$\cos.(a+b) = \cos.a \times \cos.b - \sin.a \times \sin.b \quad . \quad . \quad (32)$$

$$\cos.(a-b) = \cos.a \times \cos.b + \sin.a \times \sin.b \quad . \quad . \quad (33)$$

De-

Deze vier vergelijkingen, die wij in het vervolg de vier *goniometrische grond-formulen* zullen noemen, zijn reeds gedeeltelijk in het IV. *B. Aanmerk.* XXIII. *Stell.* voorgedragen, en zijn de twee eerste van dezelve, in het II. *Bijv.* op de XXVIII. *Stell.* V. *Boek*, uit de eigenschap van den vierhoek, in eenen cirkel beschreven zijnde, afgeleid. Thans zullen wij dezelve uit andere gronden afleiden, en den Lezer met derzelver onderling verband nader bekend maken.

Na, met eenen straal $MO = 1$, eenen cirkelboog beschreven te hebben, neme men *boog* $OA = a$ en *boog* $AB = b$; daarna *boog* $AC =$ *boog* $AB = b$; dan is *boog* $OAB = a + b$ en *boog* $OC = a - b$.

Men trekke den straal MA en de koorde BC; deze laatste zal dan, omdat de bogen AB en AC gelijk zijn (VIII. *Stell.* V. *B.*) door den straal MA, in twee gelijke deelen, $BE = EC$, regthoekig in E, worden doorgesneden. Men late nog, uit de punten A, B en C, de loodlijnen AD, BG en CH op den straal MC vallen; dan is, volgens de voorgaande bepalingen:

$$AD = \sin. a, \qquad MD = \cos. a$$
$$BE = EC = \sin. b, \qquad ME = \cos. b$$
$$BG = \sin. (a+b), \qquad MG = \cos. (a+b)$$
$$CH = \sin. (a-b), \qquad MH = \cos. (a-b)$$

Men trekke de lijnen EF, EK en CI; de eerste evenwijdig aan AD, en de twee laatste evenwijdig aan MO; dan zijn vooreerst de vierhoeken $CLFH$, $GFLI$ en $FEKG$ (I. *Bep.* III. *B.*) regthoekige parallelogrammen; en daarom is (I. *Stell.* III. *B.*) $KE = IL = GF$ en $CL = FH$, en ook nog $IG = LF = CH$ en $KG = EF$.

Omdat, in den driehoek ICB, de lijn EK, volgens de constructie en XXII. *Stell.* I. *B.* evenwijdig aan de zijde CI, en de lijn EL evenwijdig aan de zijde BI loopt; daarom is, zie II. *Gev.* I. *Stell.* IV. *B.*

$$BK : KI = BE : EC$$
$$\text{en } IL : CL = BE : EC$$

Nu is $BE = EC$; derhalve $BK = KI$ en $IL = CL$; en wij hebben dus, wegens de reeds aangewezene regthoekige parallelogrammen, $KE = IL = LC = GF = FH$ en $EL = IK = BK$; en nu is het, uit de figuur, zonder moeite, te zien, dat

$$\sin. (a+b) = BG = KG + BK = EF + BK \quad . \; . \; . \; (a)$$
$$\sin. (a-b) = CH = KG - EL = EF - BK$$
$$\cos. (a+b) = MG = MF - FG = MF - EK$$
$$\cos. (a-b) = MH = MF + FH = MF + EK$$

zal zijn.

Uit deze vergelijkingen (a), zal men, met behulp van de driehoeken MAD, MEF en BKE, die gelijkvormig zijn, tot de gestelde vergelijkingen komen.

De driehoek MEF is aan den driehoek MAD gelijkvormig; omdat zij, aan het middelpunt M, een gemeenschappelijken hoek hebben, en omdat, EF evenwijdig zijnde aan AD, *hoek* $MFE =$ *hoek* MDA en *hoek* $MEF =$ *hoek* MAD is.

Ook

Ook is de driehoek *BKE* gelijkvormig aan den driehoek *MFE*; want zij zijn vooreerst regthoekig in de punten *K* en *F*. Verder is, volgens de figuur:

$$\text{hoek } KEM + \text{hoek } MEF = R$$
$$\text{hoek } KEM + \text{hoek } BEK = R$$

derhalve $\text{hoek } KEM + \text{hoek } MEF = \text{hoek } KEM + \text{hoek } BEK$ en, indien men van deze vergelijking denzelfden hoek *KEM* aftrekt; dan houdt men $\text{hoek } MEF = \text{hoek } BEK$ over, en daarom ook $\text{hoek } EBK = \text{hoek } EMF$.

Omdat nu driehoek *BEK* aan driehoek *MEF* gelijkvormig is, zoo is hij ook gelijkvormig aan den driehoek *MAD*.

Uit de gelijkvormige driehoeken *MDA* en *MFE*, volgen de evenredigheden:

$$MA : ME = AD : EF, \text{ of } 1 : \cos. b = \sin. a : EF$$
$$MA : ME = MD : MF, \text{ of } 1 : \cos. b = \cos. a : MF$$
$$\text{derhalve is } EF = \sin. a \times \cos. b$$
$$\text{en } MF = \cos. a \times \cos. b$$

De gelijkvormige driehoeken *MDA* en *BKE* geven nog de twee volgende evenredigheden;

$$MA : BE = AD : EK, \text{ of } 1 : \sin. b = \sin. a : EK$$
$$MA : BE = MD : BK, \text{ of } 1 : \sin. b = \cos. a : BK$$
$$\text{derhalve is } EK = \sin. a \times \sin. b$$
$$\text{en } BK = \cos. b \times \sin. a$$

Brengt men nu die waarden van *EF*, *MF*, *EK* en *BK* in de vergelijkingen (*a*) over; dan verkrijgt men:

$$\sin. (a+b) = \sin. a \times \cos. b + \sin. b \times \cos. a$$
$$\sin. (a-b) = \sin. a \times \cos. b - \sin. b \times \cos. a$$
$$\cos. (a+b) = \cos. a \times \cos. b - \sin. a \times \sin. b$$
$$\cos. (a-b) = \cos. a \times \cos. b + \sin. a \times \sin. b$$

zijnde de vergelijkingen, welke betoogd moesten worden.

§. 942. I. Aanmerking. *Fig.* 23. *Men kan de twee eerste formulen nog aldus betoogen.* Zij $MO = 1$, $OA = a$, $AB = b$. Trek *MA*; *AC* en *BD* loodregt op *OM* en *BE* loodregt op *AM*; dan is ligtelijk te zien: dat de driehoeken *MDF* en *BEF*, elk in het bijzonder gelijkvormig zijn aan den driehoek *MCA*. Wij hebben dus de vier volgende evenredigheden:

$$MC : AC = MD : DF, \text{ of } \cos. a : \sin. a = \cos. (a+b) : DF$$
$$\text{derhalve is } DF = \frac{\sin. a \times \cos. (a+b)}{\cos. a}$$
$$MC : MA = MD : MF, \text{ of } \cos. a : 1 = \cos. (a+b) : MF$$
$$\text{derhalve is } MF = \frac{\cos. (a+b)}{\cos. a}$$
$$MC : MA = BE : BF, \text{ of } \cos. a : 1 = \sin. b : BF$$
$$\text{derhalve is } BF = \frac{\sin. b}{\cos. a}$$

$$MC : AC = BE : EF, \text{ of } \cos a : \sin a = \sin b : EF$$

$$\text{derhalve } EF = \frac{\sin a \times \sin b}{\cos a}$$

Nu is, volgens de figuur:

$$MF + FE = ME$$

$$\text{of } \frac{\cos (a+b)}{\cos a} + \frac{\sin a \times \sin b}{\cos a} = \cos b$$

en, uit deze vergelijking volgt dan onmiddellijk:

$$\cos (a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$$

Verder heeft men:

$$DF + BF = BD$$

$$\text{of } \frac{\sin a \times \cos (a+b)}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos a} = \sin (a+b)$$

Men brenge, in deze vergelijking, voor $\cos (a+b)$ de waarde, zoo even gevonden, over; dan wordt

$$\frac{\sin a\,[\cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b] + \sin b}{\cos a} = \sin (a+b)$$

$$\text{of } \sin (a+b) = \frac{\sin a \times \cos a \times \cos b + \sin b\,(1 - \sin^2 a)}{\cos a}$$

$$\text{of } \sin (a+b) = \sin a \times \cos b + \sin b \times \cos a$$

Stelt men, in dezelfde figuur, $OB = a$ en $AB = b$; dan zal men de waarden van $\sin (a-b)$ en $\cos (a-b)$ verkrijgen.

§. 943. II. AANMERKING. *De betoogde vergelijkingen gelden voor alle bogen a en b, het zij positieve het zij negatieve, en ook niet slechts voor bogen, welke* (gelijk in *fig.* 22 wordt voorgesteld,) *in het eerste quadrant vallen; maar ook voor bogen, in alle andere quadranten vallende.*

Men zal zich daarvan kunnen overtuigen door middel van figuren, welke, voor verschillende gevallen, ontworpen worden. *De betoogde vergelijkingen* (30), (31), (32) en (33), *zijn volstrekt algemeen.*

§. 944. III. AANMERKING. *De drie laatste vergelijkingen* (31), (32) *en* (33) *kunnen uit de eerste* (30), *door eene ligte substitutie, worden afgeleid.*

Stellen wij, om zulks aan te toonen, in de eerste vergelijking (30), $b = -p$; dan is $\cos b = \cos (-p) = \cos p$ en $\sin b = -\sin p$. Wij verkrijgen dan $\sin (a-p) = \sin a \times \cos p - \sin p \times \cos a$.

Men kan in plaats van $\cos (a+b)$ schrijven $\sin (90^\circ - a - b)$, of $\sin [(90^\circ - a) - b]$, en dan is, volgens formule (31), indien men $90^\circ - a$ als een enkelen boog aanmerkt,

$$\sin [(90^\circ - a) - b] = \sin (90^\circ - a) \cos b - \cos (90^\circ - a) \sin b$$

welke vergelijking, daar $\sin (90^\circ - a) = \cos a$ en $\cos (90^\circ - a) = \sin a$ is, in deze $\cos (a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$ overgaat.

Stelt men, in deze laatste vergelijking, $b = -b$; dan zal men $\cos (a-b) = \cos a \times \cos b + \sin a \times \sin b$ verkrijgen.

§. 945. I. GEVOLG. *Uit de betoogde vergelijkingen volgen onmiddellijk de onderstaande:*

$$sin.(90^\circ + b) = cos.\,b,\ cos.(90^\circ + b) = -sin.\,b \quad . \quad (34)$$
$$sin.(180^\circ + b) = -sin.\,b,\ cos.(180^\circ + b) = -sin.\,b \quad . \quad (35)$$
$$sin.(270^\circ + b) = -cos.\,b,\ cos.(270^\circ + b) = +sin.\,b \quad . \quad (36)$$
$$sin.(270^\circ - b) = -cos.\,b,\ cos.(270^\circ - b) = -sin.\,b \quad . \quad (37)$$
$$sin.(360^\circ - b) = +sin.\,b,\ cos.(360^\circ - b) = +cos.\,b \quad . \quad (38)$$

Want men stelle, in de vergelijking $sin.(a+b) = sin.\,a \times cos.\,b + sin.\,b \times cos.\,a$, $a = 90^\circ$; dan wordt

$$sin.(90^\circ + b) = sin.\,90^\circ \times cos.\,b + cos.\,90^\circ \times sin.\,b$$

nu is, zie *I. Tafel*, *Bladz.* 16, $sin.\,90^\circ = 1$, $cos.\,90^\circ = 0$; derhalve wordt $sin.(90^\circ + b) = cos.\,b$. De overige vier formulen worden uit de formule (30), op dezelfde wijze, afgeleid.

§. 946. II. GEVOLG. *Wanneer men, in de vergelijking,*

$$sin.(a+b) = sin.\,a \times cos.\,b + sin.\,b \times cos.\,a$$

$a = b$ stelt; dan verkrijgt men de merkwaardige formule,

$$sin.\,2a = 2\,sin.\,a \times cos.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

of, $2a = p$ stellende:

$$sin.\,p = 2\,sin.\,\tfrac{1}{2}p \times cos.\,\tfrac{1}{2}p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

dat is: *de sinus van het dubbel van eenen boog is gelijk aan het dubbele product van de sinus, met de cosinus van den boog vermenigvuldigd.*

Want, indien $a = b$ is; dan wordt $sin.(a+b) = sin.\,2a$, $cos.\,b = cos.\,a$ en $sin.\,b = sin.\,a$; derhalve $sin.\,a \times cos.\,b = sin.\,a \times cos.\,a$, $sin.\,b \times cos.\,a = sin.\,a \times cos.\,a$ en $sin.\,2a = sin.\,a \times cos.\,a + sin.\,a \times cos.\,a = 2\,sin.\,a \times cos.\,a$.

§. 947. II. GEVOLG. Stelt men, in de vergelijking

$$cos.(a+b) = cos.\,a \times cos.\,b - sin.\,a \times cos.\,b\ ,$$

$a = b$; dan zal men verkrijgen:

$$cos.\,2a = cos^2.\,a - sin^2.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

dat wil zeggen: *de cosinus van een dubbelen boog is gelijk aan de tweede magt van de cosinus, verminderd met de tweede magt van de sinus van dien boog.*

Want, indien men $a = b$ stelt; dan wordt $cos.(a+b) = cos.\,2a$, $sin.\,b = sin.\,a$ en $cos.\,b = cos.\,a$; derhalve is $cos.\,a \times cos.\,b = cos^2.\,a$ en $sin.\,a \times sin.\,b = sin^2.\,a$; dus wordt $cos.\,2a = cos^2.\,a - sin^2.\,a$.

§. 948. IV. GEVOLG. *Uit de formule (40) worden, met gemak, de twee volgende afgeleid:*

$$1 - cos.\,2a = 2\,sin^2.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$
$$1 + cos.\,2a = 2\,cos^2.\,a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

of, indien men $2a = p$ stelt,

1 —

$$1 - cos.p = 2\,sin^2.\tfrac{1}{2}p = sin.\,vers.p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$
$$1 + cos.p = 2\,cos^2.\tfrac{1}{2}p = susin.\,vers.p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Want, wanneer men, in de vergelijking (40), of in

$$cos.\,2a = cos^2\,a - sin^2.\,a$$

in plaats van $cos^2.\,a$ schrijft $1 - sin^2\,a$; dan verkrijgt men:

$$cos\,2a = 1 - sin^2.\,a - sin^2.\,a = 1 - 2\,sin^2.\,a$$

en, zoo men nu de termen naar den regel overbrengt; dan wordt $2\,sin^2.\,a = 1 - cos.\,2a$.

Stelt men, in diezelfde vergelijking (40), in plaats van $sin^2.\,a$, de waarde $1 - cos^2.\,a$; dan wordt zij:

$$cos.\,2a = cos^2.\,a - (1 - cos^2.\,a) = 2\,cos^2.\,a - 1$$

uit welke dan $2\,cos^2.\,a = 1 + cos.\,2a$ onmiddellijk volgt.

§. 949. V. Gevolg. *Uit de vergelijkingen (41) en (42) volgt onmiddellijk*

$$sin.\tfrac{1}{2}p = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(2 - 2\,cos.p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$
$$cos.\tfrac{1}{2}p = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(2 + 2\,cos.p)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

door welke formulen, uit de gegevene cosinus van eenen boog, de sinus en de cosinus van de helft van denzelven kunnen berekend worden.

§. 950. VI. Gevolg. *Om uit de bekende sinus van eenen boog de sinus en cosinus van den halven boog te vinden, kan men zich van de twee volgende formulen bedienen.*

$$sin.\tfrac{1}{2}p = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + sin.p)} \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - sin.p)} \quad . \quad (45)$$
$$cos.\tfrac{1}{2}p = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{(1 + sin.p)} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(1 - sin\,p)} \quad . \quad (46)$$

Deze formulen zijn gemakkelijk te vinden. Men verheffe den tweeledigen vorm $sin.\,a + cos.\,a$ tot de tweede magt; dan wordt

$$(sin.\,a + cos.\,a)^2 = sin^2.\,a + cos^2.\,a + 2\,sin\,a \times cos.\,a$$

nu is $sin^2.\,a + cos^2.\,a = 1$, en, zie *form.* (39), $2\,sin.\,a \times cos.\,a = sin.\,2\,a$; derhalve is:

$$(sin.\,a + cos.\,a)^2 = 1 + sin.\,2a$$
$$\text{en}\quad sin.\,a + cos.\,a = \pm\sqrt{(1 + sin.\,2a)}$$

Verheft men $(sin.\,a - cos\,a)$ insgelijks tot de tweede magt, en maakt men dezelve herleidingen; dan zal men vinden:

$$sin.\,a - cos.\,a = \mp\sqrt{(1 - sin.\,2a)}$$

Men heeft dus, $a = \tfrac{1}{2}p$ stellende, deze twee vergelijkingen:

$$sin.\tfrac{1}{2}p + cos.\tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{(1 + sin.\,p)}$$
$$sin.\tfrac{1}{2}p - cos.\tfrac{1}{2}p = \mp\sqrt{(1 - sin.\,p)}$$

Men telle deze vergelijkingen bij elkander, trekke de tweede van de eerste; dan zal de halve som en het halve verschil de vergelijkingen (45) en (46) geven. In welke de bovenste of onderste teekens, naar gelang der omstandigheden, moeten gebruikt worden.

§. 951. VII. Gevolg. Men deele formule (41) door formule (42); dan zal men, omdat $sin.\tfrac{1}{2}p : cos.\tfrac{1}{2}p = tang.\tfrac{1}{2}p$ is, vinden:

$$\frac{1-\cos.p}{1+\cos.p}=\tang^2.\tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

en, deze vergelijking omkeerende,

$$\frac{1+\cos.p}{1-\cos.p}=\cot^2.\tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

uit welke, wanneer men $\cos.p$ afgezonderd heeft, volgen zal

$$\cos.p=\frac{1-\tang^2.\tfrac{1}{2}p}{1+\tang^2.\tfrac{1}{2}p}=\frac{\cot^2.\tfrac{1}{2}p-1}{\cot^2.\tfrac{1}{2}p+1} \quad \ldots \quad (49)$$

§. 952. VIII. Gevolg. Omdat $\sin.p=\cos.(90^\circ-p)$ en $\tfrac{1}{2}(90-p)=45^\circ-\tfrac{1}{2}p$, zoo zullen de vergelijkingen (41), (42), (47) en (48) worden:

$$1-\sin p=2\sin^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}p)=\cos.vers.p \quad . \quad (50)$$

$$1+\sin.p=2\cos^2.(45^\circ-\tfrac{1}{2}p)=\text{sucos}.vers.p \quad (51)$$

$$\frac{1-\sin.p}{1+\sin.p}=\tang^2.(45^\circ-\tfrac{1}{2}p) \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

$$\frac{1+\sin.p}{1-\sin.p}=\cot^2.(45^\circ-\tfrac{1}{2}p) \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

§. 953. IX. Gevolg. *Nog zijn de twee volgende formulen merkwaardig.*

$$1+\sec.p=\tang.p\times\cot.\tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

$$\sec.p-1=\tang.p\times\tang.\tfrac{1}{2}p \quad \ldots\ldots \quad (55)$$

Dezelve zijn ligtelijk te vinden. Want men heeft, volgens de II *Stell.*

$$1+\sec.p=1+\frac{1}{\cos.p}=\frac{1+\cos.p}{\cos.p}$$

nu is, volgens *form.* (41), $1+\cos.p=2\cos^2\tfrac{1}{2}p$; derhalve is:

$$1+\sec.p=\frac{2\cos^2.\tfrac{1}{2}p}{\cos.p}$$

Omdat nu, zie *form.* (39), $\sin.p=2\sin.\tfrac{1}{2}p.\cos.\tfrac{1}{2}p$, en derhalve $2\cos\tfrac{1}{2}p=\sin.p:\sin.\tfrac{1}{2}p$ en $\cos^2.\tfrac{1}{2}p=\sin.p\times\cos.\tfrac{1}{2}p:\sin.\tfrac{1}{2}p$ is, zoo wordt

$$1+\sec.p=\frac{\sin.p\times\cos.\tfrac{1}{2}p}{\cos.p\times\sin.\tfrac{1}{2}p}=\tang.p\times\cot.\tfrac{1}{2}p$$

§ 954. IV. Aanmerking. Door de formulen

$$\sin.(a-b)=\sin.a\times\cos.b-\sin.b\times\cos.a$$

$$\cos.(a-b)=\cos.a\times\cos.b+\sin.a\times\sin.b$$

zal men, daar (zie II. *Aanmerking*, II. *Stell.*, § 936,) $\sin.30^\circ=\tfrac{1}{2}$, $\cos.30^\circ=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin 18^\circ=+\tfrac{1}{4}(-1+\sqrt{5})$ en $\cos.18^\circ=\tfrac{1}{4}\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$, uit deze gegevens, met behulp van deze twee vergelijkingen, $\sin.(30^\circ-18^\circ)=\sin.12^\circ$ en $\cos.(30^\circ-18^\circ)=\cos.12^\circ$ kunnen vinden, zoo als zij in de tafel N°. III voorkomen. Uit deze zal men wederom, met behulp van de formulen, (43) en (44), of (45) en (46), langs twee onderscheidene wegen, de sinus en cosinus van eenen boog van 6°, en

en uit deze wederom, de finus en cofinus van 3°. kunnen vinden, en uit deze wederom zoo men wil, de finus van 1° 30′ en van 45′. *Men zal alzoo, met behulp van die bijgebragte formulen, al de worteluitdrukkingen kunnen vinden voor de finusfen en cofinusfen der bogen, van drie tot drie graden, of van 45 tot 45 minuten; uit welke tafel de tangenten van dezelfde bogen, van drie tot drie graden, door de formule tang. a = sin. a : cos. a, zullen worden gevonden, zoo als zij, in de tafel N°. IV, voorkomen; alle welke goniometrifche lijnen alleen van quadraats-worteltrekkingen afhangen.* Het was op die wijze, dat men eertijds, door eene aaneenfchakeling van afleidingen, de finus-tafel, met veel moeite, berekende.

§. 955. V. Aanmerking. *De formule sin. p = 2 sin. ½ p × cos. ½ p geeft aanleiding tot eene zonderlinge conftructie, door welke men eene regte lijn kan verkrijgen, die nagenoeg gelijk is aan één-vierde van den omtrek eens cirkels.*

Men kan namelijk, in de vergelijking,

$$\sin. p = 2 \sin. \tfrac{1}{2} p \times \cos. \tfrac{1}{2} p$$

voor $\sin. \frac{1}{2} p$ fchrijven $2 \sin. \frac{1}{4} p \times \cos \frac{1}{4} p$, en dan wordt

$$\sin. p = 2^2. \sin. \tfrac{1}{4} p \times \cos. \tfrac{1}{2} p \times \cos. \tfrac{1}{4} p$$

in deze vergelijking fchrijve men wederom $2 \sin. \frac{1}{8} p \times \cos. \frac{1}{8} p$ in plaats van $\sin. \frac{1}{4} p$; dan verkrijgt men:

$$\sin. p = 2^3. \sin. \tfrac{1}{8} p \cos. \tfrac{1}{2} p \cos. \tfrac{1}{4} p \cos. \tfrac{1}{8} p$$

op dezelfde wijze verkrijgt men:

$$\sin. p = 2^4. \sin. \tfrac{1}{16} p \cos. \tfrac{1}{2} p \cos. \tfrac{1}{4} p \cos. \tfrac{1}{8} p \cos. \tfrac{1}{16} p$$

De wet van opvolging, is, in die ontwikkelde waarden van sin. p, zoo eenvoudig, dat men niet verder behoeft voort te gaan, om te zien: dat, hoe groot een geheel getal n mogte zijn, in het algemeen, zal moeten beftaan, deze merkwaardige vergelijking:

$$\sin. p = 2^n \times \sin. \frac{p}{2^n} \times \cos. \tfrac{1}{2} p \times \cos. \tfrac{1}{4} p \times \cos. \tfrac{1}{8} p \times \cos. \tfrac{1}{16} p \times \ldots$$

$$\cos. \tfrac{1}{32} p \times \text{enz.} \times \cos. \frac{p}{2^{n-2}} \times \cos. \frac{p}{2^{n-1}} \times \cos. \frac{p}{2^n} \quad \ldots \text{(A)}$$

Wanneer men, in deze vergelijking, voor n een zeer groot getal neemt, bij voorbeeld, $n = 20$; dan is $2^n = 1041576$, en de factor $2^n \times \sin. \frac{p}{2^n}$ wordt dan:

$$1048576 \times \sin. \frac{1}{1048576} p$$

Wanneer dus de boog p een boog is, die in het eerfte of tweede quadrant valt; dan zal $\frac{1}{1048576}$ reeds minder dan ééne fecunde zijn; daar nu de finusfen van kleine bogen, zonder merkelijk van de waarheid af te wijken, aan de bogen zelve gelijk zijn, zoo is

$$1048576 \times \sin. \frac{1}{1048576} p = p$$

en

en de vergelijking (Δ) zal dan, voor eene groote waarde van n, worden:

$$sin.\ p = p \times cos.\ \tfrac{1}{2}p \times cos.\ \tfrac{1}{4}p \times cos.\ \tfrac{1}{8}p \times cos.\ \tfrac{1}{16}p \times cos.\ \tfrac{1}{32}p \times \ldots \text{ enz.} \times cos.\ \frac{p}{2^n} \quad \ldots\ldots \quad (\Delta')$$

en, indien men nu, uit deze laatste vergelijking, p oplost, en onder het oog houdt, dat de éénheid, gedeeld door de cosinus, gelijk is aan de secans, zoo verkrijgt men:

$$p = sin.\ p \times sec.\ \tfrac{1}{2}p \times sec.\ \tfrac{1}{4}p \times sec.\ \tfrac{1}{8}p \times sec.\ \tfrac{1}{16}p \times sec.\ \tfrac{1}{32}p \times sec.\ \tfrac{1}{64}p \times \text{enz.} \times sec.\ \frac{p}{2^n} \quad \ldots\ldots \quad (\Delta'')$$

Men stelle $p = 90^\circ$; dan is $sin\ p = 1$, en dan wordt de lengte van eenen boog van 90°, in deelen van den straal:

$$90^\circ = sec.\ 45^\circ \times sec.\ \frac{90^\circ}{4} \times sec.\ \frac{90^\circ}{8} \times sec\ \frac{90^\circ}{16} \times sec.\ \frac{90^\circ}{32} \times sec\ \frac{90^\circ}{64} \times sec.\ \frac{90^\circ}{128} \times sec.\ \frac{90^\circ}{256} \times \text{enz.} \quad \ldots\ldots \quad (\Gamma)$$

Die vergelijking (Γ) *is volmaakt naauwkeurig, indien dezelve tot in het oneindige wordt voortgezet.* En dat slechts weinig factors genoeg zijn, om, door deze formule, de lengte van één-vierde van den omtrek te berekenen, zal blijken, wanneer men de Logarithmen der secanten van 45°, $22^\circ 30'$, $11^\circ 45'$, $5^\circ 37' 30''$, $2^\circ 48' 45''$, $1^\circ 24' 22\tfrac{1}{2}''$, $0^\circ 42' 11\tfrac{1}{4}''$, bij elkander optelt, en er de *Log.* $2 = 0,3010300$ bijvoegt; want dan zal men voor de Logarithmus van de som vinden 0,4971464, welke Logarithmus met het getal 3,14157 overeenstemt; een getal dat van $\pi = 3,14159$ verschilt 0,00002. Op de vergelijking (Γ), berust nu de volgende

CONSTRUCTIE. *Fig.* 25. Zij *AMB* een quadrant of één-vierde van den omtrek eens cirkels. Deel den hoek *AMB* door de lijn *MG* in twee gelijke deelen; dan is *hoek BMG* = *hoek AMG* = 45°. Laat de lijn *MH* den hoek *AMG* in twee gelijk hoeken *GMH* = *AMH* = $22^\circ 30'$ verdeelen; de lijn *MI* verdeele den hoek *AMH* in twee gelijke deelen *hoek HMI* = *hoek AMI* = $11^\circ 15'$, *enz.* met welke verdeeling men onderstelt, tot in het oneindige voort te gaan.

Men trekke eindelijk *BG* loodregt op *MB*, *GH* loodregt op *MG*, *HI* loodregt *MH*, *IK* loodregt op *MI*, *enz.* dan zal, indien men *MB* = 1 stelt,

$$MG = sec.\ 45^\circ$$

$$MH = sec.\ 45^\circ \times sec.\ \frac{90^\circ}{4}$$

$$MI = sec.\ 45^\circ \times sec.\ \frac{90^\circ}{4} \times sec.\ \frac{90^\circ}{8}$$

$$MK = sec.\ 45^\circ \times sec.\ \frac{90^\circ}{4} \times sec.\ \frac{90^\circ}{8} \times sec.\ \frac{90^\circ}{16}$$

enz. *enz.*

Want, in den regthoekigen driehoek *MGH* is, (zie XXIV. *St.* IV. *B.*) *MH* = *MG* × *sec. GMH* = *sec.* 45° × *sec.* ½ × 45°, *enz.*

I. VRAAG-

I. VRAAGSTUK.

§. 956. *De sinussen en cosinussen van drie bogen a, b en c gegeven zijnde, de sinus en de cosinus van de som dezer bogen te vinden?*

OPLOSSING. Stel de gegevene bogen a, b en c; dan moet gevonden worden: hoe $sin.(a+b+c)$ en $cos.(a+b+c)$ van de sinussen en cosinussen der bogen a, b en c, afhangen.

Wanneer men $a+b$, als een enkelen boog, op zich zelven genomen, beschouwt; dan is, volgens formule (30):

$$sin.(a+b+c) = sin.(a+b) \times cos.c + sin.c \times cos.(a+b)$$

Men vermenigvuldige de vergelijking

$$sin.(a+b) = sin.a \times cos.b + sin.b \times cos.a$$

met $cos.c$, en de vergelijking

$$cos.(a+b) = cos.a \times cos.b - sin.a \times sin.b$$

met $sin.c$; dan verkrijgt men:

$$sin.(a+b) \times cos.c = sin.a \times cos.b \times cos.c + sin.b \times cos.a \times cos.c$$
$$cos(a+b) \times sin.c = sin.c \times cos.a \times cos.b - sin.a \times sin.b \times sin.c$$

indien men nu deze twee laatste vergelijkingen bij elkander optelt; dan verkrijgt men:

$$sin.(a+b+c) = \begin{cases} sin.a \times cos\,b \times cos.c \\ sin.b \times cos.a \times cos.c - sin\,a \times sin.b \times sin.c \\ sin.c \times cos.a \times cos.b \end{cases} \quad (56)$$

Volgens formule (32), zal, wanneer men $a+b$ als een enkelen boog op zich zelven beschouwt, hebben

$$cos(a+b+c) = cos.(a+b)\,cos.c - sin.(a+b)\,sin.c$$

Men vermenigvuldige de vergelijking

$$cos(a+b) = cos.a \times cos.b - sin.a \times sin.b$$

met $cos.c$, en de vergelijking

$$sin.(a+b) = sin.a \times cos.b + cos.a \times sin.b$$

met $sin.c$; dan zijn de producten:

$$cos.(a+b)\,cos.c = cos.a \times cos.b \times cos.c - sin.a \times sin.b \times cos\,c$$

en $sin.(a+b)\,sin.c = sin.a \times cos.c \times sin.c + sin.c \times sin.b \times cos.a$

en trekt men het tweede product van het eerste; dan zal men verkrijgen:

$$cos.(a+b+c) = cos.a \times cos.b \times cos.c \begin{cases} -cos.a \times sin.b \times sin.c \\ -cos.b \times sin.a \times sin.c \\ -cos.c \times sin\,a \times sin.b \end{cases} \quad (57)$$

§. 957. I. AANMERKING. Omdat $cos.(p+q) = cos.p \times cos.q - sin.p \times sin.q$ is, zoo is, in het algemeen:

$$cos.p \times cos.q = cos.(p+q) + sin.p \times sin.q \quad . \; . \; . \quad (a)$$
$$sin.p \times sin.q = cos.p \times cos.q - cos.(p+q) \quad . \; . \; . \quad (b)$$

en daarom worden de termen van de vergelijking (56), als volgt:

 sin. a

$$\sin.a \times \cos.b \times \cos.c = \cos.(b+c) \times \sin.a + \sin.a \times \sin b \times \sin.c$$
$$\sin.b \times \cos.a \times \cos.c = \cos.(a+c) \times \sin.b + \sin.a \times \sin.b \times \sin.c$$
$$\sin.c \times \cos.a \times \cos.b = \cos.(a+b) \times \sin.c + \sin.a \times \sin.b \times \sin c$$
$$-\sin.a \times \sin.b \times \sin.c = \ldots\ldots\ldots - \sin.a \times \sin.b \times \sin.c$$

en, deze bij elkander optellende, zoo verkrijgt de vergelijking (56), dezen anderen vorm:

$$\sin.(a+b+c) = \begin{matrix} \cos.(a+b)\sin.c \\ \cos.(a+c)\sin.b \\ \cos.(b+c)\sin.a \end{matrix} + 2\sin.a \times \sin.b \times \sin.c \quad (58)$$

Met behulp van de vergelijking (b), zal men, uit de formule (57), deze andere afleiden:

$$\cos.(a+b+c) = \begin{matrix} \cos.(a+b) \times \cos.c \\ \cos.(a+c) \times \cos.b \\ \cos.(b+c) \times \cos.a \end{matrix} - 2\cos.a \times \cos b \times \cos.c \quad (59)$$

§. 958. II. Aanmerking. Wanneer men, in de vergelijkingen (56) en (57), $a = b = c$ stelt; dan zal men verkrijgen:

$$\sin^3.a - \tfrac{3}{4}\sin.a + \tfrac{1}{4}\sin.3a = 0 \quad \ldots\ldots \quad (60)$$
$$\cos^3.a - \tfrac{3}{4}\sin.a - \tfrac{1}{4}\cos.3a = 0 \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

welke vergelijkingen zullen kunnen dienen, om, gegeven zijnde de sinus, of de cosinus van eenen boog, de sinus en cosinus van één-derde deel van dien boog te vinden. Alzoo zal, bij voorbeeld, daar $\sin.30^\circ = \tfrac{1}{2}$ is, de sinus van 10° door de oplossing van de derde-magts vergelijking,

$$\sin^3.a - \tfrac{3}{4}\sin.a + \tfrac{1}{8} = 0$$

§. 959. III. Aanmerking. Men kan uit de formulen (56), (57), (58) en (59), verscheide andere afleiden.

1°. Men stelle, in formule (58), $a+b+c = 90^\circ$; dan is $\sin.(a+b+c) = 1$; $\cos.(a+b) = \cos.(90^\circ - c) = \sin.c$; om dezelfde reden is $\cos.(a+c) = \sin b$ en $\cos.(b+c) = \sin.a$, en de vergelijking (58) wordt dan, door de substitutie van die waarden:

$$1 - \sin^2.a - \sin^2.b - \sin^2.c - 2\sin.a \times \sin.b \sin.c = 0 \quad (62)$$

2°. Stelt men, in vergelijking (59), insgelijks $a+b+c = 90^\circ$; dan is $\cos.(a+b+c) = 0$, en wij verkrijgen derhalve:

$$0 = \sin.a \times \cos.a + \sin.b \times \cos.b + \sin.c \times \cos.c - 2\cos.a \times \cos.b \times \cos.c$$
$$0 = 2\sin.a \times \cos.a + 2\sin.b \times \cos.b + 2\sin.c \times \cos.c - 4\cos.a \times \cos.b \times \cos.c$$

nu is $2\sin.a \times \cos.a = \sin.2a$; *enz.* deze laatste vergelijking wordt derhalve:

$$\sin.2a + \sin.2b + \sin.2c = 4\cos.a \times \cos.b \times \cos.c \ \ldots \ (63)$$

3°. Maakt men, in formule (56), $a+b+c = 180^\circ$; dan is $\sin.(a+b+c) = 0$, en deelt men nu alles door het product $\sin.a \times \sin.b \times \sin.c$; dan zal men verkrijgen:

$$\cot.a \times \cot.b + \cot.a \times \cot.c + \cot.b \times \cot.c = 1 \ \ldots \ (64)$$

4°. Maakt men, in formule (58), $a+b+c = 180^\circ$; dan zal men, omdat $a+b = 180^\circ - c$, en daarom $\cos.(a+b) = \cos.(180^\circ - c) = -\cos.c$ is, verkrijgen:

$0 = -\sin. a \times \cos. a - \sin. b \times \cos. b - \sin. c \times \cos. c + 2 \sin. a \times \sin. b \times \sin. c$
en, wanneer men deze met *twee* vermenigvuldigt; dan zal men vinden:

$$\sin. 2\,a + \sin. 2\,b + \sin. 2\,c = 4 \sin. a \times \sin. b \times \sin. c \quad . \; . \quad (65)$$

5°. Deelt men formule (64) door $\cos. a \times \cos. b \times \cos. c$; dan zal men verkrijgen:

$$\mathrm{tang.}\, a + \mathrm{tang.}\, b + \mathrm{tang.}\, c = \mathrm{tang.}\, a \times \mathrm{tang.}\, b \times \mathrm{tang.}\, c \quad . \; . \quad (66)$$

6°. Stelt men, in formule (59), $a + b + c = 180°$; dan zal $\cos. (a + b + c) = -1$ zijn, en men zal verkrijgen:

$$1 - \cos^2. a - \cos^2. b - \cos^2. c - 2 \cos. a \times \cos. b \times \cos. c = 0 \quad (67)$$

De formulen (64), (65), (66) *en* (67), *zijn daarom merkwaardig, omdat zij, op verschillende wijzen, de overeenstemming aanduiden, welke er tusschen de hoeken van eenen platten driehoek bestaat. Alzoo is,* blijkens formule (66), *in elken driehoek, de som van de tangenten der hoeken gelijk aan derzelver product.*

§. 960. IV. AANMERKING. *Het zal, wanneer men, op dezelfde wijze, voortgaat, als in de oplossing van het voorgestelde Vraagstuk is aangewezen, niet moeijelijk vallen, formulen voor de sinus, en de cosinus van de som van vier en meer bogen te vinden; dan, wij zullen dezelve, als van minder belang zijnde, achterwege laten.*

IV. STELLING.

§. 961. *De tangens van de som van twee bogen is gelijk aan de som van derzelver tangenten, gedeeld door éénheid, verminderd met het product van de tangenten van diezelfde bogen; en de tangens van het verschil van twee bogen is gelijk aan het verschil van derzelver tangenten, gedeeld door de éénheid, opgeteld met het product van de tangenten dezer bogen; dat is:*

$$\mathrm{tang.} (a + b) = \frac{\mathrm{tang.}\, a + \mathrm{tang.}\, b}{1 - \mathrm{tang.}\, a \times \mathrm{tang.}\, b} \quad . \; . \; . \; . \quad (68)$$

$$\mathrm{tang.} (a - b) = \frac{\mathrm{tang.}\, a - \mathrm{tang.}\, b}{1 + \mathrm{tang.}\, a \times \mathrm{tang.}\, b} \quad . \; . \; . \; . \quad (69)$$

BETOOG *van het eerste.* Omdat (II. *Stell.*) de tangens van elken boog gelijk is aan de sinus van den boog, gedeeld door deszelfs cosinus; zoo hebben wij deze vergelijking:

$$\mathrm{tang.} (a + b) = \frac{\sin. (a + b)}{\cos. (a + b)} = \frac{\sin. a \times \cos. b + \sin. b \times \cos. a}{\cos. a \times \cos. b - \sin. b \times \sin. a}$$

Men deele teller en noemer van deze breuk, door $\cos\, a \times \cos. b$; dan verkrijgt men:

$$\mathrm{tang.} (a + b) = \frac{\dfrac{\sin. a \times \cos. b}{\cos. a \times \cos. b} + \dfrac{\cos. a \times \sin. b}{\cos. a \times \cos. b}}{1 - \dfrac{\sin. a \times \sin. b}{\cos. a \times \cos. b}}$$

De termen van den teller dezer zamengestelde breuk, zijnde de breuken $\frac{sin.a \times cos\ b}{cos.a \times cos.b}$ en $\frac{cos.a \times sin.b}{cos.a \times cos.b}$, kunnen onder deze meer eenvoudige gedaante worden gesteld, $\frac{sin.a}{cos.b}$ en $\frac{sin.b}{sin.a}$; en dan worden zij, zie II. *St.* gelijk aan *tang. a* en *tang. b*; zoodat de vergelijking in

$$tang.(a+b) = \frac{tang.\ a + tang.\ b}{1 - tang.\ a \times tang.\ b}$$

verandert.

Betoog *van het tweede.* Wanneer men de vergelijking:

$$tang.(a-b) = \frac{sin.(a-b)}{cos\ (a-b)} = \frac{sin.\ a \times cos\ b - sin.\ b \times cos.\ a}{cos\ a \times cos\ b + sin.\ a \times sin.\ b}$$

op dezelfde wijze behandelt; dan zal men vinden:

$$tang.(a-b) = \frac{tang.\ a - tang.\ b}{1 + tang\ a \times tang.\ b}$$

welke vergelijking uit de voorgaande onmiddellijk zal volgen, wanneer men in dezelve *b* negatief neemt.

§. 962. I. Gevolg. Stellen wij, in de zoo even betoogde vergelijkingen (68) en (69), *boog. a* = 45°; dan is (omdat de tangens van 45°, als makende met den straal en de secans een gelijkbeenigen regthoekigen driehoek, gelijk aan den straal of de éénheid is,) *tang. a* = 1. Wij hebben dan, in aanmerking nemende, dat 45° + *b* = *compl.* (45° − *b*) is, (IV. *Anm.* VIII. *Bep.*) *tang.* (45° + *b*) = *cot.* (45° − *b*), en *tang.* (45° − *b*) = *cot.* (45° + *b*). Men verkrijgt dan:

$$tang.(45° + b) = \frac{1 + tang\ b}{1 - tang.\ b} = cot.(45° - b) \quad . \quad . \quad (70)$$

$$tang.(45° - b) = \frac{1 - tang\ b}{1 + tang.\ b} = cot.(45° + b) \quad . \quad . \quad (71)$$

§. 963. II. Gevolg. Wanneer men de tellers en noemers der breuken, welke in de laatste vergelijkingen voorkomen, door *tang. b* deelt, en onder het oog houdt: dat 1 : *tang. b* = *cot b* is; dan wordt

$$tang.(45° + b) = \frac{cot.\ b + 1}{cot.\ b - 1} = cot.(45° - b) \quad . \quad . \quad (72)$$

$$tang.(45° - b) = \frac{cot\ b - 1}{cot.\ b + 1} = cot.(45° + b) \quad . \quad . \quad (73)$$

§. 964. III. Gevolg. Stelt men, in *form.* (68) en (69), den *boog b* = 45°; dan zal men verkrijgen:

$$tang.(a + 45°) = \frac{1 + tang.\ a}{1 - tang.\ a} = cot.(45° - a) \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

$$tang.(a - 45°) = \frac{tang\ a - 1}{tang.\ a + 1} = cot.(45° + a) \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

§. 965. IV. Gevolg. Uit de *formulen* (70) — (71) zal, door de gewone oplossing van *tang. b* en *cot. b*, volgen:

tang.

$$tang.\,b = \frac{tang.(45^\circ + b) - 1}{tang.(45^\circ + b) + 1} = \frac{1 - cot.(45^\circ + b)}{1 + cot.(45^\circ + b)} \quad \ldots (76)$$

$$cot.\,b = \frac{tang.(45^\circ + b) + 1}{tang.(45^\circ + b) - 1} = \frac{1 + cot.(45^\circ + b)}{1 - cot.(45^\circ + b)} \quad \ldots (77)$$

§. 966. V. GEVOLG. Stelt men, in de vergelijking (68), $a = b$; dan verkrijgt men:

$$tang.\,2a = \frac{2\,tang.\,a}{1 - tang^2.\,a} \quad \ldots\ldots (78)$$

en hieruit volgt, met behulp van de II. *Stelling*, wanneer men namelijk de leden dezer laatste vergelijking omkeert,

$$cot.\,2a = \tfrac{1}{2}\,cot.\,a - \tfrac{1}{2}\,tang.\,a \quad \ldots\ldots (79)$$

§. 967. VI. GEVOLG. Men zal, met behulp der formulen (68) en (69), kunnen betoogen: dat, wanneer a, b, c, d, e, f, *enz.* bogen verbeelden, en de som van de tangenten dezer bogen door S_1, de som van derzelver producten, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, door S_2, de som van derzelver producten, op alle mogelijke wijzen, drie aan drie, vier aan vier, vijf aan vijf, *enz.* genomen, door S_3, S_4, S_5, *enz.* worden voorgesteld, als dan de tangens van de som van al die bogen zal zijn

$$tang.\,(A + B + C + enz.) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + S_9 - enz.}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + S_8 - enz.} \quad (80)$$

Want, stellen wij $tang.\,A = a$, $tang.\,B = b$, $tang.\,C = c$, $tang.\,D = d$, *enz.* dan is, volgens het betoogde;

$$tang.\,(A + B) = \frac{a + b}{1 - ab}$$

en, zoo men $A + B$ als een enkelen boog op zich zelven beschouwt; dan is:

$$tang.\,(A + B + C) = \frac{tang.\,(A + B) + tang.\,C}{1 - tang.\,(A + B)\;tang.\,C}$$

dat is, indien men voor $tang.\,(A + B)$ en $tang.\,C$ de waarden schrijft:

$$tang.\,(A + B + C) = \frac{\frac{a + b}{1 - ab} + c}{1 - \frac{a + b}{1 - ab} \times c} = \frac{(a + b + c) - abc}{1 - (ab + ac + bc)}$$

Wederom is

$$tang.\,(A + B + C + D) = \frac{tang.\,(A + B + C) + tang.\,D}{1 - tang.\,(A + B + C)\;tang.\,D}$$

dat is:

$$tang.\,(A + B + C + D) = \frac{\frac{(a + b + c) - abc}{1 - (ab + ac + bc)} + d}{1 - \frac{(a + b + c) - abc}{1 - (ab + ac + bc)} \times d}$$

of, na verdere herleiding,

$$tang.\,(A + B + C + D) = \frac{(a + b + c + d) - (abc + abd + acd + bcd)}{1 - (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abcd}$$

 en,

en, op dien voet voortgaande, zal men zich van de waarheid der voorgestelde formule (80) volkomen kunnen overtuigen.

Bijaldien men al de bogen A, B, C, D, *enz* aan elkander gelijk stelt en in aanmerking neemt, dat de binomial-coefficienten van de geheele positieve magt n aanwijzen, op hoe veel onderscheidene wijzen n dingen, één aan één, twee aan twee, drie aan drie, *enz.* kunnen worden vereenigd; dan zal uit formule (80) onmiddellijk volgen:

$$tang.\,nA = \frac{n \times tang.\,A - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,tang^3.\,A + enz.}{1 - \frac{n(n-1)}{2}\,tang^2.\,A + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,tang^4.\,A - enz.} \quad . \quad (81)$$

van welke formule wij ons naderhand zullen bedienen.

§. 968. I. Aanmerking Wanneer men in aanmerking neemt, dat de secans van eenen boog gelijk is aan de éénheid, gedeeld door de cosinus; en de cosecans aan de éénheid, gedeeld door de sinus; dan zal men, uit de vier goniometrische grond-formulen (30) — (33), gemakkelijk vinden:

$$sec.(a+b) = \frac{sec.\,a \times sec.\,b}{1 - tang.\,a \times tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (82)$$

$$sec.(a-b) = \frac{sec.\,a \times sec.\,b}{1 + tang\,a \times tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (83)$$

$$cosec.(a+b) = \frac{sec.\,a \times sec.\,b}{tang.\,a + tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (84)$$

$$cosec.(a-b) = \frac{sec.\,a \times sec.\,b}{tang.\,a - tang.\,b} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (85)$$

welke formulen te vinden, aan den Lezer zij overgelaten.

Maakt men, nu in de formulen (82) en (84), $a = b$; dan verkrijgt men:

$$sec.\,2a = \frac{1 + tang^2.\,a}{1 - tang^2.\,a} \quad (86), \text{ en } cosec.\,2a = \frac{sec^2.\,a}{2\,tang.\,a} \quad . \quad (87)$$

§. 969 II. Aanmerking. *Er is eene soort van goniometrische uitdrukkingen en formulen, die wij thans moeten leeren kennen* De uitdrukking *Boog sin.* (a), of *B. sin.* (a), beteekent eenen boog, wiens sinus gelijk aan het getal a is. Op dezelfde wijze, moet *B. cos* (a), *B. tang.* (a) *enz.* verstaan worden. Zulke uitdrukkingen stellen den boog door zijne sinus, cosinus, tangens, *enz.* voor.

Stellen wij nu, in de vergelijking:

$$tang.\,(A+B) = \frac{tang.\,A + tang.\,B}{1 - tang.\,A \times tang.\,B}$$

$tang.\,A = a$, $tang.\,B = b$; dan is $A = B.\,tang.(a)$, en $B = B.\,tang.(b)$, en daarom is,

$$tang.\,(A+B) = \frac{a+b}{1-ab}$$

en

en $A + B = B.\ tang.\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

Stelt men nu voor A en B de waarden; dan verkrijgt men de vergelijking:

$$B.\ tang.(a) + B.\ tang.(b) = B.\ tang.\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \quad . \quad . \quad (88)$$

op dezelfde wijze, zal gevonden worden:

$$B.\ tang.(a) - B.\ tang.(b) = B.\ tang.\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) \quad . \quad . \quad (89)$$

en zoo zal men, uit de vergelijking (80), vinden:

$$B.tang.(a) + B\ tang\ (b) + B.tang\ (c) = B.tang.\left(\frac{a+b+c-abc}{1-(ab+ac+bc)}\right) (90)$$

Men noemt zulke soort van herleidingen cirkelbogen op te tellen en af te trekken.

Men stelle zich $B.\ sin.\ (a)$ afzonderlijk voor; dan moet het getal a als de sinus van den boog, door den getalvorm $B.\ sin.\ (a)$ voorgesteld, beschouwd worden; en a moet, zal zulk een boog wezenlijk bestaan, kleiner dan de éénheid zijn. Wanneer nu $sin.\ A = a$ of $A = B.\ sin.\ (a)$ is; dan is $cos.\ A = \surd(1 - sin^2.\ A) = \surd(1 - a^2)$, $tang.\ A = sin.\ A:$ $cos.\ A = \frac{a}{\surd(1-a^2)}$, $cot.\ A = cos.\ A : sin.\ A = \frac{\surd(1-a^2)}{a}$, $sec.\ A$ $= \frac{1}{\surd(1-a^2)}$, $cosec.\ A = \frac{1}{a}$. Hieruit volgt derhalve, dat

$$B.sin.(a) = B.cos.[\surd(1-a^2)] = B.tang.\left(\frac{a}{\surd(1-a^2)}\right) \text{ enz.}$$

is.

Laat nog gegeven zijn $B.\ tang.\ (a)$; dan is de secans van dien boog $=$ $\surd(1+a^2)$; de cosinus $= \frac{1}{\surd(1+a^2)}$; de cotangens $= \frac{1}{a}$; de cosecans $= \frac{\surd(1+a^2)}{a}$ en de sinus $= \frac{a}{\surd(1+a^2)}$; derhalve is:

$$B.\ tang.\ (a) = B.sin.\left(\frac{a}{\surd(1+a^2)}\right) = B.cos.\left(\frac{1}{\surd(1+a^2)}\right) \text{ enz.}$$

Uit de bekende formule

$$sin.\ (A+B) = sin.\ A \times cos.\ B + sin.\ B \times cos.\ A$$

zal men vinden:

$$B.sin.(a) + B.sin.(b) = B.sin.[a\surd(1-b^2) + b\surd(1-a^2)] \quad (91)$$

Dit weinige zij genoeg, om zich in die wijze van schrijven te oefenen; welke niet slechts in de Driehoeksmetingen, maar inzonderheid ook in de hoogere deelen der Algemeene Rekenkunst van veel gebruik is.

V. STEL-

V. Stelling.

§. 970. *Wanneer a en b twee bogen zijn, a de grootste en b de kleinste; dan zal: 1°. het product van de sinus van den grootsten boog, vermenigvuldigd met de cosinus van den kleinsten, gelijk zijn aan de halve sinus van de som, opgeteld met de halve sinus van het verschil dezer bogen; 2°. maar, wanneer men de sinus van den kleinsten boog met de cosinus van den grootsten vermenigvuldigt; dan zal het product gelijk zijn aan de halve sinus van de som, verminderd met de halve sinus van het verschil dezer bogen. 3°. Het product van de sinussen van diezelfde bogen zal gelijk zijn aan de halve cosinus van het verschil, verminderd met de halve cosinus van de som dezer bogen. 4°. Eindelijk zal het product van de cosinussen van diezelfde bogen gelijk zijn aan de halve cosinus van de som, opgeteld met de halve cosinus van het verschil dezer bogen. Dat is:*

$$\sin. a \times \cos. b = \tfrac{1}{2} \sin. (a+b) + \tfrac{1}{2} \sin (a-b) \quad . \; . \; . \quad (92)$$
$$\sin. b \times \cos a = \tfrac{1}{2} \sin. (a+b) - \tfrac{1}{2} \sin. (a-b) \quad . \; . \; . \quad (93)$$
$$\sin. a \times \sin. b = \tfrac{1}{2} \cos. (a-b) - \tfrac{1}{2} \cos. (a+b) \quad . \; . \; . \quad (94)$$
$$\cos. a \times \cos. b = \tfrac{1}{2} \cos. (a+b) + \tfrac{1}{2} \cos. (a-b) \quad , \; . \; . \quad (95)$$

Betoog. Want, wanneer men de vergelijkingen (30) en (31) optelt, en de vergelijking (31) van (30) aftrekt, verkrijgt men de (92) en (93) vergelijkingen; en de vergelijkingen (94) en (95) ontstaan door (33) van (32) af te trekken, en dezelve bij elkander op te tellen.

VI. Stelling.

§. 971. *Wanneer boog p grooter is dan de boog q; dan zal: 1°. de som van de sinussen dezer bogen gelijk zijn aan tweemaal het product van de sinus van de halve som, vermenigvuldigd met de cosinus van het halve verschil dezer bogen; 2°. het verschil van de sinussen van die bogen zal gelijk zijn aan het dubbele product van de sinus van het halve verschil, vermenigvuldigd met de cosinus van de halve som; 3°. de som van de cosinussen dezer bogen zal gelijk zijn aan het dubbele product van de cosinussen van de halve som en van het halve verschil dezer bogen; 4°. eindelijk, zal de cosinus van den kleinsten boog, min de cosinns van den grootsten, gelijk zijn aan tweemaal het product van de sinussen van de halve som en van het halve verschil dezer bogen. Dat is:*

$$\sin. p + \sin. q = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(p+q) \times \cos. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \; . \quad (96)$$
$$\sin. p - \sin. q = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(p-q) \times \cos. \tfrac{1}{2}(p+q) \quad . \; . \quad (97)$$

cos p

$$\cos. p + \cos. q = 2 \cos. \tfrac{1}{2}(p+q) \times \cos. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \quad . \quad (98)$$

$$\cos. q - \cos. p = 2 \sin. \tfrac{1}{2}(p+q) \times \sin. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \quad . \quad (99)$$

BETOOG. Men ftelle, in de vergelijkingen (92) en (93), $a+b=p$ en $a-b=q$; dan is $a=\frac{1}{2}(p+q)$ en $b=\frac{1}{2}(p-q)$, en de geftelde vergelijkingen zullen dan van zelve te voorfchijn komen.

§. 972. GEVOLG. Uit de zoo even betoogde formulen, als ook uit de formulen (4) en (5), zal men gemakkelijk vinden:

$$1 + \tan g. p = \frac{\cos. (45^\circ - p)}{\cos. p} \times \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

$$1 - \tan g. p = \frac{\sin. (45^\circ - p)}{\cos. p} \times \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

$$1 + \cot. p = \frac{\cos. (45^\circ - p)}{\sin. p} \times \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

$$1 - \cot. p = \frac{\sin. (p - 45^\circ)}{\sin. p} \times \sqrt{2} \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

VII. STELLING.

§. 973. *De fom van de finusfen van twee bogen, p en q, ftaat tot derzelver verfchil, gelijk de tangens van de halve fom dezer bogen tot de tangens van derzelver halve verfchil. Dat is:*

$$\sin. p. + \sin. q : \sin. p - \sin. q = \tan g. \tfrac{1}{2}(p+q) : \tan g. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

BETOOG. Wanneer men de vergelijking (96), door de vergelijking (97) deelt; dan verkrijgt men:

$$\frac{\sin. p + \sin q}{\sin. p - \sin q} = \frac{\sin. \frac{1}{2}(p+q)}{\cos. \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{\cos. \frac{1}{2}(p-q)}{\sin. \frac{1}{2}(p-q)}$$

Nu is (II. *Stell.*) de finus, gedeeld door de cofinus, gelijk aan de tangens; en de cofinus, gedeeld door de finus, gelijk aan de cotangens: men kan dan, in plaats van de laatfte vergelijking, fchrijven:

$$\frac{\sin p + \sin. q}{\sin. p - \sin. q} = \tan g. \tfrac{1}{2}(p+q) \times \cot. \tfrac{1}{2}(p-q)$$

maar nu mag (V. *Aanm* II. *Stell.*) in plaats van de cotangens van eenen boog, gefchreven worden, de éénheid, gedeeld door de tangens: men heeft dienvolgens:

$$\frac{\sin. p. + \sin. q}{\sin. p. - \sin. q} = \frac{\tan g. \frac{1}{2}(p+q)}{\tan g. \frac{1}{2}(p-q)}$$

dat is, in de gewone fchrijfwijze der evenredigheden,

$$\sin. p + \sin. p : \sin. p - \sin. q = \tan g. \tfrac{1}{2}(p+q) : \tan g. \tfrac{1}{2}(p-q)$$

VIII. STELLING.

§. 974. *De fom van de cofinusfen van twee bogen ftaat tot derzel-*

zelver verschil, gelijk de cotangens van de halve som tot de tangens van het halve verschil dezer bogen; of, gelijk de cotangens van het halve verschil der bogen tot de tangens van derzelver halve som. Dat is:

$$cos. p + cos. q : cos. q - cos. p = cot. \tfrac{1}{2}(p+q) : tang. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (105)$$

$$cos. p + cos. q : cos. q - cos. p = cot. \tfrac{1}{2}(p-q) : tang. \tfrac{1}{2}(p+q) \quad \ldots \quad (106)$$

BETOOG. Wanneer men de vergelijking (98), door de vergelijking (99), deelt; dan verkrijgt men:

$$\frac{cos. p + cos. q}{cos. q - cos. p} = \frac{cos. \frac{1}{2}(p+q)}{sin. \frac{1}{2}(p+q)} \times \frac{cos. \frac{1}{2}(p-q)}{sin. \frac{1}{2}(p-q)}$$

en hiervoor kan (V. *Aanm.* II. *Stell.*) gesteld worden:

$$\frac{cos. p + cos. q}{cos. q - cos. p} = cot. \tfrac{1}{2}(p+q) \times cot. \tfrac{1}{2}(p-q)$$

Omdat nu de cotangens van eenen boog gelijk is aan de éénheid, gedeeld door deszelfs tangens; zoo zal men mogen stellen:

$$\frac{cos. p + cos. p}{cos. q - cos. p} = \frac{cot. \frac{1}{2}(p+q)}{tang. \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{cot. \frac{1}{2}(p-q)}{tang. \frac{1}{2}(p+q)}$$

welke dubbele vergelijking van de gestelde evenredigheden, gelijk men weet, niet onderscheiden is.

IX. STELLING.

§. 975. *Wanneer men de som van de sinussen van twee bogen door de som en het verschil van derzelver cosinussen deelt; dan zijn de respectieve quotienten de tangens van de halve som en de cotangens van het halve verschil dezer bogen; maar, wanneer men het verschil van de sinussen van diezelfde bogen door de som en het verschil van derzelver cosinussen deelt; dan zijn de respectieve quotienten de tangens van het halve verschil en de cotangens van de halve som dezer bogen. Dat is:*

$$\frac{sin. p + sin. q}{cos. p + cos. q} = tang. \tfrac{1}{2}(p+q) \quad \ldots \quad (107)$$

$$\frac{sin. p + sin. q}{cos. q - cos. p} = cot. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (108)$$

$$\frac{sin. p - sin. q}{cos. p + cos. q} = tang. \tfrac{1}{2}(p-q) \quad \ldots \quad (109)$$

$$\frac{sin. p - sin. q}{cos. q - cos. p} = cot. \tfrac{1}{2}(p+q) \quad \ldots \quad (110)$$

BE-

BETOOG. De waarheid van dit gestelde zal blijken, wanneer men de vergelijking (96), door de vergelijkingen (98) en (97); en de vergelijking (97), door dezelfde vergelijkingen (92) en (93) deelt, en, in de uitkomsten dezer deelingen, onder het oog houdt, dat $sin. m : cos. m = tang\ m$ en $cos. m : sin. m = cot\ m$ is.

§. 976. I GEVOLG. Stelt men, in de vergelijkingen (107) en (108), de boog $q = 0$; dan zullen zij, omdat $sin. 0^0 = 0$ en $cos. 0^0 = 1$ is, in de volgende veranderen:

$$\frac{sin. p}{1 + cos. p} = tang. \tfrac{1}{2} p. \quad (111) \quad \text{en} \quad \frac{sin. p}{1 - cos. p} = cot. \tfrac{1}{2} p \quad . \quad (112)$$

§. 977 II GEVOLG. Deelt men de vergelijking $1 = 1$, door de leden van elke der twee laatst gevondene; dan zal men verkrijgen:

$$cot. \tfrac{1}{2} p = \frac{1 + cos. p}{sin. p} = \frac{1}{sin. p} + \frac{cos. p}{sin. p} = cosec. p + cot. p \quad . \quad (113)$$

$$tang. \tfrac{1}{2} p = \frac{1 - cos. p}{sin. p} = \frac{1}{sin\ p} - \frac{cos. p}{sin. p} = cosec. p - cot. p \quad . \quad (114)$$

§. 978. III. GEVOLG. De helft van de som en van het verschil dezer laatste vergelijkingen geven de twee volgende:

$$cot\ \tfrac{1}{2} p + tang. \tfrac{1}{2} p = 2\ cosec. p \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (115)$$
$$cot. \tfrac{1}{2} p - tang. \tfrac{1}{2} p = 2\ cot. p. \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (116)$$

X. STELLING.

§. 979. *De sinus van de som van twee bogen staat tot de som van derzelver sinussen, gelijk de cosinus van de halve som dezer bogen tot de cosinus van derzelver halve verschil; maar de sinus van de som der bogen staat tot het verschil van derzelver sinussen, gelijk de sinus van de halve som tot de sinus van het halve verschil dezer bogen. Dat is:*

$$sin. (p + q) : sin. p + sin. q = cos. \tfrac{1}{2} (p + q) :$$
$$cos. \tfrac{1}{2} (p - q) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (117)$$
$$sin. (p + q) : sin. p - sin. q = sin. \tfrac{1}{2} (p + q) :$$
$$sin. \tfrac{1}{2} (p - q) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (118)$$

BETOOG Omdat (I *Gev.* III. *Stell*) $sin. a = 2\ sin. \tfrac{1}{2} a \times cos\ \tfrac{1}{2} a$ is, zal $sin. (p + q) = 2\ sin\ \tfrac{1}{2} (p + q) \times cos. \tfrac{1}{2} (p + q)$ zijn; deelen wij dan deze vergelijking door $sin. p + sin. q = 2\ sin. \tfrac{1}{2} (p + q) \times cos. \tfrac{1}{2} (p - q)$; (zie *Verg.* (96)); dan verkrijgt men:

$$\frac{sin. (p + q)}{sin. p + sin. q} = \frac{2\ sin. \tfrac{1}{2} (p + q) \times cos. \tfrac{1}{2} (p + q)}{2\ sin. \tfrac{1}{2} (p + q) \times cos. \tfrac{1}{2} (p - q)} = \frac{cos. \tfrac{1}{2} (p + q)}{cos. \tfrac{1}{2} (p - q)}$$

en, wanneer men diezelfde vergelijking, $sin. (p + q) = 2\ sin. \tfrac{1}{2} (p + q) \times cos. \tfrac{1}{2} (p + q)$, door de vergelijking (97) deelt; dan zal men vinden:

sin.

$$\frac{\sin.(p+q)}{\sin.p-\sin q}=\frac{2\sin.\frac{1}{2}(p+q)\times\cos.\frac{1}{2}(p+q)}{2\sin\frac{1}{2}.(p-q)\times\cos.\frac{1}{2}(p+q)}=\frac{\sin.\frac{1}{2}(p+q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)}$$

welke van de twee gestelde evenredigheden niet onderscheiden zijn.

§. 980. Gevolg. Men stelle, in deze evenredigheden, $p=90^\circ$; dan is $\sin.(p+q)=\sin.(90^\circ+q)=\sin.90^\circ\times\cos.q+\cos.90^\circ\times\sin.q=\cos.q$; en de evenredigheden (117) en (118) zullen in de volgende vergelijkingen veranderen:

$$\frac{\cos q}{1+\sin.q}=\frac{\cos.(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\cos.(45^\circ-\frac{1}{2}q)}\ (119);\quad \frac{\cos.q}{1-\sin.q}=\frac{\sin.(45^\circ+\frac{1}{2}q)}{\sin.(45^\circ-\frac{1}{2}q)}\ (120)$$

XI. Stelling.

§. 981. *De som van de tangenten van twee bogen is gelijk aan de sinus van de som dezer bogen, gedeeld door het product van derzelver cosinussen; de tangens van het verschil van twee bogen is gelijk aan de sinus van het verschil dezer bogen, gedeeld door het product van derzelver cosinussen. Voorts is de som of het verschil van de cotangenten van twee bogen gelijk aan de sinus van derzelver som of verschil, gedeeld door het product van derzelver sinussen. Dat is:*

$$\tan g.a+\tan g.b=\frac{\sin.(a+b)}{\cos.a\times\cos.b}\quad\ldots\ldots\quad(121)$$

$$\tan g.a-\tan g.b=\frac{\sin.(a-b)}{\cos.a\times\cos.b}\quad\ldots\ldots\quad(122)$$

$$\cot.a+\cot.b=\frac{\sin.(b+a)}{\sin.a\times\sin.b}\quad\ldots\ldots\quad(123)$$

$$\cot.a-\cot.b=\frac{\sin.(b-a)}{\sin.a\times\sin.b}\quad\ldots\ldots\quad(124)$$

Betoog. Volgens *form.* (4), is $\tan g.a+\tan g.b=$

$$\frac{\sin.a}{\cos.a}+\frac{\sin.b}{\cos.b}=\frac{\sin.a\times\cos.b+\sin.b\times\cos.a}{\cos.a\times\cos.b}=\frac{\sin.(a+b)}{\cos.a\times\cos.b}$$

op dezelfde wijze, worden de drie andere formulen betoogd.

§. 982. I. Gevolg. Uit deze betoogde formulen zullen de twee onderstaande evenredigheden

$$\tan g.a+\tan g.b:\tan g.a-\tan g.b=\sin.(a+b):\sin.(a-b)\quad(125)$$

$$\cot.a+\cot.b:\cot.a-\cot.b=\sin.(b+a):\sin.(b-a)\quad(126)$$

van zelve volgen.

§. 983. II. Gevolg. Men zal ook gemakkelijk vinden:

$$\tan g.a+\cot.b=\frac{\cos.(a-b)}{\cos.a\times\sin.b}\quad\ldots\ldots\quad(127)$$

tang.

$$tang.\,a - cot.\,b = -\frac{cos.\,(a+b)}{cos.\,a \times sin.\,b} \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

§. 984. III. GEVOLG. Uit formulen (68), (69), (121) en (122) zal volgen:

$$1 + tang.\,a \times tang.\,b = \frac{cos.\,(a-b)}{cos.\,a \times cos.\,b} \quad \ldots\ldots \quad (129)$$

$$1 - tang.\,a \times tang.\,b = \frac{cos.\,(a+b)}{cos.\,a \times cos.\,b} \quad \ldots\ldots \quad (130)$$

XII. STELLING.

§. 985. *De ſinus van de ſom van twee bogen, vermenigvuldigd met de ſinus van derzelver verſchil, is gelijk aan het verſchil van de vierkanten van de ſinusſen dezer bogen; en ook gelijk aan het verſchil van de vierkanten van derzelver coſinusſen. Dat is:*

$$sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) = sin^2.\,a - sin^2.\,b \quad \ldots \quad (131)$$

$$sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) = cos^2.\,b - cos^2.\,a \quad \ldots \quad (132)$$

BETOOG. Want, wanneer men de vergelijkingen,

$$sin.\,(a+b) = sin.\,a \times cos.\,b + sin.\,b \times cos.\,a$$

$$sin.\,(a-b) = sin.\,a \times cos.\,b - sin.\,b \times cos.\,a$$

in de III. *Stelling* betoogd, met elkander vermenigvuldigt; dan verkrijgt men:

$$sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) = sin^2.\,a \times cos^2.\,b - sin^2.\,b \times cos^2.\,a$$

Stelt men nu, in deze vergelijking, $cos^2.\,b = 1 - sin^2.\,b$, en $cos^2.\,a = 1 - sin^2.\,a$; dan zal zij veranderen in:

$$sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) = sin^2.\,a - sin^2.\,b$$

Stelt men verder, in deze laatſte, $sin^2.\,a = 1 - cos^2.\,a$, en $sin^2.\,b = 1 - cos^2.\,b$; dan zal men verkrijgen:

$$sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) = cos^2.\,b - cos^2.\,a$$

§. 986. GEVOLG. *Laten a, b, c, d, e, enz., p, q, r, eenige bogen zijn; dan zal men vinden:*

$$sin^2.\,a - sin^2.\,r = sin.\,(a+b)\,sin.\,(a-b) + sin.\,(b+c)\,sin.\,(b-c) + sin.\,(c+d)\,sin.\,(c-d) + sin.\,(d+e)\,sin.\,(d-e) + \text{enz.} + sin.\,(p+q)\,sin.\,(p-q) + sin.\,(q+r)\,sin.\,(q-r) \quad (133)$$

Want, volgens het betoogde is

$$sin^2.\,a - sin^2.\,b = sin.\,(a+b)\,sin.\,(a-b)$$
$$sin^2.\,b - sin^2.\,c = sin.\,(b+c)\,sin.\,(b-c)$$
$$sin^2.\,c - sin^2.\,d = sin.\,(c+d)\,sin.\,(c-d)$$
$$\text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.}$$
$$sin^2.\,p - sin^2.\,q = sin.\,(p+q)\,sin.\,(p-q)$$
$$sin^2.\,q - sin^2.\,r = sin.\,(q+r)\,sin.\,(q-r)$$

telt men nu al die vergelijkingen bij elkander op; dan zal men de vergelijking (133) verkrijgen.

§. 987. II. Gevolg. *De vergelijking (133) geeft een geschikt middel aan de hand, om de som van de sinussen van bogen te vinden, die in eene rekenkunstige rij opklimmen.* Nemen wij, in plaats van de bogen a, b, c, d, *enz.* de bogen $\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}u$, $\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}u$, $\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}u$, $\frac{1}{2}t+\frac{5}{4}u$, $\frac{1}{2}t+\frac{7}{4}u$, $\frac{1}{2}t+\frac{9}{4}u$, *enz.* zijnde de n^e, $(n+1)^e$ en $(n+2)^e$ termen van die rij $\frac{1}{2}t+\frac{2n-3}{4}u$, $\frac{1}{2}t+\frac{2n-1}{4}u$, $\frac{1}{2}t+\frac{2n+1}{4}u$; dan is volgens het betoogde in de stelling:

$$\sin^2.(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}u)-\sin^2.(\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}u)=\sin.t\times\sin.\tfrac{1}{2}u$$
$$\sin^2.(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{3}{4}u)-\sin^2.(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{4}t)=\sin.(t+u)\times\sin.\tfrac{1}{2}u$$
$$\sin^2.(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{5}{4}u)-\sin^2.(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{3}{4}u)=\sin.(t+2u)\times\sin.\tfrac{1}{2}u$$
$$\sin^2.(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{7}{4}u)-\sin^2.(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{5}{4}u)=\sin.(t+3u)\times\sin.\tfrac{1}{2}u$$
enz. *enz.* *enz.*

$$\sin^2.\left[\tfrac{1}{2}t+\frac{2n-1}{4}u\right]-\sin^2.\left[\tfrac{1}{2}t+\frac{2n-3}{4}u\right]=\ldots \sin.[t+(n-1)u]\times\sin.\tfrac{1}{2}u$$
$$\sin^2.\left[\tfrac{1}{2}t+\frac{2n+1}{4}u\right]-\sin^2.\left[\tfrac{1}{2}t+\frac{2n-1}{4}u\right]=\ldots \sin.[t+nu]\times\sin.\tfrac{1}{2}u$$

Telt men deze vergelijkingen bij elkander en deelt men de som door $\sin.\frac{1}{2}u$; dan verkrijgt men:

$$\frac{\sin^2.\left[\tfrac{1}{2}t+\frac{2n+1}{4}u\right]-\sin^2.[\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}u]}{\sin.\tfrac{1}{2}u}=$$
$$\sin.t+\sin.(t+u)+\sin.(t+2u)+\sin.(t+3u)+enz.$$
$$+\sin.[t+(n-1)u)+\sin.(t+nu)$$

Omdat nu, in het algemeen, $\sin^2.x-\sin^2.y=\sin.(x+y)\times\sin.(x-y)$ is, zoo is ook

$$\sin^2.\left[\tfrac{1}{2}t+\frac{2n+1}{4}u\right]-\sin^2.[\tfrac{1}{2}t-\tfrac{1}{4}n]=\sin.(t+\tfrac{1}{2}nu)\times\sin.\tfrac{1}{2}(n+1)u$$

en dus wordt

$$\sin.t+\sin.(t+u)+\sin.(t+2u)+enz+\sin.(t+nu)=\frac{\sin.(t+\tfrac{1}{2}nu)\times\sin.\tfrac{1}{2}(n+1)u}{\sin.\tfrac{1}{2}u}\quad\ldots\quad(134)$$

Men kan, in deze vergelijking, $\frac{1}{2}(n+1)u=360°$ stellen; en

dan

dan is $u = \frac{720^\circ}{n}$, $sin. \tfrac{1}{2}(n+1)u = o$. Laat n, bij voorbeeld, gelijk 20 zijn; dan is $u = 36^\circ$, $\tfrac{1}{2}u = 18^\circ$. Stel nog $t = o$; dan wordt de formule (134)

$$sin. 36^\circ + sin. 2 \times 36^\circ + sin. 3 \times 36^\circ + sin. 4 \times 36^\circ + \text{enz.} + sin. 20 \times 36^\circ = 0$$

Meer zulke bijzondere reeksen kunnen uit de rij (134) worden afgeleid.

§. 988. Aanmerking. Wanneer men de vergelijkingen

$$cos.(a+b) = cos. a \times cos. b - sin. a \times sin. b$$
$$cos.(a-b) = cos. a \times cos. b + sin. a \times sin. b$$

met elkander vermenigvuldigt; dan verkrijgt men:

$$cos.(a+b)\, cos.(a-b) = cos^2. a \times cos^2. b - sin^2. a \times sin^2. b$$

maar $sin^2. a \times sin^2. b = (1 - cos^2. a)(1 - cos^2. b) = 1 - cos^2. a - cos^2. b + cos^2. a \times cos^2. b$

zijnde, zoo is

$$cos.(a+b)\, cos.(a-b) = sin^2. a - cos^2. b \quad . \quad . \quad (135)$$

uit welke formule, even als uit formule (131), eene menigte belangrijke gevolgen kunnen worden afgeleid.

V. *Uitvinding van de formulen voor de cosinussen en sinussen van de veelvouden van eenen boog.*

II. Vraagstuk.

§. 989. *Men vraagt algemeene formulen voor de cosinussen en sinussen van de veelvouden van eenen boog te vinden?*

Oplossing. Volgens de VI. *Stelling*, is,

$$cos. a + cos. b = 2\, cos. \tfrac{1}{2}(a+b) \times cos. \tfrac{1}{2}(a-b)$$

en $$sin. a + sin. b = 2\, sin. \tfrac{1}{2}(a+b) \times cos. \tfrac{1}{2}(a-b)$$

Aangezien deze vergelijkingen, voor alle waarden van a en b, algemeen zijn, zoo stelle men $a = p + nq$ en $b = p + (n-2)q$; dan is $a + b = 2p + 2(n-1)q$, $a - b = 2q$; en $\tfrac{1}{2}(a+b) = p + (n-1)q$ en $\tfrac{1}{2}(a-b) = q$; en de twee voorgestelde formulen worden dan:

$$cos.(p+nq) = cos.[p+(n-1)q] \times 2\, cos. q - cos.[p+(n-2)q] \quad (136)$$
$$sin.(p+nq) = sin.[p+(n-1)q] \times 2\, cos\, q - sin\,[p+(n-2)q] \quad (137)$$ Sin.

Men stelle nu, in deze vergelijkingen, $p = o$ en $q = x$; dan verkrijgt men nog deze twee algemeene vergelijkingen:

$$cos. n x = cos.(n-1)x \times 2\, cos. x - cos.(n-2)x \quad . \quad (138)$$
$$sin. n x = sin.(n-1)x \times 2\, cos. x - sin.(n-2)x \quad . \quad (139)$$

De twee eerste formulen (136) en (137) kunnen dienen, om de cosinussen en sinussen van bogen te vinden, welke in eene rekenkunstige reeks opklimmen; wanneer de twee eerste termen van die reeks $cos.\ p$ $cos.\ (p+q)$ of $sin.\ p$ en $sin.\ (p+q)$ bekend zijn.

$$\begin{aligned}
cos.\ p &= cos.\ p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (140)\\
cos.\ (p+q) &= cos.\ (p+q)\\
cos.\ (p+2q) &= cos.\ (p+q) \times 2\,cos.\ q - cos.\ p\\
cos.\ (p+3q) &= cos.\ (p+2q) \times 2\,cos.\ q - cos.\ (p+q)\\
cos.\ (p+4q) &= cos.\ (p+3q) \times 2\,cos.\ q - cos.\ (p+2q)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
sin.\ p &= sin.\ p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (141)\\
sin.\ (p+q) &= sin.\ (p+q)\\
sin.\ (p+2q) &= sin.\ (p+q) \times 2\,cos\ q - sin.\ p\\
sin.\ (p+3q) &= sin.\ (p+2q) \times 2\,cos.\ q - sin.\ (p+q)\\
sin.\ (p+4q) &= sin.\ (p+3q) \times 2\,cos.\ q - sin.\ (p+2q)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

De twee laatste vergelijkingen (138) en (139) voldoen eigenlijk aan het voorgestelde doel der vraag; want, indien men, in de vergelijking (138), achtervolgens $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, *enz.* stelt; dan zal men de waarden van $cos.\ 0$, $cos.\ x$, $cos.\ 2x$, $cos.\ 3x$. *enz.* vinden, zoo als zij, op de uitstaande tafel, in *Letter A*, voorkomen.

Stelt men voor n diezelfde waarden in de vergelijking (139); dan zal men de waarden van $sin.\ 0$, $sin.\ x$, $sin.\ 2x$, $sin.\ 3x$, *enz.* verkrijgen, welke, op dezelfde tafel, in *Letter B*, voorkomen.

Die waarden worden eigenlijk door eene zeer ligte berekening gevonden. Bij voorbeeld, in *Tafel A*, is,

$$cos.\ 4x = 8\,cos^4.\ x - 8\,cos^2.\ x + 1$$

Vermenigvuldigt men nu deze vergelijking met $2\,cos.\ x$; dan verkrijgt men:

$$cos.\ 4x \times 2\,cos.\ x = 16\,cos^5.\ x - 16\,cos^3.\ x + 2\,cos\ x$$

indien men nu hier van

$$cos.\ 3x = 4\,cos.\ 3x - 3\,cos.\ x$$

aftrekt; dan zal men de waarde van $cos.\ 5x$ verkrijgen. En even zoo worden de vergelijkingen van *Tafel B*, gevonden.

Hiermede is echter de vraag nog niet volkomen opgelost; die oplossing zal dan eerst volkomen zijn, wanneer men de waarden van $cos.\ nx$ en $sin.\ nx$, zóó zal gevonden hebben, dat het blijke, hoe de coefficienten van de magten van $cos.\ x$, in de algemeene waarden van $cos.\ nx$ en $sin.\ nx$ van het geheele getal n afhangen, welke coefficienten, daar elke volgende vergelijking uit de voorgaande op dezelfde wijze volgt, aan eene regelmatige wet van opvolging moeten onderworpen zijn; welke wet van opvolging nu aldus, uit de aandachtige beschouwing van de Tafel (*A*), kan gevonden worden.

3°. Het

Tegen over Bladz. 52.

c
c
c
c
c
c
c
c
cc
cc
co
co
co I
co + 13 cos. x
co s4. x + 98 cos². x — 1
co os⁵. x + 560 cos³. x — 15 cos. x

B.

sin
sin
sin
sin
sin.
sin.
sin.
sin.
sin.
sin.
sin.
sin.
sin. x
sin. x + 1) sin. x
sin. ³. x + 14 cos. x) sin. x
sin. cos⁴. x + 112 cos². x — 1) sin. x

oog.

x + 126
x + 462 cos. x
4 x + 792 cos. 2 x + 462
5 x + 1287 cos. 3 x + 1716 cos. x
os. 6 x + 2002 cos. 4 x + 3003 cos. 2 x + 1716
cos. 7 x + 3003 cos. 5 x + 5005 cos. 3 x + 6435 cos. x

og.

x
os. 2 x + 126
n. 3 x + 462 sin. x
cos. 4 x — 792 cos. 2 x + 462
sin. 5 x — 1287 sin. 3 x — 1716 sin. x
1 cos. 6 x + 2002 cos. 4 x — 3003 cos. 2 x — 1716
55 sin. 7 x + 3003 sin. 5 x — 5005 sin. 3 x + 6435 sin. x

1°. Het blijkt uit die tafel, dat de ontwikkeling van $cos.\, nx$ zal bestaan uit termen, die, van de magt n te beginnen, van de afdalende magten van $cos.\, x$ afhangen; namelijk de termen $cos^n.\, x$, $cos^{n-2}.\, x$, $cos^{n-4}.\, x$, $cos^{n-6}.\, x$, *enz.* welke eindigen of met 1, indien n een even getal is; of met $cos.\, x$, indien n oneven is. Voorts ziet men, dat de teekens der termen van de waarde van $cos.\, nx$ elkander beurtelings afwisselen; terwijl uit de vormen dezer vergelijkingen blijkt, dat die vorm en afwisseling van teekens zal blijven plaats hebben, hoe groot het getal n zou mogen zijn.

2°. Wanneer men de eerste termen der vergelijkingen (A), welke, in de tafel, in de voorste kolom staan, oplettend inziet; dan blijkt het van zelf, dat de eerste term van de waarde van $cos.\, nx$ zal moeten zijn $2^{n-1} cos^n.\, x$.

3° Men deele de coefficienten 3, 8, 20, 48, 112, 256, 576, 1280, *enz.* die in de tweede termen van de waarden van $cos.\, 3x$, $cos.\, 4x$, $cos\, 5x$, *enz* voorkomen, door 1, 2, 4, 8, 16, *enz.* of door 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, *enz.* dan zijn de quotienten de getallen 3, 4, 5, 6, 7, 8, *enz.* waaruit blijkt: dat de tweede term van $cos.\, nx$ zal zijn $\frac{n}{1} \times 2^{n-3}$ $cos^{n-2}.\, x$.

4°. Deelt men de coefficienten van de termen van de derde kolom, namelijk 5, 18, 56, 160, *enz.* door 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, *enz* dan worden de quotienten de getallen 5, 9, 14, 20, *enz.* Neemt men die quotienten dubbel, en deelt men die dubbele quotienten 10, 18, 28, 40, *enz.* door de getallen 5, 6, 7, *enz.*; dan zijn de quotienten 2, 3, 4, 5, *enz.* elk drie minder dan de deeler; waaruit wij dan besluiten, dat de derde term van $cos.\, nx$ zal zijn $\frac{n(n-3)}{2} \times 2^{n-5}\, cos^{n-4}.\, x$.

Wanneer men nu, op deze manier, voortgaat; dan zal men vinden, dat de waarde van $cos.\, nx$ is, als volgt:

$$
\begin{aligned}
cos.\, nx = {} & 2^{n-1} cos^n.\, x - \frac{n}{1} \times 2^{n-3} cos^{n-2}.\, x \ldots \\
& + \frac{n(n-3)}{1.2} \times 2^{n-5} cos^{n-4}.\, x - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \times 2^{n-7} cos^{n-6}.\, x \\
& + \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4} \times 2^{n-9} cos^{n-8}.\, x \ldots \\
& - \frac{n(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)}{1.2.3.4.5} \times 2^{n-11} cos^{n-10}.\, x + enz. \quad (12)
\end{aligned}
$$

Denzelfden weg inslaande, zal men uit de bijzondere vergelijkingen B, de algemeene vergelijking,

$$
\begin{aligned}
sin.\, nx = \Big\{ & 2^{n-1} cos^{n-1}.\, x - \frac{n-2}{1} \times 2^{n-3} cos^{n-3}.\, x \ldots \\
& + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} \times 2^{n-5} cos^{n-5}.\, x - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3} \times 2^{n-7} cos^{n-7}.\, x \\
& +
\end{aligned}
$$

$$+ \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \times 2^{n-9} \cos^{n-9}. x \quad . \quad . \quad .$$

$$- \frac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times 2^{n-11} \cos^{n-11}. x + \text{enz} \Big\}$$

$$\times \sin. x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

Dat nu deze vergelijkingen volkomen de waarden van $cos. n x$ en $sin. n x$ voorstellen, zal blijken, wanneer men elke van dezelve met $2 \, cos. x$ vermenigvuldigt, en van het product de waarde van $cos. (n-1) x$ of van $sin. (n-1) x$ aftrekt; want dan zal men de waarden van $cos. (n+1) x$ en $sin. (n+1) x$ verkrijgen; hetwelk in bijzonderheden verder na te gaan aan den Lezer zij aanbevolen.

§. 990. Aanmerking. *Men kan, in plaats van de vergelijkingen (140) en (141), welke dienen kunnen, om de sinusfen en cosinusfen te verkrijgen van bogen, die in eene rekenkunstige reeks opklimmen, andere vinden, die voor de dadelijke berekening eener tafel gemakkelijker zijn.*

Want, volgens de V. *Stelling*, is,

$$sin. (a + b) = 2 \, sin. a \times cos. b - sin. (a - b)$$

$$cos. (a + b) = 2 \, cos. a \times cos. b - cos. (a - b)$$

en, omdat, wanneer men bij een getal een ander getal optelt, en er naderhand hetzelfde getal wederom van aftrekt, de waarde dezelfde blijft, zoo zal men kunnen stellen:

$$sin. (a + b) = 2 \, sin. a + 2 \, sin. a \times cos. b - 2 \, sin. a - sin. (a - b)$$

$$cos. (a + b) = 2 \, cos. a + 2 \, cos. a \times cos. b - 2 \, cos. a - cos. (a - b)$$

Nu is, zie III. *Gev.* III. *Stell.*, $1 - cos. b = 2 \, sin^2. \tfrac{1}{2} b$; derhalve

$$- 2 \, sin. a + 2 \, sin. a \times cos. b = - 4 \, sin^2. \tfrac{1}{2} b \times sin. a$$

$$- 2 \, cos. a + 2 \, cos. a \times cos. b = - 4 \, sin^2. \tfrac{1}{2} b \times cos. a$$

en de twee voorgaande vergelijkingen worden gevolgelijk:

$$sin. (a + b) = 2 \, sin. a - sin. (a - b) - 4 \, sin^2. \tfrac{1}{2} b \times sin. a \quad (144)$$

$$cos. (a + b) = 2 \, cos. a - cos. (a - b) - 4 \, sin^2. \tfrac{1}{2} b \times cos. a \quad (145)$$

Stelt men, in deze vergelijkingen, $b = 1^\circ$; dan verkrijgt men:

$$sin. (a + 1^\circ) = 2 \, sin. a - sin. (a - 1^\circ) - 4 \, sin^2. 30' \times sin. a \quad (146)$$

$$cos. (a + 1^\circ) = 2 \, cos. a - cos. (a - 1^\circ) - 4 \, sin^2. 30' \times cos. a \quad (147).$$

door welke vergelijkingen de sinusfen en cosinusfen der bogen, van graad tot graad, er (zoo men $b = 1'$ stelt,) van minuut tot minuut, zullen kunnen worden berekend.

III. Vraagstuk.

§. 991. *Men vraagt algemeene formulen voor de geheele positieve magten van de sinus en de cosinus van eenen boog te vinden?*

Oplossing. Uit de vergelijkingen, welke in de Tafel A, op het nitslaande blad, voorkomen, en in de algemeene vergelijking (142) begrepen

pen zijn, verkrijgt men, door eene ligte oplossing, de vergelijkingen (*C*), op de tegenzijde van het uitslaande blad; en, uit de vergelijkingen, in Tafel B voorkomende, worden de vergelijkingen (*D*) gevonden.

Wanneer de vergelijkingen (*C*) aandachtig met elkander vergelijkt; dan ziet men ligtelijk, dat zij alle in de algemeene vergelijking

$$2^{n-1} \cos^n.x = \cos.nx + \frac{n}{1}\cos.(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)x$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$$
$$\cos.(n-8)x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}\cos.(n-10)x$$
$$+ \text{enz.} \ldots \ldots \ldots \ldots (148)$$

begrepen zijn.

Wij zullen naderhand deze vergelijking uit andere beginselen afleiden.

Uit deze vergelijking (148), zal men de waarde van $2^n \sin^n.x$ aldus kunnen vinden.

Men stelle, in de vergelijking

$$2^{n-1} \cos^n.y = \cos.ny + \frac{n}{1}\cos.(n-2)y + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)y$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)y + \text{enz.}$$

den boog $y = 90^\circ - x$; dan is $\cos.y = \cos.(90^\circ - x) = \sin.x$ en $(\cos.y)^n = \cos^n.y = (\sin.x)^n = \sin^n.x$, en wij verkrijgen dan:

$$2^{n-1} \sin^n.x = \cos.n(90^\circ - x) + \frac{n}{1}\cos.(n-2)(90^\circ - x) +$$
$$\frac{n(n-1)}{1.2}\cos.(n-4)(90^\circ - x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos.(n-6)$$
$$(90^\circ - x) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\cos.(n-8)(90^\circ - x)$$
$$+ \text{enz.} \ldots \ldots \ldots \ldots (A)$$

Om de termen van het tweede lid dezer vergelijking te herleiden, moet men de ontwikkeling der cosinussen, in vier gevallen, onderzoeken: 1°. wanneer (q een geheel positief zijnde) n van den vorm $4q$; 2°. indien $n = 4q + 1$, 3°. zoo $n = 4q + 2$ en 4°. zoo $n = 4q + 3$ is.

1°. Wanneer $n = 4q$ is; dan is, volgens de III. *Stelling*,

$$\cos.n(90^\circ - x) = \cos.4q(90^\circ - x) = \cos.[4q \times 90^\circ - 4qx] =$$
$$\cos.4q \times 90^\circ \times \cos.4qx + \sin.4q \times 90^\circ \times \sin.4qx$$

Nu is, zie Tafel 1, *Bladz.* 44, (wanneer $q = 1$ is) $\cos.4 \times 90^\circ = \cos.360^\circ = 1$ en $\sin.4 \times 90^\circ = 0$; derhalve zal, in het algemeen, wanneer q een geheel positief getal is, $\cos.4q \times 90^\circ = +1$ en $\sin.4q \times 90^\circ = 0$ zijn, en eindelijk

$$\cos.4q(90^\circ - x) = \cos.4qx. \ldots \ldots (a)$$

2°. Indien $n = 4q + 1$ is; dan is:

$cos. n (90° - x) = cos. (4q + 1)(90° - x) = cos. [(4q + 1) 90° - (4q + 1) x]$
$= cos (4q + 1) 90° \times cos. (4q + 1) x + sin. (4q + 1) 90° \times sin. (4q + 1) x$

Nu is (indien $q = 0$ gesteld wordt) $cos. 90° = 0$ en $sin. 90° = 1$. Stelt men $q = 1, 2,$ *enz.* dan is algemeen $cos. (4q + 1) 90° = 0$ en $sin. (4q + 1) x = + 1$; gevolgelijk wordt

$$cos. (4q + 1)(90° - x) = + sin. (4q + 1) x \quad . . . (b)$$

3°. Stelt men $n = 2q + 2$; dan is:

$cos. n (90° - x) = cos. (4q + 2)(90° - x) = cos. [(4q + 2) 90° - (4q + 2) x]$
$= cos. (4q + 2) 90° \times cos. (4q + 2) x + sin. (2q + 2) 90° \times sin. (4q + 2) x$

Stelt men $q = 0$; dan is $cos. 180° = - 1$, en $sin. 180° = 0$. Algemeen is hier $cos. (4q + 2) = - 1$ en $sin. (4q + 2) = 0$; derhalve wordt

$$cos. (4q + 2)(90° - x) = - cos. (4q + 2) x \quad . . . (c)$$

4°. Stelt men eindelijk $n = 4 + 3$; dan is:

$cos. n (90° - x) = cos. (4q + 3)(90° - x) = cos. [(4q + 3) q - (4q + 3) x] =$
$cos. (4q + 3) 90° \times cos. (4q + 3) + sin. (4q + 3) 90° \times sin. (4q + 3) x$

daar nu, indien men $q = 0$ stelt, $sin. 3 \times 90° = sin. 270° = - 1$ en $cos. 270° = 0$ is, en daarom $sin. (4q + 3) 90° = - 1$ en $cos. (4q + 3) 90° = 0$ is, zoo hebben wij:

$$cos. (4q + 3)(90° - x) = - sin. (4q + 3) x \quad . . . (d)$$

Laat nu n van den vorm $4q + 1$ zijn; dan zijn, in de vergelijking (A), $n - 2$, $n - 4$, $n - 6$, $n - 8$, *enz.* beurtelings van den vorm $4q + 3$ en $4q + 1$, volgens de vergelijkingen (b) en (d), wordt de algemeene vergelijking (A), voor dit geval:

$$2^{n-1} sin^n. x = sin. n x - \frac{n}{1} sin. (n - 2) x + \frac{n(n-1)}{1 . 2} sin. (n - 4) x$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} sin. (n - 6) x + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$$
$$sin. (n - 8) x - enz. \quad . . . . (149)$$

Stelt men, dat n van den vorm $4q + 2$ is; dan zal de vergelijking (A) worden

$$2^{n-1} sin^n. x = - cos. n x + \frac{n}{1} cos. (n - 2) x - \frac{n(n-1)}{1 . 2} cos.$$
$$(n - 4) x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} cos. (n - 6) x - \frac{n(-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4}$$
$$cos. (n - 8) x + enz. \quad . . . . (150)$$

Stelt men, dat n van den vorm $4q + 3$ is; dan zal de algemeene vergelijking (A) den volgenden vorm verkrijgen:

$$2^{n-1} sin^n. x = - sin. n x + \frac{n}{1} sin. (n - 2) x - \frac{n(n-1)}{1 . 2} sin.$$
$$(n - 4) x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} sin. (n - 6) x - enz. \quad . (151)$$

En

En ftelt men eindelijk n te zijn van den vorm $4q$; dan wordt, in dit geval, de vergelijking (A),

$$2^{n-1} \sin^n . x = \cos . n x - \frac{n}{1} \cos . (n-2) x + \frac{n(n-1)}{1 . 2} \cos . (n-4) x$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} \cos . (n-6) x + \text{enz.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

Men ftelle nu in de formulen (149), (150), (151) en (152), eerst $n = 1, 2, 3$ en 4, en dan wederom in diezelfde formulen $n = 5, 6, 7, 8$; dan wederom $n = 9, 10, 11$ en 12, *enz.* dan zal men de vergelijkingen C van de uitftaande tafel verkrijgen. Bij het gebruik van de algemeene formulen (148), (149), (150), (151) en (152), moet men de algemeene termen verwerpen, welke de finus of cofinus van negatieve bogen zouden geven.

VI. *Over het uitvinden van de reekfen, door welke elke goniometrifche lijn door haren boog; en een boog, door éénе van hare goniometrifche lijnen wordt voorgefteld.*

§. 992. Men heeft uit het voorgaande gezien, hoe de goniometrifche lijnen van denzelfden boog of van verfchillende bogen van elkander afhangen. Thans zullen wij, naar aanleiding eener Leerwijze, die wij, in den jare 1797, *in het XIII. Deel van de Verhandelingen van het Bataaffche Genootfchap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte te Rotterdam*, hebben opgegeven, leeren kennen: *hoe elke goniometrifche lijn, door middel van haren boog; en, omgekeerd, een boog door middel van éénе van hare goniometrifche lijnen kan bepaald worden.*

IV. Vraagstuk.

§. 993. *Een cirkelboog, welke in graden en onderverdeelingen van dezelve gegeven is, in deelen van de ftraal over te brengen; en, omgekeerd, eenen cirkelboog, welke in deelen van den ftraal gegeven is, tot graden te brengen; hierbij altijd den ftraal gelijk aan de éénheid van de lengte-maat ftellende?*

Oplossing. Wanneer de ftraal gelijk aan de éénheid gefteld wordt; dan is (zie *Aanm.* §.484.) de halve omtrek gelijk aan

3,14159 26535 89793 23846 26433 83279

Wanneer men dit getal, hetwelk eigenlijk de lengte van eenen boog van 180°, in éénheden en tiendeeligen van den ftraal, ten naastenbij voorftelt, door 180 deelt; dit quotient door 60 en het komende quotient

nogmaals door 60; dan zal men vinden: dat één boog van éénen graad, in deelen van den ſtraal, bedragen zal,

0, 01725 32925 19943 29576 92369

van éćne minuut, in deelen van den ſtraal,

0, 00029 08882 08665 72159 61539

en van ééne ſecunde, in diezelfde deelen,

0, 00000 48481 36811 09535 99359 . . . . . . (M)

Laat nu een zekeren boog in graden gegeven zijn; indien men dan dit getal graden tot ſecunden herleidt en die komende ſecunden met het getal $M = 0, 00000\ 48481$ *enz.* vermenigvuldigt; dan zal het product dien boog in deelen van den ſtraal voorſtellen; en, omgekeerd, zal een boog, welke in deelen van den ſtraal gegeven is, door het getal M moeten gedeeld worden, om te vinden, hoeveel ſecunden in denzelven begrepen zijn; welk aantal ſecunden dan ligtelijk tot graden zal kunnen herleid worden.

§. 994. I. Aanmerking. Men zal, zie *Aanmerking* op het volgende *Vraagſtuk*, vinden: dat de ſinus van den boog van ééne ſecunde gelijk is aan

0, 00000 48481 36811 07637

deze ſinus verſchilt derhalve van den boog ſlechts de zeer kleine breuk

0, 00000 00000 00000 01899

Men kan derhalve, in plaats van het getal M, de ſinus van ééne ſecunde nemen; hetgeen dan ook de beroemde Delambre, als veel geſchikter zijnde, in alle zijne ſchriften, gevolgd heeft. Bijaldien A eenen zekeren boog, in ſecunden uitgedrukt, beteekent, en a dienzelfden boog in deelen van den ſtraal; dan zal, naar deze handelwijze van den Heer Delambre, welke wij in het werkdadige meestal volgen zullen,

$$A \times sin.\ 1'' = a, \quad \text{en } A = \frac{a}{sin.\ 1''} \quad \ldots\ldots (153)$$

zijn; door welke formule dan ook lijnen met cirkelbogen zullen kunnen vergeleken worden.

§. 995. II. Aanmerking. De meeste Meetkundigen nemen, in navolging van den beroemden Euler, het getal R gelijk aan zooveel ſecunden, als begrepen zijn in eenen boog, wiens lengte aan den ſtraal of de éénheid gelijk is, (zijnde $R' = 1 : M = 206026'', 46936$) en dan is, volgens die handelwijze,

$$\frac{A}{R'} = a, \quad \text{en } A = a \times R' \quad \ldots\ldots\ldots (154)$$

Hulpstelling. *Fig.* 24.

§. 996. *De koorden van zeer kleine cirkelbogen verſchillen van de lengten van de bogen, tot welke zij behooren, des te minder, hoe kleiner die bogen zijn; en, op den oogenblik, dat de boog verdwijnt*

dwijnt, of nul wordt, is de koorde gelijk aan den boog, tot welken hij behoort.

BETOOG. Laat *A C* een boog zijn, die eenige graden groot is; dan is de koorde van dien boog van de lengte van denzelven onderscheiden. Voor een kleiner boog *A B* zal dit verschil geringer worden, en steeds verminderen, als de boog nog kleiner wordt; en, als de boog gelijk nul wordt; dan eerst is hij aan zijne koorde gelijk, en de reden van den boog tot zijne koorde is dan gelijk één.

§. 997. GEVOLG. *Om dezelfde reden, zijn de sinus en de tangens van eenen boog, beide aan den boog gelijk; op den oogenblik namelijk, dat de boog verdwijnt of nul wordt.*

V. VRAAGSTUK.

§. 998. *Ondersteld zijnde, dat een boog in deelen van den straal gegeven is, eenen regel te vinden, om de sinus en de cosinus van dien boog, in deelen van den straal, te berekenen?*

OPLOSSING. Wanneer x een boog van een zeker getal graden is; dan zal men, volgens het IV. *Vraagstuk*, dien boog, in deelen van den straal, kunnen berekenen; en wij kunnen dus, in de uitdrukkingen $sin.\ x$ en $cos.\ x$, aannemen, dat x in tiendeelingen van den straal gegeven is. Zulks dan onderstellende, zoo is de vraag: hoe de getallen, die de waarden van de sinus en de cosinus van eenigen boog x voorstellen, van dit getal x afhangen?

Wat zich hier, als eene ontwijfelbare waarheid, aan het verstand van den beschouwer opdoet, is, dat de sinus van eenen cirkelboog slechts van twee dingen kan afhangen; vooreerst van de lengte van den straal des cirkels, die altijd de eenheid is; en ten anderen van het getal, dat de lengte van den boog voorstelt. De getallenvorm, die de waarde van $sin.\ x$, voorstelt, kan dan, ontwikkeld zijnde, geene andere dan magten van x bevatten, met zekere onbekende coefficienten vermenigvuldigd zijnde; en, bij een weinig overweging, ziet men: dat de uitdrukking

$$sin.\ x = x + A x^3 + B x^5 + C x^7 + D x^9 + E x^{11} + enz. \quad . \quad (a)$$

reeds bij voorkeur voldoet aan alles, wat wij tot hiertoe van de sinus van eenen boog weten.

Want, 1° als x eene zeer kleine breuk is, of x eene zeer kleine boog; dan wordt, in de rij der aangenomen termen, elke volgende term, in vergelijking van den voorgaanden, zoo klein, dat hij in het werkdadige zou kunnen verwaarloosd worden, en daarom zal, op den oogenblik, dat x verdwijnt, $sin.\ x = x$ worden. 2°. Wij hebben in die uitdrukking slechts al de onevene magten van x aangenomen; omdat zulk een vorm alleen de eigenschap heeft, dat hij met deszelfs veranderlijk bestanddeel x te gelijk negatief wordt; en hij voldoet derhalve aan de bekende regel $sin\ (-x) = -sin.\ x$. 3°. Er kunnen geene negatieve magten van x of termen

van

voortloopen; omdat, in elke term van de vergelijking (f), noodzakelijk een coefficient meer voorkomt, dan in de vergelijking (g).

2°. De reeks, voor de waarde van de tangens x verkregen, is in de opvolging van hare coefficienten schijnbaar zeer onregelmatig; doch in de Differentiaal-Rekening zal worden bewezen, dat die coefficienten onder een zeer regelmatigen vorm kunnen worden voorgesteld

3°. Dat eindelijk $tang.\, x = x + \frac{1}{3} x^3 +$ *enz.* waar is, zal blijken, wanneer men de moeite neemt, om vier of vijf of meer termen van de waarde van $sin.\, x$, door even zoo veel termen van de waarde van $cos.\, x$ te deelen; dan zal men tot quotient de eerste termen van de gevondene rij (157) verkrijgen.

4°. Wanneer de bogen niet zeer groot zijn; dan zal men zonder merkelijk van de waarheid af te wijken, kunnen stellen:

$$tang.\, x = x + \tfrac{1}{3} x^3.$$

VII. Vraagstuk.

§. 1002. *Hetzelfde ondersteld zijnde, eene reeks te vinden, om de cotangens van eenen boog, in deelen van den straal, te berekenen?*

Oplossing. Men zal van dezelfde beginselen, die in het voorgaande Vraagstuk gediend hebben, gebruik makende, vinden:

$$cot.\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{2x^5}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{27x^7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}$$
$$- \frac{90x^9}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} - enz. \quad . \quad . \quad (158)$$

hetwelk uit te werken, wij aan den Lezer over laten.

§. 1003. Aanmerkingen. 1°. Men zal uit den loop der oplossing zien, dat deze reeks (158) tot in het oneindige voortloopt.

2°. Die reeks (158) zal men ook verkrijgen, wanneer men de waarde van $cos.\, x$ door die van $sin\ x$ deelt. Ook zal men bevinden: dat de waarde van $tang\ x$, vermenigvuldigd met die van $cot.\, x$ het product gelijk aan de éénheid zal zijn.

3°. Voor zeer kleine bogen, die slechts een gering aantal graden bevatten, is nagenoeg

$$cot.\, x = \frac{1}{x} - \tfrac{1}{3} x - \tfrac{1}{45} x^3$$

4°. Van dezelfde Leerwijze gebruik makende, zal men voor de waarde van de secans en cosecans van eenen boog reeksen te vinden, door welke, de boog, in deelen van den straal, gegeven zijnde, de lengte dezer lijnen kunnen berekend worden; reeksen, die men ook verkrijgen zal, indien men de éénheid door de reeksen, voor de cosinus en sinus verkregen, deelt.

VIII.

VIII. VRAAGSTUK.

§. 1004. *De sinus van eenen boog, in deelen van den straal, gegeven zijnde, eene reeks te vinden, waardoor de lengte van dien boog, door middel van die sinus, kan berekend worden?*

OPLOSSING. Om dezelfde redenen, als, in het V. *Vraagstuk*, zijn aangeroerd, zal, indien x eenen boog beteekent, die in deelen van den straal is uitgedrukt, de vorm, door welk die boog door zijne sinus wordt voorgesteld, dezen vorm

$$x = \sin. x + A \sin^3. x + B \sin^5. x + C \sin^7. x + D \sin^9. x + \text{enz.}$$

moeten hebben; in welke A, B, C, D, *enz.* standvastige coefficienten zijn, die van de overeenstemming, die er tusschen eenen boog en zijne sinus bestaat, moet afhangen; en die men, denzelfden weg, als boven instaande, aldus vinden zal.

Men trekke van de aangenomene reeks, de reeks

$$y = \sin. y + A \sin^3. y + B \sin^5 y + C \sin^7. y + D \sin^9. y + \text{enz.}$$

af; dan wordt

$$x - y = (\sin. x - \sin. y) + A(\sin^3. x - \sin^3. y) + B(\sin^5. x - \sin^5. y) + C(\sin^7. x - \sin^7 y) + D(\sin^9. x - \sin^9. y) + \text{enz.}$$

Men deele deze vergelijking door $\sin. x - \sin. y$, of (zie V. *Vraagstuk*) door $\text{koorde}\,(x-y) \times \cos. \tfrac{1}{2}(x+y) = \sin. x - \sin. y$; dan verkrijgt men:

$$\frac{x-y}{\text{koord}\,(x-y)} \times \frac{1}{\cos. \frac{1}{2}(x+y)} = 1 + A \times (\sin^2. x + \sin. x \sin. y + \sin^2. y) + B(\sin^4. x + \sin^3. x \sin. y + \sin^2. x \sin^2 y + \sin. x \sin^3. y + \sin^4. y) + \text{enz.}$$

en, stelt men dan, in deze vergelijking, $x = y$; dan wordt zij:

$$\frac{1}{\cos. x} = 1 + 3 A \sin^2. x + 5 B \sin^4. x + 7 C \sin^6. x + 9 D \sin^8. x + 11 E \sin^{10}. x + 13 F \sin^{12}. x + \text{enz.} \quad \ldots\ldots (a)$$

Men kan voor $\frac{1}{\cos. x}$ eene andere waarde vinden. Want, $\cos. x = \sqrt{(1 - \sin^2. x)}$ zijnde, zoo is

$$\frac{1}{\cos. x} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \sin^2. x)}} = (1 - \sin^2. x)^{-\frac{1}{2}}$$

Men verheffe $1 - \sin^2. x$, volgens de formule van NEWTON, tot de magt, welker exponent is $-\frac{1}{2}$; dan zal men verkrijgen:

$$\frac{1}{\cos. x} = 1 + \tfrac{1}{2} \sin^2. x + \frac{1.3}{2.4} \sin^4. x + \frac{1.3.5}{2.4.6} \sin^6 x + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \sin^8. x + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \sin^{10}. x + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} \sin^{12}. x + \text{enz.} \quad \ldots\ldots (b)$$

Aangezien nu de reekfen, in de vergelijkingen (a), en (b) dezelfde grootheid ($1 : cos. x$ namelijk) voorftellen, zoo moeten de coefficienten van de eerfte reeks aan die van de tweede gelijk zijn; en wij hebben dus zooveel vergelijkingen, als noodig zijn, om de onbekende coefficienten A, B, C, D, *enz.* te vinden; te weten:

$$3A = \tfrac{1}{2};\ \text{derhalve}\ A = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3}$$

$$5B = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4};\ \ldots\ B = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5}$$

$$7C = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6};\ \ldots\ C = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \times \tfrac{1}{7}$$

$$9D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8};\ \ldots\ D = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10} \times \tfrac{1}{9},\ enz.$$

waaruit blijkt, dat deze coefficienten een regelmatigen vorm hebben. Wij hebben dus:

$$x = sin.\,x + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} sin^3.\,x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5} sin^5.\,x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \times \tfrac{1}{7} sin^7.\,x$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \times \tfrac{1}{9} sin^9.\,x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \times \tfrac{1}{11} sin^{11}.\,x + enz. \quad (159)$$

§. 1005. Aanmerking. Men ftelle, in de reeks

$$y = sin.\,y + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} sin^3.\,y + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5} sin^5.\,y + enz.$$

$y = 90° - x$; dan is $sin.\,y = sin.\,(90° - x) = cos.\,x$; en wij hebben derhalve:

$$90° - x = cos.\,x + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} cos^3.\,x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5} cos^5. + enz.$$

uit welke, indien men x in het voorfte lid der vergelijking afzondert, gevonden zal worden:

$$x = 90° - cos.\,x - \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} cos^3.\,x - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5} cos^5.\,x$$

$$- \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \times \tfrac{1}{7} cos^7.\,x - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \times \tfrac{1}{9} cos^9.\,x - enz. \ldots (160)$$

welke reeks ook afzonderlijk, volgens de opgegevene leerwijze, gevonden kan worden.

IX. Vraagstuk.

§. 1006. *De tangens van eenen boog, in deelen van den ftraal, gegeven zijnde, eene reeks te vinden, door welke de lengte van dien boog, in deelen van den ftraal, kan worden berekend?*

Oplossing. Het zou flechts eene herhaling van het voorgaan zijn, te betoogen, dat de gevraagde reeks noodzakelijk den vorm

$x =$

$$x = tang.\,x + A\,tang^3.\,x + B\,tang^5.\,x + C\,tang^7.\,x + enz.$$

zal moeten aannemen; zijnde A, B, C, D, *enz.* standvastige en onbekende coefficienten.

Men trekke hiervan af

$$y = tang.\,y + A\,tang^3.\,y + B\,tang^5.\,y + C\,tang^7.\,y + enz.$$

dan wordt

$$x - y = (tang.\,x - tang.\,y) + A\,(tang^3.\,x - tang^3.\,y)$$
$$+ B\,(tang^5.\,x - tang^5.\,y) + C\,(tang^7.\,x - tang^7.\,y) + enz.$$

Men deele nu deze vergelijking door $tang.\,x - tang.\,y$; dan zal men vinden:

$$\frac{x-y}{tang.\,x - tang.\,y} = 1 + A\,(tang^2.\,x + tang.\,x\,tang.\,y + tang^2.\,y)$$
$$+ B\,(tang^4.\,x + tang^3.\,x\,tang.\,y + tang^2.\,x\,tang^2.\,y + tang.\,x$$
$$tang^3.\,y + tang^4.\,y) + enz.$$

Nu is (XI. *Stell.*) $tang.\,x - tang.\,y = \frac{sin.\,(x-y)}{cos.\,x \times cos.\,y}$; derhalve wordt

$$\frac{x-y}{tang.\,x - tang.\,y} = (x-y) \times \frac{cos.\,x\,cos.\,y}{sin.\,(x-y)} = \frac{x-y}{sin.\,(x-y)} \times cos.\,x\,cos.\,y$$

de vorige vergelijking wordt dan:

$$\frac{x-y}{sin.\,(x-y)} \times cos.\,x\,cos.\,y = 1 + A\,(tang^2.\,x + tang.\,x\,tang.\,y$$
$$tang^2.\,y) + enz.$$

Men stelle nu, in deze vergelijking, $x = y$; dan wordt zij:

$$cos^2.\,x = 1 + 3\,A\,tang^2.\,x + 5\,B\,tang^4.\,x + 7\,C\,tang^6.\,x +$$
$$9\,D\,tang^8.\,x + 11\,E\,tang^{10}.\,x + enz.$$

Volgens de II. *Stell.* is $cos^2.\,x = \frac{1}{sec^2.\,x} = \frac{1}{1 + tang^2\,x}$, en daarom wordt de laatste vergelijking:

$$\frac{1}{1 + tang^2.\,x} = 1 + 3\,A\,tang^2.\,x + 5\,B\,tang^4.\,x + 7\,C\,tang^6.\,x + enz.$$

Men vermenigvuldige deze vergelijking met $1 + tang^2.\,x$, en trekke van het product $1 = 1$ af; dan verkrijgt men eindelijk:

$$0 = \left.\begin{matrix} +3A \\ +\;\;1 \end{matrix}\right\}tang^2.\,x + \left.\begin{matrix} 5B \\ 3A \end{matrix}\right\}tang^4.\,x + \left.\begin{matrix} 7C \\ 5B \end{matrix}\right\}tang^6.\,x$$
$$+ \left.\begin{matrix} 9D \\ 7C \end{matrix}\right\}tang^8.\,x + \left.\begin{matrix} 11E \\ 9D \end{matrix}\right\}tang^{10}.\,x + \left.\begin{matrix} 13F \\ 11E \end{matrix}\right\}tang^{12}.\,x + enz.$$

Gemerkt nu deze vergelijking, voor alle waarden van $tang.\,x$, bestaan moet, zou dezelve onbestaanbaar zijn, indien niet de coefficienten van al de magten van $tang.\,x$ gelijk nul waren. Wij hebben dan de vergelijkingen:

$$3A + 1 = 0; \text{ waaruit volgt } A = -\tfrac{1}{3}$$
$$5B + 3A = 0; \text{ ——— } B = +\tfrac{1}{5}$$
$$7C + 5B = 0; \text{ ——— } C = -\tfrac{1}{7}$$
$$9D + 7C = 0; \text{ ——— } D = +\tfrac{1}{9}$$
$$11E + 9D = 0; \text{ ——— } E = -\tfrac{1}{11} \text{ enz.}$$

Wij hebben derhalve, voor de lengte van eenen boog, in zijne tangens uitgedrukt

$$x = tang.\,x - \tfrac{1}{3}\,tang^3.\,x + \tfrac{1}{5}\,tang^5.\,x - \tfrac{1}{7}\,tang^7.\,x + \tfrac{1}{9}\,tang^9.\,x - \tfrac{1}{11}\,tang^{11}.\,x + \tfrac{1}{13}\,tang^{13}.\,x - \tfrac{1}{15}\,tang^{15}.\,x + enz. \qquad (161)$$

Welke reeks, zoo als, uit den regelmátigen loop der oplossing, van zelf blijkt, zonder einde voortloopt. Derzelver algemeene term is van den vorm $\pm\, tang^n.\,x : n$..

§. 1007. Aanmerkingen. 1°. Wanneer men, in de reeks (161), $x = 90° - y$ stelt; dan zal, daar $tang.\,x = tang.(90° - y) = cot.\,y$ is, volgen $90° - y = cot.\,y - \tfrac{1}{3}\,cot^3.\,y + enz.$ Men zal dan kunnen schrijven:

$$x = 90° - cot.\,x + \tfrac{1}{3}\,cot^3.\,x - \tfrac{1}{5}\,cot^5.\,x + \tfrac{1}{7}\,cot^7.\,x - enz. \qquad (162)$$

2°. Men zal dergelijke reeksen kunnen vinden, door welke, de secans en cosecans, in deelen van den straal, gegeven zijnde, de lengte der bogen, tot dezelve behoorende, kunnen berekend worden.

V. *Gebruik der goniometrische reeksen, in het bepalen van de* Quadratuur *des cirkels, en het onmiddellijk berekenen der goniometrische lijnen zelve.*

§. 1008. Het is, uit het VI. *Boek, Vraagst.* §. 484, *Bladz.* 183, gebleken: hoe men door middel van regelmatige veelhoeken, die in en om eenen cirkel beschreven zijn, bij benadering (echter langs moeijelijke en langwijlige wegen,) den inhoud van eenen cirkel kan vinden, wiens straal gelijk één is; welk getal ook, zoo als aldaar betoogd is, de verhouding of reden voorstelt van den omtrek tot de middellijn, of van den halven omtrek tot den straal; thans zijn wij in staat, om verscheidene wegen aan te wijzen, om die verhouding, op eene eenvoudige en min omslachtige wijze, te vinden.

X. Vraagstuk.

§. 1009. *Gesteld zijnde, dat de straal eens cirkels gelijk aan de éénheid zij, de verhouding van deszelfs halven omtrek tot den straal te vinden?*

Oplossing. Om dit oogmerk te bereiken, kan men zich van de reeksen (159) en (160), die, in de oplossing der twee voorgaande vraag-

stuk-

stukken, gevonden zijn; namelijk van

$$x = sin. x + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} sin^3. x + \frac{1.3}{2.4} \times \tfrac{1}{5} sin^5. x + enz. \quad (159)$$

$$\text{en } x = tang. x - \tfrac{1}{3} tang^3. x + \tfrac{1}{5} tang^5. x - enz. \quad (161)$$

met goed gevolg bedienen.

Beide reeksen bestaan uit een oneindig aantal termen, die eigenlijk alle in rekening zouden moeten komen, om, uit de gegevene waarde van *sin. x* of *tang. x*, de preciese grootte van den boog *x*, te vinden.

De oneindigheid van het aantal van de termen dezer reeksen kan wel gedacht worden; maar dezelve te berekenen en bij elkander te voegen, is ons onmogelijk ten uitvoer te brengen.

Wij moeten ons, in allen gevalle, met eene benadering vergenoegen; en deze zal altijd kunnen plaats hebben, wanneer *sin. x* of *tang. x* een gebroken is, kleiner dan de éénheid, of gelijk ½ of kleiner dan ½ zijnde; de waarden van de termen der beide reeksen, worden dan welhaast zoo klein, dat men al de volgende termen (wanneer men zich eene zekere grenspaal van benadering voorschrijft,) kan verwaarloozen. Indien nu de waarden van *sin. x* of *tang. x* zoo zijn aangenomen, dat aan die voorwaarden voldaan is; dan worden de reeksen gezegd genoegzaam te convergeren, om de waarde van *x*, met eene voldoende naauwkeurigheid, te verkrijgen.

In soortgelijke berekeningen, wordt elke term van de reeks in eene tiendeelige breuk overgebragt; en, wanneer men zich voorstelt, de waarde van *x* met die naauwkeurigheid te bepalen, dat, bij voorbeeld, het vijftiende cijfer van de tiendeelige breuk nog naauwkeurig is; dan herleidt men elken term in eene tiendeelige breuk, die tot twee of drie cijfers verder is voortgezet; en men verwaarloost al de termen, welker waarde eene tiendeelige breuk geven, bestaande uit nul geheelen, en zeventien of achtien volgende nullen. Wil men de benadering verder voortzetten, bij voorbeeld, het getal van Ludolph van Ceulen, vinden, (dat tot in het vijf-en-dertigste cijfer naauwkeurig is,) dan zal men elke term tot in eene tiendeelige breuk van acht-en-dertig cijfers ontwikkelen, en al de volgende termen, die nul geheelen zijn, gevolgd van acht-en-dertig nullen, als zijnde zonder invloed op de naauwkeurigheid der berekening verwaarloozen. Hoe kleiner breuk nu *sin. x* of *tang. x* is, des te minder termen zullen tot de benadering vereischt worden, des te gemakkelijker zal de getallen berekening zijn, en des te spoediger zal het werk ten einde loopen.

De lengte van eenen boog van 180° kan door de reeksen (159) — (161) niet onmiddelijk worden gevonden; want deze reeksen zouden, aangezien *sin.* 180° = 0 en *tang.* 180° = 0 is, *x* = 0 geven — (en dit is geen bewijs tegen de deugdzaamheid der reeksen, want, *sin.* 0° = 0 en *tang.* 0° = 0 zijnde, geven zij slechts van die menigvuldige bogen die dezelfde sinus en tangens hebben slechts eenen boog) — Om beide reeksen te kunnen gebruiken, om de vraag op te lossen, moet men de

finus of tangens van een evenmatig deel van 180° kennen; want, heeft men de lengte van dit evenmatige deel gevonden; dan zal de lengte van den halven omtrek van zelve bekend zijn.

A. Befchouwen wij eerst de reeks (159). Omdat de finus van 90° of $\frac{1}{2} \times 180° = +1$ is, zoo zal, indien men in dezelve *sin.* $x = 1$, en de lengte van den halven omtrek, in deelen van den ftraal, $= \pi$ ftelt, gevonden worden:

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \times \tfrac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.8} \times \tfrac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \times \tfrac{1}{9}$$

$$+ \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \times \tfrac{1}{11} + \frac{1.3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12} \times \tfrac{1}{13} + \textit{enz.} \quad (163)$$

en, hoezeer deze reeks zeer flaauw convergeert, zal men toch door middel van dezelve het getal van LUDOLPH VAN CEULEN kunnen vinden.

Wij weten dat *sin.* $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is; nemen wij dus die waarde van *sin.* x; dan zal men, aangezien $180° = 4 \times 45°$ is, verkrijgen:

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\Big\{1 + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} \times \tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \times \tfrac{1}{7} \times \tfrac{1}{8}$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \times \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{16} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \times \tfrac{1}{11} \times \tfrac{1}{32} + \textit{enz.}\Big\} \times \sqrt{2} \quad (164)$$

welke reeks reeds veel fterker dan de voorgaande convergeert.

Stelt men $x = 30°$; dan is *sin.* $x = \frac{1}{2}$ en $180° = 6 \times 30°$; wij hebben derhalve:

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{8} + \frac{1.3}{2.4} \times \tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{32} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \times \tfrac{1}{7} \times \tfrac{1}{128}$$

$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \times \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{512} + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10} \times \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{2048} + \textit{enz.} \quad (165)$$

deze reeks convergeert nog fterker dan (164); en zij heeft bovendien het voordeel, dat de berekening van worteltrekkingen geheel onafhankelijk is.

Wil men reekfen, die nog fterker convergeren; zoo neme men $x = 18°$, $x = 9°$, $x = 4°30'$, $x = 2°15'$ of $x = 15°$, $x = 7°30'$, $x = 3°45'$, $x = 1°22'30'$, $x = 0°41'15'$, welker finusfen, door middel van worteltrekking, met behulp van formule (96), *Bladz.* 44, kunnen gevonden worden, en welke bogen evenmatige deelen van 180° zijn. Men zal, door elke dezer reekfen, voor π hetzelfde getal verkrijgen. Evenwel zijn hier de worteltrekkingen en het verheffen van de tiendeelige waarde van *sin.* x tot de derde en volgende onevene magten een groot bezwaar. Hoe men, in dit geval, de berekening, op de gemakkelijkfte wijze, kan inrigten, is, *Allereerfte Grond. der Stelk.*, *I. Afd.*, *IX. Hoofdft.*, *art.* 207. *en verv.* verklaard.

B. De reeks (161), welke de lengte van eenen boog, door middel van zijne tangens, bepaalt, is, wegens de grootere eenvoudigheid van hare termen, beter, dan de reeks (159), gefchikt, om de waarde van π te verkrijgen.

Stel-

Stellen wij $x = 45^\circ$; dan is $tang.\, x = 1$ en $180^\circ = 4 \times 45^\circ$; wij hebben deze zeer merkwaardige reeks

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17} - enz. \quad (166)$$

welke LEIBNITZ het eerst gevonden heeft; doch welke te flaauw convergeert, om van dezelve ter bepaling van π, zonder een al te lastigen arbeid; gebruik te kunnen maken. Echter zal zij ons, in het betoog van de volgende ftelling, moeten dienen.

Stelt men, in de reeks (161), $x = 30^\circ$; dan is, zie *Tafel IV*, *Bladz.* 27, $tang.\, x = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$, $tang^2.\, x = \tfrac{1}{3}$, $tang^3. = \tfrac{1}{9}\sqrt{3}$, $tang^5.\, x = \tfrac{1}{27}\sqrt{3}$, $tang^7.\, x = \tfrac{1}{81}\sqrt{3}$, *enz.* en wij hebben derhalve:

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{3} \times \Big\{ 1 - \tfrac{1}{3} \times (\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{3})^4 + \tfrac{1}{11}(\tfrac{1}{3})^5$$
$$+ \tfrac{1}{13}(\tfrac{1}{3})^6 - \tfrac{1}{15}(\tfrac{1}{3})^7 + \tfrac{1}{17}(\tfrac{1}{3})^8 - enz. \Big\} \times \sqrt{3} \quad . \quad (167)$$

welke reeks reeds zeer gefchikt is, om, met weinig moeite, de waarde van π te benaderen.

Wanneer men, uit de *Tafel* IV, de tangenten van kleinere bogen neemt, dan zal men om π te berekenen, reekfen verkrijgen, die veel fterker convergeren; doch, welker berekening met het trekken van vierkantswortels zal bezwaard zijn.

Dit bezwaar kan, op de volgende wijze, waarvan EULER het eerst een denkbeeld gegeven heeft, aldus ontweken worden. Stellen wij, in de bekende formule (68),

$$tang.(a + b) = \frac{tang.\, a + tang.\, b}{1 - tang.\, a \times tang.\, b}$$

den boog $(a + b) = 45^\circ$; dan is $tang.\, (a + b) = 1$, en, om die reden,

$$1 = \frac{tang.\, a + tang.\, b}{1 - tang.\, a \times tang.\, b}$$

Indien wij uit deze vergelijking $tang.\, b$ oplosfen; dan verkrijgen wij:

$$tang.\, b = \frac{1 - tang.\, a}{1 + tang.\, a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

welke vergelijking nu alleen beftaat, onder de voorwaarde, dat $a + b = 45^\circ$ is.

Men ftelle, in deze vergelijking (A), $tang.\, a = \tfrac{1}{2}$; dan vindt men $tang.\, b = \tfrac{1}{3}$; en daaruit volgt dan, dat

$$\tfrac{1}{4}\pi = B.\, tang.\, (\tfrac{1}{2}) + B.\, tang.\, (\tfrac{1}{3}) \quad . \; . \; . \quad (168)$$

is. Wij hebben dus eenen boog van 45° in twee deelen verdeeld, welker tangenten, zoo als men het noemt, rationaal zijn; dat is, van geene worteltrekkingen afhangen. Naarmate men nu voor a een ander gebroken ftelt, dat minder dan één is, zal $tang.\, b$ eene rationale breuk worden.

Met behulp van de reeks (161), zal de lengte van $B.\, tang.\, (\tfrac{1}{2})$ gemak-

finus of tangens van een evenmatig deel van 180° kennen; want, heeft men de lengte van dit evenmatige deel gevonden; dan zal de lengte van den halven omtrek van zelve bekend zijn.

A. Befchouwen wij eerst de reeks (159). Omdat de finus van 90° of $\frac{1}{2} \times 180° = +1$ is, zoo zal, indien men in dezelve *sin.* $x = 1$, en de lengte van den halven omtrek, in deelen van den ftraal, $= \pi$ ftelt, gevonden worden:

$$\tfrac{1}{2}\pi = 1 + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 8} \times \tfrac{1}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \times \tfrac{1}{9}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \times \tfrac{1}{11} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \times \tfrac{1}{13} + \text{enz.} \quad (163)$$

en, hoezeer deze reeks zeer flaauw convergeert, zal men toch door middel van dezelve het getal van LUDOLPH VAN CEULEN kunnen vinden.

Wij weten dat *sin.* $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is; nemen wij dus die waarde van *sin.* x; dan zal men, aangezien $180° = 4 \times 45°$ is, verkrijgen:

$$\tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{1}{2}\Big\{1 + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \times \tfrac{1}{7} \times \tfrac{1}{8}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \times \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{16} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \times \tfrac{1}{11} \times \tfrac{1}{32} + \text{enz.}\Big\} \times \sqrt{2} \quad (164)$$

welke reeks reeds veel fterker dan de voorgaande convergeert.

Stelt men $x = 30°$; dan is *sin.* $x = \frac{1}{2}$ en $180° = 6 \times 30°$; wij hebben derhalve:

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{3} \times \tfrac{1}{8} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \times \tfrac{1}{5} \times \tfrac{1}{32} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \times \tfrac{1}{7} \times \tfrac{1}{128}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \times \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{512} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \times \tfrac{1}{9} \times \tfrac{1}{2048} + \text{enz.} \quad (165)$$

deze reeks convergeert nog fterker dan (164); en zij heeft bovendien het voordeel, dat de berekening van worteltrekkingen geheel onafhankelijk is.

Wil men reekfen, die nog fterker convergeren; zoo neme men $x = 18°$, $x = 9°$, $x = 4° 30'$, $x = 2° 15'$ of $x = 15°$, $x = 7° 30'$, $x = 3° 45'$, $x = 1° 52' 30'$, $x = 0° 41' 15'$, welker finusfen, door middel van worteltrekking, met behulp van formule (96), *Bladz.* 44, kunnen gevonden worden, en welke bogen evenmatige deelen van 180° zijn. Men zal, door elke dezer reekfen, voor π hetzelfde getal verkrijgen. Evenwel zijn hier de worteltrekkingen en het verheffen van de tiendeelige waarde van *sin.* x tot de derde en volgende onevene magten een groot bezwaar. Hoe men, in dit geval, de berekening, op de gemakkelijkfte wijze, kan inrigten, is, *Allereerfte Grond. der Stelk.*, *I. Afd.*, *IX. Hoofdft.*, *art.* 207. *en verv.* verklaard.

B. De reeks (161), welke de lengte van eenen boog, door middel van zijne tangens, bepaalt, is, wegens de grootere eenvoudigheid van hare termen, beter, dan de reeks (159), gefchikt, om de waarde van π te verkrijgen.

Stel-

Stellen wij $x = 45°$; dan is $tang.\,x = 1$ en $180° = 4 \times 45°$; wij hebben deze zeer merkwaardige reeks

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{17} - enz. \quad (166)$$

welke LEIBNITZ het eerst gevonden heeft; doch welke te flaauw convergeert, om van dezelve ter bepaling van π, zonder een al te lastigen arbeid; gebruik te kunnen maken. Echter zal zij ons, in het betoog van de volgende ftelling, moeten dienen.

Stelt men, in de reeks (161), $x = 30°$; dan is, zie *Tafel IV*, *Bladz.* 27, $tang.\,x = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$, $tang^2.x = \tfrac{1}{3}$, $tang^3. = \tfrac{1}{9}\sqrt{3}$, $tang^5.x = \tfrac{1}{27}\sqrt{3}$, $tang^7.\,x = \tfrac{1}{81}\sqrt{3}$, *enz.* en wij hebben derhalve:

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{3} \times \Big\{ 1 - \tfrac{1}{3} \times (\tfrac{1}{3}) + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{7}(\tfrac{1}{3})^3 + \tfrac{1}{9}(\tfrac{1}{3})^4 + \tfrac{1}{11}(\tfrac{1}{3})^5$$
$$+ \tfrac{1}{13}(\tfrac{1}{3})^6 - \tfrac{1}{15}(\tfrac{1}{3})^7 + \tfrac{1}{17}(\tfrac{1}{3})^8 - enz. \Big\} \times \sqrt{3} \quad . \quad (167)$$

welke reeks reeds zeer gefchikt is, om, met weinig moeite, de waarde van π te benaderen.

Wanneer men, uit de *Tafel* IV, de tangenten van kleinere bogen neemt, dan zal men om π te berekenen, reekfen verkrijgen, die veel fterker convergeren; doch, welker berekening met het trekken van vierkantswortels zal bezwaard zijn.

Dit bezwaar kan, op de volgende wijze, waarvan EULER het eerst een denkbeeld gegeven heeft, aldus ontweken worden. Stellen wij, in de bekende formule (68),

$$tang.(a+b) = \frac{tang.\,a + tang.\,b}{1 - tang.\,a \times tang.\,b}$$

den boog $(a+b) = 45°$; dan is $tang.\,(a+b) = 1$, en, om die reden,

$$1 = \frac{tang.\,a + tang.\,b}{1 - tang.\,a \times tang.\,b}$$

Indien wij uit deze vergelijking $tang.\,b$ oplosfen; dan verkrijgen wij:

$$tang.\,b = \frac{1 - tang.\,a}{1 + tang.\,a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

welke vergelijking nu alleen beftaat, onder de voorwaarde, dat $a + b = 45°$ is.

Men ftelle, in deze vergelijking (*A*), $tang.\,a = \tfrac{1}{2}$; dan vindt men $tang.\,b = \tfrac{1}{3}$; en daaruit volgt dan, dat

$$\tfrac{1}{4}\pi = B.\,tang.(\tfrac{1}{2}) + B.\,tang.(\tfrac{1}{3}) \quad . \; . \; . \quad (168)$$

is. Wij hebben dus eenen boog van 45° in twee deelen verdeeld, welker tangenten, zoo als men het noemt, rationaal zijn; dat is, van geene worteltrekkingen afhangen. Naarmate men nu voor a een ander gebroken ftelt, dat minder dan één is, zal $tang.\,b$ eene rationale breuk worden.

Met behulp van de reeks (161), zal de lengte van *B. tang.* (½) ge-

makkelijk, en nog gemakkelijker $B.\,tang.\,(\frac{1}{3})$ worden berekend, en viermaal de som dezer bogen zal get getal π doen bekend worden.

Stellen wij, in vergelijking (68), $tang.\,(a+b)=\frac{1}{n}$ (zijnde n een geheel positief getal;) dan zal daaruit ligtelijk worden gevonden:

$$tang.\,b=\frac{1-n\,tang.\,a}{n+tang.\,a} \quad \ldots\ldots \quad (B)$$

Men stelle, in deze vergelijking (B), $n=2$ en $tang.\,a=\frac{1}{3}$; dan wordt $tang.\,b=\frac{1}{7}$, en wij hebben:

$$B.\,tang.\,(\tfrac{1}{2})=B.\,tang.\,(\tfrac{1}{3})+B.\,tang.\,(\tfrac{1}{7})$$

En, brengt men deze waarde van $B.\,tang.\,(\frac{1}{2})$ in de formule (168) over; dan zal men verkrijgen:

$$\tfrac{1}{4}\pi=2.\,B.\,tang.\,(\tfrac{1}{3})+B.\,tang.\,(\tfrac{1}{7}) \quad \ldots \quad (169)$$

Stelt men, in de vergelijking (B), $tang.\,a=\frac{1}{n+1}$; dan wordt $tang.\,b=\frac{1}{n^2+n+1}$, en wij hebben derhalve:

$$B.\,tang.\left(\frac{1}{n}\right)=B.\,tang.\left(\frac{1}{n+1}\right)+B.\,tang.\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \quad (C)$$

Stelt men, in diezelfde vergelijking, $tang.\,a=\frac{1}{n+2}$; dan zal men vinden:

$$B.\,tang.\left(\frac{1}{n}\right)=B.\,tang.\left(\frac{1}{n+2}\right)+B.\,tang.\left(\frac{2}{n^2+2n+1}\right)$$

en maakt men in deze $n=2p+1$; dan is

$$B.\,tang.\left(\frac{1}{2p+1}\right)=B.\,tang.\left(\frac{1}{2p+3}\right) \ldots\ldots$$

$$+B.\,tang.\left(\frac{1}{2p^2+4p+2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

Wanneer, in (D), $p=1$ gesteld wordt; dan wordt

$$B.\,tang.\,(\tfrac{1}{3})=B.\,tang.\,(\tfrac{1}{5})+B.\,tang.\,(\tfrac{1}{8})$$

en stelt men in (C) $n=7$; dan wordt

$$B.\,tang.\,(\tfrac{1}{7})=B.\,tang.\,(\tfrac{1}{8})+B.\,tang.\,(\tfrac{1}{57})$$

derhalve wordt

$$B.\,tang.\,(\tfrac{1}{3})=B.\,tang.\,(\tfrac{1}{5})+B.\,tang.\,(\tfrac{1}{7})-tang.\,(\tfrac{1}{57})$$

en brengt men deze waarde van $B.\,tang.\,(\frac{1}{3})$ in de formule (169) over; dan verkrijgt men:

$$\tfrac{1}{4}\pi=2\,B.\,tang\,(\tfrac{1}{5})+3\,B.\,tang.\,(\tfrac{1}{7})-2\,B.\,tang.\,(\tfrac{1}{57}) \quad . \quad (170)$$

Uit de bekende vergelijking:

$$tang.\,2\,a=\frac{1-tang^2.\,a}{2\,tang.\,a} = \frac{2.\,tang.\,a}{1-tang^2\,a}$$

volgt van zelf de vergelijking:

$$2\, B.\, tang.\, (a) = B.\, tang.\, \left(\frac{2a}{1-a^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

Stellen wij eerst, in deze vergelijking, $a = \frac{1}{5}$; dan wordt

$$2\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{5}) = B.\, tang.\, (\tfrac{5}{12})$$

$$4\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{5}) = 2\, B.\, tang.\, (\tfrac{5}{12}) = B.\, tang.\, (\tfrac{120}{119})$$

Men ftelle nu, in de bekende vergelijking,

$$B.\, tang.\, (a) - B.\, tang.\, (b) = B.\, tang.\, \left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

$a = \frac{120}{119}$ en $b = 1$; dan wordt

$$B.\, tang.\, (\tfrac{120}{119}) - B.\, tang.\, (1) = B.\, tang.\, (\tfrac{1}{239})$$

of $4\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{5}) - \tfrac{1}{4}\pi = B.\, tang.\, (\tfrac{1}{239})$

waaruit dan eindelijk de zeer merkwaardige vergelijking

$$\tfrac{1}{4}\pi = 4\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{5}) - B.\, tang.\, (\tfrac{1}{239}) \quad . \quad . \quad (171)$$

volgt.

Men kan foortgelijke formulen tot in het oneindige formeren. Zoo is, bij voorbeeld:

$$2\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{10}) - B.\, tang.\, (\tfrac{1}{5}) = B.\, tang.\, (\tfrac{1}{515})$$

$$B.\, tang.\, (\tfrac{1}{5}) = 2\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{10}) - B.\, tang.\, (\tfrac{1}{515})$$

en, door het overbrengen van die waarde, in formule (171), verkrijgt men dan nog eindelijk:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 8\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{10}) - 4\, B.\, tang.\, (\tfrac{1}{515}) - B.\, tang.\, (\tfrac{1}{239}) \quad (172)$$

De vergelijkingen, (168), (169), (170), (171) en (172), zijn, elke op zich zelve genomen, tot nog toe, de bekwaamfte, om, met weinig moeite, het Ludolphiaanfche getal π te vinden. Zoo verre overtreffen de hedendaagfche kunstgrepen die der oude Meetkunftenaars, dat een middelmatig geoefend rekenaar, door middel van vergelijking (168) en de reeks (161), in een zeer korten tijd, het getal van LUDOLPH VAN CEULEN, zal vinden, en op zijn gemak eenen arbeid beproeven, waaraan die verdienftelijke Landgenoot, met het onbegrijpelijkfte geduld, jaren lang heeft befteed. Door foortgelijke hulpmiddelen heeft men, tot in honderd-veertig cijfers van de tiendeeligen, gevonden, en op meer dan ééne wijze beproefd, dat

π = 3,	14159	26535	89793	23846	26433	83279
	50288	41971	69399	37510	58209	74944
	59230	78164	06286	20899	86280	34825
	34211	70679	82148	08651	32823	06647
	09384	46095	50582	26136	enz.	

is; hetwelk door middel der in- en omgefchrevene veelhoeken te vinden, volftrekt onuitvoerelijk zou zijn.

XIII. STELLING.

§. 1010. *De omtrek eens cirkels, is, met betrekking tot deszelfs middellijn, onmeetbaar.*

OPHELDERING. De zin van deze stelling is eigenlijk deze: *dat de omtrek en de middellijn van eenigen cirkel lengte-uitgebreidheden zijn, die geene gemeene maat hebben;* of, met andere woorden, *dat er geene twee getallen* (hoe groot men dezelve denken moge,) *bestaan, die de juiste verhouding van den omtrek tot de middellijn, of van den halven omtrek tot den straal, naauwkeurig voorstellen.*

BETOOG. Om die gewigtige leerstelling, op de eenvoudigste wijze, te betoogen, zullen wij de reeks

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \textit{enz.}$$

die tot in het oneindige voortloopt, tot grondslag aannemen. Het is, uit het IX. *Vraagstuk*, gebleken, dat al derzelver termen in den algemeenen vorm $\pm 1 : (2p+1)$ zijn begrepen; zijnde, in elke volgende term, p ééne éénheid meer, dan in den term, die onmiddellijk voorafgaat.

Het berekenen nu van een groot aantal termen dezer reeks; kan, onder anderen, aldus worden ingerigt:

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{13}{15}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{13}{15} - \frac{1}{7} = \frac{76}{105}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{76}{105} + \frac{1}{9} = \frac{263}{315}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} = \frac{263}{315} - \frac{1}{11} = \frac{2578}{3465}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} = \frac{2578}{3465} + \frac{1}{13} = \frac{36979}{45045}$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} = \frac{36979}{45045} - \frac{1}{15} = \frac{33976}{45045}$$

Stond het nu in ons vermogen, om die berekening zoo verre voort te zetten, tot dat al de termen der reeks, van den eersten term, tot den term $\pm \frac{1}{2p+1}$, in welken p een getal is, dat uit twee-honderd cijfers bestaat, in eene som vereenigd waren; dan zou de laatste breuk, door dit beurtelings aftrekken en optellen der termen verkregen, de waarde van $\frac{1}{4}\pi$ reeds zoo naauwkeurig voorstellen, dat het te veel of te weinige een gebroken zou zijn, de éénheid tot teller en een

een getal, uit twee-honderd cijfers, bestaande, tot noemer hebbende; zoodat, wanneer men dit laatste gebroken in eene tiendeelige breuk ontwikkelde, het viervoud van dezelve de grootte van het getal π, tot in twee-honderd cijfers van de tiendeeligen, naauwkeuriger zou voorstellen.

Indien men de waarde van $\frac{1}{4}\pi$ nog naauwkeurig zou willen vinden, en tot dat einde de berekening zoo verre vervolgde, tot dat, in den laatsten term $\pm \frac{1}{2p+1}$, welke in rekening wordt gebragt, p een getal ware, dat uit tien-duizend cijfers bestond; dan zou men wel nader aan de waarheid zijn gekomen; doch, om de waarde van $\frac{1}{4}\pi$ strikt naauwkeurig te verkrijgen, zou men nog de geheele oneindigheid van de overblijvende termen der reeks, namelijk

$$\pm \left\{ \frac{1}{2p+3} - \frac{1}{2p+5} + \frac{1}{2p+7} - \frac{1}{2p+9} + \frac{1}{2p+9} - enz. \right\}$$

bij het reeds gevonden gebroken moeten optellen. Echter zou dit werk, al ware het zoo ver voortgezet, dat p een getal ware, dat uit één-millioen cijfers bestond, nog even min, als bij het begin der bewerking, zijn ten einde geloopen.

Elke nieuwe optelling of aftrekking geeft dan wel een gewoon gebroken, dat de verhouding van $\frac{1}{4}\pi$ tot de éénheid steeds naauwkeuriger voorstelt; doch een gebroken, dat, hoe verre men mogt gevorderd zijn, altijd iets te groot of iets te klein zal zijn.

In dit beredeneerde, is de vraag niet: *of men werkelijk zulk eene berekening zou kunnen uitvoeren?* (dit toch is onmogelijk) maar wel, *of de uitkomst van dezelve met de waarheid zou overeenkomen?* En hier aan valt niet te twijfelen; omdat de reeks, op welke die berekening gegrond is, uit de natuur van den cirkel noodzakelijk volgt, omdat zij tot in het oneindige voortloopt; en, omdat eindelijk elke term $\pm \frac{1}{2p+1}$ aanwijst, met welk eene graad van naauwkeurigheid de som der voorgaande termen de verhouding van $\frac{1}{4}\pi$ tot den straal voorstelt; en meer dan die zekerheid wordt tot de klem van ons betoog niet gevorderd. Ook is, om de waarde van π te benaderen, de reeks $1 - \frac{1}{3} +$ *enz.* om geene andere reden verworpen, dan, omdat men te veel termen in rekening zou moeten brengen, om π met eene genoegzame naauwkeurigheid te vinden.

Men lette nu op de rij der breuken,

$$\frac{2}{3}, \frac{13}{15}, \frac{76}{105}, \frac{263}{315}, \frac{2578}{3465}, \frac{36979}{45045}, \frac{33676}{45045}, enz. \quad (A)$$

die beurtelings de waarde van $\frac{1}{4}\pi$ te klein en te groot voorstellen; dan zeg ik: *dat, uitgenomen in eenige weinige gevallen, de noemer van elke volgende breuk een veelvoud is van dien der voorgaande*, (namelijk $15 = 3 \times 5$, $105 = 15 \times 7$, $315 = 105 \times 3$, $3065 = 315 \times 11$, *enz.*)

Want, laat de som van een zeer groot aantal termen der reeks $1 - \frac{1}{3} +$

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ *enz.* zijn de onverkleinbare breuk $\frac{a}{b}$, en de volgende term van de reeks $\pm\frac{1}{p}$; dan zal de volgende breuk van de rij (A) zijn,

$$\frac{a}{b}\pm\frac{1}{p}=\frac{ap\pm b}{bp}$$

welke de waarde van $\frac{1}{4}\pi$ naauwkeuriger dan $a:b$ zal voorstellen.

Nu kunnen er drie gevallen plaats hebben: 1°. kunnen de noemers b en p onderling ondeelbaar zijn; 2°. zij kunnen eenen gemeenen deeler hebben; 3°. eindelijk kan p een deeler van b zijn.

In het eerste geval, zijn ap en b onderling ondeelbaar, en bijgevolg zijn $ap\pm b$, b en p onderling ondeelbaar, de breuk $\frac{ap\pm b}{bp}$ is derhalve onverkleinbaar.

Laat, in het tweede geval, $b=b'n$ en $p=p'n$ zijn; dan wordt

$$\frac{a}{b}\pm\frac{1}{p}=\frac{ap\pm b}{bp}=\frac{ap'n\pm b'n}{b'p'nn}=\frac{ap'\pm b'}{b'p'n}=\frac{ap'\pm b'}{bp'}$$

en deze breuk is, om dezelfde reden, als in het eerste geval, onverkleinbaar.

Men stelle, in het laatste geval, $b=b'p$; dan wordt

$$\frac{a}{b}\pm\frac{1}{p}=\frac{ap\pm b}{bp}=\frac{ap\pm b'p}{b'pp}=\frac{a\pm b'}{b'p}=\frac{a\pm b'}{b}$$

en hier is ook, om dezelfde reden, de breuk $\frac{a\pm b'}{b}$ onverkleinbaar.

Uit dit alles blijkt dan ten klaarste: *dat, wanneer, in het vereenigen van eenigen term der reeks* $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-$ enz. *met de som der voorgaande termen, het kleinste gemeene veelvoud van de noemers der breuken wordt genomen, de som of het verschil*

$$\frac{ap\pm b}{bp},\quad\frac{ap'\pm b'}{bp'},\quad\text{of}\quad\frac{a\pm b'}{b}$$

noodzakelijk eene onverkleinbare breuk zal moeten zijn; en, ten anderen: *dat, uitgenomen in het geval, dat p een deeler van b is, de noemer van elke volgende breuk der sommen-reeks* (A) *een veelvoud van den noemer der onmiddellijk voorgaande breuk zal zijn.*

Om een denkbeeld te maken van de onzaggelijke groote getallen, uit welke de tellers en noemers van de breuken van de reeks (A) bestaan, bedenke men, dat, wanneer men, in het vereenigen van de termen der reeks $1-\frac{1}{3}+$ *enz.* tot den term is gekomen, welks noemer is

7853967537645974322753279

de som van al de termen der reeks, tot dien term ingesloten, volgens het betoogde, eene onverkleinbare breuk zal zijn, tot noemer hebbende het kleinste gemeene veelvoud van al de onevene getallen 1, 3, 5, *enz.* tot gezegden noemer ingesloten, en derhalve in allen gevalle grooter dan

dan het gedurige product van al de ondeelbare getallen 3, 5, 7, 11, 13, *enz.* tot het gezegde getal ingesloten.

Dit zelfde nu zal blijven plaats hebben, hoe verre men met zijne gedachte in het vereenigen van de termen der grondreeks voortzet, en hieruit volgt dan: *dat, wanneer men de geheele oneindigheid van de termen der reeks, die de precieſe waarde van $\frac{1}{4}\pi$ voorſtelt, inderdaad konde vereenigen, die ſom eene onverkleinbare breuk zou zijn, welker teller en noemer uit oneindig groote getallen zouden beſtaan.* En is dit nu zoo; dan ligt de waarheid van hetgeen wij betoogen moesten, klaar voor oogen. Geen gebroken, hoe groot men deszelfs teller en noemer zoude mogen ſtellen, kan de waarde van $\frac{1}{4}\pi$ naauwkeurig voorſtellen; omdat hetzelve uit het verkleinen van de onverkleinbare breuk, die deze waarde precies voorſtelt, en welker teller en noemer oneindig groot is, zou moeten ontſtaan.

§. 1011. AANMERKING. Dit betoog is zoo uitvoerig uit elkander gezet, opdat onbedrevene voortaan zouden terug worden gehouden, om te zoeken naar iets, dat niet beſtaat; namelijk naar twee ronde getallen, die naauwkeurig de verhouding van den omtrek eens cirkels tot deszelfs middellijn voorſtellen.

XI. VRAAGSTUK.

§. 1012. *De reekſen* (155), (156), (157) *en* (158), *welke de waarde van de ſinus, coſinus, tangens en cotangens van eenigen boog in tiendeeligen van den ſtraal voorſtellen, onder eenen vorm te brengen, welke voor het dadelijk berekenen dezer goniometriſche lijnen de geſchiktſte is.*

OPLOSSING. Men ſtelle, in de reekſen (155) en (156), $x = m \times 90^\circ$. Om dan de ſinus en coſinus van eenigen boog, in het eerſte quadrant vallende, te berekenen, is m nooit grooter dan de éénheid; daar nu een boog van 90° gelijk is aan $\frac{1}{2}\pi$, zoo hebben wij:

$$x = 1,57079\ 63267\ 94896\ 619\ m = A$$

Men ſtelle dezen eerſten term van de reeks (155) gelijk A; dan zal men de waarde van derzelver volgende termen aldus verkrijgen:

$$\tfrac{1}{2}x^2 = \tfrac{1}{2}A \times A = B, \quad \tfrac{1}{6}x^3 = \tfrac{1}{3}B \times A = C$$

$$\tfrac{1}{24}x^4 = \tfrac{1}{4}C \times A = D, \quad \tfrac{1}{120}x^5 = \tfrac{1}{5}D \times A = E$$

$$\tfrac{1}{720}x^6 = \tfrac{1}{6}E \times A = F, \ enz.$$

Men make dus, daar men telkens met A moet vermenigvuldigen, om de volgende termen van de reeks te vinden, eene tafel van de negen eerſte veelvouden van A; dan zal men, met weinig moeite, verkrijgen, als volgt:

1°. Om

1°. **Om de finus van eenen boog te berekenen:**

$$\sin . m \times 90^{\circ} = \ldots\ldots$$

$$+ 1,57079\ 63267\ 949\, m \quad - 0,64596\ 40975\ 062\, m^{3}$$
$$+ 0,07969\ 26262\ 462\, m^{5} \quad - 0,00468\ 17541\ 353\, m^{7}$$
$$+ 0,00016\ 04411\ 848\, m^{9} \quad - 0,00000\ 35988\ 432\, m^{11}$$
$$+ 0,00000\ 00569\ 217\, m^{13} - 0,00000\ 00006\ 688\, m^{15}$$
$$+ 0,00000\ 00000\ 061\, m^{17} - \text{enz.} \ldots\ldots \quad (173)$$

2°. **Om de cofinus van eenen boog te berekenen:**

$$\cos . m \times 90^{\circ} = \ldots\ldots$$

$$+ 1,00000\ 00000\ 000 \quad - 1,23370\ 05501\ 362\, m^{2}$$
$$+ 0,25366\ 95079\ 010\, m^{4} \quad - 0,02086\ 34807\ 634\, m^{6}$$
$$+ 0,00091\ 92602\ 748\, m^{8} \quad - 0,00002\ 52020\ 424\, m^{10}$$
$$+ 0,00000\ 04710\ 875\, m^{12} - 0,00000\ 00063\ 866\, m^{14}$$
$$+ 0,00000\ 00000\ 657\, m^{16} - \text{enz.} \ldots\ldots \quad (174)$$

Men deele de eerfte dezer vergelijkingen door de tweede, en de tweede door de eerfte; of wel, men ftelle in de reekfen (157) en (158); $x = m \times \frac{1}{2}\pi$; dan zal men vinden:

3°. **Om de tangens van eenigen boog te berekenen:**

$$\text{tang.}\, m \times 90^{\circ} = + 1,27323\ 95447\ 350 \times \frac{m}{1 - m^{2}}$$

$$+ 0,29755\ 67820\ 597\, m \quad + 0,01868\ 86502\ 773\, m^{3}$$
$$+ 0,00184\ 24752\ 034\, m^{5} \quad + 0,00019\ 75800\ 714\, m^{7}$$
$$+ 0,00002\ 16977\ 245\, m^{9} \quad + 0,00000\ 24011\ 370\, m^{11}$$
$$+ 0,00000\ 02664\ 132\, m^{13} + 0,00000\ 00295\ 864\, m^{15}$$
$$+ 0,00000\ 00032\ 867\, m^{17} + 0,00000\ 00003\ 651\, m^{19}$$
$$+ 0,00000\ 00000\ 405\, m^{21} + 0,00000\ 00000\ 045\, m^{23}$$
$$+ 0,00000\ 00000\ 005\, m^{27} + \text{enz.} \ldots\ldots \quad (175)$$

4°. **Om de cotangens van eenen boog te vinden:**

$$\cot .\, m \times 90^{\circ} = + 0,63661\ 97723\ 675 \times \frac{1}{m}$$

$$- 0,31830\ 98861\ 837 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4} m^{2}}$$

$$- 0,20528\ 88894\ 145\, m \quad - 0,00655\ 10747\ 882\, m^{3}$$
$$- 0,00034\ 50292\ 554\, m^{5} \quad - 0,00002\ 02791\ 060\, m^{7}$$
$$- 0,00000\ 12366\ 527\, m^{9} \quad - 0,00000\ 00764\ 959\, m^{11}$$
$$- 0,00000\ 00047\ 597\, m^{13} - 0,00000\ 00002\ 969\, m^{15}$$
$$- 0,00000\ 00000\ 185\, m^{17} - 0,00000\ 00000\ 011\, m^{19}$$
$$- 0,00000\ 00000\ 001\, m^{21} - \text{enz.} \ldots\ldots \quad (176)$$

De

De twee laatste vergelijkingen (175) en (176) verkrijgen, door de voornoemde deelingen of substitutien, niet terstond de gedaante, onder welke zij zijn voorgesteld. Nadat namelijk de deeling van $sin. m \times 90^{\circ}$ door $cos. m \times 90^{\circ}$ tot den term m^{23} is voortgezet, blijkt het vooreerst, dat de coefficienten van al de volgende termen steeds minder worden; aangezien nu de coefficient van m^{23} is

$$1,27323\ 95447\ 350$$

zoo is het klaar: dat, wanneer men van het verkregene quotient aftrekt de reeks

$$m + m^3 + m^5 + m^7 + m^9 + m^{11} + m^{13} + m^{15} + m^{17} + m^{19} + m^{21} + enz.$$

met dien coefficient vermenigvuldigd, en er naderhand dit product wederom bijtelt, de waarde van $tang. m \times 90^{\circ}$ niet zal veranderen. Nu is

$$m + m^3 + m^5 + m^7 + enz. = \frac{m}{1 - m^2}$$

en derhalve wordt dit product gelijk aan

$$1,27323\ 95447\ 350 \times \frac{m}{1 - m^2}.$$

Men trekke derhalve van den coefficient van elken term van het verkregene quotient, het standvastige getal 1,27323 *enz.* af, en telle bij het quotient den term

$$1,27323\ 95447\ 350 \times \frac{m}{1 - m^2}$$

bij; dan verkrijgt men de herleide waarde van $tang. m \times 90^{\circ}$, zoo als zij in de vergelijking (175) is voorgesteld.

Op eene dergelijke wijze, is het quotient $cos. m \times 90^{\circ}$ gedeeld door $sin. m \times 90^{\circ}$, dat is, $cot. m \times 90^{\circ}$, onder den vorm van (176), herleid geworden.

§. 1013. AANMERKINGEN. 1°. De moeite, welke aan het uitbrengen der vergelijkingen (173)—(176), vooral der twee laatsten, verbonden is, wordt rijkelijk vergoed, door den spoed, waarmede de sinus, cosinus, tangens en cotangens, door middel van dezelve, kunnen berekend worden. Alvorens echter die vergelijkingen tot dat oogmerk te gebruiken, moet men zeker zijn, dat er, in het berekenen van de coefficienten van derzelver termen, geene fouten begaan zijn; waarvan men zich (behalve dat men elk gedeelte der berekening naauwkeurig kan beproeven,) door onderscheidene proeven kan overtuigen. Want, stelt men, in de vergelijkingen (173) en (174), het getal $m = 1$; dan zal men vinden $sin. 90^{\circ} = 1$ en $cos. 90^{\circ} = 0$. Stelt men in diezelfde vergelijkingen $m = \frac{1}{2}$; dan zal men bevinden, dat $sin. 45^{\circ} = cos. 45^{\circ} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ is; en stelt men $m = \frac{1}{3}$; dan zal men vinden $sin. 30 = \frac{1}{2}$ *enz.* Neemt men eindelijk in de vergelijkingen (175) en (176), $m = \frac{1}{2}$; dan zal men vinden $tang. 45^{\circ} = cot. 45^{\circ} = 1$. Evenwel is het moeijelijk, om, door dergelijke proeven, zich van de naauwkeurigheid van al de coefficienten der vergelijkingen (175) en (176) te overtuigen.

2°. Is

$$sin.\ 72^\circ = cos.\ 81^\circ = 0,\ 95105\ \ 65162\ \ 95154$$
$$sin.\ 81^\circ = cos.\ 9^\circ = 0,\ 98768\ \ 83405\ \ 95138$$

welk' tafeltje, door de vergelijkingen (173) en (174), onmiddellijk berekend is.

Men behoeft met die berekening, naar de formulen (177)—(180), *flechts tot dertig graden voort te gaan;* want, zoo verre gekomen zijnde, wordt het werk, op de volgende wijze, veel ligter.

Men ftelle, in formule (91), namelijk in

$$2\,sin.\,a \times cos.\,b = sin.\,(a+b) + sin.\,(a-b)$$

den boog $a = 30^\circ$; dan is $2\,sin.\,a = 2\,sin.\,30^\circ = 1$; en

$$sin.\ (30^\circ + b) = cos.\ b - sin.\ (30^\circ - b)\quad .\ .\ (181)$$

Nog ftelle men, in formule (92), namelijk in

$$2\,sin.\,a \times sin.\,b = cos.\,(a-b) - cos.\,(a+b)$$

den boog $a = 30^\circ$; dan verkrijgt men:

$$cos.\ (30^\circ + b) = cos.\ (30^\circ - b) - sin.\ b\quad .\ .\ (182)$$

door welke twee formulen, men de tafel tot zestig graden zal kunnen vervolgen.

Stelt men, in de twee volgende formulen,

$$2\,cos.\,a \times sin.\,b = sin.\,(a+b) - sin.\,(a-b)$$
$$\text{en}\ 2\,cos.\,a \times cos\ b = cos.\,(a-b) + cos.\,(a+b)$$

den boog $a = 60^\circ$; dan is $2\,cos.\,a = 2\,cos.\,30^\circ = 1$; en wij hebben dan, om de finusfen en cofinusfen der bogen, van zestig tot negentig graden, te berekenen, deze twee eenvoudige vergelijkingen:

$$sin.\ (60^\circ + b) = sin.\ b + sin.\ (60^\circ - b)\quad .\ .\ (183)$$
$$cos.\ (60^\circ + b) = cos.\ b - cos.\ (60^\circ - b)\quad .\ .\ (184)$$

Het blijkt dus: dat het berekenen van de finusfen en cofinusfen, van 0° *tot* 30°, *het moeijelijkfte gedeelte van de zamenftelling der finus-tafel uitmaakt; daar, van* 30° *tot* 90°, *de finusfen en cofinusfen door het optellen of aftrekken van twee reeds te voren berekende getallen, werden gevonden.*

Wanneer de finusfen en cofinusfen van alle bogen, in het eerfte quadrant vallende, berekend zijn; dan zal men de tangenten, cotangenten, fecanten, cofecanten, koorden, alsmede de finus-verfusfen en fufinus-verfusfen, naar de formulen van de II. *Stelling*, kunnen berekenen. Evenwel zullen de volgende formulen dit werk merkelijk bekorten.

Volgens het I. *Gevolg*. VIII. *Stelling*, is

$$cot.\ 2\,a = \tfrac{1}{2}\ cot.\ a - \tfrac{1}{2}\ tang.\ a\quad .\ .\ .\ .\ .\ (185)$$

Men ftelle, in deze vergelijking, $a = 30^\circ - b$; dan verkrijgt men:

$$2\ tang.\ (30^\circ + 2\,b) = cot.\ (30^\circ - b) - tang.\ (30^\circ - b)\ (186)$$

Men trekke de vergelijkingen

$$tang.\,(45^\circ + b) = \frac{1 + tang.\,b}{1 - tang.\,b},\ \text{en}\ tang.\,(45^\circ - b) = \frac{1 - tang.\,b}{1 + tang.\,b}$$

die, in het I. en II. *Gevolg*, IV. *Stelling* zijn gevonden, de tweede van de eerfte af; dan zal men verkrijgen:

tang.

$$tang.(45^\circ + b) - tang.(45^\circ - b) = \frac{4\,tang\,b}{1 - tang^2.b}$$

Nu is, zie IV. *Gev.* IV. *Stell.* $\frac{2\,tang.b}{1 - tang^2.b} = tang.2b$. Wij hebben dan eindelijk:

$$tang.(45^\circ + b) = 2\,tang.2b + tang.(45^\circ - b) \quad . \; . \; (187)$$

Door formule (185), zal men de cotangenten van het dubbel der reeds bekende bogen, door formule (186) de tangenten boven de 30°, en door formule (187) de tangenten der bogen boven de 45° verkrijgen.

De secanten en cosecanten kunnen, wanneer de tangenten en cotangenten berekend zijn, aldus worden gevonden:

$$sec\,b = cot.(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) - tang.b \quad . \; . \; . \; . \quad (188)$$

$$cosec.b = cot.\tfrac{1}{2}b - cot.b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (189)$$

Men stelle, om de tweede vergelijking te bewijzen, in $cosec.a = cot.\tfrac{1}{2}a - cot.\tfrac{1}{2}a$, boog $a = 90^\circ - b$; dan is $cosec.a = cosec.(90^\circ - b) = sec.b$; $\tfrac{1}{2}a = 45^\circ - \tfrac{1}{2}b$, $cot.\tfrac{1}{2}a = cot.(45^\circ - \tfrac{1}{2}b)$ en $cot.a = cot.(90^\circ - b) = tang.b$; en wij verkrijgen dus $sec.b = cot.(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) - tang.b$.

§. 1015. **Aanmerking.** Volgens de V. *Stell.* VI. *B.*, is het vierkant van de zijde des regelmatigen vijfhoeks, in eenen cirkel beschreven, gelijk aan de som van de vierkanten, welke op de zijden van den regelmatigen zeshoek en tienhoek, in dienzelfden cirkel staande, zijn beschreven. Nu is de zijde van den regelmatigen vijfhoek $=$ *koorde* 72°; de zijde van den regelmatigen zeshoek $=$ *koorde* 60°, en de zijde van den regelmatigen tienhoek $=$ *koorde* 36°; daar nu, in het algemeen,

$$koord.a = 2\,sin.\tfrac{1}{2}a$$

$$koord^2.a = 4\,sin^2.\tfrac{1}{2}a$$

is, zoo hebben wij:

$$4\,sin^2.36^\circ = 4\,sin^2.30^\circ + 4\,sin^2.18^\circ$$

dat is, omdat $sin.30^\circ = \tfrac{1}{2}$ en $sin^2.30^\circ = \tfrac{1}{4}$ is,

$$4\,sin^2.36^\circ = 1 + 4\,sin^2.18^\circ.$$

Nu is, in het algemeen, $4\,sin^2.a = 2 - 2\,cos.2a$; de laatste vergelijking zal derhalve worden:

$$2 - 2\,cos.72^\circ = 3 - 2\,cos.36^\circ$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$2\,cos.36^\circ - 2\,cos.72^\circ = 1$$

$$cos.36^\circ - cos.72^\circ = \tfrac{1}{2}$$

Aangezien nu $cos.36^\circ = sin.54^\circ$, en $cos.72^\circ = sin.18^\circ$ is, zoo wordt de laatste vergelijking:

$$sin.54^\circ - sin.18^\circ = \tfrac{1}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Laat nu, in de bekende vergelijking,

$$sin.(a + b) + sin.(a - b) = 2\,sin.a \times cos.b$$

eerst $a = 18^\circ$ en daarna $a = 54^\circ$ gesteld worden; dan verkrijgen wij:

 sin.

$$sin.(18^\circ + b) + sin.(18^\circ - b) = 2\, sin.\, 18^\circ \times cos.\, b$$
$$sin\,(54^\circ + b) + sin.(54^\circ - b) = 2\, sin.\, 54^\circ \times cos.\, b$$

en zoo men nu de eerste dezer vergelijkingen van de tweede aftrekt; dan zal men, met behulp van de vergelijking (a), verkrijgen:

$$sin.\,90^\circ - b) + sin.\,(18^\circ + b) + sin.\,(18^\circ - b) = \ldots\ldots$$
$$sin.\,(54^\circ + b) + sin.\,(54^\circ - b) \quad \ldots \quad (190)$$

door welke vergelijking eene berekende sinus-tafel, van het begin tot het einde, kan worden beproefd.

VI. *Over de* Differentien *der Goniometrische lijnen, en derzelver gebruik.*

§. 1016. Verklaringen. Door het teeken $\phi(x)$ verstaat men een getallen-vorm, welke, op eenigerlei wijze, uit het veranderlijke getal x een eenige standvastige getallen is zamengesteld. Zulk een veranderlijke getallen-vorm, noemt men *functie*. De letter ϕ beteekent *functie van het veranderlijke getal, dat tusschen twee haakjes staat* In het algemeene teeken $\phi(x)$ zijn alle vormen, als, bij voorbeeld, $a\,x$, $a\,x^n$, $\sqrt{(a + b\,x + c\,x^2)}$, $sin.\,x$, $tang.\,x$, $Log.\,x$, $Log.\,sin\,x$, *enz.* begrepen, in welke het getal x als verrnderlijk beschouwd wordt.

Stellen wij nu: dat, in de vergelijking $y = \phi(x)$, aan x waarden worden gegeven, die in eene rekenkunstige reeks opklimmen; te weten:

$$x,\ x + \Delta x,\ x + 2\Delta x,\ x + 3\Delta x,\ x + 4\Delta x,\ enz. \quad (A)$$

zijnde Δx (hetwelk gelezen wordt *differentie*, *verschil* of *aangroeijing* van x,) het verschil dezer rekenkunstige reeks; en dat de waarden van y of $\phi(x)$, met die aangenomene waarden van x overeenstemmende, door de getallen-reeks,

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ enz. \ldots\ldots \quad (B)$$

worde voorgesteld; zoodat $y_0 = \phi(x)$, $y_1 = \phi(x + \Delta x)$, $y_2 = \phi(x + 2\Delta x)$, *enz.* $y_n = \phi(x + n\Delta x)$ zij.

Indien wij dan, in de rij (B), den eersten term van den tweeden, en voorts elken term van den naastvolgenden aftrekken; dan verkrijgen wij:

$$-y_0 + y_1,\ -y_1 + y_2,\ -y_2 + y_3,\ -y_3 + y_4,\ enz.$$
$$-y_{n-1} + y_n \ldots\ldots\ldots \quad (C)$$

welke *de rij der eerste verschillen* of *eerste differentien* genoemd, en, in het vervolg, bij verkorting, aldus wordt voorgesteld:

Δy_0,

$\Delta y_0,\ \Delta y_1,\ \Delta y_2,\ \Delta y_3,\ \Delta y_4,$ *enz.* $\Delta y_{n-1}\ \ldots\ (C')$

zijnde derhalve $\Delta y_0 = -y_0 + y_1$, $\Delta y_1 = -y_1 + y_2$, *enz.*

Wanneer men verder de rij, (*C*) of (*C'*) der eerste verschillen, wederom, op dezelfde wijze, als de oorspronkelijke rij y_0, y_1, *enz.* behandelt; en dus elken term van dezelve van den volgenden term aftrekt; dan verkrijgt men de *rij der tweede verschillen*; namelijk:

$y_0 - 2y_1 + y_2,\ y_1 - 2y_2 + y_3,\ y_2 - 2y_3 + y_4,$ *enz.* (D)

of, dat hetzelfde is:

$-\Delta y_0 + \Delta y_1,\ -\Delta y_1 + \Delta y_2,\ -\Delta y_2 + \Delta y_3,$ *enz.* (D')

de termen van welke reeksen, bij verkorting, aldus worden voorgesteld:

$\Delta^2 y_0,\ \Delta^2 y_1,\ \Delta^2 y_2,\ \Delta^2 y_3,$ *enz.* $\ldots\ (D'')$

zijnde diensvolgens $\Delta^2 y_0 = y_0 - 2y_1 + y_2$, $\Delta^2 y_1 = y_1 - 2y_2 + y_3$, $\Delta^2 y_2 = y_2 - 2y_3 + y_4$, *enz.*

Uit de rij der tweede verschillen vormt men, op dezelfde wijze, de rij der derde, uit deze de rij der vierde verschillen, *enz.* Hiermede kan men tot in het oneindige voortgaan. Men heeft dan, ingevolge deze verklaring:

$$\begin{aligned}
\Delta y_0 &= -y_0 + y_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (P)\\
\Delta^2 y_0 &= +y_0 - 2y_1 + y_2\\
\Delta^3 y_0 &= -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3\\
\Delta^4 y_0 &= +y_0 - 4y_1 + 6y_2 - 4y_3 + y_4\\
\Delta^5 y_0 &= -y_0 + 5y_1 - 10y_2 + 10y_3 - 5y_4 + y_5\\
&\textit{enz.} \qquad\qquad \textit{enz.}
\end{aligned}$$

waaruit ligtelijk te zien is: dat, in het algemeen, zal zijn:

$$\Delta^n y_0 = \pm \left\{ y_0 - \frac{n}{1} y_1 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} y_3 + \textit{enz.} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_{n-2} - \frac{n}{1} y_{n-1} + y_n \right\} \ldots (Q)$$

Ook zal men, uit de vergelijkingen (*P*), gemakkelijk vinden:

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \Delta y_0\\
y_2 &= y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0\\
y_3 &= y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0
\end{aligned}$$

en, in het algemeen:

$$y_n = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\Delta^3 y_0 + \textit{enz.} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\Delta^{n-2} y_0 + \frac{n}{1}\Delta^{n-1} y_0 + \Delta^n y_0 \quad . (R)$$

De algemeene vergelijking (*Q*) *dient, om de nde differentie van eeni-*

eenige functie van x te vinden, en de vergelijking (R), om, uit de eerste, tweede en volgende differentien van die functie, den term of de waarde van y te vinden, die met $x + n\Delta x$ overeenstemt.

Uit het verklaarde blijkt: dat de eerste en volgende differentien van eenige functie van x aldus gevonden wordt.

Regel. *Om de eerste en volgende differentien van eene functie $y = \varphi(x)$ te vinden, stelle men in dezelve x achtervolgens gelijk aan x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$,* enz.; *dat is, men geve aan x waarden, die in eene rekenkunstige reeks van de eerste orde opklimmen; dan verkrijgt men zooveel verschillende waarden van $y = \varphi(x)$, die wij door*

$$y_0,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_5,\ y_6,\ y_7,\ y_8,\ \text{enz.}$$

zullen voorstellen; en nu is

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \Delta y_2 = y_3 - y_2,$$
$$\Delta y_3 = y_4 - y_3,\ \Delta y_4 = y_5 - y_4,\ \text{enz.}$$

voorts is

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2,$$
$$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3,\ \Delta^2 y_4 = \Delta y_5 - \Delta y_4,\ \text{enz.}$$

al verder is

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1,\ \Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2,$$
$$\Delta^3 y_3 = \Delta^2 y_4 - \Delta^2 y_3,\ \Delta^4 y_4 = \Delta^3 y_5 - \Delta^3 y_4,\ \text{enz.}$$

en, op die regelmatige wijze voortgaande, zal men de vierde en volgende differentien van $y = \varphi(x)$, hoedanige ook de vorm van die functie zou mogen zijn, verkrijgen. Het volgende Vraagstuk is eene toepassing van dien regel.

Evenwel kan de differentie van elke orde, door formule (Q), onmiddellijk worden berekend. De formule (R), dient voor de interpolatie; waarover in het vervolg nader.

XIII. Vraagstuk.

§. 1017. *Gegeven zijnde eene rij van bogen, x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x$,* enz. *die in eene rekenkunstige reeks opklimmen; de eerste, tweede en volgende differentien of verschillen van derzelver sinussen, cosinussen, tangenten en cotangenten te vinden?*

Oplossing. A. Volgens het verklaarde, is

$$\Delta \sin. x = \sin. (x + \Delta x) - \sin. x$$

dat is, zie VI. *Stell.*

$$\Delta \sin. x = 2 \cos. (x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \times \sin. \tfrac{1}{2}\Delta x \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Aan-

Aangezien nu deze vergelijking algemeen is, zoo kan men, in plaats van x, ftellen $x + \Delta x$; en dan verkrijgt men:

$$\Delta\, sin.\, (x + \Delta x) = 2\, cos.\, (x + 1\tfrac{1}{2} \Delta x) \times sin.\, \tfrac{1}{2} \Delta x \quad . \quad (b)$$

Uit deze vergelijkingen (a) en (b) verkrijgt men, omdat, overeenkomftig de opgegevene verklaring,

$$\Delta^2 .\, sin.\, x = \Delta\, sin.\, (x + \Delta x) - \Delta\, sin.\, x$$

is, wanneer men namelijk de vergelijking (a) van de vergelijking (b) aftrekt;

$$\Delta^2\, sin\, x = 2\, [cos.\, (x + 1\tfrac{1}{2} \Delta x) - cos.\, (x + \tfrac{1}{2} \Delta x)] \times sin.\, \tfrac{1}{2} \Delta x$$

uit welke laatfte vergelijking, met behulp van de VI. *Stell.* zal gevonden worden:

$$\Delta^2 .\, sin.\, x = -\, 2^2\, sin.\, (x + \Delta x) \times sin^2 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x \quad . \quad . \quad (c)$$

Men ftelle wederom, in deze laatfte, in plaats van x, de waarde $x + \Delta x$; dan wordt zij:

$$\Delta^2 .\, sin.\, (x + \Delta x) = -\, 2^2\, sin.\, (x + 2 \Delta x)\, sin^2 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x \quad . \quad (d)$$

en vermits nu, zie boven,

$$\Delta^3 .\, sin.\, x = \Delta^2 .\, sin.\, (x + \Delta x) - \Delta^2 .\, sin.\, x$$

is, zoo hebben wij:

$$\Delta^3 .\, sin.\, x = -\, 2^2\, [sin.\, (x + 2 \Delta x) - sin.\, (x + \Delta x)] \times sin.\, \tfrac{1}{2} x$$

dat is, volgens de VI. *Stelling*,

$$\Delta^3 .\, sin.\, x = -\, 2^3\, cos.\, (x + 1\tfrac{1}{2} \Delta x) \times sin^3 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x \quad . \quad (e)$$

Wanneer men verder, op deze wijze, voortwerkt; dan worden de eerfte en volgende differentiën van $sin.\, x$; als volgt:

$$\begin{aligned}
\Delta\, sin.\, x &= +\, 2\, cos.\, (x + \tfrac{1}{2} \Delta x) \times sin.\, \tfrac{1}{2} \Delta x \quad . \quad (191)\\
\Delta^2 .\, sin.\, x &= -\, 2^2\, sin.\, (x + \Delta x) \times sin^2 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x\\
\Delta^3 .\, sin.\, x &= -\, 2^3\, cos.\, (x + 1\tfrac{1}{2} \Delta x) \times sin^3 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x\\
\Delta^4 .\, sin.\, x &= +\, 2^4\, sin\, (x + 2 \Delta x) \times sin^4\, \tfrac{1}{2} \Delta x\\
\Delta^5 .\, sin\, x &= +\, 2^5\, cos.\, (x + 2\tfrac{1}{2} \Delta x) \times sin^5 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x\\
\Delta^6 .\, sin.\, x &= -\, 2^6\, sin.\, (x + 3 \Delta x) \times sin^6 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x\\
\Delta^7 .\, sin\, x &= -\, 2^7\, cos.\, (x + 3\tfrac{1}{2} x) \times sin^7 .\, \tfrac{1}{2} \Delta x\\
enz. &\qquad enz.
\end{aligned}$$

In deze vergelijkingen loopt de wet van opvolging zoo duidelijk in het oog, dat er, ter nadere verklaring van dezelve, niets bijgevoegd behoeft te worden.

Deze vergelijkingen (191) kunnen echter merkelijk vereenvoudigd, en, voor de berekening, onder een gefchikter vorm worden voorgefteld.

Onderftellende, dat $cos.\, x$, $sin.\, \tfrac{1}{2} \Delta x$ en $cos\, \Delta x$, door middel der vergelijkingen (173) en (174) in getallen berekend zijn; dan kan $\Delta\, sin.\, x = (x + \Delta x) - sin.\, x$ gemakkelijk onder eenen vorm worden gebragt, welke geheel van die bekende elementen afhangt; want, volgens de III. *Stelling*, is,

$$\Delta\, sin.\, x = sin.\, x\, cos.\, \Delta x + cos.\, x\, sin.\, \Delta x - sin.\, x$$

of, dat hetzelfde is

$$\Delta\, sin.\, x = cos.\, x\, sin.\, \Delta x - sin.\, x\, (1 - cos.\, \Delta x)$$

Aangezien nu $sin.\, \Delta x = 2\, sin.\, \frac{1}{2}\Delta x \times cos.\, \frac{1}{2}\Delta x$ en $1 - cos.\, \Delta x = 2\, sin^2.\, \frac{1}{2}\Delta x$ is, zoo wordt de voorgaaande vergelijking,

$$\Delta\, sin.\, x = [cos.\, x\, cos.\, \tfrac{1}{2}\Delta x - sin.\, x\, sin\, \tfrac{1}{2}\Delta x] \times (2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x)$$

De vergelijking (*a*), namelijk

$$\Delta\, sin.\, x = +2\, cos.\, (x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \times sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x$$

wordt, volgens de VI. *Stelling*, zoo als dan ook behoort,

$$\Delta\, sin\, x = sin.\, (x + \Delta x) - sin.\, x$$

uit welke dan onmiddellijk volgt:

$$sin.\, (x + \Delta x) = sin.\, x + \Delta\, sin.\, x$$

Vermenigvuldigt men deze laatste vergelijking met $-2^2\, sin^2.\, \frac{1}{2}\Delta x$, of, dat hetzelfde is, met $-(2\, sin.\, \frac{1}{2}\Delta x)^2$; dan verkrijgt men, zie de vergelijkingen (191),

$$\Delta^2.\, sin.\, x = -(sin.\, x + \Delta\, sin.\, x) \times (2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x)^2$$

Zoo men nu, op deze wijze, voortgaat met de vergelijkingen (191), door middel van de formulen, welke in de VI. *Stelling* betoogd zijn, te herleiden; dan verkrijgt men vooreerst:

$$\Delta\, sin.\, x = [cos.\, x\, cos.\, \tfrac{1}{2}\Delta x - sin.\, x\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x] \times (2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x) \quad (192)$$

en verder voor de tweede en volgende differentien van $sin.\, x$ de volgende regelmatige vergelijkingen

$$\begin{aligned} \Delta^2\, sin.\, x &= -(sin.\, x + \Delta\, sin.\, x)(2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x)^2 \quad (193)\\ \Delta^3\, sin\, x &= -(\Delta\, sin\, x + \Delta^2\, sin.\, x)(2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x)^2\\ \Delta^4\, sin.\, x &= -(\Delta^2\, sin.\, x + \Delta^3\, sin\, x)(2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x)^2\\ \Delta^5\, sin\, x &= -(\Delta^3\, sin.\, x + \Delta^4\, sin\, x)(2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x)^2\\ \Delta^6\, sin.\, x &= -(\Delta^4\, sin.\, x + \Delta^5\, sin.\, x)(2\, sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x)^2 \end{aligned}$$

enz. *enz.*

onder welken vorm de differentien van $sin.\, x$ (gegeven zijnde $sin.\, x$, $cos\, x$, $sin.\, \frac{1}{2}\Delta x$ en $cos.\, \frac{1}{2}\Delta$) het gemakkelijkst in getallen kunnen berekend worden.

B. De eerste en volgende differentien van $cos.\, x$ worden, op dezelfde wijze, als die van $sin.\, x$ gevonden; maar men vindt dezelve gemakkelijker, wanneer men, in de vergelijkingen (191), in plaats van x, neemt $90^0 - x$. Op de eene of andere manier zal men vinden:

$$\begin{aligned} \Delta\, cos.\, x &= -2\, sin.\, (x + \tfrac{1}{2}\Delta x) \times sin.\, \tfrac{1}{2}\Delta x \quad \ldots \quad (194)\\ \Delta^2\, cos.\, x &= -2^2\, cos.\, (x + \Delta x) \times sin^2.\, \tfrac{1}{2}\Delta x\\ \Delta^3\, cos.\, x &= +2^3\, sin.\, (x + \tfrac{1}{2}\, 1\tfrac{1}{2}\, x) \times sin^3.\, \tfrac{1}{2}\Delta x\\ \Delta^4\, cos.\, x &= +2^4\, cos.\, (x + 2\Delta x) \times sin^4.\, \tfrac{1}{2}\Delta x\\ \Delta^5\, cos.\, x &= -2^5\, siu.\, (x + 2\tfrac{1}{2}\Delta x) \times sin^5.\, \tfrac{1}{2}\Delta x \end{aligned}$$

enz. *enz.*

welke vergelijkingen wederom, op dezelfde wijze, als boven, in de volgende kunnen worden getransformeerd:

$\Delta\, cos.$

$$\Delta cos. x = -[cos. x\, sin. \tfrac{1}{2}\Delta x + sin. x\, cos. \tfrac{1}{2}\Delta x] \times (sin. \tfrac{1}{2}\Delta x) \quad (195)$$

en, verder voortgaande,

$$\Delta^2 cos. x = -(cos. x + \Delta cos. x)(2\, sin. \tfrac{1}{2}\Delta x)^2 \quad . \; . \quad (196)$$
$$\Delta^3 cos. x = -(\Delta cos. x + \Delta^2 cos. x)(2\, sin. \tfrac{1}{2}\Delta x)^2$$
$$\Delta^4 cos. x = -(\Delta^2 cos. x + \Delta^3 cos. x)(2\, sin. \tfrac{1}{2}\Delta x)^2$$
$$\Delta^5 cos. x = -(\Delta^3 cos. x + \Delta^4 cos. x)(2\, sin. \tfrac{1}{2}\Delta x)$$
$$enz \qquad\qquad enz.$$

C. De eerste differentie van *tang. x* is, volgens den Regel,

$$\Delta tang. x = tang. (x + \Delta x) - tang. x$$

dat is, volgens de IV. *Stelling*,

$$\Delta tang. x = \frac{tang. x + tang. \Delta x}{1 - tang. x \times tang. \Delta x} - tang. x$$

of, na verdere herleiding,

$$\Delta tang. x = \frac{tang. \Delta x}{cos^2. x} \times \frac{1}{1 - tang. x \times tang. \Delta x}$$

Aangezien nu, in het algemeen, $1:(1-z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 +$ *enz.* is, zoo wordt de laatste vergelijking:

$$\Delta tang. x = \frac{tang. \Delta x}{cos^2. x} \times \Big\{ 1 + tang. x \times tang. \Delta x + tang^2. x \times$$
$$tang^2. \Delta x + tang^3. x \times tang^3. \Delta x + tang^4. x \times tang^4. x + enz. \Big\} (197)$$

zullende de reeks, tusschen de twee accolades staande, zoo veel te sterker convergeren, naarmate Δx kleiner is.

Door deze vergelijking (197), zal, gegeven zijnde *cos x* en *tang. x* benevens *tang.* Δx, de differentie van *tang. x* worden berekend.

Men kan ook, even zoo als boven, voor *sin. x* en *cos. x* heeft plaats gehad, formulen voor de waarden van Δ^2 *tang. x*, Δ^3 *tang. x*, Δ^4 *tang. x* *enz.* zoeken; dan, daar deze een zeer zamengestelden vorm verkrijgen, zoo is het hier beter, om de tweede en volgende differentien aldus te berekenen.

Wanneer men de differentie van *tang. x*, door formule (197), gevonden heeft; dan zal

$$tang. (x + \Delta x) = tang. x + \Delta tang. x$$

bekend zijn. Men stelle nu, in formule (197), in plaats van x, $x + \Delta x$; dan wordt

$$\Delta tang. (x + \Delta x) = \frac{tang. \Delta x}{cos. (x + \Delta x)} \times \Big\{ 1 + tang. (x + \Delta x)$$
$$\times tang. \Delta x + tang^2. (x + \Delta x)\, tang^2. \Delta x + enz. \Big\}$$

en verder

$$tang. (x + 2\Delta x) = tang. (x + \Delta x) + \Delta tang. (x + \Delta x)$$

Neemt men, in formule (197), $x + 2\Delta x$, in plaats van x; dan zal men de waarde van Δ *tang.* $(x + 2\Delta x)$ verkrijgen.

Men vindt dus, door eene herhaling van dezelfde berekening:

$$\begin{aligned}
\text{tang}\,(x + \Delta x) &= \text{tang.}\,x + \Delta\,\text{tang.}\,x \quad \ldots\ldots \quad (a)\\
\text{tang.}\,(x + 2\Delta x) &= \text{tang.}\,(x + \Delta x) + \Delta\,\text{tang.}\,(x + \Delta x)\\
\text{tang.}\,(x + 3\Delta x) &= \text{tang.}\,(x + 2\Delta x) + \Delta\,\text{tang.}\,(x + 2\Delta x)\\
\text{tang.}\,(x + 4\Delta x) &= \text{tang.}\,(x + 3\Delta x) + \Delta\,\text{tang.}\,(x + 3\Delta x)\\
\text{tang.}\,(x + 5\Delta x) &= \text{tang.}\,(x + 4\Delta x) + \Delta\,\text{tang.}\,(x + 4\Delta x)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

Uit deze vindt men, door aftrekken:

$$\begin{aligned}
\Delta\,\text{tang.}\,x &= \text{tang.}\,(x + \Delta x) - \text{tang.}\,x \quad \ldots \quad (b)\\
\Delta\,\text{tang.}\,(x + \Delta x) &= \text{tang.}\,(x + 2\Delta x) - \text{tang.}\,(x + \Delta x)\\
\Delta\,\text{tang.}\,(x + 2\Delta x) &= \text{tang.}\,(x + 3\Delta x) - \text{tang.}\,(x + 2\Delta x)\\
\Delta\,\text{tang.}\,(x + 3\Delta x) &= \text{tang.}\,(x + 4\Delta x) - \text{tang.}\,(x + 3\Delta x)\\
\Delta\,\text{tang.}\,(x + 4\Delta x) &= \text{tang.}\,(x + 5\Delta x) - \text{tang.}\,(x + 4\Delta x)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

Uit de vergelijkingen (*b*) vindt men:

$$\begin{aligned}
\Delta^2\,\text{tang.}\,x &= \Delta\,\text{tang.}\,(x+\Delta x) - \Delta\,\text{tang.}\,x \quad \ldots \quad (c)\\
\Delta^2\,\text{tang.}\,(x+\Delta x) &= \Delta\,\text{tang.}\,(x+2\Delta x) - \Delta\,\text{tang.}\,(x+\Delta x)\\
\Delta^2\,\text{tang.}\,(x+2\Delta x) &= \Delta\,\text{tang.}\,(x+3\Delta x) - \Delta\,\text{tang.}\,(x+2\Delta x)\\
\Delta^2\,\text{tang.}\,(x+3\Delta x) &= \Delta\,\text{tang.}\,(x+4\Delta x) - \Delta\,\text{tang.}\,(x+3\Delta x)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

Uit de vergelijkingen (*c*) volgt wederom:

$$\begin{aligned}
\Delta^3\,\text{tang.}\,x &= \Delta^2\,\text{tang.}\,(x+\Delta x) - \Delta^2\,\text{tang.}\,x \quad \ldots \quad (d)\\
\Delta^3\,\text{tang.}\,(x+\Delta x) &= \Delta^2\,\text{tang.}\,(x+2\Delta x) - \Delta^2\,\text{tang}\,(x+\Delta x)\\
\Delta^3\,\text{tang.}\,(x+2\Delta x) &= \Delta^2\,\text{tang.}\,(x+3\Delta x) - \Delta^2\,\text{tang.}\,(x+2\Delta x)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

En, op dezelfde wijze, verder voortgaande,

$$\begin{aligned}
\Delta^4\,\text{tang.}\,x) &= \Delta^3\,\text{tang.}\,(x+\Delta x) - \Delta^3\,\text{tang.}\,x \quad , \ . \quad (e)\\
\Delta^4\,\text{tang.}\,(x+\Delta x) &= \Delta^3\,\text{tang.}\,(x+2\Delta x) - \Delta^3\,\text{tang.}\,(x+\Delta x)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

Uit deze laatste wederom:

$$\begin{aligned}
\Delta^5\,\text{tang.}\,x &= \Delta^4\,\text{tang.}\,(x+\Delta x) - \Delta^4\,\text{tang.}\,x \quad . \ . \quad (f)\\
\text{enz.} & \qquad \text{enz.}
\end{aligned}$$

D. Het berekenen van de eerste en volgende differentien van *cot.* x geschiedt op dezelfde wijze. Wij laten zulks aan den Lezer over.

§. 1018. AANMERKINGEN. 1°. Wanneer men aanneemt, dat Δx een zeer klein boogje (bij voorbeeld een boogje van ééne minuut of eenige weinige secunden) is; dan zijn de waarden van *sin.* Δx en *tang.* Δx, met betrekking tot den straal of de éénheid, zeer kleine breuken; en dan is uit den vorm der eerste, tweede en volgende differentien der go-

goniometrifche lijnen, ligtelijk in te zien, dat de tweede en volgende differentien van *sin. x*, *cos. x*, *tang. x* en *cot. x* weldra zoo klein zullen worden, dat zij minder zullen zijn, dan

0, 00000 00000 00001

zoodat de differentien van de volgende orden, zonder invloed op de naauwkeurigheid, als nul moeten worden aangemerkt.

2°. Indien men derhalve de finusfen, cofinusfen, tangenten en cotangenten, van graad tot graad, tot in tiendeeligen, van bij voorbeeld vijftien cijfers, berekend heeft; dan zal men die tafel, van tien tot tien fecunden, kunnen aanvullen, door eene eenvoudige optelling en aftrekking. Stel, bij voorbeeld, dat men, tusfchen 18° en 19°, de finusfen, cofinusfen, tangenten en cotangenten, van tien tot tien fecunden, wil aanvullen; dan is $x = 18°$, $\Delta x = 10''$. Men berekene nu, door middel der gezochte formulen (192)—(197), de waarden van Δ *sin. x*, Δ^2 *sin. x*, Δ^3 *sin. x enz.*, van Δ *cos. x*, Δ^2 *cos. x*, Δ^3 *cos. x enz.*, van Δ *tang. x*, Δ^2 *tang. x*, Δ^3 *tang. x*, *enz.* tot zoo ver dat de differentie van eenige orde kleiner worde dan

0, 00000 00000 00000 01

en dus kan worden verwaarloosd; dan zal men, naar de leerwijze, in de *Beginfelen der Stelkunst*, III. *Afdeel.* VIII. *Hoofdst.* §. 858 verklaard, de finusfen, cofinusfen, tangenten en cotangenten, van tien tot tien fecunden, verkrijgen. En dit zij genoeg, om den Lezer te doen opmerken, hoe fpoedig eene natuurlijke finus-tafel kan berekend worden.

VII. *Over het vinden van de* Logarithmen *der Goniometrifche lijnen.*

§. 1019. Vóór den tijd van de uitvinding der Logarithmen, in de eerfte helft der zeventiende eeuw, bediende men zich, in het berekenen der platte en bolvormige driehoeken, van de natuurlijke finustafel; doch die berekeningen waren, daar men met en door groote tiendeelige breuken moest vermenigvuldien en deelen, vermoeijend en langwijlig. Men heeft daarom de Logarithmen der getallen gezocht, welke de Goniometrifche lijnen der bogen, in het eerfte quadrant, van minuut tot minuut, of van tien tot tien fecunden voorftellen. Al die Logarithmen, in eene afzonderlijke tafel bij elkander gebragt, noemt men eene *Logarithmen-finus-tafel*, welke thans, in plaats van de natuurlijke finus-tafel, gebruikt wordt.

XIV. VRAAGSTUK.

§. 1020. *Eenige boog, in deelen van ftraal, gegeven zijnde, de Logarithmus van deszelfs finus en cofinus te vinden?*

Op-

Oplossing. Uit de gronden, welke wij, in onze *Beginfelen der Stelkunst*, III. *Afd.* VI. *Hoofdst.*, onder *Letter D*, *Bladz.* 473 breedvoerig hebben ontwikkeld, en welke men derhalve op die plaats kan nagaan, worden de twee volgende formulen afgeleid. Voor het vinden van den Logarithmus van de finus van eenen boog

$$
\begin{aligned}
Log.\,sin.\,m \times 90^{\circ} = {} & Log.\,m + Log.\,(4 - m^{2}) \;\ldots \\
& + 9,\,59405\;98857\;022 \quad - 0,\,07002\;28266\;059\,m^{2} \\
& - 0,\,00111\;72664\;417\,m^{4} - 0,\,00003\;92291\;465\,m^{6} \\
& - 0,\,00000\;17292\;708\,m^{8} - 0,\,00000\;00843\;630\,m^{10} \\
& - 0,\,00000\;00043\;487\,m^{12} - 0,\,00000\;00002\;319\,m^{14} \\
& - 0,\,00000\;00000\;127\,m^{16} - enz. \;\ldots\ldots \quad (198)
\end{aligned}
$$

en, voor het berekenen van de Logarithmus-cofinus van elken boog.

$$
\begin{aligned}
Log.\,cos.\,m \times 90^{\circ} = {} & Log.\,(1 - m^{2}) + 10 \;\ldots\ldots \\
& - 0,\,10149\;48593\;419\,m^{2} - 0,\,00318\;72940\;655\,m^{4} \\
& - 0,\,00020\;94858\;000\,m^{6} - 0,\,00001\;68483\;486\,m^{8} \\
& - 0,\,00000\;14801\;094\,m^{10} - 0,\,00000\;01365\;023\,m^{12} \\
& - 0,\,00000\;00129\;817\,m^{14} - 0,\,00000\;00012\;615\,m^{16} \\
& - 0,\,00000\;00001\;246\,m^{18} - 0,\,00000\;00000\;125\,m^{20} \\
& - 0,\,00000\;00000\;013\,m^{22} - enz. \;\ldots\ldots \quad (199)
\end{aligned}
$$

door welke twee reekfen de gewone of Briggiaanfche Logarithmus van de finusfen en cofinusfen van alle bogen in het eerfte quadrant vallende, even zoo gemakkelijk, als door de formulen (179) en (180) zie *Bladz.* 78, de natuurlijke finusfen en cofinusfen, kunnen berekend worden.

§. 1021. Aanmerkingen. 1°. Omdat de natuurlijke finusfen en cofinusfen van alle bogen, die geene veelvouden van 90° zijn, alsmede de tangenten der bogen, tusfchen 0° en 45°, en de cotangenten, tusfchen 45° en 90°, kleiner dan één zijn, zoo zouden de Logarithmen van fommige goniometrifche lijnen negatief en van andere pofitief zijn; hetgeen, in de getallen berekening der platte en bolvormige driehoeken, voor den min bedrevenen eene vermoeijende oplettenheid zou vorderen; men onderfteld daarom, dat de Logarithmen der finusfen, cofinusfen en der tangenten, tusfchen 0° en 45° en der cotangenten van 45° tot 90°, met het getal *tien* verhoogd zijn; en hierdoor zijn de Logarithmen der goniometrifche lijnen, zonder onderfcheid alle pofitief; doch men moet hier wel bedenken, dat van de Logaritmen der finusfen en cofinusfen uit de tafel genomen, als ook van de Logarithmen tangenten tusfchen 0° en 45° en van de Logarithmen cotangenten tusfchen 45° en 90°, het getal tien in de gedachte moet worden afgetrokken; zoo dat men, bij voorbeeld, in plaats van $Log.\,sin.\,10^{\circ} = 9,\,2396702$ lezen of denken moet $Log.\,sin.\,10^{\circ} = 9,\,2396702 - 10$. Die inrigting der Logarithmen finustafelen moet men beftendig voor oogen houden, zal men grondig verftaan, hoe men werkt.

2°. Men

2°. Men zal door de reeksen (198) en (199) de Logarithmen van de sinusfen en cosinusfen, van graad tot graad, zeer gemakkelijk kunnen berekenen; in welke berekening men natuurlijk niet verder dan tot 45° zal behoeven te gaan.

Om de Logarithmus van de sinus en cosinus van 45° te vinden, zal men $m = \frac{1}{2}$ moeten stellen. Wil men nu die berekende Logarithmen der sinusfen en cosinusfen beproeven, zoo zal zulks, door de formule

$$Log. sin. 2a = 0,\ 30102\ 99956\ 64 + Log. sin. a + Log. cos. a \quad (200)$$

welke uit de zoo zeer bekende formule $sin. 2a = 2 sin. a \times cos. a$ is afleid, kunnen geschieden.

3°. Men stelle

$$\frac{tang. b}{tang. a} = p, \text{ en } tang. a \times tang. b = q$$

dan zullen de twee formulen:

$$Log. sin. (a + b) = Log. sin. a + Log. cos. b + \ldots\ldots$$
$$M \times (p - \tfrac{1}{2} p^2 + \tfrac{1}{3} p^3 - \tfrac{1}{4} p^4 - \tfrac{1}{5} p^5 - \tfrac{1}{6} p^6 - enz.) \quad . \ (201)$$
$$Log. cos. (a + b) = Log. cos. a + Log. cos. b + \ldots\ldots$$
$$M \times (q + \tfrac{1}{2} q^2 + \tfrac{1}{3} q^3 + \tfrac{1}{4} q^4 + \tfrac{1}{5} q^5 + \tfrac{1}{6} q^6 + enz.) \quad . \ (202)$$

kunnen dienen, om, gegeven zijnde de Logarithmen van de sinus en de cosinus van a en b, de Logarithmen van de sinus en cosinus van $a + b$ te vinden; zijnde in deze formulen

$$M = 0,\ 43429\ 44819\ 03251\ 82765$$

4°. Bijzondere formulen, om de Logarithmen der tangenten, cotangenten, secanten en cosecanten te berekenen, kunnen wel gevonden worden; maar zij zijn onnoodig; want, wanneer men de bekende formulen

$$tang. a = \frac{sin. a}{cos. b},\ cot. a = \frac{cos. a}{sin. a},\ tang. a \times cot. a = 1,$$

$$sec. a = \frac{1}{cos. a},\ \text{en}\ cosec. a = \frac{1}{sin. a}$$

in Logarithmen overbrengt, dan verkrijgt men:

$$Log. tang. a = Log. sin. a - Log. cos. a \quad . \ . \ . \quad (203)$$
$$Log. cot. a = Log. cos. a - Log. sin. a \quad . \ . \ . \quad (204)$$
$$Log. cot. a = - Log. tang. a \quad . \ . \ . \ . \quad (205)$$
$$Log. sec. a = - Log. cos. a \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (206)$$
$$Log. cosec. a = - Log. sin. a \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (207)$$

uit welke formulen blijkt: 1°. *dat het genoeg is de logarithmen der sinusfen en cosinusfen te kennen, om die der andere goniometrische lijnen onmiddellijk te vinden;* 2°. *dat de som van de Logarithmen der tangens en cotangens van denzelfden boog altijd en overal gelijk nul is;* 3°. *dat wanneer men, in eenige berekening, den Logarithmus van de secans of van de cosecans van eenigen boog noodig heeft, men denzelven zal vinden, door den Logarithmus van de cosinus of sinus van dien*

dien boog van nul af te trekken; om welke reden dan ook de Logarithmen der secanten en cosecanten, om plaats uit te sparen, in de meeste tafels, zijn achterwege gelaten.

VIII. *Iets over het gebruik der onbestaanbare getallen-vormen in de Goniometrie.*

§. 1022. Men weet, dat een getallen-vorm onbestaanbaar wordt, wanneer in denzelven eenigen term, factor of element voorkomt, dat van eene tweede of evene magts-wortel uit een negatief getal afhangt; alzoo zijn $a\sqrt{-1}$, $a+b\sqrt{-1}$ onbestaanbare vormen. Alhoewel nu die onbestaanbare vormen een onmogelijk iets voorstellen, kunnen zij echter, naar de bekende regels, even als de bestaanbare, behandeld worden; en alles, wat uit dezelve, of met behulp van dezelve, naar die regels, wordt afgeleid, is dan even wettig en waar, als hetgeen uit de bestaanbare volgt; zoo als de Lezer zich daarvan, uit het volgende, zal kunnen overtuigen.

§. 1023. Aanmerking. Offchoon de getallen-vorm a^2+b^2 geene bestaanbare deelers heeft, zoo is echter (gelijk men, uit de beginselen der Stelkunst, weet)

$$a^2+b^2=(a+b\sqrt{-1})\times(a-b\sqrt{-1})$$

want, wanneer men $a+b\sqrt{-1}$, met $a-b\sqrt{-1}$ vermenigvuldigt; dan is het product a^2+b^2.

Hieruit volgt dan al ten eersten: dat

$$\sin^2.x+\cos^2.x=(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})=1 \quad\ldots\ldots\quad (208)$$

zal moeten zijn.

XIV. Stelling.

§. 1024. *Voor elke geheele en positieve waarde van n, bestaan deze twee vergelijkingen:*

$$(\cos.x+\sin.x\sqrt{-1})^n=\cos.nx+\sin.nx\sqrt{-1} \quad .\ (209)$$

$$(\cos.x-\sin.x\sqrt{-1})^n=\cos.nx-\sin.nx\sqrt{-1} \quad .\ (210)$$

Betoog. Men vermenigvuldige den onbestaanbaren vorm $\cos.p+\sin.p\sqrt{-1}$ met $\cos.q+\sin.q\sqrt{-1}$; dan wordt het product:

$$\cos.p\cos.q+\sin.p\cos.q\sqrt{-1}-\sin.p\sin.q+\sin.q\cos.p\sqrt{-1}$$

dat is, omdat $\cos.p\cos.q-\sin.p\sin.q\ \cos.(p+q)$; en $\sin.p\cos.q+\sin.q\cos.q=\sin.(p+q)$ is,

$$(\cos.p+\sin.p\sqrt{-1})(\cos.q+\sin.q\sqrt{-1})=\cos(p+q)+\sin.(p+q)\sqrt{-1}$$

Ver-

Vermenigvuldigt men deze laatste vergelijking met $\cos. r + \sin. r \sqrt{-1}$; dan zal men, om dezelfde reden, verkrijgen:

$$(\cos. p + \sin. p \sqrt{-1})(\cos q + \sin. p \sqrt{-1})(\cos. r + \sin. r \sqrt{-1}) = \cos. (p + q + r) + \sin. (p + q + r) \sqrt{-1}$$

En hieruit blijkt overtuigend genoeg, dat, wanneer men de gelijkvormige factoren,

$$\begin{array}{l} \cos. p + \sin. p \sqrt{-1} \\ \cos. q + \sin. q \sqrt{-1} \\ \cos. r + \sin. r \sqrt{-1} \\ \cos. s + \sin. s \sqrt{-1} \\ \cos. t + \sin. t \sqrt{-1} \\ \cos. u + \sin. u \sqrt{-1} \\ \text{enz.} \end{array}$$

hoe veel derzelver aantal mogte zijn, met elkander vermenigvuldigt, het product gelijk zal zijn aan

$$\cos. (p + q + r + s + t + u + \text{enz.}) + \sin. (p + q + r + s + u + \text{enz.}) \sqrt{-1}$$

Men stelle nu $p = q = r = s = t = u = \text{enz.} = x$; dan verkrijgt men, n een geheel getal zijnde,

$$(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^n = \cos. n x + \sin. n x \sqrt{-1}$$

en wanneer men, in deze laatste, $\sin. x$ negatief neemt:

$$(\cos. x - \sin. x \sqrt{-1})^n = \cos. n x - \sin. n x \sqrt{-1}$$

§. 1025. GEVOLG. De halve som en het halve verschil der formulen (209) en (210) zal geven:

$$\cos. n x = \frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^n + (\cos. x - \sin. x \sqrt{-1})^n}{2} \quad (211)$$

$$\sin. n x = \frac{(\cos x + \sin. x \sqrt{-1})^n - (\cos. x - \sin. x \sqrt{-1})^n}{2 \sqrt{-1}} \quad (212)$$

Nog zal men, uit dezelfde formulen (209) en (210), ligtelijk vinden:

$$\cos. x = \frac{(\cos. n x + \sin n x \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} + (\cos. n x - \sin. n x \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}}{2} \quad (213)$$

$$\sin. x = \frac{(\cos. n x + \sin. r x \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - (\cos. n x - \sin. n x \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}}{2 \sqrt{-1}} \quad (214)$$

Niettegenstaande nu de achterste leden der vier laatste vergelijkingen onbestaanbare functien zijn, zoo zal men nogtans al de formulen, die wij in het II en III. *Vraagstuk* gevonden hebben, uit dezelve kunnen afleiden; hetgeen wij verder aan den Lezer overlaten.

XV.

XV. STELLING.

§. 1026. *Indien e het grondtal of de basis der Neperiaansche Logarithmen beteekent, zijnde*

$$e = 2,\ 71828\ 18284\ 59045\ 23536, \text{ enz.}$$

dan zullen de cosinus en sinus van eenigen boog door de zeer merkwaardige onbestaanbare vormen,

$$\cos. x = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} \quad \ldots\ldots \quad (215)$$

$$\sin. x = \frac{e^{z-\sqrt{1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots \quad (216)$$

worden voorgesteld.

BETOOG. In de Beginselen der Stelkunst, *III. Afdeel. III. Hoofdst.*, §. 797, *Bladz.* 448, is bewezen: dat

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{enz.}$$

is.

Men stelle, in deze tot in het oneindige voortloopende reeks, eerst $z = x\sqrt{-1}$; dan is $z^2 = -x^2$, $z^3 = -x^3\sqrt{-1}$, $z^4 = x^4$, $z^5 = x^5\sqrt{-1}$, $z^6 = -x^6$, $x^7 = -x^7\sqrt{-1}$, *enz.* en men heeft dus:

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} - \text{enz.} \quad .\ . \quad (a)$$

Stelt men, in diezelfde reeks, $z = -x\sqrt{-1}$, dan is $z^2 = -x^2$, $z^3 = +x^3\sqrt{-1}$, $z^4 = x^4$, $z^5 = -x^5\sqrt{-1}$, *enz.* en de reeks zal in dit geval worden:

$$e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \frac{x^7\sqrt{-1}}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{enz.} \quad . \quad (b)$$

Men neme nu de halve som en het halve verschil der vergelijkingen (*a*) en (*b*); dan zal men verkrijgen:

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{enz.}$$

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{enz.}$$

gevolgelijk is, zie V. *Vraagstuk:*

$\cos. x$

$$cos.\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \text{ en } sin.\, x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

§. 1027. I. GEVOLG. Wanneer men, uit de betoogde vergelijkingen (215) en (216), $e^{x\sqrt{-1}}$ en $e^{-x\sqrt{-1}}$ oplost; dan zal men vinden, de formulen:

$$cos.\, x + sin.\, x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots \quad (217)$$
$$cos.\, x - sin.\, x\sqrt{-1} = e^{-x\sqrt{-1}} \quad \ldots \quad (218)$$

welker product, zoo als behoort, worden zal, $cos^2.\, x + sin^2.\, x = 1$.

§. 1028. II. GEVOLG. Verheft men de twee laatste vergelijkingen (217) en (218) tot de magt n; dan verkrijgt men:

$$(cos.\, x + sin.\, x\sqrt{-1})^n = e^{nx\sqrt{-1}}$$
$$(cos.\, x - sin.\, x\sqrt{-1})^n = e^{-nx\sqrt{-1}}$$

en, stelt men, in diezelfde vergelijkingen, in plaats van x, het getal nx; dan wordt

$$cos.\, nx + sin.\, nx\sqrt{-1} = e^{nx\sqrt{-1}}$$
$$cos.\, nx - sin.\, nx\sqrt{-1} = e^{-nx\sqrt{-1}}$$

waaruit dan onmiddellijk volgt:

$$(cos.\, x + sin.\, x\sqrt{-1})^n = cos.\, nx + sin.\, nx\sqrt{-1}$$
$$(cos\, x - sin.\, x\sqrt{-1})^n = cos.\, nx - sin.\, nx\sqrt{-1}$$

hetwelk overeenkomt met hetgeen, in de XIV. *Stelling*, betoogd is.

§. 1029. III. GEVOLG. Deelt men de formule (217), door de formule (218); dan zal men, volgens de regels op de vermenigvuldiging en deeling der magten, verkrijgen:

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{cos.\, x + sin.\, x\sqrt{-1}}{cos.\, x - sin.\, x\sqrt{-1}} = \frac{1 + tang.\, x\sqrt{-1}}{1 - tang.\, x\sqrt{-1}}$$

welke vergelijking, in Neperiaansche Logarithmen overgebragt zijnde, (omdat e het grondtal van die Logarithmen is, en, in elk Logarithmenstelsel, de Logarithmus van het grondtal gelijk aan de éénheid is,) geven zal:

$$2x\sqrt{-1} = Nep.\, Log. \frac{1 + tang.\, x\sqrt{-1}}{1 - tang.\, x\sqrt{-1}} \quad \ldots \quad (A)$$

Nu is, *Beg. Stelk. III. Hoofdst. III. Afd.*, §. 778, *Bladz.* 443, bewezen, dat

$$Nep.\, Log. \frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \tfrac{1}{3} z^3 + \tfrac{1}{5} z^5 + \tfrac{1}{7} z^7 + enz.\right)$$

is. Stellen wij derhalve $z = tang.\, x\sqrt{-1}$; dan is $z^2 = -tang^2.\, x$, $z^3 = -tang^3.\, x\sqrt{-1}$, $z^5 = +tang^5.\, x\sqrt{-1}$, $z^7 = -tang^7.\, x\sqrt{-1}$, $z^9 = +tang^9.\, x\sqrt{-1}$, *enz.* en wij verkrijgen derhalve:

$$Nep.\, Log. \frac{1 + tang.\, x\sqrt{-1}}{1 - tang.\, x\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}\,[tang.\, x - \tfrac{1}{3} tang^3.\, x \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{5} tang^5.\, x - \tfrac{1}{7} tang^7.\, x + \tfrac{1}{9} tang^9.\, x - enz.]$$

de vergelijking (A) wordt gevolgelijk:

$$2x\sqrt{-1} = 2\sqrt{-1}\,[tang.\,x - \tfrac{1}{3}\,tang^3.\,x + \tfrac{1}{5}\,tang^5.\,x - enz.]$$

en, deelt men deze laatste nu door $2\sqrt{-1}$; dan verkrijgt men:

$$x = tang.\,x - \tfrac{1}{3}\,tang^3.\,x + \tfrac{1}{5}\,tang^5.\,x - enz.$$

zijnde deze dezelfde reeks, die wij, in het IX. *Vraagstuk*, langs een geheel anderen weg, gevonden hebben.

XV. VRAAGSTUK.

§. 1030. *Uit de vergelijking*

$$tang.\,y = \frac{a\,sin.\,x}{1 - a\,cos.\,x}$$

den boog y, in deelen van den straal, op te losfen?

OPLOSSING. Omdat de gegevene vergelijking, onder den vorm

$$\frac{sin.\,y}{cos.\,y} = \frac{a\,sin.\,x}{1 - a\,cos.\,x}$$

kan worden voorgesteld, zoo stelle men in dezelve, voor *sin. y*, *cos. y*, *sin. x* en *cos. x*, de onbestaanbare waarden, in de formulen (215) en (216) voorkomende; dan heeft men:

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} \times \frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{\frac{1}{2}(e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}})} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdots\cdots$$
$$\times \frac{a(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}{1 - \frac{1}{2}a(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})}$$

welke vergelijking, indien men dezelve eerst door $\frac{1}{2\sqrt{-1}}$ deelt, en dan nog met 2 vermenigvuldigt, den meer eenvoudigen vorm

$$\frac{e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}}} = \frac{a(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}})}{2 - a(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})}$$

zal verkrijgen.

Om nu, uit deze vergelijking, op de gemakkelijkste wijze, y op te losfen, zoo stelle men $e^{y\sqrt{-1}} = p$ en $e^{x\sqrt{-1}} = q$; dan is $e^{-y\sqrt{-1}} = \frac{1}{p}$ en $e^{-x\sqrt{-1}} = \frac{1}{q}$; en nu verkrijgt zij deze meer eenvoudige gedaante:

$$\frac{p - \frac{1}{p}}{p + \frac{1}{p}} = \frac{a\left(q - \frac{1}{q}\right)}{2 - a\left(q + \frac{1}{q}\right)}$$

welke nog eenvoudiger wordt, wanneer men teller en noemer van de eerste breuk met p, en die van de tweede breuk met q vermenigvuldigt; namelijk

$$\frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} = \frac{a(q^2 - 1)}{2q - a(q^2 + 1)}$$

Om

Om nu, uit deze laatste vergelijking, q^2 op te losfen, zoo vermenigvuldige men dezelve met het product van de noemers der breuken; dan zal men vinden:

$$a(q^2-1)p^2+a(q^2-1)=[2q-a(q^2+1)]p^2-2q+a(q^2+1)$$

of, indien men al de termen, in welke q^2 voorkomen, in het voorste lid der vergelijking vereenigt,

$$[a(q^2-1)-2q+a(q^2+1)]p^2=-a(q^2+1)-2q+a(q^2+1)$$

of, bij nadere ontwikkeling,

$$(aq^2-a-2q+aq^2+a)p^2=-aq^2-a-2q^2+aq^2+a$$

en, na verdere herleiding,

$$2(aq^2-q)p^2=2(a-q)$$

Men deele eindelijk deze vergelijking door $2q$; dan zal men, na de teekens omgekeerd te hebben, verkrijgen:

$$(1-aq)p^2=1-\frac{a}{q}$$

$$p^2=\frac{1-\frac{a}{q}}{1-aq}$$

Men stelle nu, in deze laatste vergelijking, $p=e^{y\sqrt{-1}}$ en $q=e^{x\sqrt{-1}}$; dan wordt zij, aangezien $p^2=e^{2y\sqrt{-1}}$ is,

$$e^{2y\sqrt{-1}}=\frac{1-ae^{-x\sqrt{-1}}}{1-ae^{x\sqrt{-1}}}$$

Alhoewel nu deze vergelijking, uit onbestaanbare vormen is zamengesteld, kan echter de waarde van y, door middel der Logarithmen, uit dezelve worden opgelost.

Want, indien men deze vergelijking in Neperiaansche Logarithmen overbrengt; dan verkrijgt men:

$$2y\sqrt{-1}=N.\,Log.\,(1-ae^{-x\sqrt{-1}})-N.\,Log.\,(1-ae^{x\sqrt{-1}})$$

Nu is, in de *Beginf. der Stelk.*, *III. Hoofdst. III. Afdeel.*, §. 788, *Bladz.* 443, bewezen, dat, in het algemeen,

$$N.\,Log.\,(1-z)=-(z+\tfrac{1}{2}z^2+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{4}z^4+\tfrac{1}{5}z^5+enz.)$$

is. Stelt men nu, in deze reeks, eerst $z=ae^{-x\sqrt{-1}}$; dan wordt $z^2=a^2e^{-2x\sqrt{-1}}$, $z^3=a^3e^{-3x\sqrt{-1}}$, $z^4=a^4e^{-4x\sqrt{-1}}$, enz. en wij hebben derhalve:

$$N.\,Log.\,(1-ae^{-x\sqrt{-1}})=-[ae^{-x\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{2}a^2e^{-2x\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{3}a^3e^{-3x\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{4}a^4e^{-4x\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{5}a^5e^{-5x\sqrt{-1}}+enz.]\quad(a)$$

en stelt men verder in dezelve $z=ae^{x\sqrt{-1}}$; dan wordt

$$N.\,Log.\,(1-ae^{x\sqrt{-1}})=-[ae^{x\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{2}a^2e^{2x\sqrt{-1}}\ \ldots + \tfrac{1}{3}a^3e^{3x\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{4}a^4e^{4x\sqrt{-1}}+\tfrac{1}{5}a^5e^{5x\sqrt{-1}}+enz.]\ \ldots\ (b)$$

Men trekke nu de vergelijking (b) van de vergelijking (a) af; dan verkrijgt men eindelijk, na alles door $2\sqrt{-1}$ gedeeld te hebben:

$$y = a \times \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}a^2 \times \frac{e^{2x\sqrt{-1}} - e^{-2x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$
$$+ \tfrac{1}{3}a^3 \times \frac{e^{3x\sqrt{-1}} - e^{-3x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{4}a^4 \times \frac{e^{4x\sqrt{-1}} - e^{-4x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$
$$+ \tfrac{1}{5}a^5 \times \frac{e^{5x\sqrt{-1}} - e^{-5x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \text{enz.}$$

dat is, volgens formule (216),

$$y = a\, sin.\, x + \tfrac{1}{2} a^2\, sin.\, 2\, x + \tfrac{1}{3} a^3\, sin.\, 3\, x + \tfrac{1}{4} a^4\, sin.\, 4\, x$$
$$+ \tfrac{1}{5} a^5\, sin.\, 5\, x + \tfrac{1}{6} a^6\, sin.\, 6\, x + enz. \quad . \;.\; . \quad (219)$$

welke reeks, waardoor de waarde van y, in deelen van den ftraal, wordt voorgefteld, tot in het oneindige voortloopt, des te fterker convergeert, naarmate a een kleiner gebroken is.

§. 1031. Aanmerking. Dat deze fraaije reeks (219), van welke wij meermalen zullen gebruik maken, niet tegenftaande zij door middel der onbeftaanbare vormen gevonden is, met de waarheid overeenkomt, zal blijken, wanneer men het laatfte lid der vergelijking,

$$tang.\, y = \frac{a\, sin.\, x}{1 - a\, cos.\, x}$$

in eene rij ontwikkelt, (wanneer men verkrijgen zal)

$$tang.\, y = a\, sin.\, x + a^2\, sin.\, x\, cos.\, x + a^3.\, sin.\, x\, cos^2.\, x + a^4\, sin.\, x\, cos^4.\, x$$
$$+ a^5.\, sin.\, x\, cos^5.\, x + a^6\, sin.\, x\, cos^6.\, x + enz.$$

Zoekt men uit deze reeks de waarden van $tang^3.y$, $tang^5.y$, $tang^7.y$, *enz.* en brengt men deze alle in de bekende reeks

$$y = tang.\, y - \tfrac{1}{3}\, tang^3.\, y + \tfrac{1}{5}\, tang^5.\, y - \tfrac{1}{7}\, tang^7.\, y + enz.$$

over; dan zal men, na eene langwijlige herleiding, de eerfte termen van de reeks (219) verkrijgen, zonder dat, uit de wijze van ontwikkeling, duidelijk blijken zal, dat de wet van voortgang, die men in de eerfte termen der reeks ontdekt, onafgebroken zal blijven ftand grijpen.

§. 1032. Gevolg. Wanneer men, in de ontwikkelde vergelijking,

$$tang.\, y = \frac{a\, sin.\, x}{1 - a\, cos.\, x}$$

het ftandvastige getal a negatief neemt; dan verkrijgt men:

$$tang.\, y = \frac{-a\, sin.\, x}{1 + a\, cos.\, x} = -\frac{a\, sin.\, x}{1 + a\, cos.\, x}$$

maar nu wordt $tang.\, y$, en gevolgelijk y negatief; terwijl de reeks (219), wegens de negatief gewordene waarde van y, den vorm

$$y = -a\, sin.\, x + \tfrac{1}{2} a^2\, sin.\, 2\, x - \tfrac{1}{3} a^3\, sin.\, 3\, x + \tfrac{1}{4} a^4\, sin.\, 4\, x - enz.$$

zal aannemen; en hieruit volgt dan, dat uit

$$tang.\, y = \frac{a\, sin.\, x}{1 + a\, cos.\, x}$$

zal volgen:

$$y = a\, sin.\, x - \tfrac{1}{2} a^2\, sin.\, 2\, x + \tfrac{1}{3} a^3\, sin.\, 3\, x - enz.$$

en

enuit dit alles kan men dan, in het algemeen besluiten: *dat uit de vergelijking*

$$tang.\, y = \frac{a \sin. x}{1 \mp a \cos. x}$$

zal volgen:

$$y = a \sin. x \pm \tfrac{1}{2} a^2 \sin. 2x + \tfrac{1}{3} a^3 \sin. 3x \pm \tfrac{1}{4} a^4 \sin. 4x + \tfrac{1}{5} a^5 \sin^5. 5x \pm \tfrac{1}{6} a^6 \sin. 6x + enz. \quad . \; . \; . \quad (220)$$

van welke reeks wij, in het vervolg, dikwijls zullen gebruik maken.

XVI. Vraagstuk.

§. 1033. *Uit de vergelijking*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos. p$$

de waarde van den Neperiaanschen Logarithmus van c, in eene reeks, te ontwikkelen?

Oplossing. Indien men de onbestaanbare tweeledige vormen $a - b e^{p\sqrt{-1}}$ en $a - b e^{-p\sqrt{-1}}$, in welke de letter e het grondtal der Neperiaansche Logarithmen voorstelt, met elkander vermenigvuldigt; dan is het product:

$$a^2 - ab(e^{p\sqrt{-1}} + e^{p-\sqrt{-1}}) + b^2$$

maar nu is, zie formule (215), $e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}} = 2 \cos p$; het product van gezegde factoren is dan eindelijk:

$$a^2 - 2ab \cos. p + b^2$$

waaruit dan blijkt, dat de gestelde vergelijking, onder dezen onbestaanbaren vorm,

$$c^2 = (a - b e^{p\sqrt{-1}}) \times (a - b e^{-p\sqrt{-1}})$$

kan worden voorgesteld.

In Neperiaansche Logarithmen, is zij

$$2\, N. Log.\, c = N. Log. (a - b e^{p\sqrt{-1}}) + N. Log. (a - b e^{-p\sqrt{-1}}) \quad (a)$$

Nu is, zie *Beg. Stelk., II. Hoofdst. III. Afd.*, §. 792, *Bladz.* 445,

$$N. Log. (a - x) = N. Log.\, a - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} - enz.$$

Stelt men derhalve, in deze reeks, eerst $x = e^{p\sqrt{-1}}$, en dan wederom $x = e^{-p\sqrt{-1}}$; dan verkrijgt men:

$$N. Log. (a - b e^{p\sqrt{-1}}) = N. Log.\, a - \frac{b}{a} e^{p\sqrt{-1}} - \frac{b^2}{2a^2} e^{2p\sqrt{-1}} - \frac{b^3}{3a^3} e^{3p\sqrt{-1}} - \frac{b^4}{4a^4} e^{4p\sqrt{-1}} - \frac{b^5}{5a^5} e^{5p\sqrt{-1}} - enz. \quad (b)$$

$$N. Log. (a - b e^{-p\sqrt{-1}}) = N. Log.\, a - \frac{b}{a} e^{-p\sqrt{-1}} \; . \; . \; . \; .$$

$$-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2p\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3p\sqrt{-1}}-\frac{b^4}{4a^4}e^{-4p\sqrt{-1}}\ldots$$

$$-\frac{b^5}{5a^5}e^{-5p\sqrt{-1}}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (c)$$

telt men deze reeksen (*b*) en (*c*) bij elkander, en neemt men de helft van de som; dan zal men, volgens de vergelijking (*a*), verkrijgen:

$$N.\,Log.\,c=N.\,Log.\,a-\frac{b}{a}\times\frac{e^{p\sqrt{-1}}+e^{-p\sqrt{-1}}}{2}-\frac{b^2}{2a^2}$$
$$\times\frac{e^{2p\sqrt{-1}}+e^{-2p\sqrt{-1}}}{2}+\frac{b^3}{3a^3}\times\frac{e^{3p\sqrt{-1}}+e^{-3p\sqrt{-1}}}{2}$$
$$-\frac{b^4}{4a^4}\times\frac{e^{4p\sqrt{-1}}+{}^{-4p\sqrt{-1}}}{2}-\text{enz.}$$

Neemt men nu in aanmerking, dat, in het algemeen, $\frac{1}{2}(e^{z\sqrt{-1}}+e^{-z\sqrt{-1}})=\cos.z$ is, zoo ziet men, dat de laatste vergelijking wordt:

$$N.\,Log.\,c=N.\,Log.\,a-\frac{b}{a}\cos.p-\frac{b^2}{2a^2}\cos.2p-\frac{b^3}{3a^3}\cos.3p$$
$$-\frac{b^4}{4a^4}\cos.4p-\frac{b^5}{5a^5}\cos.5p-\frac{b^6}{6a^6}\cos.6p-\text{enz.}\quad(221)$$

Wil men die vergelijking in gewone Briggiaansche Logarithmen voorstellen; dan moet men dezelve met

$$M=0,\ 43429\ \ 44813\ \ 03251\ \ 83$$

vermenigvuldigen, en dan is,

$$Log.\,c=Log.\,a-M\times\left\{\frac{b}{a}\cos.p+\frac{b^2}{2a^2}\cos.2p+\frac{b^3}{3a^3}\cos.3p\right.$$
$$\left.+\frac{b^4}{4a^4}\cos.4p+\frac{b^5}{5a^5}\cos.5p+\text{enz.}\right\}\quad\ldots\quad(222)$$

zijnde de gewone Briggiaansche Logarithmus van den modulus

$$Log.\,M=9,\ 63778\ \ 43113\ \ 00536\ \ 78-10$$

Deze reeksen (221) of (222) convergeren des te sterker, naarmate het gebroken $a:b$ kleiner is.

§. 1034. Aanmerking. Men zou, niet zonder veel moeijelijke substitutien, de reeksen (221) en (222), welke wij in het vervolg meermalen zullen gebruiken, langs andere wegen vinden.

§. 1035. Gevolg. *Men zal, uit de vergelijking,*

$$c^2=a^2+b^2+2ab\cos.p$$

door eene dergelijke herleiding te volgen, verkrijgen:

$$Log.\,c=Log.\,a+M\times\left\{\frac{b}{a}\cos.p-\frac{b^2}{2a^2}\cos.2p+\frac{b^3}{3a^3}\cos 3p\right.$$
$$\left.-\frac{b^4}{4a^4}\cos.4p+\frac{b^5}{5a^5}\cos.5p-\frac{b^6}{6a^6}\cos.6p+\text{enz.}\right\}\quad(223)$$

welke vergelijking ook onmiddellijk uit de formule (222) volgt, door, het zij *a*, het zij *b*, negatief te nemen.

XVII. VRAAGSTUK.

§. 1036. *Uit de vergelijking,*

$$tang.\,x = \frac{a}{b} \times tang.\,y$$

de bogen x of y, in deelen van den straal, te vinden?

OPLOSSING. Volgens de IV. *Stelling*, is,

$$tang.\,(x+y) = \frac{tang.\,x + tang.\,y}{1 - tang.\,x\;tang.\,y}$$

of, wanneer men, in plaats van *tang. x*, hare waarde in die vergelijking overbrengt:

$$tang.\,(x+y) = \frac{\frac{a}{b} \times tang.\,y + tang.\,y}{1 - \frac{a}{b} \times tang^2.\,y}$$

welke na de vereischte herleiding worden zal:

$$tang.\,(x+y) = \frac{(a+b)\,tang.\,y}{b - a\,tang^2.\,y}$$

of wel, wanneer men, in deze laatste vergelijking, in plaats van *tang. y* schrijft, *sin. y : cos. y*, en teller en noemer met *cos². y* vermenigvuldigt,

$$tang.\,(x+y) = \frac{(a+b)\,sin.\,y\,cos.\,y}{b\,cos^2.\,y - a\,sin^2\,y}$$

Nu is, zie *form.* (39), (41) en (42),

$$sin.\,y\,cos.\,y = \tfrac{1}{2}\,sin.\,2\,y$$
$$cos^2.\,y = \tfrac{1}{2}\,(1 + cos.\,2\,y)$$
$$sin^2.\,y = \tfrac{1}{2}\,(1 - cos.\,2\,y)$$

de laatste vergelijking wordt derhalve, door die waarden in dezelve over te brengen,

$$tang.\,(x+y) = \frac{(a+b)\,sin.\,2\,y}{(b-a) + (a+b)\,cos.\,2\,y}$$

of, wanneer men eindelijk teller en noemer dezer breuk door $b - a$ deelt,

$$tang.\,(x+y) = \frac{\frac{a+b}{b-a} \times sin.\,2\,y}{1 + \frac{a+b}{b-a} \times cos.\,2\,y} \quad \ldots \quad (a)$$

Door eene dergelijke redenering, zal men vinden:

$$tang.\,(x-y) = \frac{\frac{b-a}{a+b} \times sin.\,2\,y}{1 - \frac{b-a}{a+b} \times cos.\,2\,y} \quad \ldots \quad (b)$$

Uit deze twee formulen (*a*) en (*b*), zal men, nu met behulp van de reeks (220), zie XV. *Vraagstuk*, verkrijgen:

$$x = -y + \left(\frac{a+b}{b-a}\right) sin. 2y - \tfrac{1}{2}\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^2 sin. 4y + \tfrac{1}{3}\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^3 sin. 6y$$
$$- \tfrac{1}{4}\left(\frac{a+b}{b-a}\right) sin. 8y + \tfrac{1}{5}\left(\frac{a+b}{b-a}\right)^5 sin. 10y - enz. \quad . . (224)$$
$$x = y + \left(\frac{b-a}{a+b}\right) sin. 2y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^2 sin. 4y + \tfrac{1}{3}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^3 sin. 6y$$
$$+ \tfrac{1}{4}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^4 sin. 8y + \tfrac{1}{5}\left(\frac{b-a}{a+b}\right)^5 sin. 10y + enz. \quad . . (225)$$

Langs denzelfden weg, zal men uit de gegevene vergelijking de waarde van y, in deelen van den straal, kunnen voorstellen, door eene rij, welke van de sinussen der veelvouden van $2x$ zal afhangen.

§. 1037. Aanmerking. Uit alles, wat wij in de voorgaande Vraagstukken hebben bijgebragt, is overtuigend gebleken, hoe de onbestaanbare vormen dienstbaar kunnen zijn, om merkwaardige en wezenlijk nuttige formulen en waarheden op eene gemakkelijke wijze te vinden. Men raadplege verder de uitmuntende Verhandeling van den Heer R. Lobatto, getiteld: *Recherches sur la sommation de quelques séries trigonométriques*. 1827.

IX. *Gebruik der Goniometrische Formulen, in het oplossen van sommige vergelijkingen.*

§. 1038. Wij zullen, in de volgende Boeken, eene doorgaande gelegenheid vinden, om vele stelkunstige getallen-vormen, door middel van de Goniometrische lijnen, op zulk eene wijze te transformeren, dat, zij aldus getransformeerd zijnde, derzelver waarde gemakkelijker, door middel der Logarithmen kan berekend worden. Wij zullen ons thans bij het merkwaardigste bepalen.

XVIII. Vraagstuk.

§. 1039. *In de oplossing van een onnoemlijk aantal vraagstukken, komt men tot eene eindvergelijking van den vorm,* $a\, sin.\, x + b\, cos.\, x = c$; *men vraagt: om, op de eenvoudigste wijze, uit dezelve de waarde van x te vinden?*

I. Oplossing. Het eerste, dat hier in het oog valt, is, dat men $cos.\, x = \sqrt{(1 - sin^2.\, x)}$ kan stellen; dan wordt de gegevene vergelijking:

$$a\, sin.\, x + b\sqrt{(1 - sin^2.\, x)} = c$$
$$\text{of } b\sqrt{(1 - sin^2.\, x)} = c - a\, sin.\, x$$

ver-

Verheft men, om het wortelteeken weg te maken, deze vergelijking tot de tweede magt; dan zal men eene vierkants-vergelijking verkrijgen, welke, opgelost zijnde, zal geven:

$$sin.\,x = \frac{ac \pm b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}{a^2+b^2} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Uit welke formule blijkt: dat, vooreerst, zal de gegevene vergelijking bestaanbaar zijn, $a^2+b^2-c^2$ altijd positief zal moeten zijn; en ten anderen, a^2+b^2 grooter dan $ac \pm \sqrt{(a^2+b^2-c^2)}$; wijl anders $sin.\,x > 1$ zou worden, hetgeen onmogelijk is. Verder dient te worden opgemerkt, dat de formule (a), zoowel de vergelijking $a\,sin.\,x - b\,cos.\,x = c$, als de vergelijking $a\,sin.\,x + b\,cos.\,x = c$ oplost.

II. OPLOSSING. Stelt men, in de gegevene vergelijking, $sin.\,x = \sqrt{(1-cos^2.\,x)}$; dan zal men vinden:

$$cos.\,x = \frac{bc \mp a\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}}{a^2+b^2} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Behalve dat, ten opzigte van deze vergelijking, die wederom zoowel aan de vergelijking $-a\,sin.\,x + b\,cos.\,x = c$, als aan de gegevene voldoet, dezelfde aanmerkingen gelden, als aangaande de vergelijking a, moet men nog bovendien oplettend zijn, dat, in de vergelijking (a) en (b), de dubbele teekens $\pm$ en $\mp$, waarmede $b\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}$ en $a\sqrt{(a^2+b^2-c^2)}$ zijn aangedaan, met elkander overeenstemmen, om voor x denzelfden hoek te verkrijgen. Wanneer men ook deze vergelijkingen (a) en (b) tot de tweede magt verheft; dan zal men vinden $sin^2.\,x + cos^2. = 1$, en stelt men de waarden van $sin.\,x$ en $cos.\,x$ in de gegevene vergelijking; dan zal zij $0 = 0$ worden.

III. OPLOSSING. De formulen (a) en (b) zijn, wanneer men dezelve in getallen wil berekenen, eenigzins omslachtig, en niet zeer geschikt, om in Logarithmen overgebragt te worden. Men volgt daarom liever de volgende manier van oplossen.

Men deele de gegevene vergelijking door a; dan zal men verkrijgen:

$$sin.\,x + \frac{b}{a} \times cos.\,x = \frac{c}{a}$$

Aangezien nu de tangenten der bogen, van 0° tot 45°, van nul tot de éénheid, en, van 45° tot 90°, van de éénheid tot in het oneindige, aangroeijen, zoo kan het gebroken $\frac{a}{b}$ altijd de tangens van zekeren boog p voorstellen; wij hebben dus:

$$\frac{b}{a} = tang.\,p = \frac{sin.\,p}{cos.\,p}, \text{ en } Log.\,b - Log.\,a = Log.\,tang.\,p$$

en door deze substitutie wordt dan de laatste vergelijking:

$$sin.\,x + \frac{sin.\,p}{cos.\,p} \times cos.\,x = \frac{c}{a}$$

welke, wanneer zij met $sin.\,p$ vermenigvuldigt is, worden zal:

 sin. x

$$sin.\, x \times cos\, p + sin\, p \times cos.\, x = \frac{c \times cos\, p}{a}$$

dat is, volgens de III. *Stelling*,

$$sin.\, (x + p) = \frac{c \times cos.\, p}{a}$$

Uit den vorm dezer vergelijking, blijkt al ten eersten: dat, zal de gegevene vergelijking bestaanbaar zijn, $c \times cos.\, p : a$ kleiner dan de éénheid moet zijn. Maar daar nu, in het algemeen, $sin.\, z = sin.\, (180^\circ - z)$ is, zoo hebben wij ook te gelijk:

$$sin.\, (180^\circ - x - p) = \frac{c \times cos.\, p}{a}$$

en bijgevolg

$$x + p = B.\, sin.\, \left(\frac{c \times cos.\, p}{a}\right)$$

$$180^\circ - x - p = B.\, sin.\, \left(\frac{c \times cos.\, p}{a}\right)$$

Wij hebben derhalve, om de vergelijking $a\, sin.\, x + b\, cos.\, x = c$ op te losfen, dit stelsel van vergelijkingen:

$$b : a = tang.\, p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (226)$$

$$x = -p + B\, sin.\, \left(\frac{c \times cos.\, p}{a}\right)$$

$$x = 180^\circ - p - B.\, sin.\, \left(\frac{c \times cos.\, p}{a}\right)$$

door welke formulen de waarden van x ligtelijk kunnen berekend worden.

IV. Oplossing. Men deele nog de gegevene vergelijking door b; dan zal men, door eene dergelijke manier van rekenen, vinden:

$$a : b = cot.\, p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (227)$$

$$x = p + B.\, cos.\, \left(\frac{c \times cos.\, p}{a}\right)$$

$$x = 180^\circ + p - B.\, cos\, \left(-\frac{c \times cos.\, p}{a}\right)$$

welke even gemakkelijk, als de formulen (226), door Logarithmen kunnen berekend worden.

XIX. Vraagstuk.

§. 1040. *Uit de vergelijking, $a\, tang.\, x + b\, cot.\, x = c$, de waarde van x te vinden?*

Oplossing. Men stelle, in deze vergelijking, voor $tang.\, x$ en $cot.\, x$, derzelver bekende waarden; dan verkrijgt men:

$$a \times \frac{sin.\,x}{cos.\,x} + b \times \frac{cos.\,x}{sin.\,x} = c$$

en, uit deze vergelijking de breuken wegmakende:

$$a\, sin^2.\,x + b\, cos^2.\,x = c \times sin.\,x\, cos.\,x$$

Nu is $sin^2.\,x = \frac{1}{2}(1 - cos.\,2\,x)$, $cos^2.\,x = \frac{1}{2}(1 + cos.\,2\,x)$ en $sin.\,x$ $cos.\,x = \frac{1}{2}\, sin.\,2\,x$; de laatste vergelijking wordt derhalve:

$$a(1 - cos.\,2\,x) + b\,(1 + cos.\,2\,x) = c \times sin.\,2\,x$$

$$a - a\,cos.\,2\,x + b + b\,cos.\,2\,x = c\,sin.\,2\,x$$

$$a + b - (a - b)\,cos.\,2\,x = c\,sin.\,2\,x$$

$$c\,sin.\,2\,x + (a - b)\,cos.\,2\,x = a + b$$

$$sin.\,2\,x + \frac{a - b}{c}\,cos.\,2\,x = \frac{a + b}{c}$$

Men stelle nu $\frac{a - b}{c} = tang.\,m$; dan zal men vinden:

$$2\,x = -m + B.\,sin.\left\{\frac{a + b}{c} \times cos.\,m\right\} \quad \ldots (228)$$

$$2\,x = 180^\circ - m - B.\,sin.\left\{\frac{a + b}{c} \times cos.\,m\right\}$$

zijnde $(a - b) : c = tang.\,m$

Men zie verder, *Beg. Stelk.*, *II. Afd. V. Hoofdst.*, *Bladz.* 138, en volgende Vraagstukken.

TWAALF-

TWAALFDE BOEK.

(*Het negende van den tweeden Druk.*)

Algemeene gronden van overeenstemming tusschen de zijden en hoeken, en den inhoud van eenen driehoek. Toepassing van die algemeene gronden op het berekenen van de eenvoudige gevallen, welke gewonelijk in de Driehoeksmeting worden voorgesteld. Gebruik der Driehoeksmeting in het Landmeten, de Geodesie, Zeevaart- en Sterrekunde. Verdere uitbreidingen.

---

§. 1041. I. BEPALING. In de *Trigonometrie*, of de *Meetkunst der platte driehoeken*, leert men, door middel der goniometrische lijnen, hoe de zijden en hoeken van een platten driehoek onderling van elkander afhangen; om alzoo, wanneer van eenigen driehoek, of ééne zijde en twee hoeken, of twee zijden met éénen hoek, over ééne dezer zijden staande, of twee zijden met den ingesloten hoek, of de drie zijden gegeven zijn, de overige onbekende hoeken en zijden te berekenen.

§. 1042. AANMERKINGEN. 1°. *Zijn slechts de hoeken van eenen driehoek gegeven; dan kan wel de vorm, maar niet de grootte van denzelven bepaald worden;* want, dan bestaan er eene oneindigheid van gelijkvormige driehoeken, welke die gegevene hoeken hebben.

2°. *Al de vier opgenoemde gevallen kunnen, gelijk men uit de beginselen weet, het zij de gegevene zijden of hoeken, in derzelver eigenlijke grootte, het zij in getallen, gegeven zijn, door eene zeer eenvoudige meetkunstige constructie, gevonden worden;* dan, hoe eenvoudig die constructien in de uitvoering zijn, kunnen zij, wegens de ruwheid der werktuigen, waarvan men zich bij dezelve bedient, en, ten anderen, omdat de deelen van lijnen en hoeken weldra te klein worden, om dezelve duidelijk te onderscheiden, (vooral, wanneer de driehoeken eene groote uitgestrektheid hebben,) niet meer dienen, om de onbekenden met de vereischte naauwkeurigheid te verkrijgen; *tot dat einde, is de berekening het eenige zekere en geschikste middel.* Om die reden, *moet dan de driehoeksmeting beschouwd worden, als bestaande in de uitvinding en de toepassing van regels, door welke men, in alle voorkomende gevallen, de onbekenden uit de gegevens, met de uiterste naauwkeurigheid, kan berekenen.*

3°. Behalve de vier gevallen, in de Bepaling opgegeven, tot welke zich doorgaans de driehoeksmeting bepaalt, kan men zich nog eene me-

nigte gevallen voorstellen, in welke drie dingen, die van de grootte en figuur van eenen driehoek afhangen, gegeven zijn, en gevraagd wordt, om uit die gegevens den driehoek te bepalen; die gevallen zijn onnoemelijk veel; nogtans zijn de regels, die wij, voor de vier opgenoemde gevallen, zullen leeren vinden, genoegzaam, om de oplossing van de meer zamengestelde te verkrijgen; zoo als, in het vervolg, door vele voorbeelden, blijken zal.

I. *Algemeene eigenschappen der regthoekige en scheefhoekige driehoeken.*

§. 1243. Wij hebben reeds, op het einde van het IV. *Boek*, van de XXIII. *Stelling*, tot de XXIX. ingesloten, de algemeene eigenschappen der regthoekige en scheefhoekige driehoeken leeren kennen; thans moeten wij dit onderwerp uitvoeriger behandelen, en in velerlei bijzonderheden leeren nagaan.

I. STELLING. *Fig.* 26.

§. 1044. *In elken regthoekigen driehoek* (*A B C*), *is ééne der regthoekszijden* (*B C of A B*) *gelijk aan de andere regthoekszijde* (*A B of B C*), *vermenigvuldigd met de tangens van den hoek* (*A of C*), *welke over die eerste regthoekszijde staat; en de hypothenusa* (*A C*) *is gelijk aan ééne der twee regthoekszijden* (*B C of A B*), *vermenigvuldigd met de secans van den hoek* (*A of C*), *tusschen die regthoekszijde en de hypothenusa gelegen, of, dat hetzelfde is, gedeeld door de cosinus van dien hoek. Dat is:*

$$BC = AB \times tang. A; \quad AC = AB \times sec. A = \frac{AB}{cos. A}$$

$$AB = BC \times tang. C; \quad AC = BC \times sec. C = \frac{BC}{cos. C}$$

BETOOG. Laat *A D* de éénheid of de maat zijn, waarmede de zijden des driehoeks ondersteld worden gemeten, en in getallen van die maat te zijn uitgedrukt. Beschrijf, uit het hoekpunt *A*, met *A D* als straal, den cirkelboog *D E*. Zooveel drie-honderd-zestigste deelen en onderdeelen van den omtrek, als die boog bevat, zooveel graden, minuten, *enz.* is de hoek *A* in grootte. Trek nu *D F*, loodregt op *A B*; dan is *D F* = *tang. A* en *A F* = *sec. A*; en, indien nu de hoek *A* bekend is; dan vindt men, in de natuurlijke sinus-tafel, de lengte der lijnen *D F* en *A E* naauwkeurig berekend.

Omdat nu, uit de onderstelling, *A B C* een regte hoek is, en dus, volgens de constructie, *hoek A D F* = *hoek A B C*; zoo is *D E* evenwij-

wijdig aan BC; de hoek APD is dan gelijk hoek ACB, en daarom zijn de driehoeken ABC en ADF gelijkvormig, en, volgens de VIII. *Stell.* IV. *B.* is dan:

$$AD : DF = AB : BC, \text{ of } 1 : tang.\ A = AB : BC$$
$$AD : AF = AB : AC, \text{ of } 1 : sec.\ A = AB : AC$$

Uit deze evenredigheden, volgt nu onmiddellijk:

$$BC = AB \times tang.\ A, \text{ en } AC = AB \times sec.\ A$$

De laatste $AC = AB \times sec.\ A$, kan, omdat $sec.\ A = 1 : cos.\ A$ is, aldus worden getransformeerd $AC = AB : cos.\ A$.

Wanneer men, op den hoek C, op dezelfde wijze werkt, als op den hoek A; dan zal men verkrijgen:

$$AB = BC \times tang.\ C,\ AC = BC \times sec.\ C, \text{ of } AC = \frac{BC}{cos.\ C}.$$

II. Stelling. *Fig.* 27.

§. 1045. *In elken regthoekigen driëhoek* (ABC), *is ééne der regthoekszijde* (BC *of* AB) *gelijk aan de hypothenusa* (AC), *vermenigvuldigd met de sinus van den hoek* (A *of* C), *over die regthoekszijde; ook is zij gelijk aan de hypothenusa* (AC), *vermenigvuldigd met de cosinus van den hoek* (C *of* A), *welke tusschen de hypothenusa en die regthoekszijde ligt. Dat is:*

$$BC = AC \times sin.\ A, \text{ en } AB = AC \times cos.\ A$$
$$BC = AC \times cos.\ C, \text{ en } AB = AC \times sin.\ C$$

Betoog. Genomen hebbende AD, gelijk aan de lengte-maat, in getallen van welke, de zijden des driehoeks ondersteld worden te zijn uitgedrukt, zoo beschrijf, uit het hoekpunt A, als middelpunt, met AD den boog DE, tusschen de beenen van den hoek A begrepen zijnde; en laat EF loodregt op AB vallen; dan is $EF = sin.\ A$ en $AF = cos.\ A$.

De driehoeken ABC en AFE zijn gelijkvormig; omdat, hoek $B =$ hoek $F = 90^\circ$ zijnde, EF evenwijdig loopt aan BC. Wij hebben dan, zie VIII. *Stell.* IV. *B.*

$$AE : EF = AC : BC, \text{ of } 1 : sin.\ A = AC : BC$$
$$AE : AF = AC : AB, \text{ of } 1 : cos.\ A = AC : AB$$

Uit welke evenredigheden dan onmiddellijk zal volgen: $BC = AC \times sin.\ A$, en $AB = AC \times cos.\ A$.

Omdat $A + C = 90^\circ$ is; zoo is $sin.\ A = cos.\ C$ en $cos.\ A = sin.\ C$; de voorgaande vergelijkingen worden dan: $BC = AC \times cos.\ C$ en $AB = AC \times sin.\ C$.

§. 1046. Aanmerking. In het vervolg, zullen wij de zijden van een regthoekigen of scheefhoekigen driehoek ABC (zie *fig.* 27 en 28,) meestal uitdrukken door dezelfde letters, waardoor de overstaande hoekzijn uitgedrukt; namelijk $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$; de letters

a,

a, b en c, zullen dan eigenlijk de getallen van de lengte der zijden aanduiden. De formulen, welke in de twee voorgaande ftellingen, zijn betoogd, worden dan aldus gefchreven:

$$a = c \times tang.\, A,\quad c = a \times tang.\, C \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$b = c \times sec.\, A,\quad b = a \times sec.\, C \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$\text{of}\quad b = \frac{c}{cos.\, A},\quad b = \frac{a}{sin.\, C} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$
$$a = b \times sin.\, A,\quad c = b \times sin.\, C \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$c = b \times cos\, C,\quad a = b \times cos.\, A \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Het zijn nu deze formulen, welke de grondflag van al het volgende bevatten.

III. Stelling. *Fig.* 28.

§. 1047. *In alle driehoeken, ftaan twee zijden tot elkander in dezelfde reden, als de finusfen van derzelver overftaande hoeken. Dat is:*

$$\left\{\begin{array}{l} a : b = sin.\, A : sin.\, B \\ a : c = sin.\, A : sin.\, C \\ b : c = sin.\, B : sin.\, C \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

hetwelk ook aldus kan worden gefchreven:

$$(a,\, b,\, c,) :: (sin.\, A,\, sin.\, B,\, sin.\, C,)$$

Betoog. Men late, uit het hoekpunt C, de loodlijn CD op de overftaande zijde AB vallen; dan wordt de fcheefhoekige driehoek ABC in twee regthoekige driehoeken ACD en BCD verdeeld. In deze regthoekige driehoeken is nu, volgens de II. *Stelling:*

$$CD = b \times sin.\, A$$
$$CD = a \times sin.\, B$$
derhalve $a \times sin.\, B = b \times sin.\, A$, V. *Ax.*

en $a : b = sin.\, A : sin.\, B$, V. *Stell.* IV. *B.*

Wanneer men, uit de hoekpunten A en B, loodlijnen op de overftaande zijden laat vallen: dan zal men, op dezelfde wijze, de evenredigheden $a : c = sin.\, A : sin.\, b$ en $b : c = sin.\, B : sin.\, C$ verkrijgen.

§. 1048. Aanmerking. *Fig.* 28. Men late de zijde BC, om het hoekpunt C, naar de loodlijn CD, omdraaijen; dan zal de hoek BCD kleiner worden, de fcherpe hoek ABC zal aangroeijen, en, in elken ftand der bewegende lijn, zal $AC : BC = sin.\, B : sin.\, A$ zijn. Wanneer nu de bewegende lijn langs de loodlijn CD valt; dan wordt *hoek* $ABC =$ *hoek* $ADC = 90°$, en $AC : CD = sin.\, ADC : sin.\, A = 1 : sin.\, A$, of $CD = AC \times sin.\, A$; hetgeen overeenkomt met hetgeen in de II. *Stelling* betoogd is. Komt de lijn BC in den ftand CB'; dan wordt *hoek* $ABC =$ *hoek* $AB'C > 90°$, en nu is $CD = AC \times sin.\, A = B'C \times sin.\, CB'D$ (of, omdat $sin.\, AB'C = sin.\, DB'C$ is) $= B'C \times$

sin.

sin. $AB'C$, en daarom is ook, in dit geval, $AC : B'C = sin. AB'C : sin. A$.

§. 1049. Aanmerking. *Fig.* 28. Uit deze figuur, kunnen nog andere vergelijkingen en evenredigheden worden afgeleid.

1°. In *fig.* 28, is, volgens de I. *Stelling*, $CD = AD \times tang. A = BD \times tang. B$; derhalve $AD : BD = tang. B : tang. A$; dat is, *wanneer men, uit het hoekpunt (C) van den hoek eens driehoeks (ABC), eene loodlijn op de overstaande zijde (AB) laat vallen; dan zal zij die zijde in twee stukken (AD en BD) verdeelen, welke tot elkander zullen staan, in de omgekeerde of overhandsche reden van de tangenten der hoeken (A en B), welke aan die deelen (AD en BD) gelegen zijn.*

2°. Nog is, in *fig.* 28, volgens de II. *Stelling*, $CD = AC \times cos. ACD = BC \times cos. BCD$, of $AC : BC = cos. BCD : cos. ACD$; dat is: *indien, in eenen driehoek (ABC), eene loodlijn (CD), uit één der hoekpunten (C), op de overstaande zijde (AB) valt; dan deelt die loodlijn (CD) dien hoek (ABC) in twee deelen, welker cosinussen in de omgekeerde reden staan van de zijden, die aan de deelen van dien hoek (ABC) gelegen zijn.*

3°. Laat, *fig.* 28*, de lijn CD tot het midden van de overstaande zijde AB getrokken worden, zoodat $AD = BD$ is; dan is, volgens de III. *Stelling*:

$$AC : AD = sin. ADC : sin. ACD$$
$$BD : BC = sin. BCD : sin. BDC$$

vermenigvuldigt men deze evenredigheden met elkander; dan verkrijgt men:

$$AC \times BD : AD \times BC = sin. ADC \times sin. BCD : sin. ACD \times sin. BDC$$

of, indien men, in de laatste de termen van de eerste reden door $BD = AD$, en de termen van de laatste reden door $sin. ADC = sin. BDC$ deelt,

$$AC : BC = sin. BCD : sin. ACD$$

dat is: *de lijn, die, uit het hoekpunt (C) van eenen driehoek (ABC), tot het midden (D) van de overstaande zijde (AB) getrokken wordt, deelt den hoek (ABC) in stukken (ACD en BCD), welker sinussen in de omgekeerde reden van de aanliggende zijden (AC en BC) staan.*

IV. Stelling. *Fig.* 28 *en* 29.

§. 1050. *In alle driehoeken, staat de som van twee zijner zijden tot derzelver verschil, als de tangens van de halve som der overstaande hoeken tot de tangens van derzelver halve verschil; dat is:*

$$a + b : a - b = tang. \tfrac{1}{2}(A + B) : tang. \tfrac{1}{2}(A - B) \quad \ldots (7)$$
$$a + c : a - c = tang. \tfrac{1}{2}(A + C) : tang. \tfrac{1}{2}(A - C)$$
$$b + c : b - c = tang. \tfrac{1}{2}(B + C) : tang. \tfrac{1}{2}(B - C)$$

Be-

Betoog. Behalve het betoog, in het IV. *Boek* XXIII. *Stell.* van die eigenschap des driehoeks gegeven, kan men dezelve nog aldus betoogen.

Zij, *fig.* 29, *A B C* een driehoek. Verleng *A C*, en maak dit verlengde *A D* = *A B*; trek *B D*, en *C F*, loodregt op *B D*; deze laatste lijn snijdt dan de zijde *A B*, in het punt *E*.

Nu is vooreerst de driehoek *A B D* (omdat *A D* = *A B* is,) gelijkbeenig; en daarom is (XIV. *Stell.* I. *B.*) *hoek A D B* = *hoek A B D* en (III *Gev.* XIV. *Stell.* I. *B.*) *hoek B A C* = 2 *hoek A D B* = 2 *hoek A B D*; derhalve is *hoek A D B* = *hoek A B D* = ½ *hoek B A C*. Nu is (XVIII. *Stell.* I. *B.*) ½ *hoek B A C* + ½ *hoek A B C* + ½ *hoek A C B* = 90°; gevolgelijk is

$$\tfrac{1}{2}\ hoek\ ACB + \tfrac{1}{2}\ hoek\ ABC = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\ hoek\ BAC$$

maar, in den regthoekigen driehoek *A C F*, is,

$$hoek\ DCF = 90^\circ - hoek\ ADB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}\ hoek\ BAC$$

en hieruit volgt dan, dat

$$hoek\ DCF = \tfrac{1}{2}\,(hoek\ ACB + hoek\ ABC)\quad \ldots\ (a)$$

zal moeten zijn.

Omdat *hoek A D B* = *hoek A B D* is, en gelijke hoeken gelijke complementen hebben, zoo is ook *hoek D C F* = *hoek B E F*; maar *hoek B E F* = *hoek A E C* zijnde, zoo is *hoek A C E* = *hoek A E C*, en daarom is (XV. *Stell.* I. *B.*) *A E* = *E C*, en wij hebben dus:

$$CD = AB + AC\quad \ldots\ldots\ldots\ (b)$$

$$BE = AB - AC\quad \ldots\ldots\ldots\ (c)$$

Verder is, zie XVIII. *Stell.* I. *B.*, *hoek B C F* = *hoek A E C* — *hoek A B C*; maar *hoek A E C* = ½ *hoek A C B* + ½ *hoek A B C* zijnde, zoo wordt *hoek B C F* = ½ *hoek A C B* + ½ *hoek A B C* — *hoek A B C*; dat is:

$$hoek\ BCF = \tfrac{1}{2}\,(hoek\ ACB - hoek\ ABC)\quad \ldots\ (d)$$

In de regthoekige driehoeken *C D F* en *C B F* is, zie I. *Stelling*:

$$DF = CF \times tang.\ DCF$$

$$BF = CF \times tang.\ BCF$$

Uit deze vergelijkingen volgt dan:

$$DF : BF = CF \times tang.\ DCF : CF \times tang.\ BCF$$

en, deelt men de termen van de laatste reden door *C F*,

$$DF : BF = tang.\ DCF : tang.\ BCF$$

De regthoekige driehoeken *D C F* en *B E F* zijn, blijkens het voorgaande, gelijkvormig; gevolgelijk is:

$$DF : BF = DC : BE$$

en diensvolgens wordt eindelijk:

$$DC : BE = tang.\ DCF : tang.\ BCF$$

dat is, indien wij voor de termen dezer evenredigheid de waarden, in de vergelijkingen (*a*), (*b*), (*c*) en (*d*) verkregen, in de plaats stellen:

$$AB + AC : AB - AC = tang.\ \tfrac{1}{2}(ACB + ABC) : tang.\ \tfrac{1}{2}(ACB - ABC)$$

Ander Betoog. Uit de voorgaande *Stelling*, is

$$a : b = sin.\ A : sin.\ B$$

Volgens de bekende eigenschappen der evenredigheden, is nu

$a + b : a - b = sin. A + sin. B : sin. A - sin. B$

maar, volgens de VII. *Stell.* XI. *B.*, is

$sin. A + sin. B : sin. A - sin. B = tang. \frac{1}{2}(A + B) : tang. \frac{1}{2}(A - B)$

en hieruit volgt dus:

$a + b : a - b = tang. \frac{1}{2}(A + B) : tang. \frac{1}{2}(A - B)$

§. 1051. Gevolg. *Men kan ook stellen:*

$$a + b : a - b = cot. \tfrac{1}{2} C : tang. \tfrac{1}{2}(A - B) \quad . \; . \; . \quad (8)$$

Want, omdat $A + B + C = 180^\circ$ is, zoo is $A + B = 180^\circ - C$ en $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$; $tang. \frac{1}{2}(A + B) = tang.(90^\circ - \frac{1}{2}C) = cot. \frac{1}{2} C$.

V. Stelling. *Fig.* 30.

§. 1052. *Wanneer men twee zijden a en b, met den ingesloten hoek C, van eenen driehoek (ABC), als bekend aanmerkt; dan is de tangens van éénen der onbekende hoeken gelijk aan de bekende zijde, welke tegen over dien hoek staat, vermenigvuldigd met de sinus van den bekenden hoek, en dit product gedeeld door het verschil van de bekende zijde, aan dien onbekenden hoek gelegen zijnde, verminderd met het product van de zijde, over den onbekenden hoek, met de cosinus van den bekenden hoek vermenigvuldigd zijnde; dat is:*

$$tang. B = \frac{b\, sin. C}{a - b\, cos. C}, \text{ en } tang. A = \frac{a\, sin. C}{b - a\, cos. C} \quad . \quad (9)$$

Betoog. Men late, uit het hoekpunt A, de loodlijn AD op de tegenoverstaande zijde BC vallen; dan wordt de driehoek ABC in de twee regthoekige driehoeken ACD en ABD verdeeld.

In den regthoekigen driehoek ACD is, volgens de II. *Stelling*, $AD = b \times sin. C$, en $CD = b \times cos. C$.

Volgens de figuur, is $BD = BC - CD = a - b \times cos. C$.

Eindelijk is, in den regthoekigen driehoek ABD, volgens de I. *Stelling*, $AD = BD \times tang. B$, en gevolgelijk

$$tang. B = \frac{AD}{BD}$$

Stelt men nu, in deze laatste vergelijking, in de plaats van AD en BD, derzelver waarden; dan verkrijgt men:

$$tang. B = \frac{b \times sin. C}{a - b \times cos. C}$$

Laat men uit B eene loodlijn op de overstaande zijde AC vallen; dan zal men de waarde van $tang. A$ vinden.

§. 1053. I. Gevolg. Omdat de cotangens van eenen boog gelijk is aan de éénheid, gedeeld door de tangens, zoo zal men, door de betoogde vergelijking om te keeren, verkrijgen:

$$\frac{1}{tang.\,B} = cot.\,B = \frac{a - b \times cos.\,C}{b \times sin.\,C} = \frac{a}{b \times sin.\,C} - \frac{b \times cos.\,C}{b \times sin.\,C}$$

dat is, volgens de II. *Stelling*,

$$cot.\,B = \frac{a}{b} \times cosec.\,C - cot.\,C \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

§. 1054. II. GEVOLG. Men stelle in deze vergelijking (10), als volgt: $2\,cosec.\,C = cot.\,\tfrac{1}{2}C + tang.\,\tfrac{1}{2}C$, en $2\,cot.\,C = cot.\,\tfrac{1}{2}C - tang.\,\tfrac{1}{2}C$; dan verkrijgt men:

$$cot.\,B = \frac{a}{2b}(cot.\,\tfrac{1}{2}C + tang.\,\tfrac{1}{2}C) - \frac{b}{2b}(cot.\,\tfrac{1}{2}C - tang.\,\tfrac{1}{2}C)$$

welke vergelijking, wanneer men de termen, die ten opzigte van *tang.* $\tfrac{1}{2}C$ en *cot.* $\tfrac{1}{2}C$ gelijkflachtig zijn, vereenigt, eindelijk worden zal:

$$cot.\,B = \left(\frac{a+b}{2b}\right) \times tang.\,\tfrac{1}{2}C + \left(\frac{a-b}{2b}\right) \times cot.\,\tfrac{1}{2}C \;..\; (11)$$

VI. STELLING. *Fig.* 31.

§. 1055. *Elke zijde eens driehoeks is gelijk aan de som der producten, die ontstaan, wanneer men elke der twee andere zijden dezes driehoeks vermenigvuldigt met de cosinus van den hoek, welke zij met de eerstgenoemde zijde maakt; dat is:*

$$c = a \times cos.\,B + b \times cos.\,A \quad \ldots\ldots \quad (12)$$
$$b = a \times cos.\,C + c \times cos.\,A$$
$$a = b \times cos.\,C + c \times cos.\,B$$

BETOOG. Men late, uit het hoekpunt C, de loodlijn CD op de overstaande AB vallen; dan wordt de driehoek door dezelve in twee regthoekige driehoeken ACD en BCD verdeeld; in welke, volgens de II. *Stell.*,

$$AD = b \times cos.\,A, \text{ en } BD = a \times cos.\,B$$

is. Telt men nu deze vergelijkingen bij elkander; dan verkrijgt men: omdat $AD + BD = AB = c$ is,

$$c = a \times cos.\,B + b \times cos.\,A$$

Op dezelfde wijze, worden de twee andere formulen betoogd.

§. 1056. AANMERKING. *Fig.* 31. Men late de zijde BC om het hoekpunt C omdraaijen, tot dat zij in den stand $B'C$ komt; dan is wederom $AD = b \times cos.\,A$, en $B'D = a \times cos.\,CB'D$, en $AB' = c = -a \times cos.\,CB'D + b \times cos.\,A$. Nu is $cos.\,CB'D = -cos.\,AB'C$; derhalve $AB' = a \times cos.\,ABC + b \times cos.\,A$. Hieruit blijkt: *dat, wanneer, in den driehoek ABC, één der hoeken stomp is, in de vergelijkingen* (12), *de teekens der termen, in welke de cosinus van dien stompen hoek voorkomt, moeten worden omgekeerd.*

VII. STELLING. *Fig.* 31.

§. 1057. *Het vierkant, op elke zijde eens driehoeks beschreven, is gelijk aan de som van de vierkanten, op de twee andere zijden beschreven, verminderd met tweemaal het product dezer zijden, vermenigvuldigd met de cosinus van den ingesloten hoek; dat is:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \times \cos. A \quad . \ . \ . \ . \ (13)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \times \cos. B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \times \cos. C$$

BETOOG. Men late, uit het hoekpunt C, de loodlijn CD, op de overstaande zijde AB vallen; dan is, volgens de XVIII en XIX. *Stellingen* III. *Boek:*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AD$$

maar, in den regthoekigen driehoek ACD, is, volgens de II. *Stelling*, $AD = AC \times \cos A$; de voorgaande vergelijking wordt derhalve:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB \times AC \times \cos. A$$

Men stelle nu, dat de zijden des driehoeks, met dezelfde maat gemeten zijnde, $BC = a$, $AC = b$ en $AB = c$ zijn; dan wordt de laatste vergelijking, in getallen, aldus voorgesteld:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \times \cos. A$$

ANDER BETOOG. Men vermenigvuldige van de vergelijkingen (12), die in de voorgaande stelling betoogd zijn, de eerste met c, de tweede met b, en de derde met a; dan verkrijgt men deze drie vergelijkingen:

$$c^2 = a\,c \times \cos. B + b\,c \times \cos. A$$
$$b^2 = a\,b \times \cos. C + b\,c \times \cos. A$$
$$a^2 = a\,b \times \cos. C + a\,c \times \cos. B$$

Indien men twee dezer vergelijkingen, op alle mogelijke wijzen genomen, bij elkander optelt, en van de som de derde vergelijking aftrekt; dan zal men, na verschikking der termen, verkrijgen:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \times \cos. A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c \times \cos. B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \times \cos. C$$

§. 1058. AANMERKING. Laat men de zijde BC, *fig.* 31, om het hoekpunt C omdraaijen, tot dat zij in den stand CB' komt; dan zal de vergelijking $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \times \cos. A$, en volgens de XIX. *Stell.* III. *B.*, en, volgens de theorie der positieve en negatieve toestanden, worden: $a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c \times \cos. A$.

§. 1059. GEVOLG. *Fig.* 32. *Indien, in het parallelogram $ABCD$, hoek BAD de scherpe, en ABC de stompe hoek is; dan is:*

$$AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\,AB \times AD \times \cos. BAD \ . \ . \ (14)$$
$$BD^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BC \times \cos. BAD$$

De Lezer zoeke het bewijs.

VIII.

VIII. STELLING.

§. 1060. *Het vierkant van de sinus van de helft van den hoek eens driehoeks, is gelijk aan het quotient, dat men verkrijgt, wanneer men de halve som der zijden met elke der zijden, om dezen hoek staande, verminderd, en het product dezer verschillen door het product der zijden, om dezen hoek staande, deelt. Dat is, indien* $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$ *gesteld wordt; dan is:*

$$sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{(s-b)(s-c)}{bc},\ sin^2.\tfrac{1}{2}B = \frac{(s-a)(s-c)}{ac},$$

$$sin^2.\tfrac{1}{2}C = \frac{(s-a)(s-b)}{ab} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

BETOOG. Volgens de voorgaande *Stelling*, is

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times cos.A$$

Indien men uit deze vergelijking *cos. A* oplost; dan verkrijgt men:

$$cos.A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

door welke vergelijking, wanneer de drie zijden gegeven zijn, de cosinus van den hoek *A* kan berekend worden.

Men trekke de leden dezer vergelijking van de identische vergelijking $1 = 1$ af; dan verkrijgt men:

$$1 - cos.A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

welke vergelijking, na de gewone herleiding, worden zal:

$$1 - cos.A = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{a^2 - (c-b)^2}{2bc}$$

Nu is, zie III. *Gev.* III. *Stell.* XI. *B.*, $1 - cos.A = 2 sin^2.\tfrac{1}{2}A$; dienvolgens wordt de voorgaande vergelijking, na dezelve door *twee* gedeeld te hebben:

$$sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc}$$

In plaats van den teller dezer breuk, namelijk $a^2 - (b-c)^2$, waarvoor ook $a^2 - (c-b)^2$ kan geschreven worden; kan men (zie II. *Hulpst.* III. *B.*) schrijven, $(a-b+c)(a+b-c)$; wij hebben dan:

$$sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

Men stelle nu, zoo als ondersteld is, $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, of $2s = a + b + c$; dan is $2s - 2b = (a+b+c) - 2b = a - b + c$, en $2s - 2c = (a+b+c) - 2c = a + b - c$, derhalve wordt

$$sin^2.\tfrac{1}{2}A = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2b \times 2c} = \frac{2(s-b)}{2b} \times \frac{2(s-c)}{2c} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

Op gelijke wijze, worden de formulen, welke de waarden van $sin^2. \frac{1}{2} B$, en $sin^2. \frac{1}{2} C$ voorstellen, betoogd.

§. 1061. I. Gevolg. *In elken driehoek zullen nog de volgende formulen bestaan;* namelijk

$$cos^2. \tfrac{1}{2} A = \frac{s(s-a)}{bc}, \quad cos^2. \tfrac{1}{2} B = \frac{s(s-b)}{ac}$$

$$\text{en} \quad cos^2. \tfrac{1}{2} C = \frac{s(s-c)}{ab} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

Want, omdat $cos^2. \frac{1}{2} A = 1 - sin^2. \frac{1}{2} A$ is, zoo zal

$$cos. \tfrac{1}{2} A = 1 - \frac{(s-b)(s-c)}{bc} = \frac{bc - (s^2 - sb - sc + bc)}{bc} = \frac{(b+c-s)s}{bc}$$

maar, $b + c - s = b + c - (\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}a = s - a$ zijnde, zoo is $(b + c - s)s = s \times (s - a)$; derhalve wordt $cos^2. \frac{1}{2} A = \frac{s(s-a)}{bc}$, *enz.*

§. 1062. II. Gevolg. *Indien men de vergelijking* (15), *door de vergelijkingen* (16) *deelt; dan zal men vinden:*

$$tang^2. \tfrac{1}{2} A = \frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}, \quad tang^2. \tfrac{1}{2} B = \frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}$$

$$\text{en} \quad tang^2. \tfrac{1}{2} C = \frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)} \quad . \; . \; . \; . \; (17)$$

IX. Stelling. *Fig. 31.*

§. 1063. *De inhoud van elken driehoek is gelijk aan het halve product van twee zijner zijden, vermenigvuldigd met de sinus van den ingesloten hoek; dat is, wanneer de inhoud des driehoeks door de letter I wordt aangeduid.*

$$I = \tfrac{1}{2} bc \times sin. A = \tfrac{1}{2} ac \times sin. B = \tfrac{1}{2} ab \times sin. C \; . \; . \; (18)$$

Betoog. Men late de loodlijn CD, uit het hoekpunt C, op de overstaande zijde AB, vallen; dan is, zie *Gevolg* VIII. *Stell.* III. *B.*, $I = \frac{1}{2} AB \times CD$; maar, volgens de II. *Stell.* is $CD = AC \times sin. A$; derhalve wordt $I = \frac{1}{2} AB \times CD = \frac{1}{2} AB \times AC \times sin. A$, of $I = \frac{1}{2} bc \times sin. A$. Op dezelfde manier, worden de andere formulen betoogd.

§. 1064. I. Gevolg. *Fig.* 33. *Wanneer men, uit het hoekpunt C, eenige lijn CD, tot ergens aan de overstaande zijde AB trekt; dan zal*

$$I = \tfrac{1}{2} AB \times CD \times sin. ADC \quad . \; . \; . \; . \; (19)$$

zijn.

Want men heeft, volgens het betoogde:

$$inh. \, drieh. \, ACD = \tfrac{1}{2} AD \times CD \times sin. ADC$$
$$inh. \, drieh. \, BCD = \tfrac{1}{2} BD \times CD \times sin. BDC$$

aan-

aangezien nu *sin.* $ADC = $ *sin.* BDC is, zoo zal men, deze twee vergelijkingen optellende, verkrijgen:

$$\textit{inh. drieh. } ABC = \tfrac{1}{2} AB \times CD \times \textit{sin. } ADC.$$

§. 1065. II. GEVOLG. *Fig.* 34. *De inhoud van elken vierhoek* ($ABCD$) *is gelijk aan het halve product zijner hoekpuntslijnen* (AC *en* BC), *vermenigvuldigd met de sinus van den hoek, onder welken zij elkander doorsnijden; dat is:*

$$\textit{inh. } ABCD = \tfrac{1}{2} AC \times BD \times \textit{sin. } AEB \quad . \; . \quad (21)$$

Want, zoo even is bewezen, dat

$$\textit{inh. drieh. } ABD = \tfrac{1}{2} AE \times BD \times \textit{sin. } AEB$$

$$\textit{inh. drieh. } BCD = \tfrac{1}{2} CE \times BD \times \textit{sin. } DEC$$

is; telt men nu deze vergelijkingen bij elkander; dan zal men (aangezien *hoek* $AEB = $ *hoek* DEC is,) verkrijgen:

$$\textit{inh. vierh. } ABCD = \tfrac{1}{2} AC \times BD \times \textit{sin. } AEB.$$

§. 1066. III. GEVOLG. *Uit het betoogde, kan de bekende formule,* (*zie Bijv. XVIII en IX. Stell. III. B.*)

$$I^2 = s(s-a)(s-b)(s-c) \quad . \; . \; . \; . \quad (22)$$

met weinig moeite worden afgeleid.

Want, wanneer men, in de vergelijking $I = \tfrac{1}{2}\, ab \times$ *sin.* C, in plaats van *sin.* $C = 2$ *sin.* $\tfrac{1}{2}\, C \times$ *cos.* $\tfrac{1}{2}\, C$ stelt; dan verkrijgt men de vergelijking $I = ab \times$ *sin.* $\tfrac{1}{2}\, C \times$ *cos.* $\tfrac{1}{2}\, C$; de tweede magt dezer vergelijking is:

$$I^2 = a^2 b^2 \textit{ sin}^2. \tfrac{1}{2} C \times \textit{cos}^2. \tfrac{1}{2} C \quad . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Nu is, volgens het betoogde:

$$\textit{sin}^2. \tfrac{1}{2} C = \frac{(s-a)(s-b)}{ab}, \text{ en } \textit{cos}^2. \tfrac{1}{2} C = \frac{s(s-c)}{ab}$$

brengt men nu deze waarden in de vergelijking (a) over; dan verkrijgt men:

$$I^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

§. 1067. IV. GEVOLG. *Fig.* 35. *De middellijn van den cirkel, om eenen driehoek beschreven zijnde, is, gelijk aan ééne van deszelfs zijden, gedeeld door de sinus van den hoek, over die zijde staande; dat is, die middellijn* CE *gelijk* M *stellende, zoo heeft men:*

$$M = \frac{a}{\textit{sin. } A} = \frac{b}{\textit{sin. } B} = \frac{c}{\textit{sin. } C} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Want, men vermenigvuldige de vergelijking (18), namelijk $I = \tfrac{1}{2}\, bc \times$ *sin.* A, eerst met a; dan verkrijgt men $aI = \tfrac{1}{2}\, abc \times$ *sin.* A; en uit deze volgt dan onmiddellijk:

$$a : \textit{sin. } A = \tfrac{1}{2} abc : I = abc : 2I$$

$$\text{of } \frac{a}{\textit{sin. } A} = \frac{abc}{2I}$$

Maar nu is, zie *Bijv.* XXVII. *Stell.* V. *B.*, het gebroken $abc : 2I$, gelijk aan de middellijn CE van den cirkel, die om den driehoek is beschreven; gevolgelijk wordt

$$M = \frac{a}{sin.\,A} = \frac{b}{sin.\,B} = \frac{c}{sin\,C}$$

X. STELLING. *Fig.* 31.

§. 1068. *De inhoud van elken driehoek is gelijk aan de helft van het vierkant van ééne zijner zijden, vermenigvuldigd met het product van de sinussen van de hoeken, aan die zijde, gedeeld door de sinus van de som dezer hoeken, of door de sinus van den derden hoek; dat is:*

$$I = \tfrac{1}{2}c^2 \times \frac{sin.\,A \times sin.\,B}{sin.\,(A+B)} = \tfrac{1}{2}c^2 \times \frac{sin.\,A \times sin.\,B}{sin.\,C} \quad . \quad (24)$$

BETOOG. Volgens de voorgaande *Stelling*, is

$$I = \tfrac{1}{2}bc \times sin.\,A$$

en, volgens de III. *Stelling*, is

$$sin.\,C : sin.\,B = c : b$$

derhalve is $b = c \times sin.\,B : sin.\,C$. Stelt men nu deze waarde van b in de bijgebragte formule; dan wordt (omdat $sin.\,C = sin.\,(180^0 - A - B) = sin.\,(A+B)$ is,)

$$I = \tfrac{1}{2}c^2 \times \frac{sin.\,A \times sin.\,B}{sin.\,C} = \tfrac{1}{2}c^2 \times \frac{sin.\,A \times sin.\,B}{sin.\,(A+B)}$$

§. 1069. AANMERKING. *De eigenschappen des driehoeks, die, in de twee voorgaande stelliingen, zijn voorgedragen, geven verscheidene hulpmiddelen aan de hand, om den inhoud eener vlakke veelhoekige figuur, gedeeltelijk door het meten van afstanden, en gedeeltelijk door het waarnemen van hoeken, te bepalen.*

Een enkel voorbeeld zal genoeg zijn, om zich hiervan een denkbeeld te maken. Laat, *fig.* 36, een onregelmatig zeshoekig stuk gronds verbeelden, welks inhoud men wenscht te bepalen.

Men plaatse zich in één der hoekpunten A; en, na in de overige hoekpunten B, C, D, E, F, bakens te hebben geplaatst, mete men met de meeste naauwkeurigheid de hoeken BAC, CAD, DAE en EAF, benevens de lengte der lijnen AB, AC, AD, AE en AF; dan is volgens de IX. *Stelling*, indien men den inhoud van den zeshoekigen grond $= I$ stelt,

$$I = \tfrac{1}{2}AB \times AC \times sin.\,BAC + \tfrac{1}{2}AC \times AD \times sin\,CAD + \tfrac{1}{2}AD \times AE \times sin.\,DAE + \tfrac{1}{2}AE \times AF \times sin.\,EAF.$$

Men kan dien inhoud nog op velerlei andere manieren, door het meten van hoeken en afstanden, verkrijgen. Zie verder het XV. *Boek.*

II.

II. *Toepassing der gelegde gronden, op het berekenen van de eenvoudige gevallen der regthoekige en scheefhoekige driehoeken.*

§. 1070. De eigenschappen der driehoeken, tot hiertoe opgegeven, zijn genoegzaam, niet slechts, om de eenvoudige gevallen der driehoeksmeting te berekenen; maar ook om alle oplosbare vraagstukken, in welke lijnen en hoeken gegeven zijn. Het komt er, in het vervolg slechts op aan, om de vergelijkingen of formulen, welke in de getallen berekening gebruikt worden, onder eenen vorm te brengen, die voor de berekening de gemakkelijkste is.

A. *Over het berekenen der regthoekige driehoeken.*

§. 1071. In de berekening van de regthoekige driehoeken, bestaan vier eenvoudige gevallen. 1°. *Wanneer ééne regthoekszijde met éénen der scheve of scherpe hoeken gegeven is.* 2°. *wanneer gegeven zijn de schuinsche zijde met éénen der scherpe hoeken.* 3°. *Wanneer gegeven zijn de twee regthoekszijden.* 4°. *Indien eindelijk ééne regthoekszijde en de schuinsche zijde als bekend ondersteld worden.* — De regte hoek van den regthoekigen driehoek, is uit zich zelven bekend, en behoort dus tot één der gegevens.

I. VRAAGSTUK. I. GEVAL. *Fig.* 37.

§. 1072. *Gegeven zijnde, ééne regthoekszijde* ($AB = c$), *en één der scherpe hoeken* (A *of* C), *de andere regthoekszijde* ($BC = a$), *en de schuinsche zijde* ($AC = b$) *te berekenen?*

OPLOSSING. Omdat, in elken regthoekigen driehoek, de som der scherpe hoeken gelijk is aan 90°, of $A + C = 90°$, zoo is het genoeg, dat één dezer hoeken gegeven is, om den anderen te vinden, want men heeft:

$$C = 90° - A, \text{ en } A = 90° - C \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

men kan dus beide scherpe hoeken, als bekend aanmerken.

Volgens de I. *Stelling*, is

$$a = c \times tang.\, A, \text{ en } b = \frac{c}{cos.\, A}$$

indien men deze vergelijkingen in Logarithmen overbrengt; dan vindt men:

$$Log.\, a = Log.\, c + Log.\, tang.\, A \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$Log.\, b = Log.\, c - Log.\, cos.\, A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

1. VOORBEELD. *Fig.* 37. *Zij gegeven, hoek* $A = 63° 28' 17'', 3$, *en de regthoekszijde* $AB = c = 173^m, 74$; *men vraagt den hoek* C, *de regthoekszijde* $BC = a$, *en de hypothenusa* $AC = b$ *te berekenen?*

1°. *Berekening van den onbekenden hoek C.*

$$C = 90° - A = 90° - 63° 28' 17'', 3 = 26° 31' 42'', 7$$

2°. *Berekening van a.*	3°. *Berekening van b.*
Log. $c = 2, 2398998$	*Log.* $c = 2, 2398998$
Log. tang. $A = 0, 3017225$	*Log. cos.* $A = 9, 6499609 - 10$
Log. $a = 2, 5416223$	*Log.* $b = 2, 5899389$
$a = 348^m, 0345$	$b = 388^m, 9904$

Verklaring. Omdat de hoek $A > 45°$ is, daarom is deszelfs tangens grooter dan één; de Logarithmus van die tangens moet derhalve genomen worden, zoo als hij in de tafel voorkomt; maar de cosinus altijd kleiner dan één zijnde, zoo moet van de Logarithmus der cosinus 10 worden afgetrokken, (zie XI. *B.*, §. 1021,) en, om nu die aftrekking gemakkelijk, en zonder zich te verzinnen, uit te voeren, moet men, in plaats van *Log.* $c = 2, 2398998$, denken *Log.* $c = 12, 2398998 - 10$; en dan wordt alles duidelijk.

Een bewijs, dat de waarden, die men voor de zijden, a en b, door berekening, gevonden heeft, naauwkeurig is, zal blijken, uit de vergelijking $b^2 = a^2 + c^2$; want men zal vinden, $(388, 9904)^2 = \ldots (348, 0345)^2 + (173, 74)^2$.

2. VOORBEELD. *Fig.* 37. *Gegeven zijnde,* $AB = c = 817^m, 38$, *en hoek* $C = 39° 27' 23'', 3$; *den hoek* A, *de zijden* $BC = a$ *en* $AC = b$ *te berekenen?* Men zal vinden, hoek $A = 50° 32' 36'', 7$, $BC = a = 993^m, 0972$ en $AC = b = 1286^m, 2159$.

3. VOORBEELD. *Fig.* 37. *Gegeven zijnde,* $BC = a = 623^m$, *hoek* $C = 48° 37' 40''$; *de lengte der zijden* AB *en* AC, *te berekenen?* Men zal vinden, $AB = 548^m, 712$ en $AC = 830^m, 189$.

II. VRAAGSTUK. II. GEVAL. *Fig.* 38.

§. 1073. *Van een regthoekigen driehoek is gegeven de hypothenusa* ($AC = b$), *met één der scherpe hoeken* (A *of* C); *de anderen scherpen hoek* (C *of* A), *benevens de regthoekszijden* ($AB = c$ *en* $BC = a$), *te berekenen?*

OPLOSSING. De onbekende scherpe hoek wordt, door ééne dezer twee formulen:

$$C = 90° - A, \text{ of } A = 90° - C \quad \ldots \quad (1)$$

gevonden, en, volgens de II. *Stelling*, is

$a =$

$$a = b \times sin. A, \text{ en } c = b \times cos. A$$

of, in Logarithmen:

$$Log\ a = Log. b + Log. sin. A \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$Log. c = Log. b + Log. cos. A \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

1. VOORBEELD. *Fig.* 38. *Zij gegeven*, $AC = b = 786^m, 73$ *en hoek* $A = 53° 17' 52'', 83$; *te berekenen den hoek C, de zijden* $AB = c$ *en* $BC = a$?

1°. *Berekening van den hoek C.*

$$C = 90° - A = 90° - 53° 17' 52'', 83 = 36° 42' 7'', 17.$$

2°. *Berekening van c.*	3°. *Berekening van a.*
$Log. b = 2,8958257$	$Log. b = 2,8958257$
$Log. cos. A = 9,7764491 - 10$	$Log. sin. A = 9,9043426 - 10$
$Log. c = 2,6722741$	$Log. a = 2,7998663$
$c = 470^m, 1915$	$a = 630^m, 7631$

Verklaring. Wanneer men (bij voorbeeid, in het berekenen van de zijde c,) de Logarithmen optelt; dan verkrijgt men voor de som . . . 12, 6722741 — 10, waarvoor geschreven wordt 2, 6722741.

Men zal, als eene proef van de juistheid der berekening, vinden, dat $b^2 = a^2 + c^2$ is.

2. VOORBEELD. *Fig.* 38. *Nog gegeven zijnde*, $AC = b = 3187^m, 2$ *en hoek* $A = 24° 17' 30''$? dan zal men vinden: $AB = c = 2905^m, 0153$ en $BC = a = 1311^m, 1557$.

3. VOORBEELD. *Fig.* 38. *Laat nog gegeven zijn*, $AC = b = 78,398$ *en hoek* $A = 48° 17' 3'', 7$? Men zal vinden: $AB = c = 52,1687$ en $AC = a = 58,5207$.

III. VRAAGSTUK. III. GEVAL. *Fig.* 39.

§. 1074. *Wanneer men de lengte van de regthoekszijden* $AB = c$ *en* $BC = a$ *eens regthoekigen driehoeks, in getallen van dezelfde maat, kent; zoo vraagt men, de scherpe hoeken A en C, en de hypothenusa* $AC = b$, *door berekening, te vinden?*

OPLOSSING. Volgens de I. *Stelling*, is $a = c \times tang. A$ en $c = a \times tang. C$; uit deze vergelijkingen volgt dan:

$$tang. A = \frac{a}{c} \text{ en } tang. C = \frac{c}{a}$$

uit welke de twee volgende Logarithmische formulen worden afgeleid,

$$Log. tang. A = Log. a - Log. c \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$Log. tang. C = Log. c - Log. a \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Wanneer men, door éene dezer twee formulen, één der scherpe hoe-

hoeken A of C gevonden heeft, zoo is de andere ſcherpe hoek $C = 90^\circ - A$, of $A = 90^\circ - C$.

Volgens de II. *Stelling*, is $a = b \times sin.\ A = b \times cos.\ C$; derhalve is $b = \frac{a}{sin.\ A}$ of $b = \frac{a}{cos.\ C}$; welke in Logarithmen overgebragt zijnde, de volgende twee formulen geven:

$$Log.\ b = Log.\ a - Log.\ sin.\ A \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$Log.\ b = Log.\ c - Log.\ cos.\ C \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

welke dezer twee formulen in de berekening gebruikt wordt, zoo zal men voor b hetzelfde getal moeten vinden.

1. VOORBEELD. *Fig.* 39. *Gegeven zijnde*, $AB = c = 237^m$ *en* $BC = a = 289^m$; *de hoeken* A *en* C, *benevens de hypothenuſa* $AC = a$ *te berekenen?*

1°. *Berekening van hoek A.*		2°. *Berekening van hoek C.*	
$Log.\ a =$	2,4608978	$Log.\ c =$	2,3747483
$Log.\ c =$	2,3747483	$Log.\ a =$	2,4608978
$Log.\ tang.\ A =$	0,0861495	$Log.\ tang.\ C =$	9,9138505
	$A = 50^\circ 38' 45'', 15$		$C = 39^\circ 21' 14'', 85$

Ten proeve van de juistheid dezer berekening, maakt de ſom der gevondene hoeken A en C volkomen 90°. Nu moet nog de zijde b berekend worden. Dit kan geſchieden,

1°. *Door den hoek A.*		2°. *Door den hoek C.*	
$Log.\ c =$	2,3747483	$Log.\ a =$	2,4608978
$Log.\ cos.\ A =$	9,8021657	$Log.\ cos.\ C =$	9,8883152
$Log.\ b =$	2,5725826	$Log.\ b =$	2,5725826
	$b = 373^m, 7512$		$b = 373^m, 7512$

Beide berekeningen geven dezelfde uitkomst, welke men ook door het Theorema van PYTHAGORAS verkrijgen zal; want $b = \sqrt{(a^2 + c^2)} = \sqrt{(289^2 + 237^2)} = \sqrt{[83521 + 56169]} = \sqrt{139690} = 373,7512$, hetgeen, tot in het laatſte cijfer, met de voorgaande berekening overeenkomt.

2. VOORBEELD. *Fig.* 39. *Gegeven* $AB = c = 217^m, 31$ *en* $BC = a = 817^m, 94$? Men zal vinden: $A = 75^\circ 7' 17''$, $B = 14^\circ 52' 43''$ en $AC = b = 846^m, 1604$.

3. VOORBEELD. *Fig.* 39. *Gegeven* $AB = c = 17^m, 194$ *en* $AC = a = 3^m, 712$? Men zal vinden: $A = 12^\circ 10' 57'', 26$, $C = 77^\circ 49' 2'', 74$ en $AC = b = 17^m, 59013$.

IV. VRAAGSTUK. IV. GEVAL. *Fig.* 40.

§. 1075. *Van een regthoekigen driehoek* ABC *is gegeven de hy-*

hypothenusa ($AC = b$), *en ééne der regthoekszijden* ($AB = c$ *of* $BC = a$), *de scherpe hoeken* (A *en* C), *benevens de andere regthoekszijde* ($BC = a$ *of* $AB = c$) *te berekenen?*

OPLOSSING. Volgens de II. *Stelling*, is $c = b \times cos.\,A = c \times sin.\,C$; derhalve is $cos.\,A = \frac{c}{b}$ en $sin.\,C = \frac{b}{c}$; waaruit deze Logarithmische formulen volgen:

$$Log.\,cos.\,A = Log.\,c - Log.\,b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$Log.\,sin.\,C = Log.\,c - Log.\,b \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

zijn de scherpe hoeken gevonden; dan is, volgens de I en II. *Stelling*, $a = c \times tang.\,A = b \times sin.\,A$, en in Logarithmen:

$$Log.\,a = Log.\,c + Log.\,tang.\,A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$Log.\,a = Log.\,b - Log.\,sin.\,A \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

1. VOORBEELD. *Fig.* 50. *Zij gegeven* $c = 636^m,5$ *en* $b = 816^m$, *de hoeken* A *en* C, *benevens de regthoekszijde* a *te berekenen?*

1° *Berekening van den hoek* A.		2°. *Berekening van de zijde* a.	
$Log.\,c =$	2,8058405	$Log.\,c =$	2,8058405
$Log.\,b =$	2,9116902	$Log.\,tang.\,A =$	9,8990381
$Log.\,cos.\,A =$	9,8941503	$Log.\,a =$	2,7048789
$A =$	38° 23′ 57″,54	$a =$	506^m,849
$C =$	38° 23′ 2″,46		

Een bewijs van de juistheid der berekening is, dat de waarde, voor a verkregen, aan de bekende vergelijking $a^2 = b^2 - c^2$ voldoet.

2. VOORBEELD. *Fig.* 40. *Gegeven* $BC = a = 183^m,7$ *en* $AC = b = 317^m,83$? Men zal vinden: $A = 35°\,18'\,29'',86$ en $C = 54°\,41'\,30'',14$, eindelijk $AB = 259^m,3692$.

3. VOORBEELD. *Fig.* 40. *Gegeven* $AB = c = 381^m$ *en* $AC = b = 417^m$? Men zal vinden: $A = 23°\,58'\,57'',3$, $C = 66°\,1'\,2'',7$ en $BC = a = 169^m,4935$.

Algemeene aanmerkingen op de vier gevallen der regthoekige driehoeken.

§. 1076. Behalve de gewone oplossings-manieren, die in de vier voorgaande Vraagstukken verklaard, en door het noodige aantal voorbeelden zijn opgehelderd, kan men nog andere formulen vinden, die, hoewel zij de getallen berekening omslachtiger mogen maken, nogtans, wanneer het op eene groote naauwkeurigheid aankomt, te verkiezen zijn. Wij zullen hiervan eenige staaltjes bij brengen.

§. 1077.

§. 1077. 1°. *Wanneer, Fig. 39, de twee regthoekszijden a en c gegeven zijn; dan zal men het verschil der scherpe hoeken door ééne dezer drie formulen*

$$sin.(A-C)=\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\ (24)\quad cos.(A-C)=\frac{2ac}{a^2+c^2}\ (25)$$

$$tang.(A-C)=\frac{(a+c)(a-c)}{2ac}\ \ldots\ (26)$$

kunnen vinden; en, wanneer deze gevonden zijn, zal

$$A=45^\circ+\tfrac{1}{2}(A-C)$$
$$C=45^\circ-\tfrac{1}{2}(A-C)$$

zijn.

Want, volgens de II. *Stelling*, is $a=b\times sin.A$ en $c=b\times sin.C$; waaruit onmiddelijk volgt:

$$sin.=\frac{a}{b}\ \text{en}\ sin.C=\frac{c}{b}$$

Men brenge deze vergelijkingen tot de tweede magt, en trekke deze tweede magten van elkander af; dan zal men, omdat $b^2=a^2+c^2$, verkrijgen:

$$sin^2.A-sin^2.C=\frac{a^2-c^2}{b^2}=\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}$$

Maar nu is, zie XII. *Stell.* XI. *B.*

$$sin^2.A-sin^2.C=sin.(A+C)\,sin.(A-C)$$

welke vergelijking, omdat $A+C=90^\circ$ en $sin.(A+C)=1$ is, worden zal:

$$sin^2.A-sin^2.C=sin.(A-C)$$

waaruit dan blijkt: dat

$$sin.(A-C)=\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\ \ldots\ldots\ (24)$$

zal zijn.

Uit deze vergelijking (24), volgt onmiddellijk:

$$1-sin^2.(A-C)=1-\left(\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}\right)^2=1-\frac{a^4-2a^2c^2+c^4}{a^4+2a^2c^2+c^4}$$

dat is, volgens de bekende beginselen,

$$cos^2.(A-C)=\frac{4a^2c^2}{a^4+2a^2c^2+c^4}$$

uit welke vergelijking de vierkants-wortel is,

$$cos.(A-C)=\frac{2ac}{a^2+c^2}\ \ldots\ldots\ (25)$$

Deelt men eindelijk vergelijking (24) door vergelijking (25); dan zal men vinden:

tang.

$$tang.(A-C)=\frac{a^2-c^2}{2ac}=\frac{(a+c)(a-c)}{2ac} \quad \ldots (26)$$

De laatste dezer formule is de gemakkelijkste, om het verschil der scherpe hoeken te vinden.

De Lezer berekene, naar de laatste formule, het uitgewerkte voorbeeld van het III. *Vraagstuk*, *Bladz.* 124.

§. 1078. II. *Wanneer twee regthoekszijden a en c gegeven zijn, en de regthoekszijde a, ten opzigte van de regthoekszijde c zoo klein is, dat de hoek A slechts eenige minuten bedraagt; dan zal, in secunden, die hoek A worden voorgesteld door de formule,*

$$A=\frac{1}{sin.\,1''}\times\left\{\frac{a}{c}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{c}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{a}{c}\right)^5-enz.\right\} \quad \ldots (27)$$

Want, omdat $tang.A=\frac{a}{c}$, zoo zal $A=B.\ tang.\left(\frac{a}{c}\right)$ zijn; dat is, men zal. (zie IX. *Vraagst.* XI. *B.*) hebben:

$$A=\frac{a}{c}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{c}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{a}{c}\right)^5-\tfrac{1}{7}\left(\frac{a}{c}\right)^7+enz.$$

door welke formule de boog, die de betrekkelijke maat van den hoek A is, in deelen van den straal, zal bekend worden. Om dus dien hoek in secunden te vinden, zal men (zie IV. *Vraagst.* XI. *B.*) denzelven door de sinus van ééne secunde moeten deelen. Men verkrijgt dan:

$$A=\frac{1}{sin.\,1''}\times\left\{\frac{a}{c}-\tfrac{1}{3}\left(\frac{a}{c}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{a}{c}\right)^5-enz.\right\} \quad \ldots (31)$$

Welke formule, indien dezelve berekend wordt, den hoek in secunden geven zal.

Wanneer c, ten opzigte van a, een groot getal is; dan zal slechts de eerste term genoeg zijn.

Voorbeeld. *Stellen wij, dat gegeven is* $a=37$ *en* $c=1217$; *den hoek A te berekenen?*

Men stelle kortheidshalve $\frac{a}{c}=m$; dan heeft men, als volgt:

$$Log.\,a=1,5682017$$
$$Log.\,c=3,0852906 \ aftr.$$
$$Log.\,m=8,4829111-10$$
derhalve $m=0,03040262$

Men vermenigvuldige $Log.\,m$ met drie; dan is

$$Log.\,m^3=5,4487333$$
$$Log.\,3=0,4771213 \ aftr.$$
$$Log.\,\tfrac{1}{3}m^3=4,9716120-10$$
$$\tfrac{1}{3}m^3=0,00000937$$

Nog

Nog vermenigvuldige men *Log. m* met vijf; dan is

$$Log.\, m^5 = 2,4145555$$
$$Log.\, 5 = 0,6989700 \text{ aftr.}$$
$$Log.\, \tfrac{1}{5} m^5 = 1,7155855 - 10$$
$$\tfrac{1}{5} m^5 = 0,000000005$$

De waarde van deze laatste term is reeds zoo klein, dat dezelve zou kunnen verwaarloosd worden.

Men rekene nu, als volgt:

$$m = 0,03040262$$
$$\tfrac{1}{3} m^3 = 0,00000937 \text{ aftrekken.}$$
$$0,03039325$$
$$\tfrac{1}{5} m^5 = 0,00000001 \text{ bijtellen.}$$
$$0,03039326 = m - \tfrac{1}{3} m^3 + \tfrac{1}{5} m^5$$

$$Log.\,(m - \tfrac{1}{3} m^3 + \tfrac{1}{5} m^5) = 8,4827779 - 10$$
$$Log.\, sin.\, 1'' = 4,6855749 - 10 \text{ aftrekken.}$$
$$Log.\, A = 3,7972030$$
$$A = 6269'',0672$$
$$\text{of } A = 1^\circ\, 44'\, 29'',0672.$$

§. 1079. III. *Indien men, zie fig. 40, onderstelt, dat de schuinsche zijde* $A'C = b$, *met de regthoekszijde* $AB = c$, *gegeven zijn; dat is:*

$$sin.\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b-c}{2b}} \quad (28) \qquad cos.\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b+c}{2b}} \quad \ldots, (29)$$

$$tang.\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

Want, volgens de II. *Stelling*, is $cos.\, A = \frac{c}{b}$; en uit die vergelijking, volgt dan onmiddellijk:

$$1 - cos.\, A = 1 - \frac{c}{b} = \frac{b-c}{b} \quad \text{en} \quad 1 + cos.\, A = 1 + \frac{c}{b} = \frac{b+c}{b}$$

Nu is, zie IV. *Gev.* III. *Stell.* XI. *B.*,

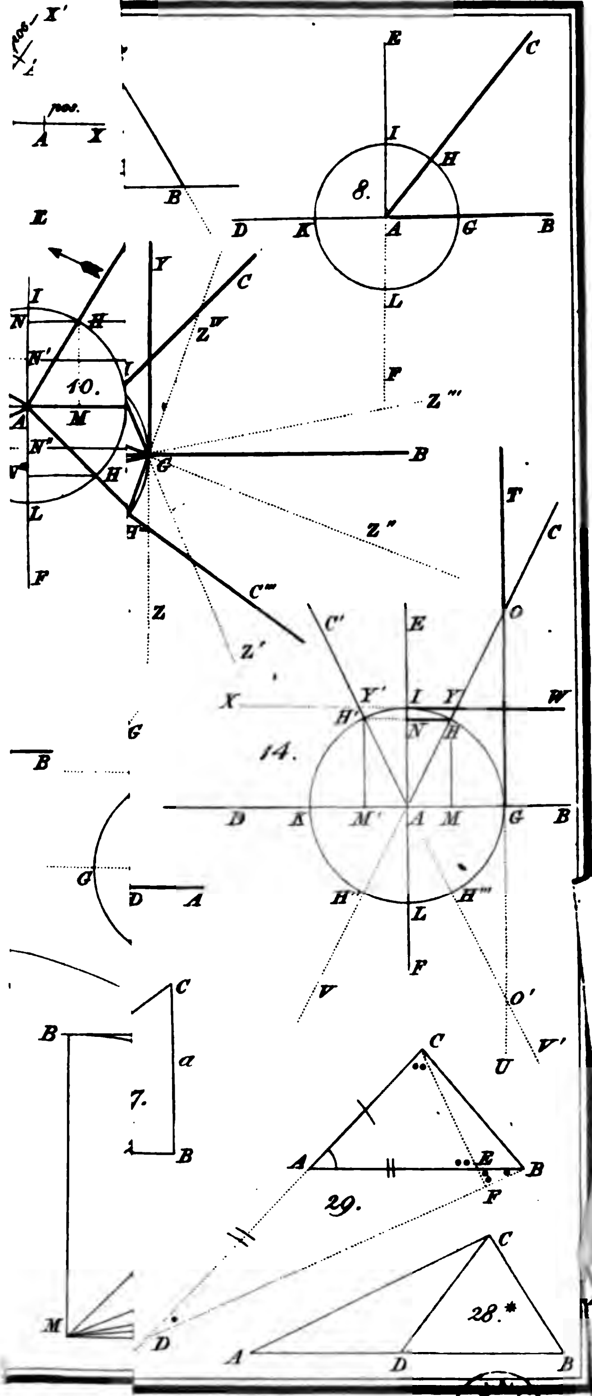
$$1 - cos.\, A = 2\, sin^2.\, \tfrac{1}{2} A$$
$$1 + cos.\, A = 2\, cos^2.\, \tfrac{1}{2} A$$

en, daarom is,

$$2\, sin^2.\, \tfrac{1}{2} A = \frac{b-c}{b} \quad \text{en} \quad 2\, cos^2.\, \tfrac{1}{2} A = \frac{b+c}{b}$$

Indien men deze laatste vergelijkingen door twee deelt, en uit de quotienten den vierkants-wortel trekt; dan verkrijgt men:

sin.


8.
10.
14.
7.
29.
28.*
E
C
I
H
D
K
A
G
B
L
F
Z'''
Z''
Z'
Z
Y
C'''
T
O
O'
U
X
W
V
V'
M
M'
N

$$sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b-c}{2b}}, \text{ en } cos. \tfrac{1}{2} A = \frac{b+c}{2b}$$

en, deelt men eindelijk de waarde van $sin. \tfrac{1}{2} A$, door die van $cos. \tfrac{1}{2} A$; dan vindt men:

$$tang. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{b-c}{b+c}}$$

Om dezelfde redenen zal,

$$sin. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{b-a}{2b}}, \quad cos. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{b+a}{2b}} \quad \text{en} \quad tang. \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{b-a}{b+a}}$$

zijn.

§. 1080. IV. *Onderstelt men: dat, de twee regthoekszijden a en c gegeven zijn; dan is:*

$$sin. 2A = sin. 2C = \frac{2ac}{a^2+c^2} \quad \ldots\ldots (31)$$

$$cos. 2A = \frac{c^2-a^2}{c^2+a^2} \; (31), \quad tang. 2A = \frac{2ac}{(c+a)(c-a)} \; . \; (32)$$

Want, omdat in een regthoekigen driehoek, elke scherpe hoek het complement van den anderen scherpen hoek is, zoo is $sin. A = cos. C$ en $cos. A = sin. C$. Nu is, volgens de II. *Stelling*,

$$a = b \times sin. A = b \times cos. C$$
$$c = b \times cos. A = b \times sin. C$$

Het dubbele product dezer vergelijkingen geeft:

$$2ac = 2b^2 \, sin. A \times cos. A = 2b^2 \, sin. C \times cos. C$$

of, omdat (zie II. *Gev* III. *Stell.* XI *B.*) $2 \, sin. q \; cos. q = sin. 2q$ is;

$$2ac = b^2 \times sin. 2A = b^2 \times sin. 2C$$

derhalve wordt eindelijk, omdat $b^2 = a^2 + c^2$ is,

$$sin. 2A = sin. 2C = \frac{2ac}{a^2+c^2}$$

Dat de sinus van $2A$ dezelfde waarde moet hebben, als de sinus van $2C$, is buiten dien duidelijk te zien; want, omdat $A + C = 90°$ is, zoo is $2A + 2C = 180°$, gevolgelijk is $2A$ het supplement van $2C$, en, omgekeerd; nu weet men, dat een hoek en deszelfs supplement dezelfde sinus hebben.

Uit de formule (31), volgt onmiddelijk:

$$1 - sin^2. 2A = 1 - sin^2. 2C = 1 - \left(\frac{2ac}{a^2+c^2}\right)^2$$

of, dat hetzelfde is;

$$cos^2. 2A = cos^2. 2C = 1 - \frac{4a^2c^2}{a^4+2a^2c^2+c^4}$$

$$cos^2. 2A = cos^2. 2C = \frac{a^4-2a^2c^2+c^4}{a^4+2a^2c^2+c^4}.$$

 De

De vierkants-wortels uit deze vergelijkingen geven:

$$cos. 2A = cos. 2C = \frac{c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

en, deelt men de waarde van *sin.* $2A$, door *cos.* $2A$; dan verkrijgt men:

$$tang. 2A = \frac{2ac}{(c+a)(c-a)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Men kan nog veel meer andere eigenschappen uit de grond-formulen der regthoekige driehoeken afleiden; maar het bijgebragte is genoeg, om den Lezer den weg, in die soort van nasporingen, aan te wijzen.

B. *Over het berekenen der scheefhoekige driehoeken.*

§. 1081. In dit gedeelte der driehoeksmeting, komen wederom vier gevallen voor; 1°. *wanneer ééne zijde en twee hoeken, aan die zijde* (dus ook al de hoeken); 2°. *Wanneer twee zijden met eenen hoek over ééne dezer zijden;* 3°. *Wanneer twee zijden met den ingesloten hoek;* 4°. *Wanneer eindelijk de drie zijden gegeven zijn.*

V. Vraagstuk, I. Geval. *Fig.* 41.

§. 1082. *Van een scheefhoekigen driehoek* (ABC) *is gegeven de lengte van ééne der zijden* ($AB = c$), *benevens de hoeken* (A *en* B), *aan die zijden gelegen zijnde; men begeert den derden hoek* C, *benevens de twee andere zijden* ($AC = b$ *en* $BC = a$), *door berekening, te vinden?*

Dit eerste geval, dat zeer dikwerf voorkomt, wordt, met behulp van van eene schaal van gelijke deelen en eenen transporteur, aldus geconstrueerd. Op eene onbepaalde lijn AB, *fig.* 41, neme men, op eene schaal, zooveel gelijke deelen, als AB lang is; $AB = c$ deelen; met den transporteur, make men de hoeken A en B, gelijk aan zooveel graden en deelen van dezelve, als in getallen gegeven zijn. Indien men, dan op diezelfde schaal meet, hoeveel deelen van dezelve AC en BC bevatten; dan zal het blijken, hoeveel voeten of meters *enz.* die zijden lang zijn.

Oplossing. Omdat in elken driehoek $A + B + C = 180°$ is, zoo is $C = 180° - (A + B)$. Het is eigenlijk genoeg, dat twee hoeken gegeven zijn; want de derde hoek is altijd gelijk aan het supplement van de som der twee andere hoeken.

Volgens de III *Stelling*, is nu

$$\left\{\begin{matrix} sin. A : sin\ B = a : b \\ sin. A : sin. C = a : c \end{matrix}\right\}; \text{ derhalve} \left\{\begin{matrix} b = (a : sin. A) \times sin. B \\ c = (a : sin. A) \times sin. C \end{matrix}\right\}$$

en

en hieruit volgen dan de Logarithmische vergelijkingen:

$$Log.\,a - Log.\,sin.\,A = \Omega$$
$$Log.\,b = \Omega + Log.\,sin.\,B$$
$$Log.\,c = \Omega + Log.\,sin.\,C$$

of, $Log.\,b = (Log.\,a - Log.\,sin.\,A) + Log.\,sin\,B$
$Log.\,c = (Log.\,a - Log.\,sin.\,A) + Log\,sin.\,C$

Men trekke derhalve van den Logarithmus der bekende zijde den Logarithmus van de finus van den hoek, over die zijde staande, af; en telle bij het verschil de Logarithmen van de finussen der hoeken, welke over de onbekende zijden staan, en dan zijn de sommen de Logarithmen van de onbekende zijden. Wanneer men de berekening op deze wijze inrigt; dan wint altijd ééne aftrekking uit.

VOORBEELD. *Fig. 41. Om te vinden, hoe ver men, in een punt A, van een ontoegankelijk voorwerp C verwijderd zij? heeft men, op het terrein, eene basis AB, de lengte van* 2097^m,53 *hebbende, gemeten, en, uit de punten A en B, door waarneming, de hoeken A en B bepaald, (hoe zulks geschiedt, zal in de werkdadige Meetkunst geleerd worden,) namelijk, hoek* $A = 88^\circ\,17'\,47'',8$ *en hoek* $B = 57^\circ\,43'\,28'',3$. *Men vraagt, de afstanden van het voorwerp C tot de punten A en B te vinden?*

BEREKENING. Er is gegeven $A = 88^\circ\,17'\,47'',8$ ⎫ *optellen.*
$B = 57^\circ\,43'\,28'',3$ ⎭

supplem. $C = A + B = 156^\circ\;1'\,16'',1$; *trek af van* 180°
derhalve wordt $C = 33^\circ\,58'\,43'',9$

$Log.\,AB = 3,3217082$
$Log.\,sin.\,C = 9,7473240$ *aftrekken*

$\Omega = 3,5743842$ . . . . . $\Omega = 3,5743842$
$Log.\,sin.\,A = 9,9998081$, $Log.\,sin.\,B = 9,9271087$ *bijtellen*

$Log.\,BC = 3,5741923$ $Log.\,AC = 3,5014929$
$BC = 3751^m,39$ $AC = 3173^m,17$

Men lette wel op: *dat, wanneer één der hoeken stomp is, het supplement van dien hoek moet genomen worden,* om deszelfs finus in de tafel te kunnen vinden.

VI. VRAAGSTUK. II. GEVAL. *Fig. 42 en 43.*

§. 1083. *Gesteld zijnde: dat van eenen driehoek (ABC) zijn gegeven, twee der zijden (AC en BC), met éénen der hoeken (BAC), staande over ééne (BC) dezer bekende zijden; de onbe-*

kende hoeken (ABC *en* ACB), *benevens de onbekende zijde* (AB), *door berekening te vinden?*

Men is gewoon, dit geval het twijfelachtige geval te noemen; omdat er eigenlijk twee driehoeken bestaan, welke, in alle gevallen (ten minsten, wanneer men den hoek BAC beschouwt, als door zijne sinus bekend te zijn,) aan de gegevens voldoen. Eene constructie zal dit duidelijk maken.

Stel, *fig.* 42, hoek $A = m$ graden, en, in getallen, $AC = b$ en $BC = a$ meters. Men make met eenen transporteur den hoek $A = m$ graden; en neme op AC, volgens eene schaal (die men naar welgevallen nemen kan,) $AC = b$ deelen van die schaal. Uit het punt C beschrijve men, met eenen straal, die a deelen van diezelfde schaal bevat, eenen cirkel; dan kunnen er drie gevallen plaats hebben: 1°. die cirkel zal de lijn AB in twee punten B en B' doorsnijden; 2°. zal hij die lijn ergens in eenig punt kunnen aanraken, en 3°. de lijn AB zal geheel buiten den omtrek kunnen vallen.

In het eerste geval, zijn twee omstandigheden te onderscheiden: 1°. indien $b > a$, en 2°. indien $a > b$ is.

Is, zie *fig.* 42, $b > a$; dan zal de cirkel, die, uit C, met $CB = a$, beschreven is, de lijn AB in twee punten B en B' zoodanig snijden, dat die twee punten B en B' beide op het been $AB'B$ van den hoek BAC gelegen zijn; en dan bestaan er twee driehoeken ABC en $AB'C$, in welke $AC = b$ en $BC = a$ en $A = m$ graden gegeven zijn, *en, bij deze omstandigheid alleen, kan men zeggen: dat het geval twijfelachtig is.* Dezelfde schaal, op welke de getallen a en b zijn genomen, zal kenbaar maken, hoe groot de zijden AB en AB' dezer twee driehoeken zijn, en, door den transporteur, zal men ten ruwsten de hoeken ABC en ACB of $AB'C$ en ACB' kunnen meten.

Maar is, zie *fig.* 43, $a > b$; dan zal de cirkel, die uit C met $BC = a$ als straal beschreven wordt, de lijn AB ook (en hier noodzakelijk) in de punten B en B' doorsnijden; maar het punt B zal op het been van den hoek BAC liggen, het punt B' op het verlengde van hetzelve. Men verkrijgt dan ook wel twee driehoeken ABC en $AB'C$, die de gegevene zijden a en b hebben; maar de hoeken BAC en $B'AC$ zijn niet meer, zoo als in *fig.* 42, dezelfde. In *fig.* 43, is de hoek $B'AC$ het supplement van den gegevenen hoek BAC. *Indien dus de hoek BAC in graden gegeven is, zoo als hier ondersteld wordt, bestaat er slechts een driehoek, die aan de gegevens voldoet, en het geval is niet meer twijfelachtig;* doch is de hoek BAC niet in graden; maar door zijne sinus gegeven; dan voldoen (omdat de sinus van eenen hoek aan de sinus van zijn supplement gelijk is,) beide driehoeken aan de voorwaarde van de vraag.

Wanneer de cirkel, die, uit C, met $BC = a$ als straal, beschreven is, de zijde AB aanraakt, (hetwelk alleen kan plaats hebben, wanneer $b > a$ is); dan vereenigen zich de twee driehoeken ABC en $AB'C$

van *fig.* 42, in twee gelijke even groote en gelijkvormige driehoeken, die op elkander liggen — en, in dien zin, kan men zeggen, dat er slechts eenen regthoekigen driehoek bestaat, die aan de voorwaarden der vraag voldoet.

Indien eindelijk de omtrek des cirkels, uit C met $BC = a$ beschreven, de lijn AB niet snijdt noch raakt, (hetgeen plaats kan hebben als $b > a$ is,) dan is het een bewijs, dat de gegevens onderling met elkander onbestaanbaar zijn.

Deze constructie moet veel lichts over de volgende rekenkunstige oplossing verspreiden.

Oplossing. Stellen wij dat de zijden b en c, benevens de hoek B, welke tegen over de zijde b staat, gegeven zijn; dan hebben wij (III. *Stell.*) de evenredigheid, $b : c = sin.\ B : sin.\ C$; waaruit volgt: $sin.\ C = \frac{c \times sin.\ B}{b}$, of, in Logarithmen, $Log.\ sin.\ C = Log.\ sin.\ B + Log.\ c - Log.\ b$. Men zal alzoo den hoek C, door zijne sinus, leeren kennen: *maar, alzoo elke sinus tot twee hoeken behoort, te weten, tot eenen scherpen, en tot eenen stompen hoek, welke het supplement des eersten is, zoo zullen er ook twee driehoeken op deze gegevens passen; dat is, de hoeken C en A, en de zijde a, zullen twee onderscheidene waarden verkrijgen: zelfs zullen, in dit geval, de gegevens met eenigen driehoek onbestaanbaar kunnen zijn; wanneer namelijk* $c \times sin.\ B$, *grooter dan b zijnde, de sinus van C, strijdig met den aard van sinus, grooter dan de eenheid wordt.*

Om nu eindelijk de zijden BC en BC' der twee driehoeken, ABC en ABC' te vinden; dan zal (III. *Stell.*) $sin.B : AC = sin.BAC : BC$, en $sin.\ B : AC = sin.\ BAC' : BC'$ zijn, en daarom zal

$$BC = \frac{AC}{sin.\ B} \times sin.BAC;\ \text{en}\ BC' = \frac{AC}{sin.\ B} \times sin.BAC.$$

zijn. In Logaritmen, heeft men dan de volgende vergelijkingen:

1°. $Log.sin.\ (ACB\ \text{of}\ AC'B) = Log.\ sin.\ B + Log.\ AB - Log.\ AC.$

2°. Hoek $BAC = 180° - (B + ACB)$, en hoek $BAC' = 180° - (B + AC'B)$.

3°. $Log.\ BC = Log.\ AC - Log.\ sin.\ B + Log.\ sin.\ BAC.$

4°. $Log.\ BC' = Log.\ AC - Log.\ sin.\ B + Log.\ sin.\ BAC'.$

Voorbeeld. *Fig.* 42. *Gegeven zijnde*, $AB = 729^m,3$; $AC = 630^m,78$, *en hoek* $B = 36°\ 17'\ 43'',5$: *de hoeken A en C, benevens de zijde BC, te vinden?*

Berekening. 1°. *Om den hoek C te vinden.*

$Log.\ sin.\ B = 9,7722840$
$Log.\ AB = 2,8629062$ *bijtellen*

12,6351902
$Log.\ AC = 2,7998779$ *aftrekken*

 blijft

blijft over $Log. sin. C = 9,8353123$
derhalve hoek $ACB = 43^\circ\ 11'\ 19'',42$
en hoek $AC'B = 136^\circ\ 48'\ 40'',58$

2°. *Om de hoeken* BAC *en* BAC' *te vinden.*

hoek $B =$	$36^\circ\ 17'\ 43'',50$	hoek $B =$	$36^\circ\ 17'\ 43'',50$
hoek $ACB =$	$43^\circ\ 11'\ 19'',42$ ..	hoek $AC'B =$	$136^\circ\ 48'\ 40'',58$ opt.
	$79^\circ\ 29'\ 02'',92$		$173^\circ\ 06'\ 24'',08$
hoek $BAC =$	$100^\circ\ 30'\ 57'',08$ ..	hoek $BAC' =$	$6^\circ\ 53'\ 35'',92$

3°. *Om de zijden* BC *en* BC' *te vinden.*

$Log. AC = 2,7998779$
$Log. sin. B = 9,7722840$ aftrekken

$3,0275939$ .... $3,0275939$
$Log. sin. BAC = 9,9926438$; $Log. sin. BAC' = 9,0792570$ bijt.

$Log. BC = 3,0202377$ .... $Log. BC' = 2,1068509$
$BC = 1047^m,702$ $BC' = 127^m,8932$

Ten blijke van de juistheidheid dezer berekening, zal men bevinden: dat $AB^2 = AC^2 + BC \times BC'$ is, zoo als, volgens de XVIII. *Stell.* IV. *Boek*, moet plaats hebben.

ANDERE OPLOSSING. In de oplossing van dit voorbeeld, hebben wij, naar het voorschrift van den regel, eerst den hoek C, tegen over de bekende zijde $AB = c$ staande, gezocht, en, met behulp van dezen gevonden hoek C, eerst den hoek A en daarna de onbekende zijde $BC = a$ berekend. De laatste dezer berekeningen hangt van de eerste af; wij zullen daarom doen zien, dat men, zoo wel den onbekenden hoek, als de onbekende zijde $BC = a$, afzonderlijk kan vinden.

Om den hoek A afzonderlijk te vinden, redenere men, als volgt. Volgens de V. *Stell.* is $tang. B = \frac{b \times sin. A}{c - b \times cos. A}$; hieruit vindt men: $b \times sin\ A + b \times cos. A \times tang. B = c \times tang. B$, en, deze door b deelende en in plaats van $tang. B$ stellende $sin. B : cos. B$, zal men vinden:

$$sin. A \times cos\ B + sin. B \times cos. A = sin. (A + B) = c \times sin. B : b$$
$$A + B = boog\ sin. [c \times sin. B : b]$$

waaruit dan eindelijk volgen zal:

$$A = - B + boog\ sin. [c \times sin. B : b]$$

en nog voor eene tweede waarde

$$A = 180^\circ - boog\ sin. [c \times sin. B : b] + B$$

welke den hoek onmiddellijk zal leeren kennen.

Berekenen wij nog de zijde $BC = a$. Volgens de VII. *Stell.* is $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times cos. B$. Lost men uit deze vergelijking de zijde a op; dan zal men vinden:

$a =$

$$a = + c \times cos. B \pm c \times sin. B \times \sqrt{\left\{ \frac{b^2}{c^2 \, sin. B} - 1 \right\}}$$

ſtelt men derhalve $cos. \varphi = c \times sin. B : b$; dan zal

$$a = c \times cos. B \pm c \times sin. B \times tang. \varphi$$

moeten zijn.

VII. VRAAGSTUK. III. GEVAL. *Fig.* 44.

§ 1084. *Bijaldien van eenen driehoek (ABC) gegeven zijn, twee zijden (BC = a en AC = b), met den ingeſloten hoek (ACB), de onbekende hoeken (A en B), benevens de onbekende zijde (AB) door berekening, te vinden?*

Met eene ſchaal en transporteur is dit geval gemakkelijk te conſtrueren. Men make namelijk, met den transporteur, eenen hoek ACB, gelijk aan den gegevenen hoek; verder neme men, op eene ſchaal, van het hoekpunt C af te rekenen, CB gelijk a, en CA gelijk b deelen, en trekke de lijn AB; dan verkrijgt men den driehoek ABC, die aan de gegevens voldoet. Want, meet men de hoeken A en B met den transporteur; dan zal men de grootte van dezelve in graden verkrijgen; en zoo veel deelen van de ſchaal, als de zijde AB bevat, zoo groot zal dezelve zijn.

I. OPLOSSING. De berekening is weder omſlachtiger dan de conſtructie; maar zij geeft eene grootere naauwkeurigheid. Volgens de IV. *Stelling*, is

$$a + b : a - b = cot. \tfrac{1}{2} C : tang. \tfrac{1}{2} (A - B)$$

derhalve wordt

$$tang. \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \times tang. (90^\circ - \tfrac{1}{2} C) \quad \ldots (a)$$

wanneer men namelijk, in plaats van $cot. \tfrac{1}{2} C$, derzelver waarde $tang. (90^\circ - \tfrac{1}{2} C)$ ſtelt.

Door deze vergelijking zal het halve verſchil der onbekende hoeken gevonden worden. Aangezien nu

$$\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C$$

$$\text{en} \quad \tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} B = \tfrac{1}{2} (A - B)$$

is, zoo zal de ſom en het verſchil dezer vergelijkingen geven:

$$A = (90^\circ - \tfrac{1}{2} C) + \tfrac{1}{2} (A - B) \quad \ldots\ldots (b)$$

$$B = (90^\circ - \tfrac{1}{2} C) - \tfrac{1}{2} (A - B) \quad \ldots\ldots (c)$$

Deze hoeken nu bekend geworden zijnde, zal men (zie III. *Stell.*) de onbekende zijden, op twee onderſcheidene wijzen, kunnen vinden; namelijk:

$$sin. B : sin. C = b : c$$

$$sin. A : sin. C = a : c$$

uit welke evenredigheden dan volgt:

$$c = \frac{b \times sin.\,C}{sin.\,B} = \frac{a \times sin.\,C}{sin.\,A} \quad \ldots\ldots \quad (d)$$

Dit ſtelſel van formulen (*a*), (*b*), (*c*) en (*d*), is de voorſtelling van de gewone wijze van berekenen. Dan de formule (*a*), kan op eene kunſtige wijze herleid worden, die vooral, wanneer de bekende zijden *a* en *b* in Logarithmen zijn gegeven, veel gemakkelijker en min omſlachtig is.

Men deele teller en noemer van het gebroken $\frac{a-b}{a+b}$ door *b*; dan verkrijgt men:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} \times tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$$

Wanneer men nu in aanmerking neemt, dat elk gebroken $\frac{a}{b}$, het zij het kleiner of grooter dan de éénheid is, de tangens van eenen boog kan voorſtellen, die altijd in het eerſte quadrant valt (omdat de tangenten, van 0° tot 90°, van nul tot in het oneindige aangroeijen); dan zal men kunnen ſtellen:

$$\frac{a}{b} = tang.\,\phi$$

en dan wordt de voorgaande vergelijking:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{tang.\,\phi - 1}{tang.\,\phi + 1} \times tang\,(90^\circ - C),$$

maar nu is, zie III. *Gev.* IV. *Stell.* XI. *B. form.* (75),

$$\frac{tang.\,\phi - 1}{tang.\,\phi + 1} = tang.\,(\phi - 45^\circ)$$

en de laatſte vergelijking wordt derhalve:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(A - B) = tang.\,(\phi - 45^\circ) \times tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$$

Wij hebben dan, om de onbekende hoeken en de onbekende zijden te berekenen, het volgende ſtelſel van formulen.

REGEL. *Zij de grootſte der gegevene zijden* $= a$, *de kleinſte van dezelve* $= b$; *maak dan*

$1^\circ.\ \frac{a}{b} = tang.\,\phi$

$2^\circ.\ tang.\,\mu = tang.\,(\phi - 45^\circ) \times tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$

dan heeft men, als volgt:

$$A = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C + \mu$$
$$B = 90^\circ - \tfrac{1}{2}B - \mu$$

en de onbekende zijde c zal gevonden worden door de dubbele vergelijking:

$c =$

$$c = \frac{a \times sin.\,C}{sin.\,A} = \frac{b \times sin.\,C}{sin.\,B}$$

In Logarithmen, zijn deze vergelijkingen:

$$Log.\,a - Log.\,b = Log.\,tang.\,\phi$$
$$Log.\,tang.\,\mu = Log.\,tang.\,(\phi - 45^\circ) + Log.\,tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$$
$$Log.\,c = Log.\,a + Log.\,sin.\,C - Log.\,sin.\,A$$
$$Log.\,c = Log.\,b + Log.\,sin.\,C - Log.\,sin.\,B$$

Met dit zamenstelsel van formulen, is de berekening eenvoudig en gemakkelijk.

VOORBEELD. *Fig. 44. Wetende, dat men, in het punt C, van de punten A en B, de volgende afstanden heeft:* $AC = b = 2893^m.7$; $BC = a = 4309^m,73$; *indien dan de hoek C, naauwkeurig gemeten zijnde, bevonden wordt, gelijk te zijn aan* $56^\circ\ 39'\ 33'',4$, *vraagt men: niet alleen, de hoegrootheid van de hoeken A en B; maar ook voornamelijk den afstand van de punten A en B van elkander te vinden?*

1°. *Berekening der hoeken A en B.*

Gegeven $C = 56^\circ\ 39'\ 33'',4$
$\tfrac{1}{2}C = 28^\circ\ 19'\ 46'',7$
$90^\circ - \tfrac{1}{2}C = 61^\circ\ 40'\ 13'',3$

$Log.\,a = 3,6344500$
af $Log.\,b = 3,4532725$

$Log.\,tang.\,\phi = 0,1811775$
$\phi = 56^\circ\ 37'\ 08'',15$
$\phi - 45^\circ = 11^\circ\ 37'\ 08'',15$

$L.\,tang\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}C) = 0,2683210$
$L.\,tang.\,(\phi - 45^\circ) = 9,3130545$

$Log.\,tang.\,\mu = 9,5813755$
$\mu = 20^\circ\ 52'\ 35'',84$
$(90^\circ - \tfrac{1}{2}C) = 61^\circ\ 40'\ 13'',30$
derhalve $A = 82^\circ\ 32'\ 49'',14$
$B = 40^\circ\ 47'\ 37'',46$

2°. *Berekening van de onbekende zijde c.*

a) Door de eerste vergelijking.

$Log.\,a = 3,6344500$
$Log.\,sin.\,C = 9,9219033$ bij

$3,5563533$
$Log.\,sin.\,A = 9,9963153$ af

$Log.\,c = 3,5600380$

β) Door de tweede vergelijking.

$Log.\,b = 3,4532725$
$Log.\,sin.\,C = 9,9219033$

$3,3751758$
$Log.\,sin.\,B = 9,8151378$

$Log.\,c = 3,5600380$
$c = 3631^m,098$

De twee berekeningen van *c* geven dezelfde uitkomst, hetwelk nogtans geen zeker waarborg is; want, men kan zich in de *Log. sin. C* vergissen, zonder zulks aan de ongelijkheid der uitkomsten te bemerken.

II. OPLOSSING. Volgens de VII. *Stelling*, is

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b \times cos.\,C$$

waarvoor kan geschreven worden:

$c^2 =$

$$c^2 = 1 \times (a^2 + b^2) - 2ab \times \cos. C$$

Nu is, zie II. *Stell.* XI. *B.* en II. *Gev.* III. *Stell.* XI. *B.*

$$1 = \sin^2. \tfrac{1}{2} C + \cos^2. \tfrac{1}{2} C$$

en $\cos. C = \cos^2. \tfrac{1}{2} C - \sin^2. \tfrac{1}{2} C$

men verkrijgt dan, in plaats van de voorgaande vergelijking,

$$c^2 = (a^2 + b^2)(\cos^2. \tfrac{1}{2} C + \sin^2. \tfrac{1}{2} C) - 2ab(\cos^2. \tfrac{1}{2} C - \sin^2. \tfrac{1}{2} C)$$

of, bij nadere ontwikkeling,

$$c^2 = (a^2 + b^2 - 2ab) \cos^2. \tfrac{1}{2} C + (a^2 + b^2 + 2ab) \sin^2. \tfrac{1}{2} C$$

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C + (a-b)^2 \cos^2. \tfrac{1}{2} C \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

Deze vergelijking (a), welke wederom eene merkwaardige eigenschap van den driehoek voorstelt, kan op twee onderscheidene wijzen worden herleid.

1°. Men deele het tweede lid der vergelijking (a) door $(a+b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C$, en vermenigvuldige dan het quotient wederom met dien deeler; dan verkrijgt men:

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C \times \left\{ 1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \times \frac{\cos^2. \tfrac{1}{2} C}{\sin^2. \tfrac{1}{2} C} \right\}$$

waarvoor, omdat $\cos. m : \sin. m = \cot. m$ is, kan geschreven worden:

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C \times \left\{ 1 + \left[\frac{a-b}{a+b} \times \cot. \tfrac{1}{2} C \right]^2 \right\} \; . \; (b)$$

2°. Deelt men het tweede lid der vergelijking (a), eerst door $(a-b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C$, en vermenigvuldigt men het quotient wederom met dien factor; dan zal men nog deze andere vergelijking verkrijgen:

$$c^2 = (a-b)^2 \cos^2. \tfrac{1}{2} C \times \left\{ 1 + \left[\frac{a+b}{a-b} \times \tang. \tfrac{1}{2} C \right] \right\} \; . \; (c)$$

Men heeft in de eerste oplossing gezien, dat

$$\frac{a-b}{a+b} \times \cot. \tfrac{1}{2} C = \tang. \mu$$

is, en daarom is, wanneer men de teekens dezer vergelijking omkeert,

$$\frac{a+b}{a-b} \times \tang. \tfrac{1}{2} C = \cot. \mu$$

De vergelijkingen (b) en (c) worden gevolgelijk:

$$c^2 = (a+b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C \times (1 + \tang^2. \mu) = (a+b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C \times \sec^2. \mu$$

$$c^2 = (a-b)^2 \cos^2. \tfrac{1}{2} C \times (1 + \cot^2. \mu) = (a-b)^2 \cos^2. \tfrac{1}{2} C \times \cosec^2. \mu$$

of, dat zetzelfde is,

$$c^2 = \frac{(a+b)^2 \sin^2. \tfrac{1}{2} C}{\cos^2. \mu} = \frac{(a-b)^2 \cos^2. \tfrac{1}{2} C}{\sin^2. \mu}$$

en, zoo men uit deze den vierkants-wortel trekt,

$$c = \frac{(a+b) \sin. \tfrac{1}{2} C}{\cos. \mu} = \frac{(a-b) \cos. \tfrac{1}{2} C}{\sin. \mu}$$

REGEL. *Wij hebben dan, dit alles te zamen nemende, om de*

on-

onbekende hoeken en de derde zijde te vinden, het volgende stelsel van vergelijkingen.

$$1^\circ.\quad tang.\,\mu = \frac{a-b}{a+b} \times tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}C)$$

$$2^\circ.\quad A = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) + \mu$$

$$B = (90^\circ - \tfrac{1}{2}C) - \mu$$

$$3^\circ.\quad c = \frac{(a+b)\,sin.\,\tfrac{1}{2}C}{cos.\,\mu} = \frac{(a-b)\,cos.\,\tfrac{1}{2}C}{sin.\,\mu}$$

Voorbeeld. *Nemen wij, om de formulen, in deze oplossing verkregen, met die der vorige oplossing te vergelijken; dezelfde gegevens, als in het voorgaande voorbeeld; dan hebben wij deze berekening:*

$$C = 56^\circ\,39'\,33'',4 \;\ldots\ldots\; a = 4309^m,73$$

$$\tfrac{1}{2}C = 28^\circ\,19'\,46'',7 \;\ldots\ldots\; b = 2839^m,70$$

$$90^\circ - \tfrac{1}{2}C = 61^\circ\,40'\,13'',3 \qquad a+b = 7149^m,43$$

$$a-b = 1470^m,03$$

Berekening van de hoeken A en B.

$$Log.\,(a-b) = 3,1673262$$

$$Log.\,tang.\,(90^\circ - \tfrac{1}{2}C) = 0,2683210$$

$$3,4356472$$

$$Log.\,(a+b) = 3.8542714$$

$$Log.\,tang.\,\mu = 9,5813758;\ \text{en}\ \mu = 20^\circ\,52'\,35'',9$$

derhalve $A = 61^\circ\,40'\,13'',3 + 20^\circ\,52'\,35'',9 = 82^\circ\,32'\,49'',2$

$B = 61^\circ\,40'\,13'',2 - 20^\circ\,52'\,35'',9 = 40^\circ\,47'\,37'',4$

Berekening van de derde zijde C.

$Log.\,(a+b) = 3,8542714$	$Log.\,(a-b) = 3,1673262$
$Log.\,sin.\,\tfrac{1}{2}C = 9,6762761$	$Log.\,cos.\,\tfrac{1}{2}C = 9,9445972$
$13,5305095$	$13,1119234$
$Log.\,cos.\,\mu = 9,9705095$	$Log.\,sin.\,\mu = 9,5518854$
$Log.\,c = 3,5600380$	$Log.\,c = 3,5600380$

Hetwelk met de voorgaande berekening volkomen overeenkomt.

III. Oplossing. Wil men de onbekende hoeken A en B afzonderlijk berekenen; dan is, indien $a > b$, en gevolgelijk $A > B$ is, zie I. *Gevolg*, VI. *Stelling*,

$$cot.\,A = \frac{a+b}{2a} \times tang.\,\tfrac{1}{2}C - \frac{a-b}{2a} \times cot.\,\tfrac{1}{2}C$$

$$cot.\,B = \frac{a+b}{2b} \times tang.\,\tfrac{1}{2}C + \frac{a-b}{2b} \times cot.\,\tfrac{1}{2}C$$

Re-

Regel. *Men stelle nu als volgt:*

$$\frac{a+b}{2a} \times tang.\tfrac{1}{2}C = p, \quad \frac{a-b}{2a} \times cot.\tfrac{1}{2}C = q$$

$$\frac{a+b}{2b} \times tang.\tfrac{1}{2}C = r, \quad \frac{a-b}{2b} \times cot.\tfrac{1}{2}C = s$$

dan is:

$$cot.A = p - q, \text{ en } cot.B = r + s$$

In Logarithmische vergelijkingen, is dan

$$Log.p = Log.(a+b) + Log.tang.\tfrac{1}{2}C - Log.2a$$
$$Log.q = Log.(a-b) + Log.cot.\tfrac{1}{2}C - Log.2a$$
$$Log.r = Log.(a+b) + Log.tang.\tfrac{1}{2}C - Log.2b$$
$$Log.s = Log.(a-b) + Log.cot.\tfrac{1}{2}C - Log.2b$$
$$Log.cot.A = Log.(p-q)$$
$$Log.cot.B = Log.(r+s)$$

Voorbeeld. *Nemen wij, om het gebruik dezer formulen, in de getallen-berekening, aan te wijzen, hetzelfde voorbeeld, als boven.* In dit voorbeeld, is gegeven:

$a = 4309,73$	$2a = 6819,46$
$b = 2839,70$	$2b = 5679,40$
$a+b = 7149,43$	$C = 56^\circ\ 39'\ 33'',4$
$a-b = 1470,03$	$\tfrac{1}{2}C = 28^\circ\ 19'\ 46'',7$

1°. *Berekening van den hoek A.*

$Log.(a+b) = 3,8542714$
$L.tang.\tfrac{1}{2}C = 9,7316790 - 10$

$3,5858504$
$Log.2a = 3,9354800$

$Log.p = 9,6504704 - 10$
$p = 0,4471676$

$Log.(a-b) = 3,1673262$
$Log.cot.\tfrac{1}{2}C = 0,2683210$

$3,4356472$
$Log.2a = 3,9354800$

$Log.q = 9,5001672 - 10$
$q = 0,3163495$
$p - q = 0,1308181 = cot.A$
$Log\ cot.A = 9,1166678 - 10$
$A = 82^\circ\ 32'\ 49'',3$

2°. *Berekening van den hoek B.*

$3,5859505$
$Log.2b = 3,7543025$

$Log.r = 9,8316479 - 10$
$r = 0,6786632$

$3,4356472$
$Log.2b = 3,7543025$

$Log.s = 9,6813447 - 10$
$s = 0,4801145$
$r + s = 1,1587777 = cot.B$
$Log.cot.B = 0,0640003$
$B = 40^\circ\ 47'\ 37'',5$

welke berekening met de twee voorgaande overeenstemt.

IV.

IV. OPLOSSING. Wanneer men flechts de onbekende zyde c behoeft te kennen; dan kan men de berekening aldus inrigten. Volgens de VII. *Stelling*, is

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times cos. C$$

welke vergelijking reeds leert, hoe de onbekende zijde c van de twee andere zijden a en b, en den ingefloten hoek C, afhangt.

Deze vergelijking kan, om dezelve voor de berekening in Logarithmen gefchikter te maken, aldus herleid worden.

Men ftelle, zoo als in de eerfte oplosfing, $a : b = tang. \varphi$; dan is $a = b \times tang. \varphi$, $a^2 = b^2 \times tang^2. \varphi$ en $2ab = 2b^2 tang. \varphi$, en wij hebben alzoo

$$c^2 = b^2 + b^2 \times tang^2. \varphi - 2b^2 tang. \varphi\, cos. C$$

$$c^2 = b^2 (1 + tang^2. \varphi) - 2b^2 tang. \varphi\, cos. C$$

of, omdat $1 + tang^2. \varphi = sec^2. \varphi$ is,

$$c^2 = b^2 \times sec^2. \varphi - 2b^2 tang. \varphi\, cos. C$$

$$c^2 = \frac{b^2}{cos^2. \varphi} - 2b^2 tang. \varphi\, tang. C$$

Laat nu het tweede lid dezer vergelijking eerst door $\frac{b^2}{cos^2. \varphi}$ gedeeld, en daarna het quotient wederom met dien deeler vermenigvuldigd worden; dan verkrijgt men:

$$c^2 = \frac{b^2}{cos^2. \varphi} \times [1 - 2 cos^2. \varphi\, tang. \varphi\, cos. C]$$

Nu is $cos^2. \varphi \times tang. \varphi = cos^2. \varphi \times \frac{sin\ \varphi}{cos. \varphi} = sin. \varphi \times cos. \varphi$; en dus wordt de laatfte vergelijking:

$$c^2 = \frac{b^2}{cos^2. \varphi} \times [1 - 2 sin. \varphi\, cos. \varphi\, tang\ C]$$

of, omdat $2 sin. \varphi \times cos. \varphi = sin. 2\varphi$ is,

$$c^2 = \frac{b^2}{cos^2. \varphi} \times [1 - sin. 2\varphi \times cos. C]$$

Men ftelle nu, in deze vergelijking, $sin^2. \varphi \times cos. C = sin^2. \beta$; dan is:

$$c^2 = \frac{b^2}{cos^2. \varphi} \times [1 - sin^2. \beta] = \frac{b^2 \times cos^2. \beta}{cos^2. \varphi}$$

en gevolgelijk is, uit deze den vierkants-wortel trekkende,

$$c = \frac{b \times cos. \beta}{cos. \varphi}$$

REGEL. *Wij hebben derhalve, om de onbekende zijde c onmiddellijk te vinden, het volgende ftelfel van vergelijkingen:*

$$1^o.\ \frac{a}{b} = tang. \varphi; \qquad 2^o.\ sin. \beta = \sqrt{[sin. 2\varphi \times cos. C]}$$

$$3^o.\ c = \frac{b \times cos. \beta}{cos\ \varphi} = \frac{a \times cos. \beta}{sin. \varphi}.$$

VOOR-

VOORBEELD. *Zij wederom gegeven*, $a = 4309,73$, $b = 2893,7$ en $c = 56^\circ\ 39'\ 33'',4$; *dan wordt de zijde c, volgens deze formulen, aldus berekend.*

$$Log.\, a = 3,6344500$$
$$Log.\, b = 3,4532725$$
$$Log.\, tang.\, \phi = 0,1811775$$
$$\phi = 56^\circ\ 37'\ 08'',15$$
$$2\phi = 113^\circ\ 14'\ 16'',3$$

$$Log.\, sin.\, 2\phi = 9,9632563 - 10$$
$$Log.\, sin.\, C = 9.7400599 - 10$$
$$19,7033162 - 20$$
$$2)$$
$$Log.\, sin.\, \beta = 9\ 8516581 - 10$$
$$\beta = 45^\circ\ 17'\ 17'',3$$

$$Log.\, b = 3,4532725$$
$$Log.\, cos.\, \beta = 9,8472900 - 10$$
$$3,3005625$$
$$Log.\, cos.\, \phi = 9.7405244 - 10$$
$$Log.\, c = 3,5600381$$
$$c = 3631^m.098$$

V. OPLOSSING. Om de derde zijde afzonderlijk te berekenen, kan men uit de vergelijking

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b\, cos.\, C$$

nog twee volgende ftelfels van formulen afleiden.

Men kan namelijk deze vergelijking, onder éénen dezer twee vormen voorftellen:

$$c^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2 - 2\,a\,b - 2\,a\,b \times cos.\, C$$
$$c^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2 + 2\,a\,b - 2\,a\,b \times cos.\, C$$

of, dat op hetzelfde uitkomt, zie III. *Gev.* III. *Stell.* XI *B.*

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab(1 + cos.\, C) = (a+b)^2 - 4ab \times cos^2.\tfrac{1}{2}C$$
$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1 - cos\ C) = (a-b)^2 + 4ab \times sin^2.\tfrac{1}{2}C$$

In plaats van deze vergelijkingen, kan men, door eene zeer bekende herleiding, deze twee fchrijven:

$$c^2 = (a+b)^2 \times \left\{1 - \frac{4\,a\,b \times cos^2.\tfrac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right\} \quad . \; . \; . \quad (m)$$

$$c^2 = (a-b)^2 \times \left\{1 + \frac{4\,a\,b \times sin^2.\tfrac{1}{2}C}{(a-b)^2}\right\} \quad . \; . \; . \quad (n)$$

Omdat (gelijk men uit de beginfelen weet,) $4\,a\,b$ altijd kleiner is, dan $(a+b)^2$; zoo zal men

$$\frac{4\,a\,b \times cos^2.\tfrac{1}{2}C}{(a+b)^2} = sin^2.\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (o)$$

kunnen ftellen, en dan wordt de vergelijking (m),

$$c^2 = (a+b)^2 \times (1 - sin^2.\,\alpha) = (a+b)^2\, cos.\,\alpha$$
$$\text{en } c = (a+b) \times cos.\,\alpha$$

Stelt

Stelt men, in de vergelijking (*),

$$\frac{4ab \times \sin^2.\tfrac{1}{2}C}{(a-b)^2} = \text{tang}^2.\beta$$

dan verandert die vergelijking in

$$c^2 = (a-b)^2 (1+\text{tang}^2.\beta) = (a-b)^2 \sec^2.\beta = \frac{(a-b)^2}{\cos^2.\beta}$$

$$\text{en } c = \frac{a-b}{\cos.\beta}$$

REGEL. *Wij hebben dan, om de onbekende zijde c, uit de gegevene zijden a en b, en den ingesloten hoek C, onmiddellijk te vinden, deze twee stelsels van vergelijkingen,*

1°. Eerste stelsel,

$$\frac{2\cos.\tfrac{1}{2}C}{a+b} \times \sqrt{ab} \sin.\alpha, \text{ en } c = (a+b) \times \cos.\alpha$$

of, in Logarithmen:

$$Log.\sin.\alpha = \tfrac{1}{2}(Log.a + Log.b) + Log.\cos.\tfrac{1}{2}C + 0,3010300$$
$$- Log.(a+b);\ \text{en } Log.c = Log.(a+b) + Log.\cos.\alpha$$

2°. Tweede stelsel van vergelijkingen,

$$\frac{2\sin.\tfrac{1}{2}C}{a-b} \times \sqrt{ab} = \text{tang}.\beta, \text{ en } c = \frac{a-b}{\cos.\beta}$$

of, in Logarithmen:

$$Log.\text{tang}.\beta = \tfrac{1}{2}(Log.a + Log.b) + Log.\sin.\tfrac{1}{2}C + 0,3010300$$
$$- Log.(a-b);\ \text{en } Log.c = Log.(a-b) - Log.\cos.\beta$$

VOORBEELD. *Zij hetzelfde voorbeeld, als boven, op het eerste stelsel van formulen toegepast; dan hebben wij de volgende berekening:*

$$Log.a = 3,6344500$$
$$Log.b = 3,4532725$$
$$\overline{\quad 7,0877225}$$
$$2)\overline{\qquad\qquad}$$
$$Log.\sqrt{ab} = 3,5438612$$
$$Log.\cos.\tfrac{1}{2}C = 9,9445972 - 10$$
$$Log.2 = 0,3010300$$
$$\overline{\quad 3,7894884}$$
$$Log.(a+b) = 3,8542714$$
$$\overline{Log.\sin.\alpha = 9,9352170 - 10}$$
$$\alpha = 59^\circ\ 28'\ 36'',9$$

$$Log.(a+b) = 3,8542714$$
$$Log.\cos.\alpha = 9,7057667$$
$$\overline{Log.c = 3,5600381}$$

hetwelk met al de voorgaande berekeningen overeenkomt.

Wij laten nu aan den Lezer over, om het tweede stelsel van formulen op hetzelfde voorbeeld toe te passen.

VI.

VI. OPLOSSING. *Fig.* 45. Wanneer ééne der twee gegevene zijden b, in vergelijking van de andere der gegevene zijden a, zeer klein is; dan zal men, den onbekenden hoek, tegen over de kleinste zijde b, benevens de onbekende zijde c, aldus kunnen vinden. Volgens de VI. *Stelling*, is

$$tang. B = \frac{b \times sin. C}{a - b \times cos. C} = \frac{\frac{b}{a} \times sin. C}{1 - \frac{b}{a} \times cos. C}$$

Uit die vergelijking volgt nu, zie XIII. *Vraagst.* XI. *B.*, deze reeks:

$$B = \frac{b}{a} \times sin. C + \frac{b^2}{2a^2} \times sin. 2C + \frac{b^3}{2a^3} \times sin. 3C + \frac{b^4}{4a^4} \times sin. 4C$$
$$+ \frac{b^5}{5a^5} \times sin. 5C + enz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

zijnde deze eene reeks, welke tot in het oneindige voortloopt; doch zooveel te sterker convergeert, naarmate b kleiner in vergelijking van a is. Deze reeks reeks geeft den hoek B, in deelen van den straal.

Men zal eindelijk de derde zijde (zie *Gevolg* XIII. *Vraagstuk* XI. *B.*) door de volgende reeks kunnen berekenen,

$$Nep. Log. c = Nep. Log. a - \frac{b}{a} \times cos. C - \frac{b^2}{2a^2} \times cos. 2C - \frac{b^3}{3a^3}$$
$$\times cos. 3C - \frac{b^4}{4a^4} \times cos. 4C - \frac{b^5}{5a^5} \times cos. 5C - enz. \quad \ldots \quad (s)$$

of, zoo men van de gewone Briggiaansche Logarithmen wil gebruik maken, door

$$Log. c = Log. a - M \times \left\{ \frac{b}{a} \times cos. C + \frac{b^2}{2a^2} \times cos. 2C + \frac{b^3}{3a^3} \right.$$
$$\left. \times cos. 3C + \frac{b^4}{4a^4} \times cos. 4C + \frac{b^5}{5a^5} \times cos. 5C + enz. \right\}$$

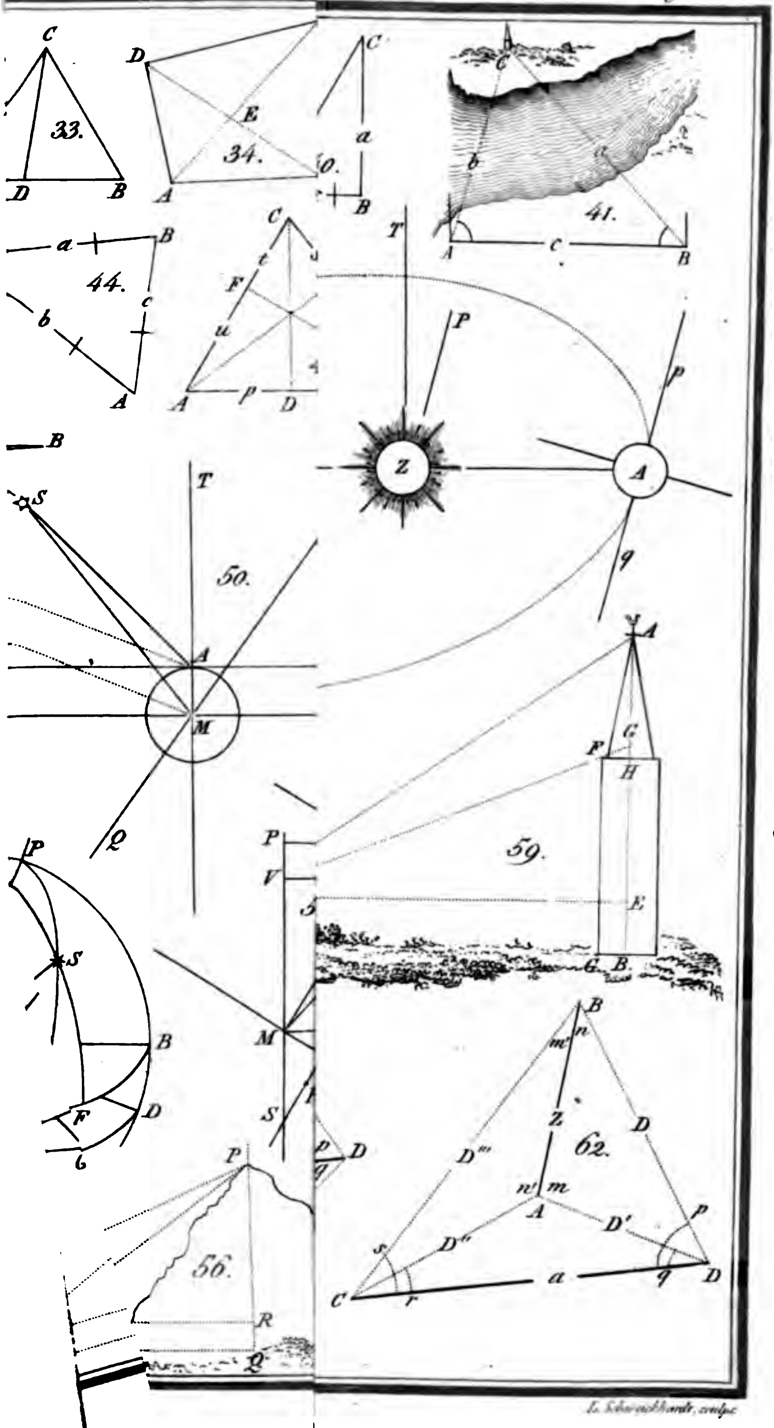
zijnde in deze

$$M = 0,\ 43429\ 44819\ 03251\ 82765$$

Om hier eens en vooral aan te wijzen, hoe, in het vervolg, zulke reeksen worden berekend, zullen wij dezelve op het volgende voorbeeld toepassen.

VOORBEELD. *Zij gegeven*, $a = 1276$, $b = 28,3$ *en hoek* $C = 64^\circ\ 20'$; *den hoek B*, *benevens de zijde c*, *door middel van de reeksen* (*r*) *en* (*s*), *te berekenen?*

Om in die berekening met goede orde te werk te gaan, stelle men het gebroken $\frac{b}{a}$, welks magten in de termen van beide reeksen voorkomen, gelijk m; dan is vooreerst,


33.
34.
41.
44.
50.
56.
59.
62.

VI. Oplossing. *Fig.* 45. Wanneer ééne der twee gegevene zijden b, in vergelijking van de andere der gegevene zijden c, zeer klein is; dan zal men, den onbekenden hoek, tegen over de kleinste zijde b, benevens de onbekende zijde c, aldus kunnen vinden. Volgens de VI. *Stelling*, is

$$tang. B = \frac{b \times sin. C}{a - b \times cos. C} = \frac{\frac{b}{a} \times sin. C}{1 - \frac{b}{a} \times cos. C}$$

Uit die vergelijking volgt nu, zie XIII. *Vraagst.* XI. *B.*, deze reeks:

$$B = \frac{b}{a} \times sin. C + \frac{b^2}{2a^2} \times sin. 2C + \frac{b^3}{2a^3} \times sin. 3C + \frac{b^4}{4a^4} \times sin. 4C + \frac{b^5}{5a^5} \times sin. 5C + enz. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (r)$$

zijnde deze eene reeks, welke tot in het oneindige voortloopt; doch zooveel te sterker convergeert, naarmate b kleiner in vergelijking van a is. Deze reeks reeks geeft den hoek B, in deelen van den straal.

Men zal eindelijk de derde zijde (zie *Gevolg* XIII. *Vraagstuk* XI. *B.*) door de volgende reeks kunnen berekenen,

$$Nep. Log. c = Nep. Log. a - \frac{b}{a} \times cos. C - \frac{b^2}{2a^2} \times cos. 2C - \frac{b^3}{3a^3} \times cos. 3C - \frac{b^4}{4a^4} \times cos. 4C - \frac{b^5}{5a^5} \times cos. 5C - enz. \quad \ldots \quad (s)$$

of, zoo men van de gewone Briggiaansche Logarithmen wil gebruik maken, door

$$Log. c = Log. a - M \times \left\{ \frac{b}{a} \times cos. C + \frac{b^2}{2a^2} \times cos. 2C + \frac{b^3}{3a^3} \times cos. 3C + \frac{b^4}{4a^4} \times cos. 4C + \frac{b^5}{5a^5} \times cos. 5C + enz. \right\}$$

zijnde in deze

$$M = 0,43429\ 44819\ 03251\ 82765$$

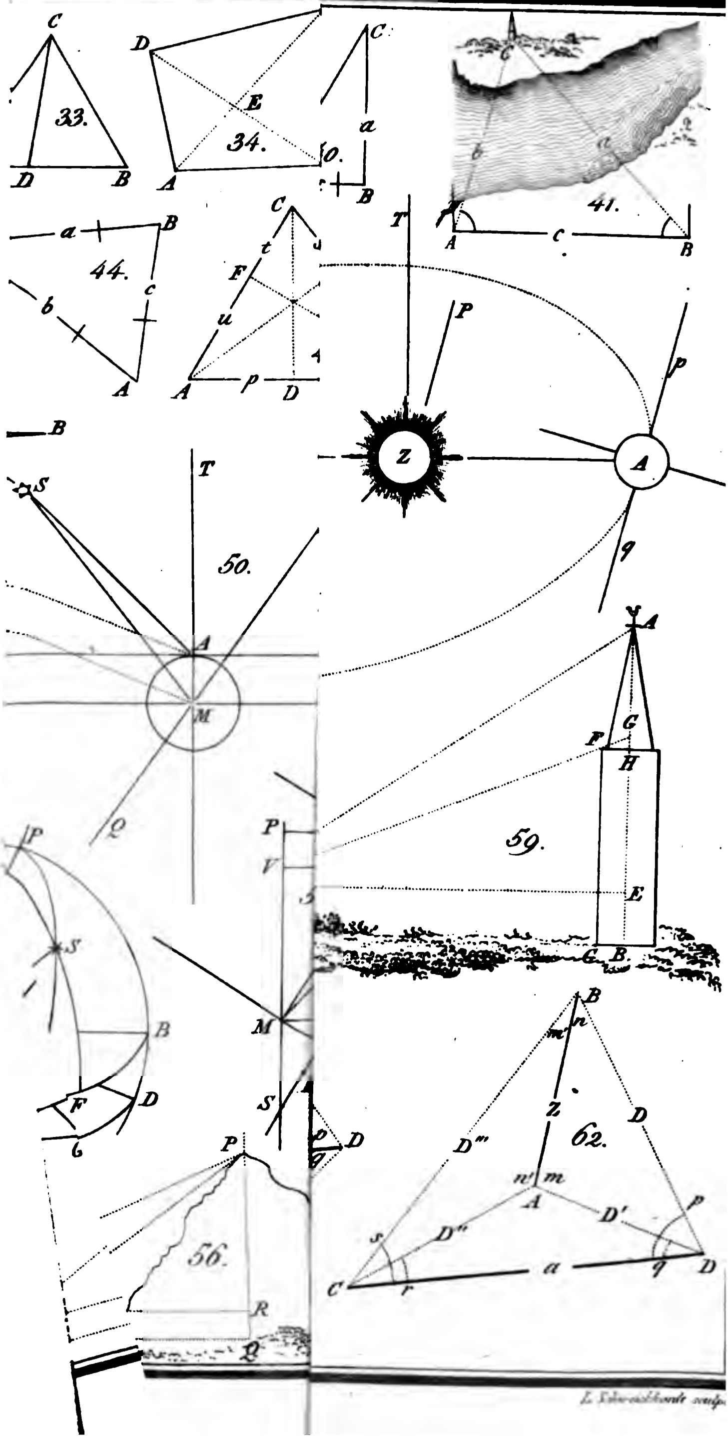
Om hier eens en vooral aan te wijzen, hoe, in het vervolg, zulke reeksen worden berekend, zullen wij dezelve op het volgende voorbeeld toepassen.

Voorbeeld. *Zij gegeven*, $a = 1276$, $b = 28,3$ *en hoek* $C = 64^\circ\ 20'$; *den hoek* B, *benevens de zijde* c, *door middel van de reeksen* (r) *en* (s), *te berekenen?*

Om in die berekening met goede orde te werk te gaan, stelle men het gebroken $\frac{b}{a}$, welks magten in de termen van beide reeksen voorkomen, gelijk m; dan is vooreerst,

Log. b

ginselen der Meetkunst. N°. II. Fig. 30



$$Log.\,b = 1,4517864$$
$$Log.\,a = 3,1058507 \text{ aftrekken}$$
$$Log.\,m = 8,3459357 - 10$$

Men vermenigvuldige de *Log. m* met 2, 3, 4 en 5, en trekke van de producten de *Log.* 2, *Log.* 3, *Log.* 4 en *Log.* 5, af; dan verkrijgt men:

$$Log.\,m = 8,3459357 - 10, \quad Log.\,\tfrac{1}{2}m^2 = 6,3908414 - 10$$
$$Log.\,\tfrac{1}{3}m^3 = 4,5606858 - 10, \quad Log.\,\tfrac{1}{4}m^4 = 2,7816828 - 10$$
$$Log.\,\tfrac{1}{5}m^5 = 1,0307005 - 10, \text{ enz.}$$

Verder zoeke men de veelvouden van den gegevenen hoek *C*; dan verkrijgt men:

$$C = 64°\ 20'$$
$$2C = 128°\ 40' \text{ op te zoeken } 51°\ 20'$$
$$3C = 193°\ 00' \text{ op te zoeken } 13°\ 00'$$
$$4C = 257°\ 20' \text{ op te zoeken } 77°\ 20'$$
$$5C = 321°\ 40' \text{ op te zoeken } 38°\ 20'$$

De termen van de reeks (r), die de waarde van den hoek *B*, in deelen van den straal, voorstelt, worden nu aldus berekend:

$$Log.\,m = 8,3459357 - 10$$
$$Log.\,sin.\,C = 9,9548834 - 10$$
$$8,3008191 - 10$$
$$m\,sin.\,C = +\,0,01999032$$

$$Log.\,\tfrac{1}{3}m^3 = 5,0378071 - 10$$
$$Log.\,sin.\,\tfrac{1}{3}C = 9,3520880 - 10$$
$$4,3898951$$
$$\tfrac{1}{3}m^3\,sin.\,3C = -\,0,00000245$$

$$Log.\,\tfrac{1}{2}m^2 = 6,3908414 - 10$$
$$Log.\,sin.\,2C = 9,8925365 - 10$$
$$6,2833779 - 10$$
$$\tfrac{1}{2}m^2\,sin.\,2C = +\,0,00019203$$

$$Log.\,\tfrac{1}{4}m^4 = 3,3837428 - 10$$
$$Log.\,sin.\,4C = 9,9892095 - 10$$
$$3,3729523 - 10$$
$$\tfrac{1}{4}m^4\,sin.\,4C = -\,0,00000024$$

De volgende termen zijn zoo klein, dat zij niet in aanmerking komen. Nu hebben wij:

$$m\,sin.\,C = +\,0,01999032$$
$$\tfrac{1}{2}m^2\,sin.\,2C = +\,0,00019203$$
$$\tfrac{1}{3}m^3\,sin.\,3C = -\,0,00000245$$
$$\tfrac{1}{4}m^4\,sin.\,4C = -\,0,00000024$$
$$B = +\,0,02017966, \text{ in deelen van den straal.}$$

$$Log.\,B = 8,3049139 - 10$$
$$Log.\,sin.\,1'' = 4,6855749 - 10$$
$$3,6193390$$
$$B = 4162'',354, \text{ in secunden}$$
$$\text{of } B = 1°\ 9'\ 22'',355$$

 wel-

welken hoek men ook, op de gewone wijze; maar niet met die naauwkeurigheid, zal vinden.

De termen van de reeks (*s*) worden aldus berekend:

$Log.\ m = 8,3459357 - 10$	$Log.\ \tfrac{1}{2} m^2 = 6,3908414 - 10$
$Log.\ cos.\ C = 9,6366231 - 10$	$Log.\ cos.\ 2\,C = 9,7957321 - 10$
$7,9825588 - 10$	$6,1865732 - 10$
$m\ cos.\ C = + 0,00983012$	$\tfrac{1}{2} m^2\ cos.\ 2\,C = - 0,00015366$
$Log.\ \tfrac{1}{3} m^3 = 5,0378071 - 10$	$Log.\ \tfrac{1}{4} m^4 = 3,3837428 - 10$
$Log.\ cos.\ 3\,C = 0,9887320 - 10$	$Log.\ cos.\ 4\,C = 9,3409963 - 10$
$6,0265391 - 10$	$2,7247391 - 10$
$\tfrac{1}{3} m^3\ cos.\ 3\,C = - 0,00010630$	$\tfrac{1}{4} m^4\ cos.\ 4\,C = + 0,00000053$

$$
\begin{aligned}
\text{Nu is}\quad m\ cos.\ C &= + 0,00983012\\
\tfrac{1}{2} m^2\ cos.\ 2\,C &= - 0,00015366\\
\tfrac{1}{3} m^3\ cos.\ 3\,C &= - 0,00001063\\
\tfrac{1}{4} m^4\ cos.\ 4\,C &= + 0,00000005\\
\hline
som &= + 0,00966588\\
Log.\ som &= 7,9852414 - 10\\
Log.\ M &= 9,6377843 - 10\\
\hline
Log.\ M \times som &= 7,6230267 - 10\\
M \times som &= 0,0041978 \ \textit{af te trekken}\\
\text{van}\quad Log.\ a &= 3,1058507\\
\hline
\text{komt}\quad Log.\ c &= 3,1016529\\
\text{en}\quad c &= 1263,7258
\end{aligned}
$$

VIII. Vraagstuk. IV. Geval. *Fig.* 46.

§. 1085. *De drie zijden van eenen driehoek gegeven zijnde, deszelfs hoeken, door berekening, te vinden?*

Wanneer men, met behulp van eene schaal, den driehoek, onder de drie gegevene zijden, construeert; dan zal men de hoeken, door middel van eenen transporteur, onmiddellijk kunnen meten; niets is dus gemakkelijker, dan dit geval door constructie op te lossen.

I. Oplossing. *Fig.* 46. Men late, uit het hoekpunt *C*, de loodlijn *CD* op de overstaande zijde *AB* vallen; dan is (zie XVI. *Stell.* III. *B.*)

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

en hieruit volgt dan onmiddellijk:

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$$

$$(AC + BC)(AC - BC) = (AD + BD)(AD - BD)$$

AD

$$AD - BD = \frac{(AC + BC) \times (AC - BC)}{AB}$$

$$AD + BD = AB$$

Deze twee optellende, en de eerste van de tweede aftrekkende, zoo zal de halve som en het halve verschil geven:

$$AD = \tfrac{1}{2} AB + \frac{(AC + BC)(AC - BC)}{2AB}$$

$$BD = \tfrac{1}{2} AB - \frac{(AC + BC)(AC - BC)}{2AB}$$

REGEL. *Men stelle nu, als naar gewoonte, $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$, voorts $AD = p$, $BD = q$; dan hebben wij het volgende stelsel van vergelijkingen:*

$$1^\circ.\quad m = \frac{(b + a)(b - a)}{2c}$$

$$2^\circ.\quad p = \tfrac{1}{2} c + m, \qquad 3^\circ.\quad q = \tfrac{1}{2} c - m$$

$$4^\circ.\quad \cos. A = \frac{p}{b}, \qquad 5^\circ.\quad \cos. B = \frac{q}{a}$$

of, in Logarithmen,

$$1^\circ.\quad Log. m = Log. (a + b) Log. + (b - a) - Log. 2c \;\ldots\; (A)$$

$$2^\circ.\quad p = \tfrac{1}{2} c + m, \qquad 3^\circ.\quad q = \tfrac{1}{2} c - m$$

$$4^\circ.\quad Log. \cos. A = Log. p - Log. b$$

$$5^\circ.\quad Log. \cos. B = Log. q - Log. a$$

Wanneer $m > \tfrac{1}{2} c$; dan blijkt daaruit, dat de loodlijn buiten den driehoek valt, en dat dus (indien $b > a$ is,) de hoek B stomp is.

Laat men, uit het punt A de loodlijn AE, op de overstaande zijde BC vallen, en stelt men $BE = r$ en $CE = s$; dan zal men hebben:

$$1^\circ.\quad Log. m' = Log. (b + c) + Log. (b - c) - Log. 2a \;.\; (B)$$

$$2^\circ.\quad s = \tfrac{1}{2} a + m', \qquad 3^\circ.\quad r = \tfrac{1}{2} a - m'$$

$$5^\circ.\quad Log. \cos. B = Log. r - Log. c$$

$$5^\circ.\quad Log. \cos. C = Log. s - Log. b$$

En, zoo men, uit B, de loodlijn BF op de overstaande zijde AC laat vallen, en $AF = u$ en $CF = t$ noemt; dan zal men de volgende vergelijkingen hebben:

$$1^\circ.\quad Log. m'' = Log. (c + a) + Log. (c - a) - 2 Log. b \;.\; (C)$$

$$2^\circ.\quad u = \tfrac{1}{2} b + m'', \qquad 3^\circ.\quad t = \tfrac{1}{2} b - m''$$

$$4^\circ.\quad Log. \cos. A = Log. u - Log. c$$

$$5^\circ.\quad Log. \cos. C = Log. t - Log. a$$

Door deze drie stelsels van vergelijkingen (A), (B) en (C), zal men de hoeken A, B en C, op even zooveel onderscheidene wijzen, kunnen berekenen, zoo als uit het volgende voorbeeld zal kunnen gezien worden.

VOORBEELD. *Gegeven zijnde*, $a = 739$, $b = 809$ *en* $c = 755$; *de hoeken* A, B *en* C, *te berekenen?*

A. Berekening van het stelsel der formulen (*A*).

$Log.(a+b) = 3,1897710$	$Log.\,p = 2,6524994$
$Log.(b-a) = 1,8450980$	$Log.\,b = 2,9079485$
$5,0348690$	$Log.\,cos.\,A = 9,7445509 - 10$
$Log.\,2c = 3,1789769$	$A = 56^\circ\,15'\,59'',97$
$Log.\,m = 1,8558921$	$Log.\,q = 2,4853501$
$m = 71,76158$	$Log.\,a = 2,8686444$
$p = \frac{1}{2}c + m = 449,26158$	$Log.\,cos.\,B = 9,6167057 - 10$
$q = \frac{1}{2}c - m = 305,73842$	$B = 65^\circ\,33'\,40'',7$

B. Berekening van het stelsel der formulen (*B*).

$Log.(b+c) = 3,1942367$	$Log.\,r = 2,4946026$
$Log.(b-c) = 1,7323938$	$Log.\,c = 2,8779470$
$4,9266305$	$Log.\,cos.\,B = 9,6167056$
$Log.\,2a = 3,1696744$	$B = 65^\circ\,33'\,40'',6$
$Log.\,m' = 1,7569561$	$Log.\,s = 2,6300637$
$m' = 57,14209$	$Log.\,b = 2,9079485$
$s = \frac{1}{2}a + m' = 426,94209$	$Log.\,cos.\,C = 9,7221152$
$r = \frac{1}{2}a - m' = 312,35791$	$C = 58^\circ\,10'\,19''52$

C. Berekening van het stelsel der formulen (*C*).

$Log.(c+a) = 3,1743506$	$Log.\,u = 2,6224977$
$Log.(c-a) = 1,2041200$	$Log.\,c = 2,8779470$
$4,3784706$	$Log.\,cos.\,A = 9,7445507 - 10$
$Log.\,2b = 3,2089789$	$A = 56^\circ\,15'\,59'',84$
$Log.\,m'' = 1,1694921$	$Log.\,t = 2,5907596$
$m = 14,7738$	$Log.\,a = 2,8686444$
$u = \frac{1}{2}b + m'' = 419,2738$	$Log.\,cos.\,C = 9,7221152 - 10$
$t = \frac{1}{2}b - m'' = 389,7262$	$C = 58^\circ\,10'\,19'',52$

II. OPLOSSING. REGEL. *Wanneer men* a, b, c, *voor de zijden, en* A, B *en* C, *voor de overstaande hoeken stelt; dan is*, ($\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = s$ *stellende*,) *volgens de* VIII. Stelling,

sin.

$$sin.\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\quad sin.\ \tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$sin.\ \tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(c-b)}{ab}}$$

Men kan ook de hoeken, zie *III. Gev. VIII. Stell*, door de cosinussen of door de tangenten van derzelver helften vinden.

VOORBEELD. *Gegeven zijnde*, $a = 739$, $b = 809$, *en* $c = 755$; *de hoeken A, B en C, te vinden?*

Berekening van den hoek A.

$a = 739$

$b = 809$ . . . . $Log.\ b = 2,9079485$

$c = 755$ . . . . $Log.\ c = 2,8779470$

$2s = 2303$ $\qquad Log.\ bc = 5,7858955$

$s = 1151,5$

$s - b = 342,5$ . . . . $Log.(s-b) = 2,5346606$

$s - c = 396,5$ . . . . $Log.(s-c) = 2,5982432$

$Log.(s-b) \times (s-c) = 5,1329038$

af, $Log.\ bc = 5,7858955$

$2)\ 19,3470083$

$Log.\ sin.\ \tfrac{1}{2}A = 2,6935041$

$\tfrac{1}{2}A = 28^\circ\ 07'\ 59''.85$

en $A = 56^\circ\ 15'\ 59'',70$

Men vindt, op dezelfde wijze $\begin{cases} B = 65^\circ\ 33'\ 40'',79 \\ C = 58^\circ\ 10'\ 19'',52 \end{cases}$

en, ten blijke van de juistheid der berekening, maakt de som der berekende hoeken 180°. Men moet, in deze berekening, bij de som der Logarithmen van $s - b$ en $s - c$, den Logarithmus van het vierkant van den straal, dat is het getal 20, in de gedachte bijtellen; omdat, wanneer men den straal niet gelijk aan de éénheid, maar $= r$ stelt, de vergelijking, welke in de *VIII. Stelling* bewezen is, $sin^2.\ \tfrac{1}{2}A = \frac{r^2 (s-b) \times (s-c)}{bc}$ wordt.

III. *Gebruik van de Regels der Driehoeksmeting, in onderscheidene vakken van wetenschap en kunst.*

§. 1086. De regels der platte en bolvormige Driehoeksmeting, uit de eigenschappen van den platten driehoek, en den drievlakkigen

 hoek

hoek afgeleid zijnde, zijn de onontbeerlijkste en krachtigste hulpmiddelen, door welke de mensch, uit de verzameling van vroegere en latere waarnemingen, eene juiste kennis van de grootte en gedaante der Aarde verkregen heeft, en eindelijk met de inrigting van het wereld-stelsel is bekend geworden. Het overige gedeelte van dit Boek zal moeten dienen, om den Lezer met dat gebruik bekend te maken, en hem tot de studie van de belangrijkste wetenschappen op te leiden.

A. *Herinnering van eenige noodzakelijke kundigheden.*

§. 1087. *Onze Aarde heeft ten naastenbij eene bolronde gedaante.*

Deze waarheid wordt door de verschijning van elke maansverduistering bevestigd. Eene maansverduistering kan slechts bij eene volle maan plaats hebben; wanneer namelijk de Aarde, tusschen de Zon en de Maan, genoegzaam in dezelfde regte lijn staat. Indien dan de verlichte schijf der Maan door den schaduwkegel der Aarde gaat; dan ontstaat er eene geheele of gedeeltelijke maansverduistering; de omtrek van de schaduw der Aarde is bij zulk een verschijnsel altijd cirkelvormig; de Aarde moet derhalve een ronden bol zijn; omdat een bol het eenige ligchaam is, dat, in alle rigtingen genomen, eene cirkelvormige schaduw werpt.

§. 1088. *De Sterrenhemel schijnt een vaste holle bol te zijn, in welks middelpunt de Aarde onbewegelijk geplaatst is.*

Zoo wij meenen, dat de Aarde in rust is, is zulks daaraan toe te schrijven, dat hare omwentelende en voortgaande beweging, zoo zacht en zoo zonder botzing of stooting plaats heeft, dat wij dezelve zoo min gevoelen, als wij, in het ruim van een zacht varend schip opgesloten, kunnen onderscheiden, of het schip vaart of stil ligt.

En, dat wij aan den Hemel eene bolvormige gedaante toeschrijven, is een gevolg van onze onkunde. Het vermogen van ons gezigt strekt zich, in alle rigtingen, tot dezelfde grenzen uit; bij dien grenspaal van ons gezigt, verbeelden wij ons een vast ligchaam, in welke verbeelding wij nog boven dien door de blaauwe kleur (die eigenlijk de kleur van de dampkringslucht is,) versterkt worden. *De Hemel is eigenlijk de onbegrensde ruimte, in welke de geheele Schepping bestaat; en deze kan, gelijk men weet, geene gedaante hebben.*

§. 1089. *Nogtans kan men zich een denkbeeldigen Hemelbol, met een willekeurigen straal beschreven, voorstellen; en dan is zulk een bol zeer geschikt, om de meeste verschijnselen te verklaren, en de bolvormige driehoeksmeting op de Sterrenloopkunde toe te passen.*

Laat,

Laat, *fig.* 47, uit het punt *M*, twee gelijkmiddelpuntige cirkels zijn beschreven. Indien deze dan beide te gelijk, om de middellijn *PQ*, omwentelen; dan zal men den binnensten bol als den Aardbol, en de buitenste als den ingebeelden Hemelbol kunnen beschouwen; *en hierin is niets tegenstrijdigs gelegen; mits men den straal van den Hemelbol oneindig groot stelt.* Geeft men echter aan den straal van den Hemelbol eene bepaalde grootte; dan doet men niets anders, dan eenen bol aan te nemen, welke dienen kan, om de drievlakkige hoeken, welke het middelpunt der Aarde tot hoekpunt hebben, door middel van bolvormige driehoeken, die dan aan die ingebeelde hemelvlakte gevormd worden, voor te stellen. Zulk een ingebeelde Hemelbol wordt dan slechts een hulpmiddel, om de beschouwingen te vereenvoudigen.

§. 1090. *De geheele Sterrenhemel, met de Zon, de Maan, en de sterren, schijnt, in vier-en-twintig uren, om eene as* (*PQ* fig. 47.) *van het oosten naar het westen, om te draaijen.*

Die schijn is eene misleiding van onze onkunde. De aarde draait, in vier-en-twintig uren, om hare as *pq*, van het westen naar het oosten; daar wij nu die beweging niet gevoelen, zoo verbeelden wij ons, dat het heelal, in eene omgekeerde rigting, bewogen wordt.

§. 1091. *De Zon schijnt ons toe, aan den hemel eenen cirkel, in den tijd van één jaar, van het westen naar het oosten, door te loopen; en wel eenen cirkel, wiens vlak door het middelpunt der Aarde gaat.*

Hier ook worden wij door onze onkunde misleid. Het is de Aarde, die om de Zon, in denzelfden tijd, eenen kring, van het westen naar het oosten, beschrijft. *De Zon is eigenlijk het middelpunt van ons planetenstelsel.*

Zoowel de schijnbare dagelijksche omwenteling des Hemels, als de schijnbare jaarlijksche omloop van de Zon, kan, op eene alzins voldoende wijze, verklaard worden, door de dagelijksche omwenteling van de Aarde, om eene as, die evenwijdig aan dezelfde lijn blijft; en tevens door de voortgaande beweging der Aarde, in eene ellips, in één van welks brandpunten, het middelpunt van de Zon geplaatst is.

Laat, *fig.* 48, de ellips *ABCD* de loopkring van de Aarde voorstellen; *AC* de groote as van dezelve. Zij de Zon in *Z*, in één der brandpunten geplaatst. Men stelle de lijn *ZT* loodregt op het vlak van den elliptischen loopkring; en make *hoek* $TZP = 23° 28'$: indien men dan stelt, dat het middelpunt van de Aarde, in den omtrek der ellips, van het westen naar het oosten, van *A* door *B*, *C*, *D*, *enz.* in één jaar, wordt omgevoerd, zoo dat de as *pq* altijd evenwijdig aan *ZP* blijve, en dat de aarde nog bovendien, om hare as *pq*, van het westen naar het oosten, in vier-en-twintig uren, omdraaije; dan wordt, zoowel de dagelijksche omwenteling des hemels, als de schijnbare voortgaande beweging van de Zon, in die onderstelling, volkomen verklaard.

§. 1092. *Men bevindt, in alle landen en wereelddeelen, dat een draad, waaraan een gewigt is opgehangen, met het oppervlak van een stilstaand water volkomen een regten hoek maakt, zie* VIII. Boek Aanm. IV. Stell. *Die loodlijn gaat, indien de Aarde bolrond is, volkomen door derzelver middelpunt. Het oppervlak van het stilstaande water, naar alle kanten uitgestrekt zijnde, is eene vlakte, die het zigtbare gedeelte des Hemels afscheidt van het onzigtbare gedeelte, dat het ondoorschijnend ligchaam der Aarde voor ons verbergt. Die loodlijn noemt men* de verticaal, *en die vlakte de* schijnbare horizon *van de plaats des waarnemers. — Elk punt, op het oppervlak der Aarde, heeft deszelfs eigene verticaal en eigen schijnbaren horizon.*

Wanneer men, *fig.* 47, uit het middelpunt *M* der Aarde, door het punt *A*, op het oppervlak genomen, eene onbepaalde lijn *MAT* trekt; dan is deze de verticaal van het punt *A*; en eene lijn *ZN*, die loodregt op die verticaal *TV* staat, zal dus den omtrek der Aarde, in *A* aanraken. Laat men nu, na, door het middelpunt der Aarde, eene lijn *zMn*, evenwijdig aan *ZAN* getrokken te hebben, het stelsel der lijnen *ZN* en *zn*, om de verticaal *TV*, omdraaijen; dan zal het vlak, door de lijn *ZN* beschreven, de *schijnbare*, en het vlak, door *zn* beschreven de *ware horizon* van het punt *A* zijn. Indien de verticaal, tot aan het schijnbare hemelvlak, naar boven en naar onderen, verlengd wordt; dan wordt *T* het *toppunt*, *vertex* of *zenith*, en *V* het *voetpunt* of *nadir* van het punt *A* genoemd.

§. 1093. *Indien men*, fig. 47, *door het middelpunt* (*M*) *der Aarde, eene lijn* (*LME*) *trekt, die loodregt op de as* (*PMQ*) *staat; dan zal die lijn, door de dagelijksche omwenteling der Aarde, een vlak beschrijven, op hetwelk de as der Aarde, of de schijnbare as des hemels, loodregt staat. Dit vlak noemt men het vlak der nachteveningen. Het snijdt het oppervlak der Aarde in een grooten cirkel, wiens middellijn is le, en de oppervlakte van den ingebeelden hemelbol insgelijks in een grooten cirkel, wiens middellijn is LE; den eersten cirkel noemt men den evenachtscirkel op Aarde, de tweede den evenachtscirkel aan den Hemel.*

Wanneer men, *fig.* 47 en 48, met elkander vergelijkt; dan ziet men: dat het vlak van den evenachtscirkel, met het vlak van den loopkring der Aarde eenen hoek maakt, die gelijk is aan den hoek *PZT* (in *fig.* 48). Het vlak van den loopkring der Aarde blijft, ten opzigte van de vaste sterren, steeds (immers met eene ten uiterste geringe verandering,) in dezelfde stelling. *Alhoewel echter de as der Aarde, gedurende een geruimen tijd, evenwijdig aan de lijn PQ blijft, heeft er, in de stelling van dezelve, eene langzame verandering plaats, die al-*

oldus kan verklaard worden. Laat ZT, loodregt staande op het vlak van den loopkring, den hoek TZP, om die loodlijn, van het oosten naar het westen, in den tijd van 25678 jaren, omdraaijen; indien wij nu aannemen, dat de as der aarde pq altijd aan die bewegende lijn PQ evenwijdig blijft; dan zal men (op nog de nutatie na, die slechts eene geringe beweging van de as is,) het ware denkbeeld van de beweging der Aarde verkrijgen. Wanneer nu de as der aarde, in dat groote tijdvak, eenen kegel beschrijft; dan zal de lijn, volgens welke het vlak van de nachteveningen het vlak van den loopkring snijdt, en die men *de lijn der nachteveningen noemt*, eens in dien tijd, van het oosten naar het westen, tegen het beloop van de Hemelteekens, omdraaijen. Dit verschijnsel is bekend onder den naam van *teruggang der nachteveningen.*

§. 1094. *Aangezien de verticaal van elk punt, op het oppervlak der Aarde genomen (indien zij namelijk bolrond is,) door het middelpunt gaat, zoo ligt elke verticaal met de omwentelings-as, die insgelijks door het middelpunt loopt, in dezelfde vlakte. En die vlakte staat loodregt op den horizon. Die vlakte noemt men de middagsvlakte, het vlak van den middagscirkel; omdat, wanneer die vlakte door het middelpunt van de Zon gaat, het alsdan middag op die plaats genoemd wordt.*

Die middagvlakte snijdt het oppervlak der Aarde, zie *fig.* 47, volgens een grooten cirkel $pAlqe$, welke de middagcirkel van het punt A op aarde genoemd wordt; en de hemelvlakte volgens grooten cirkel $PTLZQVE$, dien men den middagcirkel aan den hemel noemt. *De middagscirkel van elk punt van het oppervlak der Aarde ligt op aarde altijd in de streek van het noorden tot het zuiden; en de middagcirkels van alle punten snijden elkander in de polen.*

Alle punten en plaatsen, welke, op Aarde, in den omtrek van een aardschen middagscirkel liggen, worden gezegd in denzelfden middagscirkel op Aarde, en onder denzelfden hemel-middagcirkel $PTLZ$ gelegen te zijn.

Aangezien het op elke plaats middag genoemd wordt, wanneer het middagvlak van die plaats, met de Aarde omgevoerd wordende, door het middelpunt van de Zon gaat, en de telling der uren voor- en namiddag van het tijdpunt van den waren middag afhangt, zoo volgt hieruit: *dat alle plaatsen op Aarde, onder denzelfden middagscirkel gelegen zijnde, te gelijk middag hebben, en de uren van den dag te gelijker tijd invallen.*

Plaatsen, die oostelijk van ons liggen, tellen reeds de namiddag-uren, en die westelijk van ons liggen, tellen nog de voormiddag-uren, op den oogenblik, als het bij ons middag is.

§ 1095. *Indien de Aarde niet om hare as draaide; dan zou het oppervlak van den grooten Oceaan (de ebbe en vloed uitgezonderd,)*

derd,) volgens de wetten der aantrekking, een volmaakte bol zijn, en alle verticalen zouden precies in het middelpunt der Aarde zamenkomen. Maar, indien de Aarde om hare as omwentelt; dan verkrijgen de vloeibare deelen van dezelve eene grootere middelpuntsvliedende kracht, naarmate zij nader bij den evenachtscirkel liggen; die middelpuntsvliedende kracht vermindert de zwaarte; en de watermasſa van den grooten Oceaan moet dan de gedaante van eene ſpheroïde aannemen, dat is van een ligchaam, dat geboren wordt, wanneer eene ellips om hare kleine as omwentelt; die kleine as is de as der Aarde; de groote as de middellijn van den aardſchen evenachtscirkel. Dat zulks nu alzoo in de natuur plaats heeft, is door de dadelijke metingen der Aarde bevestigd; in welke metingen wij dus een der ontwijfelbaarſte bewijzen voor de omwenteling der Aarde verkregen hebben.

Verbeelden wij ons, *fig.* 49, eene ellips, wiens groote as LE en de kleine as PQ is; indien wij nu deze ellips om de kleine as PQ laten omwentelen; dan ontſtaat er een ligchaam, dat wij ſpheroïde of afgeplatte bol noemen. Zulk eene gedaante nu heeft onze aarde, de lijn PQ is de as en de lijn LE de middellijn van den evenachtscirkel.

§. 1096. *Het is uit dadelijke metingen gebleken, dat de omtrek van eenen elliptiſchen middagcirkel der Aarde veertig millioenen meters of nederlandſche ellen bevat; en verder, dat de halve as der Aarde, en de halve middellijn van den evenachtscirkel, de volgende lengte hebben, zie* fig. 49,

$$PM = 6376488,5 \text{ meters.}$$
$$LM = 6355897,9 \text{ meters.}$$

Zooveel meters, als de halve as korter dan de halve middellijn van den equater is, noemt men de afplatting; deze is gelijk aan 1 : 209,68. *Nadere metingen zullen dit nog nader moeten bevestigen.*

De naauwkeurige kennis van die halve as en middellijn zijn van het grootſte belang; omdat men uit dezelve de juiste afſtanden van de wereld-ligchamen tot de Aarde bepalen moet; ten einde, langs dien weg, een precies denkbeeld van ons zonneſtelſel te verkrijgen.

§. 1097. *Volgens de wetten van het evenwigt der vloeiſtoffen, moet, in de wezenlijke ſpheroïdiſche gedaante der Aarde, de zwaarte in elk punt van het oppervlak van den Oceaan werken, volgens eene lijn, die loodregt ſtaat op het platte vlak, dat het oppervlak van van den Oceaan in dit punt aanraakt; daarom gaat de rigting van de zwaarte, en gevolgelijk van de loodlijn van eenig punt, tus-*

tusschen de polen en den evenachtscirkel, niet meer, zoo als in eene rustende Aarde zou plaats hebben, door het middelpunt; maar, steeds in het middagvlak blijvende, raakt zij eene kromme lij a b c d aan, uit welker ontwinding de elliptische middaglijn gehou den kan worden te ontstaan.

Men heeft tot nog toe ondersteld, dat de zwaarte-kracht, in eenig punt *A* van het oppervlak der Aarde, in ééne rigting werkt, die behalve dat zij in allen gevalle noodzakelijk loodregt op het horizontale vlak staat, in het vlak van den middagcirkel van dit punt valt. Zoo hier of daar, eene geringe afwijking mogt plaats hebben, zal dezelve, door nadere metingen moeten bekend worden. Wanneer nu twee punten *A* en *a*, in dezelfde middagvlakte zeer digt bij elkander liggen; dan zullen de verticalen dezer punten elkander ergens in een punt *R* ontmoeten; beschrijft men nu, uit dit punt *R*, met *RA* als straal, in de middagvlakte, eenen cirkelboog; dan zal deze door de punten *A* en *a* gaan, en met den omtrek van den elliptischen middagcirkel des te naauwkeuriger overeenkomen, naarmate de punten *A* en *a* digter bij elkander vallen.

Men noemt de lijn *RA* den kromtestraal van het punt *A*. Elk punt van de elliptische middaglijn heeft zulk eenen kromtestraal; zijnde de middelpunten van al die kromtestralen gelegen in eene kromme lijn *abcd*, die berekend en geconstrueerd kan worden.

Indien men de lijn *AB*, loodregt op *AR* trekt, en dezelve om den kromtestraal *AR* laat omdraaijen; dan zal zij een vlak beschrijven, dat met het oppervlak der Aarde slechts het enkele punt *A* gemeen heeft; dit vlak is nu de schijnbare horizon van het punt *A*; en een vlak *NZ*, dat, door het middelpunt der Aarde, evenwijdig aan den schijnbaren horizon getrokken wordt, is dan de ware horizon van het punt *A*.

Men moet den kromtestraal *AR* van eenig punt *A* niet met de halve middellijn *AM* van dit punt *A* verwarren; die halve middellijn is de lijn *MA*, die, uit het middelpunt tot aan het punt *A*, getrokken wordt; zij maakt, behalve bij de polen en onder den evenachtscirkel, met den horizon altijd een scheven hoek.

§. 1098. *Men moet de schijnbare horizon van eenig punt op het oppervlak der Aarde, niet met de waterpasvlakte van dit punt verwarren. De eerste is een vlak, dat de Aarde in dit punt aanraakt; de tweede is de gebogene oppervlakte van een uitgestrekt stilstaand water (een binnenlandsch meer, bij voorbeeld,) door dit punt A gaande, en den horizon van dit punt aanrakende, hoedanige watervlakte, door de vereenigde werking der zwaarte en middelpuntsvliedende kracht, de speroïdische gedaante van het oppervlak van den Oceaan aanneemt.*

Het oppervlak van het vaste land is hobbelig en oneffen. Men heeft hoo-

hooge en lage landen, bergruggen en hooge bergen, en nogtans zijn deze laatste, hoe vervaarlijk hoog zij ons voorkomen, in vergelijking van den geheelen aardbol, nog minder als een stofje op het oppervlak van eene kunstige Aardglobe.

Verbeelden wij ons dat de oceaan zonder eb en vloed zij, en dus altijd aan de stranden op dezelfde hoogte blijve; wanneer wij dan, in de gedachte, het oppervlak van den oceaan, als door den korst der aarde, uitgestrekt zijnde, denken; of een elliptischen middagcirkel, die in het oppervlak van den oceaan ligt, om de as der aarde laten omdraaijen; dan zal hij over het oppervlak van den oceaan rakeling heenloopen, en, in het massive ligchaam van den Aardkorst, eene spheoridische vlakte beschrijven, welke de eigenlijke waterpasvlakte genoemd wordt.

Het is die waterpasvlakte, die in het vervolg het *middelbare waterpas van de zee* genoemd wordt. Elk punt, dat boven of beneden die vlakte, in de verticaal gerekend, gelegen is, wordt gezegd *boven of beneden het middelbare waterpas der zee te liggen.*

De afstand van eenig punt, boven of onder het middelbare waterpas der zee te bepalen, noemt men *waterpassen*, *nivelleren.*

§. 1099. *De ligging der plaatsen of punten, op het oppervlak der Aarde, worden door twee afmetingen Lengte en Breedte van elkander onderscheiden, en zijn ook door die twee afmetingen bepaald. De lengte is de hoek, welken het middagvlak van eenige plaats maakt met het middagvlak van eenige bekende of bepaalde plaats, bij voorbeeld, het middagvlak van het Observatorium te* Leyden. *De breedte van eenige plaats is de hoek, welken de verticaal van die plaats, binnen het ligchaam der aarde, met het vlak der nachteveningen maakt. Alle punten, in dezelfde verticaal liggende, hebben dezelfde lengte en breedte.*

De middagsvlakken van alle punten, die niet in dezelfde middagvlakte liggen, snijden (zie *fig.* 49,) elkander in den omwentelings-as der Aarde, en maken aan die as eenen standhoek; die standhoek is de lengte. Laat $PAZQ$ de middaglijn van het punt A zijn, welks middagsvlak wij aannemen, als een vlak, met hetwelk de middagvlakken van alle oostelijk en westelijk liggende plaatsen worden vergeleken.

Laat B een punt op het oppervlak der aarde zijn, liggende ten westen van het middagvlak van het punt A. Indien men nu door dit punt B en de as PQ een vlak laat gaan; dan zal dit vlak het middagvlak van het punt B zijn, en het zal het middelbare waterpas der Aarde volgens de ellips $PBCQ$ doorsnijden, welke de middaglijn van B is. Men trekke, in die laatste vlakte, de lijn MC, loodregt op de as PQ; dan is de hoek CME de standhoek van het middagvlak van het punt B, met het middagvlak van het punt A; die standhoek CME is dan de lengte van het punt B, met betrekking tot het punt A.

Op

Op deze wijze kunnen de standen van de middagvlakken van alle andere plaatsen, met betrekking tot de middagvlakte van het punt *A*, worden bepaald. Het middagsvlak, waarmede alle andere middagvlakken vergeleken worden, wordt het *eerste middagvlak* of den *eersten middagscirkel* genoemd wordt.

Men onderscheidt de lengte in *Oost-* en *West-lengte*, naar dat de plaatsen ten oosten of ten westen van den eersten middagscirkel gelegen zijn. Eertijds telde men de lengte van den eersten middagscirkel oostwaarts, den geheelch omtrek rond.

Omdat, uit alle waarnemingen, ten volle bevestigd is, dat de Aarde met eene volmaakt eenparige beweging om hare as omwentelt; *zoo is het onderscheid in lengte evenredig aan het onderscheid in tijd;* zoo dat twee plaatsen, welke 15° in lengte verschillen, juist één uur verschil in de telling van de uren van den dag hebben.

De hoek *AUE*, welke de verticaal *AR* van een punt *A*, in of nabij het oppervlak der aarde liggende, met het vlak *CME* van de nachteveningen maakt, wordt de *breedte* van het punt *A* genoemd. De hoek *ASP*, welke de verticaal met de as maakt, is het *complement van de breedte*, en is altijd gelijk aan den hoek, onder welke de as der Aarde den schijnbaren en waren horizon van dat punt doorsnijdt.

De breedte van eene plaats is *noordelijk* of *zuidelijk;* naarmate die plaats of dat punt benoorden of bezuiden het vlak der nachteveningen ligt. *De breedte wordt van het vlak van de nachteveningen, tot aan de polen, van 0° tot 90° geteld.*

Daar men van de oudste tijden af aan geene verandering in de breedte der plaatsen ontdekt heeft; volgt daaruit: *dat de as der aarde, met betrekking tot derzelver de vaste deelen, een onveranderlijken stand heeft.* De as der Aarde verandert wel, ten opzigte van het vlak van haren loopkring, (zie boven §. 1083), *maar die as voert het ligchaam der Aarde met zich mede, als of het onwrikbaar met dezelve vereenigt ware, te gelijk met het vlak der nachteveningen.*

Het bepalen van de lengte en breedte der plaatsen, is eene groote hoofdbezigheid der Aardrijks- en Sterrenkundigen. Uit de vereeniging van aller arbeid, hebben wij eindelijk naauwkeurige afteekeningen van de landen en zeeën van onzer Aarde verkregen, die bekend staan onder den naam van *geographische*, *topographische* en *hydrographische kaarten.*

§. 1100. *Men onderscheid ook nog eene middelpunts-breedte der punten of plaatsen op Aarde. Die breedte is de hoek, welken de straal van dat punt der Aarde met het vlak van den evenachtscirkel maakt.*

Die middelpunts-breedte van het punt *A* is, (zie *fig.* 49,) de hoek *AME;* de hoek namelijk, welken het punt *A*, uit het middelpunt der Aarde gezien, met het vlak van den evenaar maakt. In eene bolronde Aarde, zou die middelpunts-breedte aan de eigenlijke breedte aan het op-

oppervlak gelijk zijn; maar de ware breedte (hoek *ATE*) is, behalve onder den evenachtscirkel en onder de polen altijd grooter dan de middelpunts-breedte, en het verschil is gelijk aan den hoek *MAS*, onder welken de kromteſtraal en de halve middellijn van het punt *A*, elkander in de middagvlakte ſnijden.

§. 1101. *Bijaldien men, op dezelfde middaglijn, twee punten aanneemt, die eenen graad in breedte verſchillen; dan wordt de lengte van den boog dezer middaglijn, tusſchen die punten begrepen, in eene regte lijn uitgelegd zijnde, een breedte-graad genoemd. Wanneer nu de Aarde volmaakt bolrond ware; dan zouden alle verticalen in het middelpunt zamen komen, en alle breedte-graden zouden even groot zijn; maar nu verſchillen, van den equator tot aan de polen, de breedte-graden op de middaglijn in grootte van elkander; aan de evenachtslijn zijn zij de kleinſte, en nemen, van daar af te rekenen, in groote langzaam toe, tot dat zij aan de polen de grootſte lengte hebben.*

Dit is, uit *fig.* 49, duidelijk te zien. Al de verticalen van het vierde deel *PAaE* van den middags-lijn van het punt *A*, tusſchen den evenachtscirkel en de noordpool, komen in de kromme lijn *dRc* te zamen; die verticalen of kromteſtralen zijn, onder of bij de evenachtscirkel, de kortſte, en nemen op grootere breedte en lengte toe; aan de polen hebben zij de grootſte lengte; daar nu de bogen, die uit de hoekpunten van gelijke hoeken met verſchillende ſtralen zijn beſchreven in dezelfde reden zijn als de ſtralen, met welke zij beſchreven zijn, en die bogen niet merkbaar van de elliptiſche bogen of de breedtegraden verſchillen, zoo ziet men, dat de breedte-graden, van den evenachtscirkel tot aan de polen, in dezelfde reden als de kromteſtralen, moeten toenemen.

Door de precieſe lengte van verſcheidene breedte-graden, op onderſcheidene breedten, te meten, heeft men de afplosſing en ware gedaante der Aarde leeren kennen.

In alle aardrijkskundige leerboeken. zegt men verkeerdelijk: dat de breedte de afſtand van een punt tot den evenachtscirkel is. Dit denkbeeld is vooral in eene ſpheroïde aarde valsch, althans niet meetkunſtig.

§. 1102. *Nademaal het oppervlak der Aarde de plaats is, uit welke wij de verſchijnſelen en de bewegingen der wereldligchamen waarnemen, zoo zijn er vaste regels noodig, om de ſtanden dezer ligchamen te bepalen. Die ſtandsbepalingen kunnen plaats hebben,* 1°. *met betrekking tot de verticaal en den horizon van onze ſtandplaats;* 2°. *met betrekking tot de as en het evenachtsvlak van onze Aarde;* 3°. *met betrekking tot de as en het vlak van den loopkring der Aarde. De eerſte ſtandsbepalingen noemt men hoogte en azimuth,*

muth, de tweede declinatie en regte klimming, de derde breedte en lengte.

§. 1103. Hoogte en Azimuth. *Wanneer men, uit eenig punt van het oppervlak der Aarde, eenig voorwerp, in de hoogte of laagte, of in den horizon, ontwaart; dan ziet men dit voorwerp volgens eene regte lijn, die van het oog des waarnemers tot hetzelve getrokken wordt; die lijn wordt de gezigtlijn genoemd. Laat men door dit voorwerp en door de verticaal van den waarnemer een vlak gaan; dan wordt dit vlak het verticale vlak van het voorwerp genoemd. De hoogte van eenig voorwerp is nu de hoek, welken de gezigtslijn van het voorwerp met den schijnbaren horizon van den waarnemer maakt; en het azimuth van ditzelfde voorwerp is de hoek, onder welken de verticale vlakte, die door het waargenomene voorwerp gaat, de middagsvlakte doorsnijdt.*

Laat, *fig.* 50, de cirkel *AHCD*, de omtrek van eenigen middagscirkel der Aarde, het vlak van de figuur de middagvlakte van het punt *A*, de lijn *MAT* de verticaal van het punt *A*, en *PMQ* de omwentelings-as der Aarde, of de schijnbare hemel-as voorstellen. Men trekke, in de middagvlakte, door de punten *A* en *M*, de lijnen *ZAN* en *zMn* loodregt op de verticaal *MAT*; dan is *ZAN* de lijn, volgens welke de middagvlakte den schijnbare horizon, en *zMn* de lijn, volgens welke zij den waren of middelpunts-horizon van het punt *A* doorsnijdt; welke horizontale vlakken derhalve gedacht moeten morden, als regthoekig op het vlak van de teekening staande.

Laat de waarnemer, in *A* geplaatst zijnde, een voorwerp, bij voorbeeld, eene ster in *S* zien; dan is de lijn *AS* de gezigtslijn, onder welken hij dit voorwerp waarneemt. Men late nu door de verticaal *AT*, het voorwerp *S*, en bijgevolg ook door de gezigtslijn *AS*, een vlak gaan; dan is dit vlak het verticale of azimutale vlak van het voorwerp *S*. Dit vlak snijdt den schijnbaren horizon, volgens eene lijn *AH*; deze lijn is dan de projectie van de gezigtslijn *AS*, op den schijnbaren horizon van het punt *A*, en de hoek *SAH* is dan de *hoogte*, onder welke de ster *S* boven den schijnbaren horizon van *A* gezien wordt, en de hoek *TAS*, die het complement van de hoogte is, noemt men den *zenith afstand* van de ster *S* tot de verticaal *AT*. Eindelijk is de hoek *HAZ* de standhoek van het azimuthale vlak met de middagsvlakte het eigenlijke *azimuth* van de ster of het voorwerp *S*; zijnde derhalve dit azimuth de hoek, welke de projectie van de gezigtslijn van eenig voorwerp met de middaglijn (de lijn van het zuiden en het noorden) maakt.

De azimuthale hoeken kunnen, zoo als men verkiest, van het zuiden of van het noorden, ten westen of ten noorden geteld worden. In het eerste geval zal men zeggen: *azimuth beoosten of bewesten het zuiden;*

den; in het tweede, *azimuth beoosten of bewesten het noorden. Men zou, in de telling van het azimuth* (zoo als thans meestal in gebruik is,) *het azimuth, de schijnbare omwenteling des hemels volgende, van het zuiden door het westen noorden en oosten, of van het noorden door het oosten zuiden en westen, den geheelen omtrek, van* 0° *tot* 360°, *kunnen rondtellen.* De eerste wijze van tellen stemt overeen met de sterrekundige dagtelling, die met den middag begint; de tweede met de burgelijke, die van middernacht gerekend wordt, welke telling voortaan door alle sterrekundigen behoorde gevolgd te worden.

Het azimuth van eenig voorwerp, boven onzen horizon, in den dampkring, of in de hemelruimte, gelegen, geeft het verticale vlak, waar dit voorwerp legt, en de hoogte de lijn, onder welke, in dit vlak, het voorwerp gezien wordt. Is alleen de hoogte gegeven; dan kent men de kegelvlakte, welke door de omwenteling van de lijn *AS*, om de verticaal *AT*, ontstaat. Kent men het azimuth; dan kent men het verticale vlak *TAH*, in hetwelk dit voorwerp gelegen is; de doorsnijding van het verticale vlak met genoemde kegelvlakte geeft de gezigtslijn *AS*.

§. 110.†. *Aangezien de waarneming van de hoogte en van het azimuth der voorwerpen, gelegen, of in de nabijheid onzer aarde, of in de hemelruimte, op onderscheidene punten van het oppervlak der Aarde plaats hebben, zoo moet men, om, uit de vereenigde waarnemingen, wezenlijke gevolgen te kunnen afleiden, dezelve tot hetzelfde punt overbrengen; het natuurlijkste is, dat men daartoe het middelpunt daar Aarde neemt; en dan moeten de waargenomene hoogte en azimuth zóó herleid worden, als of zij uit het middelpunt der Aarde, op den waren horizon, hadden plaats gehad. Men moet tot dat einde de parallaxen kennen, welke, uit de bekende halve middellijn der Aarde, den afstand van het waargenomen voorwerp tot het middelpunt der Aarde, en de waargenomene hoogte, kan gevonden worden.*

Indien men, zie *fig.* 50, eene bolronde Aarde onderstelt, in welke de verticalen van alle punten in het middelpunt *M* vereenigd worden; dan bestaan er slechts eene parallaxis in hoogte; doch geene parallaxis in het azimuth.

Men trekke, door het punt *M*, de lijn *zMn*, loodregt op de verticaal *MT*, dat is, evenwijdig aan *ZAN*; dan is het vlak, dat door de omwenteling van die lijn *zMn* om de verticaal *MT* ontstaat, de ware of middelpunts-horizon van het punt *A*. De lijn *MS*, is dan de lijn, volgens welke het voorwerp *S*, uit het middelpunt der Aarde gezien wordt. Het verticale vlak *TAS*, snijdt de middelpunts-horizon, volgens de lijn *Mh*, zijnde de projectie van de gezigtslijnen *AS* en *MS* op den waren horizon. Volgens de algemeen bekende beginselen, is dan hoek *zMh* = hoek *ZAH*. *In eene bolronde Aarde, is dan het azimuth,*

uit

uit het middelpunt der Aarde waargenomen, hetzelfde, als het azimuth uit het oppervlak; omdat de gezigtsstralen *MS* en *AS* met de verticaal *MAS* in hetzelfde vlak liggen; *maar de middelpunts-hoogte SMh is altijd grooter dan de hoogte SAH, op den schijnbaren horizon genomen. Het verschil dezer hoogten is de hoek ASM.* Men noemt den hoek *SAH* de *schijnbare*, den hoek *SMh* de *ware hoogte;* en den hoek *ASM* de *parallaxis in hoogte. Men moet, om uit de schijnbare hoogte de ware te vinden, bij de schijnbare hoogte de parallaxis in hoogte optellen; en deze is afhankelijk van de halve middellijn der Aarde AM, van den afstand MS, en van de schijnbare hoogte SAH.*

In eene platronde aarde, zie *fig.* 49, bestaat ook nog eene azimuthale parallaxis. De verticaal van den waarnemer in *A*, is de lijn *TAS*. Men trekke de lijn *Mat*, evenwijdig aan de lijn *TAS*, en verplaatste den waarnemer uit het punt *A*, in het punt *a*; dan moet, gelijk, in *fig.* 50, de waargenomene hoogte en azimuth van *A* in *a*, en van *a* in *M* worden overgebragt.

§. 1105. II. Declinatie en regte klimming. *De standen der voorwerpen in de hemelruimte worden ook nog, met betrekking tot de as der Aarde en het vlak van de nachteveningen, op dezelfde wijze, als met betrekking tot de verticaal en den horizon van een gegeven punt, bepaald. Indien men, van het middelpunt der Aarde, tot aan het middelpunt van eenig voorwerp, eene lijn trekt; dan ligt die lijn, met de as der Aarde, in dezelfde vlakte; dit vlak noemt men het declinatie-vlak; en de hoek, welken gezegde lijn met de evenachtsvlakte maakt, is de declinatie of afwijking van het voorwerp, die men in noorder- en zuider-declinatie onderscheidt. De hoek, welke gezegde lijn met de as der Aarde maakt, en gelijk is dan het complement van de declinatie, noemt men de pools-afstand. Laat men door de as der Aarde en de lijn, volgens welke de vlakte der nacheveningen het vlak van den loopkring der Aarde snijdt, een vlak gaan; dan zal de hoek, welken het declinatie-vlak, met die vlakte maakt, de regte klimming zijn, welke, van de voorjaars nachtevening, oostwaarts, van 0° tot 360°, wordt rondgeteld.*

Laat, *fig.* 51, *M* het middelpunt, de lijn *PMQ* de as der aarde, en het vlak *LAE*, dat door het middelpunt *M*, loodregt door de as gaat, het vlak der nachteveningen, en eindelijk *EML*, in die vlakte getrokken zijnde, de lijn voorstellen, volgens welke het vlak der nachteveningen, het vlak van den loopkring der Aarde doorsnijdt.

Men stelle, ergens in de hemelruimte, een voorwerp *S*; dan is de lijn *MS* de lijn, onder welke dit voorwerp *S* uit het middelpunt der Aarde in de hemelruimte gezien wordt. Een vlak, dat door die gezigtslijn *MS*, en de as *PMQ* gaat, is het declinatie-vlak van het voorwerp *S*. Het staat regthoekig op het vlak der nachteveningen, hetwelk het

volgens de lijn *MA* snijdt; zijnde die lijn *MA* de projectie van de gezigtslijn *AS* op het vlak der nachteveningen.

Nu is de hoek *SMA* de declinatie, de hoek *SMP* de pools afstand. De declinatie, die onderscheiden wordt, in noordelijke en zuidelijke, naarmate het voorwerp *S* aan de noord- of zuidzijde van het vlak der nachteveningen gelegen is, wordt, van dat vlak af te rekenen, naar de noord- of zuid-pool, van 0° tot 90°, geteld. — De regte klimming is de hoek *LMA*; zijnde de standhoek, die het declinatie-vlak van het voorwerp met het declinatie-vlak van de voorjaars-nachtevening maakt; zij wordt van *L* naar *A*, van 0° tot 360°, den geheelen omtrek rondgesteld.

De declinatien en regte klimmingen der voorwerpen, in de hemelruimte, stemmen overeen met de breedte en lengte der plaatsen op Aarde; zijnde de lengte en breedte van eenig punt op Aarde niets anders dan de declinatie en regte klimming van dat punt, uit het middelpunt der Aarde waargenomen zijnde.

De declinatien en regte klimmingen, worden op de sterre-wachten, welker breedte vooraf bepaald is, bepaald, door hoogte-metingen in den middagcirkels, en door het waarnemen van het verschil van den tijd, wanneer de voorwerpen door den middagscirkel gaan.

§. 1106. *Hoogte en azimuth van een voorwerp, op eene bepaalde plaats op het oppervlak der Aarde waargenomen, staan met de declinatie en regte klimming van hetzelve in een onafscheidelijk meetkunstig verband.*

Laat, om dit op te helderen, *fig.* 52, *M* het middelpunt der Aarde, *TV* de verticaal van eenig punt van het oppervlak verbeelden, *PMQ* de as der Aarde (of des hemels) *ZHN* de doorsnede van het middagsvlak met het vlak van den waren horizon der bedoelde plaats.

Laat, ergens in de Hemel-ruimte, een voorwerp *S* (de Zon, bij voorbeeld) zich bevinden; indien men dan, van het middelpunt van dit voorwerp *S* tot aan het middelpunt *M* der Aarde, eene lijn *SM* trekt; dan is die lijn de gezigtslijn, onder welke het middelpunt van dit voorwerp, uit het middelpunt der Aarde, gezien wordt.

Men beschrijve, uit *M*, als middelpunt, met *MS* als straal, eenen bol; dan zal het oppervlak van dien bol het oppervlak van den schijnbaren hemelbol kunnen voorstellen. Dit oppervlak zal dan de middagvlakte, volgens den grooten cirkel *PTLZVEN*, doorsnijden; *P* zal dan de noordpool, *Q* de zuidpool des Hemels, *T* het toppunt, en *V* het voetpunt van den aardbewoner zijn, wiens verticaal de lijn *TV* is; welke verticaal, benevens de as *PQ* in de middagsvlakte liggen.

Het oppervlak van dien bol zal nog den waren horizon, volgens den grooten cirkel *ZHN*, doorsnijden. Een vlak, dat door de verticaal *TV* en de gezigtslijn *SM* gaat, zal het oppervlak des hemels, volgens den grooten cirkel *TSHV* doorsnijden; en een vlak, dat door de as des hemels en de gezigtslijn *SM* gaat, volgens den grooten cirkel *PSAQ*.

De

De eerste cirkel is de top- of hoogte-cirkel, en de tweede de declinatie cirkel van het voorwerp *S*.

Men verkrijgt dan in de figuur, die eene plaats der Aarde, op noorder breedte gelegen, en de oostelijke helft des hemels voorstelt, aan het toppunt *T* en de noord-pool *P*, eenen bolvormigen driehoek *PST*, welke in de beoefening der werkdadige Sterrekunde van het grootste belang is. Men noemt dien bolvormigen driehoek den *parallactischen driehoek*.

In denzelven driehoek is als volgt: 1°. de zijde *TP* het complement van den boog *TL*, dat is het complement van de breedte van de plaats des waarnemers; 2°. de zijde *TS* het complement van den boog *SH*, of het complement van de hoogte van *S*; 3°. de zijde *PS* het complement van den boog *AS*, het complement van de declinatie van *S*; 4°. de bolvormige hoek *PTS* het azimuth van *S*, beoosten het noorden; 5°. de hoek *TPS* de uurhoek, welke, tegen 15° voor één uur, aanwijst, hoe veel tijd er verloopen moet, eer het vlak van den middagscirkel van het het punt, waar de waarnemer zich bevindt, door het middelpunt van het voorwerp *S* gaat; 6°. de hoek *TSP* den parallactischen hoek.

Al de zijden en hoeken van dien parallactischen driehoek, zullen dezelfde blijven, hoe groot of klein men den straal van den schijnbaren hemelbol zou mogen aannemen.

§. 1107. BREEDTE en LENGTE. *De breedte en lengte van eenig punt, in de hemelruimte gelegen, is, met betrekking tot de lijn, die door het middelpunt der Aarde, loodregt op het vlak van derzelver loopkring staat, en het vlak van dien loopkring, wat de declinatie en regte klimming is, met betrekking tot de as der Aarde en het vlak der nachteveningen.*

Laat, *fig.* 53, *M* het middelpunt, *PQ* de as en *ALB* een gedeelte van het vlak van den loopkring der Aarde zijn, *ME* eene lijn, die loodregt op dit vlak staat; dan zal het vlak *CLD*, dat door het middelpunt, loodregt door den as *PQ* gaat, het vlak van de nachteveningen voorstellen. De lijn *LM* is dan de lijn, volgens welke dit vlak het vlak van den loopkring doorsnijdt, en zoo *P* de noordpool des hemels verbeeldt; dan zal *L* het punt van de voorjaars-nachtevening zijn.

Zij nu *S* eenig punt in de hemelruimte, *MS* de lijn, langs welke dit punt, uit het middelpunt *M* der Aarde, gezien wordt; indien men dan, door die gezigtslijn *MS*, en de as *PM*, een vlak laat gaan; dan zal dit vlak het oppervlak des hemels, volgens den declinatie-cirkel *PSG* doorsnijden; de boog *SG* of de hoek *SMG*, zal dan de declinatie, en de hoek *LMG* de regte klimming van het punt *S* zijn.

Men late nog, door de gezigtslijn *MS*, en de lijn *ME* (de as van den loopkring) een vlak *EMFS* gaan; dit vlak zal dan het vlak van den loopkring, volgens de lijn *FM* (de projectie van de gezigtslijn *MS* op het vlak van den loopkring zijnde,) regthoekig doorsnijden; de cir-

kel ESF, volgens welken dit vlak het oppervlak des hemels snijdt, wordt de *breedte-cirkel* van het punt S genoemd.

De breedte van het punt S is dan de hoek SMF, welke de gezigtslijn SM met het vlak van den loopkring maakt; welke hoek gemeten wordt door den boog SF. Het complement van de breedte is de hoek SM, welken de gezigtslijn SM, met de as EM van den loopkring maakt, en dit complement wordt door den boog ES gemeten.

Men late nog, door de as EM, en het het punt L van de voorjaarsnachtevening, een vlak ELM gaan; dan is de lengte van het punt S de hoek FML, welken de breedte-cirkel van dit punt S met het vlak ELM maakt; welke lengte derhalve op het vlak van den loopkring, van het punt van de nachtevening der lente, van het westen naar het oosten, van 0° tot 360°, wordt rondgeteld.

De breedte is derhalve de hoek, welke de gezigtslijn van eenig voorwerp met het vlak van den loopkring der Aarde maakt, en de lengte de hoek, onder welken de projectie van die gezigtslijn de lijn van de voorjaars-nachtevening doorsnijdt.

De lengte en de breedte van het punt S, wordt uit de waargenomene declinatie en regte klimming, met behulp van den bolvormigen driehoek EP♈, door berekening, aldus gevonden. De boog of de zijde EP is gelijk aan den hoek, onder welken de evenachts-vlakte het vlak van den loopkring doorsnijdt, en is derhalve bekend; de zijde PS is het complement van de declinatie; de bolvormigen hoek EPS wordt gemeten door den boog CLG, of door den hoek CMG, en is derhalve gelijk aan de regte klimming plus 90°. Men zal dus de zijde ES, of het complement van de breedte en den hoek PES, dat is het complement van de lengte, kunnen berekenen.

Men zie verder, aangaande meerdere bijzonderheden, onze *Cosmographische Lessen.*

B. *Opgave van de gedaante, grootte en afmetingen der Aarde.*

§. 1108. De gedaante, grootte en afmetingen der Aarde te kennen, is in de toepassing der platte en bolvormige driehoeken, op de nuttigste en belangrijkste wetenschappen van zooveel belang, dat wij in het volgende vraagstuk de voornaamste hoofdzaken, tot die kennis behoorende, zullen opgeven.

IX. VRAAGSTUK. *Fig.* 54.

§. 1109. *Ondersteld zijnde, dat de Aarde eene ellipsoïde zij, ontstaande uit de omwenteling van de halve ellips PEQ, om derzelver kleine as PQ; en stellende de halve groote as of straal van den*

den evenachtscirkel ME = 1, en de halve kleine as PM = QM = 1 — a (zijnde a de afplatting) zoo vraagt men: de lengte van een vierde van de middagcirkel, den kromtestraal voor eenige breedte, en voorts alle andere afmetingen te vinden?

OPLOSSING. Zij A eenig punt van den elliptischen middagcirkel. Trek AT en AV, loodregt op de assen; dan is (I. *Vraagstuk*, X. *Boek.*)

$$PV \times VQ : AV^2 = PM^2 : ME^2$$

Men stelle nu $ME = 1$, $PM = QM = 1 - a$, $VM = AT = x$, $AV = MT = y$; dan is $PV = PM - VM = (1-a) - x$ en $VQ = (1-a) + x$; de laate evenredigheid wordt dan:

$$[(1-a)-x] \times [(1-a)+x] : y^2 = (1-a)^2 : 1$$

$$\text{of}\quad (1-a)^2 - x^2 : y^2 = (1-a)^2 : 1$$

en, uit deze evenredigheid volgt dan:

$$y^2 = 1 - \frac{x^2}{(1-a)^2}\ (1) \quad \text{en}\quad x^2 = (1-a)^2 - (1-a)^2 y^2\ (2)$$

Zij AD de lijn, welke de ellips, in het punt A, aanraakt. Indien men de lijn AUS loodregt op AD trekt; dan is AUS de verticaal van het punt A, en AD de lijn, in welke het vlak van den middagscirkel het vlak van den schijnbaren horizon van het punt A doorsnijdt. Nu is VS de subnormaal van het punt A, met betrekking tot de kleine, en TU de subnormaal van datzelfde punt, met betrekking tot de groote as EM.

Uit de differentiaal-rekening, weten wij nu, dat

$$VS = \frac{y\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{(1-a)^2} \quad \text{en}\quad UT = \frac{x\partial x}{\partial y} = -(1-a)^2 y$$

is; en, in de regthoekige driehoeken AVS en ATU, is dan:

$$AS^2 = AV^2 + VS^2 = y^2 + \frac{x^2}{(1-a)^4} \quad \ldots \quad (3)$$

$$AU^2 = AT^2 + TU^2 = x^2 + (1-a)^4 y^2 \quad \ldots \quad (4)$$

Nu is de hoek AUE, zie §. 1099, de breedte van het punt A. Stelt men die breedte, *hoek* $AUE = B$; dan zal, volgens de II. *Stell.* $AV^2 = AS^2 \times cos^2.B$; $AT^2 = AU^2 \times sin^2.B$ zijn; dat is:

$$y^2 = \left\{\frac{x^2}{(1-a)^4} + y^2\right\} \times cos^2.B$$

$$x^2 = [x^2 + (1-a)^4 y^2] \times sin^2.B$$

en, indien men nu uit deze vergelijkingen x^2 en y^2 oplost; dan vindt men, in eene functie van B:

$$x = \frac{(1-a)^2 \times sin.B}{\sqrt{[cos^2.B + (1-a)^2 sin^2.B]}} \quad \ldots \quad (5)$$

$$y = \frac{cos.B}{\sqrt{[cos^2.B + (1-a)^2 sin^2.B]}} \quad \ldots \quad (6)$$

en wij hebben, deze vergelijkingen differentierende,

 $\partial x =$

$$\partial x = + \frac{(1-a)^2 \cos. B \, \partial B}{\sqrt{[\cos^2. B + (1-a)^2 \sin^2. B]^3}} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$\partial y = - \frac{(1-a)^2 \sin. B \, \partial B}{\sqrt{[\cos^2. B + (1-a)^2 \sin^2. B]^3}} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Men brenge de waarde van x en y in de vergelijking (4) over; dan verkrijgt men, voor de waarde van de normaal AU:

$$AU = \frac{(1-a)^2}{\sqrt{[1 + ((1-a)^2 - 1) \sin^2. B]}}$$

of, ftellende $(1-a)^2 - 1 = 1 - 2a + a^2 - 1 = -2a + a^2 = -p$, of $p = 2a - a^2$, korter en beknopter,

$$AU = \frac{1-p}{\sqrt{(1 - p \sin^2. B)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Men weet uit de Hoogere Meetkunst: *dat de kromteftraal $AR = R$, van elk punt eener ellips gelijk is aan de cubus van de normaal AU, gedeeld door het vierkant van den halven parameter van de groote as.* Nu is de halve parameter, met betrekking tot de groote as, eene derde evenredige tot de halve groote en de halve kleine as; derhalve gelijk aan $(1-a)^2 = 1 - p$; wij hebben derhalve:

$$AR = R = \frac{1-p}{\sqrt{(1 - p \sin^2. B)^3}} = (1-p)(1 - p \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} \quad (10)$$

De kromteftraal van elk punt A des elliptifchen middagcirkel is de ftraal eens cirkels, wiens omtrek met de kromte van de ellips ten naauwkeurigfte overeenkomt. Een graad breedte, op den elliptifchen middagcirkel is een gedeelte van denzelven, zoodanig bepaald zijnde, dat de kromteftralen van de uiterfte punten van dien elliptifchen boog eenen hoek van éénen graad met elkander maken. *Indien men dan, op twee onderfcheidene breedten, bij voorbeeld, in de nabijheid van den evenachtscirkel en in de nabijheid van de polen, twee graden gemeten heeft; dan zullen de lengte dezer graden tot elkander in dezelfde reden ftaan als de kromteftralen, op de gemiddelde breedte genomen.*

Ingevolge dit beginfel, zal het dan genoeg zijn, de lengte van twee graden op verfchillende breedten (op hoe grooter afftand des te beter) met de uiterfte naauwkeurigheid gemeten te hebben, om de afplatting te vinden.

Want, laten G en G' de lengte van twee zulke graden zijn, de gemiddelde breedte, op welke die metingen hebben plaats gehad, B en B'; dan is, volgens dit beginfel:

$$G : G' = \frac{1-p}{\sqrt{(1 - p \sin^2. B)^3}} : \frac{1-p}{\sqrt{(1 - p \sin^2. B')^3}}$$

$$G : G' = \sqrt{(1 - p \sin^2. B')^3} : \sqrt{(1 - p \sin^2. B)^3}$$

$$G^2 : G'^2 = (1 - p \sin^2. B')^3 : (1 - p \sin^2 B)^3$$

$$\sqrt[3]{G^2} : \sqrt[3]{G'^2} = 1 - p \sin^2 B' : 1 - p \sin^2. B$$

uit welke laatfte evenredigheid gemakkelijk gevonden wordt

$p =$

$$p = \frac{1 - \sqrt[3]{\left(\frac{G'}{G}\right)^2}}{sin^2.B - sin^2.B' \sqrt[3]{\left(\frac{G'}{G}\right)^2}} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

Nu is $p = 1 - (1 - a)^2$; derhalve $(1 - a)^2 = 1 - p$, $1 - a = \sqrt{(1 - p)}$ en $a = 1 - \sqrt{(1 - p)}$; zoo dat, op deze wijze, de afplatting bekend wordt.

Uit de velerlei tot hiertoe in het werk gestelde metingen is gebleken, dat de afplatting is

$$a = \frac{1}{309,68} = 0,00322\ 91397\ 57 \quad \ldots\ldots \quad (\Delta)$$

zijnde derhalve

$$p = 2a - a^2 = 0,00644\ 78521\ 71 \quad \ldots\ldots \quad (\delta)$$

welke afplatting, indien wij dezelve voor de ware aannemen, en dan één-vierde van den elliptischen middagscirkel, in tien-millioen deelen, verdeelen (welke deelen meters of nederlandsche ellen genoemd worden,) dienen kan, om de halve asfen, kromtestralen en andere afmetingen van gezegden middagscirkel, in zulke meters, te berekenen.

Zoeken wij, tot dat einde, de halve groote as, zoo als boven, gelijk 1, de halve as gelijk $1 - a$ en $p = 1 - (1 - a)^2 = 2a - a^2$ gesteld hebbende, de lengte van één-vierde van den omtrek van den elliptischen middagscirkel.

Stellen wij een gedeelte van dien middagscirkel, van den evenachtscirkel tot op de breedte B, gelijk te zijn aan L; dan is

$$L = \int \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = (1 - p) \times \int (1 - p\, sin^2.B)^{-\frac{3}{2}} \partial B \quad (B)$$

Om deze aangeduide integraal te berekenen, moet men eerst $(1 - p\, sin^2.B)^{-\frac{3}{2}}$, naar de formule van NEWTON, ontwikkelen; dan heeft men:

$$(1 - p\, sin^2.B)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \tfrac{3}{2} p\, sin^2.B + \tfrac{15}{8} p^2 sin^4.B + \tfrac{35}{16} p^3 sin^6.B$$
$$+ \tfrac{315}{128} p^4 sin^8.B + \tfrac{693}{256} p^5 sin^{10}.B + enz. \quad \ldots \quad (11)$$

Men zal, in de berekening eene geschiktere formule verkrijgen, wanneer men, in die vergelijking (11), in plaats van de evene magten van $sin.B$, de waarden stelt, welke op de tafel D, *Bladz.* 52, voorkomen; dit dan doende, en alles naar behooren herleidende, zoo verkrijgen wij:

$$(1 - p\, sin^2.B)^{-\frac{3}{2}} =$$
$$\left(1 + \frac{3}{3} p + \frac{45}{64} p^2 + \frac{175}{256} p^3 + \frac{11025}{16384} p^4 + enz.\right)$$
$$- \left(\frac{3}{4} p + \frac{15}{16} p^2 + \frac{525}{512} p^3 + \frac{2205}{2048} p^4 + enz.\right) \times cos\ 2B$$
$$+ \left(\frac{15}{64} p^2 + \frac{105}{256} p^3 + \frac{2205}{4096} p^4 + enz.\right) \times cos\ 4B$$

$$-\left(\frac{35}{512}p^3+\frac{315}{2048}p^4+enz.\right)\times cos. 6B$$

$$+\left(\frac{315}{16384}p^4+enz.\right)\times cos. 8B \quad . \quad . \quad ; \quad (12)$$

Deze vergelijking (12) behoeft, blijkens de vergelijking (10), flechts met $1-p$ te worden vermenigvuldigt, om de lengte van den kromteftraal, op eene gegevene breedte B, in eene functie van B, te verkrijgen. Die kromteftraal is derhalve:

$$R=\left(1-\frac{1}{4}p-\frac{3}{64}p^2-\frac{5}{256}p^3-\frac{175}{16384}p^4-enz\right)$$

$$-\left(\frac{3}{4}p+\frac{3}{16}p^2+\frac{45}{512}p^3+\frac{105}{2048}p^4+enz.\right)\times cos. 2B$$

$$+\left(\frac{15}{64}p^2+\frac{45}{256}p^3+\frac{525}{4096}p^4+enz.\right)\times cos. 4B$$

$$-\left(\frac{35}{512}p^3+\frac{175}{2048}p^4+enz.\right)\times cos. 6B$$

$$+\left(\frac{315}{16384}p^4+enz.\right)\times cos. 8B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\Gamma)$$

genomen, in de onderftelling, dat de ftraal van den evenachtscirkel de éénheid is.

Men moet nu, blijkens de vergelijking (B), de termen van vergelijking (12), ∂B vermenigvuldigen, en dezelve, term voor term, integreren; men verkrijgt, dit doende:

$$L=\left(1-\frac{1}{4}p-\frac{3}{64}p^2-\frac{5}{256}p^3-\frac{175}{16384}p^4-enz.\right)\times B$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}p+\frac{3}{16}p^2+\frac{45}{512}p^3+\frac{105}{2048}p^4+enz.\right)\times sin. 2B$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{15}{64}p^2+\frac{45}{256}p^3+\frac{525}{4096}p^4+enz.\right)\times sin. 4B$$

$$-\frac{1}{6}\left(\frac{35}{512}p^3+\frac{175}{2048}p^4+enz.\right)\times sin. 6B$$

$$+\frac{1}{8}\left(\frac{315}{16384}p^4+enz\right)\times sin. 8B \quad . \quad . \quad . \quad (\Xi)$$

Deze reeks ftelt de lengte voor van een gedeelte van den elliptifchen middagscirkel, van den evenachtscirkel, tot aan den parallel, welke op B graden breedte is gelegen; doch, om die reeks in de berekening te gebruiken, moet men in den eerften term voor de breedte B nemen, den cirkelboog, welke dien hoek voorftelt, in deelen van den ftraal der natuurlijke finus-tafel.

Daar de vergelijking of reeks (Ξ) algemeen is, zal men in dezelve flechts $B=0$ behoeven te ftellen, om de lengte van één-vierde van den

den middagscirkel te vinden; die lengte $= Q$ stellende, zoo zal aangezien, in dit geval, $sin. 2B = 0$, $sin. 4 = 0$, *enz.* wordt, en $B = \frac{1}{2}\pi$ is

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi \times \left(1 - \frac{1}{4}p - \frac{3}{64}p^2 - \frac{5}{256}p^3 - \frac{175}{16384}p^4 \ldots\ldots - \frac{441}{65536}p^5 - enz.\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\xi)$$

Er zullen slechts weinig termen van deze reeks noodig zijn, om, de afplatting, en gevolgelijk p gegeven zijnde, de lengte van één-vierde des elliptischen middagcirkel te vinden. Men heeft namelijk, zie boven;

$$p = 0,00644\ 78521\ 71$$
$$p^2 = 0,00004\ 15747\ 98$$
$$p^3 = 0,00000\ 02680\ 68$$
$$p^4 = 0,00000\ 00017\ 28$$

en, met deze waarden van p, vindt men:

$$Q = 1,56826\ 11916\ 55$$

Dit getal Q, stelt derhalve de betrekking voor, welke er tusschen één-vierde van den elliptischen middagscirkel en den straal van den evenachtscirkel bestaat. Nu heeft men die vierde van den middagscirkel in tien-millioenen meters verdeeld; indien men derhalve die tien-millioenen meters door Q deelt; dan zal men verkrijgen, zie *fig.* 54,

halve middel. equator $ME = 6376488,488$ *meters*
halve as der Aarde $PM = 6355897,916$ ——
afplatting $a = 20590,572$ ——

Uit de formule (Ξ), kan men gemakkelijk eene andere afleiden, waaruit de lengte van éénen graad des elliptischen middagscirkel kan worden bepaald. Indien wij, in gezegde formule, de coefficienten van B, $sin. 2B$ *enz.* gelijk aan a, b, c, d, e, *enz.* stellen, in (Ξ) voor B, schrijven $B + 1^\circ$, en er dan de vergelijking zelve aftrekken; dan zullen wij, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$\begin{aligned} G = 0,01745\ 32925 \times a &- 2b \times sin.\,1^\circ \times cos.(2B + 1^\circ) \\ &+ 2c \times sin.\,2^\circ \times cos.(4B + 2^\circ) \\ &- 2d \times sin.\,3^\circ \times cos.(6B + 3^\circ) \\ &+ 2e \times sin.\,4^\circ \times cos.(8B + 4^\circ) \quad (A) \end{aligned}$$

in welke G beteekent de lengte van eenen meridiaan-graad van B tot $B + 1^\circ$ graden breedte.

Om den straal van den pararallel-cirkel der Aarde op de breedte B; dat is de lijn $AV = y$, te vinden, zoo hebben wij, zie boven:

$$AV = \frac{cos.\,B}{\sqrt{(1 - p\,sin^2.\,B)}} = cos.\,B \times (1 - p\,sin^2.\,B)^{-\frac{1}{2}}$$

Indien wij deze uitdrukking op dezelfde wijze, als boven ontwikkelen; dan verkrijgen wij:

$$AV = \cos.B + \tfrac{1}{2}p\sin^2.B\cos.B + \tfrac{3}{8}p^2\sin^4.B\cos.B + \tfrac{5}{16}p^3 \sin^6.B\cos.B + \tfrac{35}{128}p^4\sin^8.B\cos.B + \text{enz.} \quad . \; . \; . \quad (m)$$

en schrijven wij nu, in plaats van de magten van *sin. B* derzelver waarden; dan hebben wij, in aanmerking nemende, dat, in het algemeen:

$$\cos.nx \times \cos.x = \tfrac{1}{2}\cos.(n-1)x + \tfrac{1}{2}\cos.(n+1)x$$

is, deze voor de berekening meer geschikte vergelijking

$$AV = \left(1 + \frac{1}{8}p + \frac{3}{64}p^2 + \frac{25}{1024}p^3 + \frac{63}{4096}p \;+ \text{enz.}\right) \times \cos.B$$
$$-\left(\frac{1}{8}p + \frac{9}{128}p^2 + \frac{45}{1024}p^3 + \frac{63}{2048}p^4 + \text{enz.}\right) \times \cos.3B$$
$$+\left(\frac{3}{128}p^2 + \frac{25}{1024}p^3 + \frac{45}{2048}p^4 + \text{enz.}\right) \times \cos.5B$$
$$-\left(\frac{5}{1024}p^3 + \frac{63}{8192}p^4 + \text{enz.}\right) \times \cos 7B$$
$$+\left(\frac{9}{8192}p^4 + \text{enz.}\right) \times \cos.9B \quad . \; . \; . \quad (M)$$

Vermenigvuldigt men deze reeks met $\frac{\pi}{180}$; dan zal zij de lengte van éénen graad van den parallel-cirkel, op de breedte *B*, voorstellen.

De halve middellijn van het punt *A*, namelijk de lijn $AM = r$, kan aldus gevonden worden. Wij hebben, zie boven:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1 - [1-(1-a)^4]\sin^2.B}{1 - [1-(1-a)^2]\sin^2.B}$$

dat is, indien wij wederom $p = 1 - (1-a)^2$ stellen,

$$r^2 = \frac{1 - (2 - p^2)\sin^2.B}{1 - p\sin^2.B}$$

en, zoo wij het laatste lid dezer vergelijking in eene reeks ontwikkelen:

$$r^2 = 1 - p(1-p)\sin^2.B - p^2(1-p)\sin^4.B - p^3(1-p)\sin^6.B$$
$$- p^4(1-p)\sin^8.B - \text{enz.} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (n)$$

Om nu uit deze de waarde van *r* te vinden, zoo stelle men:

$$r = 1 + A\sin^2.B + B\sin^4.B + C\sin^6.B + D\sin^8.B + \text{enz.}$$

Verheft men deze aangenomene vergelijking tot de tweede magt, en stelt men de coëfficienten van dezelfde magten van *sin. B* aan elkander gelijk; dan zal men verkrijgen:

$$r = 1 - \tfrac{1}{2}p(1-p)\sin^2.B$$
$$- \tfrac{1}{8}p^2(5 - 6p + p^2)\sin^4.B$$
$$- \tfrac{1}{16}p^3(13 - 19p + 7p^2 - p^3)\sin^6.B$$
$$- \tfrac{1}{128}p^4(141 - 252p + 150p^2 - 44p^3 + 5p^4)\sin^8.B \quad (N)$$

en, wanneer men nu in deze vergelijking (*N*) voor de magten van *sin. B* derzelver waarden schrijft; dan zal men eindelijk vinden:

+

$$r = 1 - \frac{1}{4}p - \frac{1}{16}p^2 + \frac{7}{256}p^3 - \frac{377}{16384}p^4 + enz.$$
$$+\left(\frac{1}{4}p + \frac{1}{16}p^2 + \frac{3}{512}p^3 - \frac{325}{2018}p^4 - enz.\right)\cos. 2B$$
$$-\left(\frac{5}{64}p^2 + \frac{15}{256}p^3 + \frac{1099}{4096}p^4 + enz.\right)\cos 4B$$
$$+\left(\frac{13}{512}p^3 + \frac{65}{2048}p^4 + enz.\right)\cos. 6B$$

Men zal, op die wijze voortgaande, dergelijke formulen kunnen vinden voor de waarden van de lijnen *AV*, *SV*, *MS*, *hoek MAS*, en eindelijk voor de lijnen *AH* en *MH*, hetwelk op te zoeken wij aan den Lezer overlaten.

C. *Over het meten der Hoogten.*

§. 1110. Door het meten van hoogten verstaat men het vinden van den afstand van eenig in de verte gelegen punt, boven de horizontale vlakte van het punt, alwaar men zich bevindt.

X. Vraagstuk.

§. 1111. *De voornaamste manieren te verklaren, om de hoogte van den top van eenig voorwerp, of van eenig punt, boven de horizontale vlakte van het punt, alwaar men zich bevindt, te bepalen?*

A. *Eerste manier. Fig.* 55. Indien het voorwerp toegankelijk is, bij voorbeeld, een toren *AB*, tot welks voet men, uit eenig punt *D*, in eene regte lijn kan naderen; dan zal men aldus te werk gaan. Ondersteld zijnde: dat de effen grond volmaakt horizontaal of waterpas ligge; dan mete men, uit het punt *D*, tot aan den voet *G* van den toren eene regte lijn *DG*, met den meter. Op eenen voet *CD*, stelle men den graphometer of theodoliet, en de lijn *EC* in de gedachte horizontaal of evenwijdig aan *DB* gedacht hebbende, mete men den hoek $ACE = C$.

De hoogte van den toren is de loodlijn *AB*, welke uit den top op den grond valt; indien nu de toren regt overeind staat, en regelmatig gebouwd is, zal het punt *B* in het middelpunt van de horizontale doorsnede vallen, en men zal die doorsnede, door den omtrek van de grondvlakte des torens te meten, op de eene of andere wijze de lijn *GB* kunnen vinden, welke bij *DG* moet opgeteld worden, om $BD = CE$ te verkrijgen.

Nu is, in den regthoekigen driehoek *ACE*,

$$AE = CE \times tang. C$$

Men

Men ſtelle dan $AB = H$, $DG = a$, $GB = r$; dan is $DB = CE = a + r$; men ſtelle nog $CD = h$; dan is:

$$H = (a + r) \times tang. C + h$$

B. *Tweede manier. Fig.* 56. Wanneer men niet tot den voet van het voorwerp, welks hoogte men meten zal, wegens beletſelen, naderen kan, kan men op de volgende wijze te werk gaan. Laat P de bovenſte top van eenen heuvel of berg zijn. Stel, dat men, op eenigen afſtand in eene horizontale vlakte eene horizontale lijn AB, die met het punt P in hetzelfde verticale vlak ligt, zoo kan aannemen, dat eene baak, in P geplaatst zijnde, uit de punten A en B zigtbaar is. Meet dan de baſis AB, ſtel $AB = a$ meters; zij $AC = BD = h$ de hoogte van het middelpunt van den graphometer boven den beganen grond. Trek in de gedachte de verticaal PQ, en verleng de evenwijdige horizontale lijnen AB en CD, die de verticaal van P in Q en R doorſnijden. Men mete eindelijk de hoeken $PDR = p$ en $PCR = q$; dan heeft men alles, wat noodig is, om $PQ = H$ de hoogte van het punt P boven de horizontale lijn AB te vinden.

In den driehoek PCD, is *hoek* $CPD = p - q$; derhalve is, als volgt:

$$sin. (p - q) : sin. p = a : CP$$

$$sin. (p - q) : sin. q = a : DP$$

derhalve zijn, in de regthoekige driehoeken PCR en PDR,

$$CP = \frac{a\, sin. p}{sin. (p - q)} \quad \text{en} \quad DP = \frac{a\, sin. q}{sin. (p - q)}$$

In de eerſte dezer driehoeken is:

$$PR = PC \times sin. q = \frac{a\, sin. p\, sin. q}{sin. (p - q)}$$

en diezelfde waarde verkrijgt men ook voor PR uit den tweeden regthoekigen driehoek PDR; daar nu $PQ = H = PR + RQ = PR + AC$ is, zoo wordt eindelijk:

$$H = \frac{a \times sin. p \times sin. q}{sin. (p - q)} + h$$

Zij, bij voorbeeld $p = 56° 17' 10''$, $q = 34° 8' 10''$, $h = 1m, 15$, $a = 29m, 7$; dan zal men vinden $H = 112m, 595$.

C. *Derde manier. Fig.* 57. Is de begane grond zoo gelegen, dat men, als in *fig.* 56, geene baſis AB, welke met het punt P in hetzelfde verticale vlak ligt, kan aannemen; maar wel (zie *fig.* 57,) eene baſis AB, welke buiten de verticaal PQ valt, en volmaakt horizontaal valt.

Zij $AB = CD = a$ meters, $AC = BD = h$ meters. Men verbeelde zich, dat door AB eene horizontale vlakte ABQ ga, en dat in dezelve de lijnen AQ en BQ, en voorts CR en DR, evenwijdig aan de horizontale lijnen AQ en BQ, getrokken zijn. Eindelijk verbeelde men zich de lijnen CP en DP.

Nu mete men, in den driehoek CDP, als volgt: *hoek* $PCD = c$ en *hoek* $CDP = d$; voorts, in de regthoekige driehoeken CPR en DPR, de

de hoeken $PCR = q$ en $PDR = p$; dan zal men alle noodige gegevens hebben, om de hoogte PQ te berekenen.

Want, omdat hoek $CPD = 180° - (c+d)$, zoo is, in den driehoek CDP,

$$\sin.(c+d) : \sin. d = a : CP$$
$$\sin.(c+d) : \sin. c = a : PD$$

zoo verkrijgen wij:

$$CP = \frac{a \times \sin. a}{\sin.(c+d)} \quad \text{en} \quad PD = \frac{a \times \sin. c}{\sin.(c+d)}$$

In de regthoekige driehoekige driehoeken CPR en DPR, is verder:

$$PR = CP \times \sin. q = \frac{a \times \sin. c \times \sin. q}{\sin.(c+d)}$$

$$PR = BP \times \sin. p = \frac{a \times \sin. d \times \sin. p}{\sin.(c+d)}$$

wij hebben alzoo, voor de hoogte PQ, boven het horizontale vlak ABQ, deze dubbele vergelijking:

$$H = \frac{a \times \sin. d \times \sin. p}{\sin.(c+d)} + h = \frac{a \times \sin. c \times \sin. q}{\sin.(c+d)} + h$$

D. *Vierde manier.* *Fig.* 58. Onderfteld zijnde, dat men, op eene regte horizontale lijn ABC, in welke gemeten ig $AB = m$ en $BC = n$ meters, uit de punten A, B en C, de hoogte-hoeken van een regt opftaand voorwerp $DE = H$ gemeten hebbe; *hoek* $DAE = a$, *hoek* $DBE = b$ en *hoek* $DCE = c$; zoo zal men, uit die gegevens, de hoogte H aldus kunnen vinden.

Uit de regthoekige driehoeken ADE, BDE en CDE, volgt dadelijk:

$$H = AD \times tang. a = BD \times tang. b = CD \times tang. c$$

gevolgelijk is:

$$AD = H \times cot. a,\ BD = H \times cot. b \ \text{en}\ CD = H \times cot. c$$

Nu is, volgens de VII. *Stelling*, in de driehoeken ABD en BCD,

$$cos. ABD = \frac{m^2 + H^2 \times cot^2. b - H^2 \times cot^2. a}{2\,m\,H \times cot. b}$$

$$cos. CBD = \frac{n^2 + H^2 \times cot^2. b - H^2 \times cot^2. c}{2\,n\,H \times cot. b}$$

Omdat nu ABD het fupplement van CBD is, zoo is $cos. ABD = - cos. CBD$; gevolgelijk is

$$\frac{m^2 + H^2 \times cot^2. b - H^2 \times cot^2. c}{2\,m\,H \times cot. b} = - \frac{n^2 + H^2 \times cot^2. b - H^2 \times cot^2. c}{2\,n\,H \times cot. b}$$

Lost men uit deze vergelijking H op; dan zal men vinden:

$$H = \sqrt{\frac{m\,n\,(m+n)}{n\,cot^2. a - (m+n)\,cot^2. + m\,cot^2. c}}$$

door

door welke formule de begeerde hoogte in getallen zal kunnen berekend worden.

Neemt men $m = n$; dan wordt

$$H = m \times \sqrt{\frac{2}{cot^2.a - 2\,cot^2.b + cot^2.c}}$$

E. Wij hadden, in onze geodesische operatien gedurig noodig, om (zie *fig.* 59.) het onderscheid in hoogte tusschen de spits A van eenen toren, en den rand van deszelfs omloop te bepalen. Om die te vinden, ging men aldus te werk.

Laat AB de loodregte hoogte van den toren zijn, welke men ondersteld regelmatig gebouwd te zijn, en volkomen te lood te staan. Stel, dat men van het buiten muurwerk in de rigting van de lijn BD kan achteruitgaan, en dat men gemeten hebbe $DG = a$, $GB = r$, $FH = R$ en $CD = h$ meters, en voorts de hoeken $ACE = p$ en $GFC = q$; dan heeft men in de regthoekige driehoeken ACE en GCE, als volgt:

$$AE = (a + r)\,tang.p$$
$$GE = (a + r)\,tang.q$$
$$AG = (a + r) \times (tang.p - tang.q)$$
$$AG = \frac{(a + r)\,sin.(p - q)}{cos.p \times cos.q}$$

In den regthoekigen driehoek FHG, is verder

$$GH = FH \times tang.q = R \times tang.q$$

derhalve is, volgens de figuur,

$$AH = \frac{(a + r)\,sin.(p - q)}{cos.p\,cos.q} + R \times tang.q$$

D. *Over het meten van ontoegankelijke Afstanden.*

XI. Vraagstuk. *Fig.* 60, 61, 62.

§. 1112. *Den afstand van de middelpunten van twee ontoegankelijke en in de verte gelegene voorwerpen te vinden?*

Oplossing. Men neme, op den horizontalen grond, een basis of regte lijn CD, uit welker uiteinden C en D, zoowel de voorwerpen A en B, als de baak, die in het andere uiteinde van dezelve geplaatst is, gezien kan worden; en tot zulk eene lengte, dat de hoeken der driehoeken, die in de figuur ontstaan, niet al te stomp of al te scherp worden. Men mete de lengte van de basis CD, met de uiterste naauwkeurigheid, en, aan de uiteinden C en D van dezelve, de horizontale hoeken, welke zij maakt met de lijnen die uit die punten C en D, tot aan de middelpunten der voorwerpen A en B getrokken worden; dan zal men vijf gegevens verkrijgen, door welke, niet slechts den begeerden afstand der voorwerpen, maar tevens de afstanden van die voorwerpen tot de uiteinden van de basis zullen gevonden worden.

Die

Die aangenomene basis *CD* kan, ten opzigte van de lijn, die de voorwerpen *A* en *B* vereenigt, op drie onderscheidene wijzen gelegen zijn; 1°. kan zij of evenwijdig aan *AB* loopen, of, verlengd zijnde, het verlengde van *AB* ergens doorsnijden; 2°. of zij kan de lijn *AB* doorsnijden; of 3°. verlengd zijnde *AB* doorsnijden.

I GEVAL. *Fig.* 60. Wij stellen, dat het verlengde van de basis het verlengde der lijn, welke door beide voorwerpen gaat, ontmoet, en noemen, als volgt: $CD = a$, *hoek* $ADB = p$, *hoek* $ADC = q$, *hoek* $BCD = r$, *hoek* $ACB = s$; de afstanden $BD = D$, $AD = D'$, $CB = D''$, $AC = D'''$, en den gevraagden afstand $AB = Z$.

Dan geven ons, in de eerste plaats, de driehoeken *CDB* en *CDA*, volgens de III. *Stelling*,

$$D = \frac{a \times \sin. r}{\sin. (p+q+r)}, \quad D' = \frac{a \times \sin. (r+s)}{\sin. (q+r+s)} \quad .\ .\ (\Delta)$$

$$D'' = \frac{a \times \sin. (p+q)}{\sin. (p+q+r)} \text{ en } D''' = \frac{a \times \sin. q}{\sin. (q+r+s)}$$

Men zal nu, door de oplossing der driehoeken *ABD* en *ABC*, welker twee zijden met den ingesloten hoek bekend zijn, den begeerden afstand *Z*, op twee onderscheidene wijzen, kunnen vinden.

1°. Men stelle, in den driehoek *ADB*,

$$\frac{D'}{D} = \frac{\sin. (r+s) \times \sin. (p+q+r)}{\sin. \times \sin. (q+r+s)} = \text{tang.} \Phi \quad .\ .\ .\ (1)$$

$$\text{en } \mu = \tfrac{1}{2}(ABD - BAD) \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

dan is, volgens de II. *Oplossing* van het IV. *Geval*, *Bladz.* 136, *en vervolg*.

$$\text{tang.} \mu = \text{tang.} (\Phi - 45^\circ) \times \text{tang.} (90^\circ - \tfrac{1}{2} p) \quad .\ .\ (3)$$

$$\text{hoek } ABD = m = 90^\circ - \tfrac{1}{2} p + \mu \quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

$$\text{hoek } BAD = n = 90^\circ - \tfrac{1}{2} p - \mu \quad .\ .\ .\ .\ (5)$$

en deze hoeken gevonden hebbende hebbende, verkrijgt:

$$Z = \frac{a \times \sin. r \times \sin. p}{\sin. n \times \sin. (p+q+r)} = \frac{a \times \sin. p \times \sin. (r+s)}{\sin. m \times \sin. (q+r+s)} \quad .\ .\ (6)$$

2°. Wil men, om *Z* te vinden, van den driehoek *ABC* gebruik maken; dan stelle men:

$$\frac{D''}{D'''} = \frac{\sin. (p+q) \times \sin. (q+r+s)}{\sin. q \times \sin. (p+q+r)} = \text{tang.} \Phi' \quad .\ .\ (1)$$

$$\text{en } \mu' = \tfrac{1}{2}(BAC - ABC) \quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ (2)$$

dan is wederom, als boven,

$$\text{tang.} \mu' = \text{tang.} (\Phi' - 45^\circ) \times \text{tang.} (90^\circ - \tfrac{1}{2} s) \quad .\ .\ (3)$$

$$\text{hoek } BAC = m' = 90^\circ - \tfrac{1}{2} s + \mu' \quad .\ .\ .\ .\ (4)$$

$$\text{hoek } ABC = n' = 90^\circ - \tfrac{1}{2} s - \mu' \quad .\ .\ .\ .\ (5)$$

en

en deze hoeken gevonden hebbende, verkrijgt men:

$$Z = \frac{a \times sin.\,s \times sin.\,(p+q)}{sin.\,m' \times sin.\,(p+q+r)} = \frac{a \times sin.\,q \times sin.\,s}{sin.\,n' \times sin.\,(q+r+s)} \quad \ldots (6)$$

Wanneer men deze twee stelsels van vergelijkingen naauwkeurig berekend heeft; dan moeten de uitkomsten der berekening aan deze twee voorwaardens vergelijkingen voldoen.

$$1^{o}.\quad (p+q)+(r+s)+m+m' = 360^{o}$$

$$2^{o}.\quad q+r = n+n'$$

Gebeurt het, dat de hoek ϕ kleiner dan 45^{o} is; dan wordt de boog $(\phi - 45^{o})$, en deszelfs tangens negatief, en dan is ook μ negatief, en de teekens van die letter moeten dan, in N°. 3°, omgekeerd worden. Hetzelfde geldt ten opzigte van den hulpboog ϕ. Begeert men de afstanden D, D' en D'' kennen; dan zal men de vergelijkingen (Δ) *Bladz.* 175, berekenen.

VOORBEELD. Gegeven zijnde $a = 5736m, 7$; $p = 56^{o}\ 17'\ 33'', 3$; ... $q = 40^{o}\ 13'\ 17'', 5$; $r = 47^{o}\ 48'\ 38'', 5$; $s = 44^{o}\ 38'\ 17'', 2$; dan zal men, zie de berekening, *op de volgende Bladzijde*, Letter A. vinden, dat $Z = 7129m, 243$ is. Men heeft de berekening, in alle deszelfs deelen, uitgevoerd, en het blijkt uit dezelve: dat elke vergelijking voor Z, dezelfde uitkomst geeft. Nogtans zouden de Logarithmen van de achterste cijfers der laatste uitkomsten wel eens één of twee éénheden kunnen verschillen, (want zij bepalen slechts derzelver naast kleinere of grootere waardijen,) dan, in dit geval, zou men een midden uit de vier uitkomsten moeten nemen, en dit middelgetal voor den waren Logarithmus afstand houden. Met behulp der vergelijkingen (Δ), zal men vinden: $D = 7288m, 353$, $D' = 7795m, 090$, $D'' = 9773m, 26$ en $D''' = 5038m, 237$.

II. GEVAL. *Fig.* 61. Wanneer de basis CD de lijn, welke de voorwerpen vereenigt, doorsnijdt; dan zal men de volgende stelsels van vergelijkingen vinden.

1°. Men stelle, de notatie van de figuur gebruikende,

$$tang.\,\phi = \frac{sin.\,s \times sin.\,(q+r)}{sin.\,r \times sin.\,(p+s)} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$tang.\,\mu = tang.\,(\phi - 45^{o}) \times tang.\,[90^{o} - \tfrac{1}{2}(p+q)] \quad \ldots (2)$$

$$m = 90^{o} - \tfrac{1}{2}(p+q) + \mu \quad \ldots\ldots (3)$$

$$n = 90^{o} - \tfrac{1}{2}(p+q) - \mu \quad \ldots\ldots (4)$$

dan verkrijgt men voor den begeerden afstand,

$$Z = \frac{a \times sin.\,s \times sin.\,(p+s)}{sin.\,m \times sin.\,(p+s)} = \frac{a \times sin.\,r \times sin\,(p+q)}{sin.\,n \times sin.\,(q+r)} \quad \ldots (5)$$

2°. Ook kan men nog aldus rekenen:

$$tang.\,\phi' = \frac{sin.\,q \times sin.\,(p+s)}{sin.\,p \times sin.\,(q+r)} \quad \ldots\ldots (1)$$

(*Zie het vervolg, op Bladz.* 178.)

LETTER A.

BEREKENING *van het opgegevene* VOORBEELD, *op Bladzijde* 176.

GEGEVENS $a = 5736m, 7$ — *Log.* $a = 3,7586621$

$p = 56^\circ\ 17'\ 33'',3$	$r = 47^\circ\ 48'\ 38'',5$
$q = 40^\circ\ 13'\ 17'',5$	$s = 44^\circ\ 38'\ 17'',2$
$p+q = 96^\circ\ 30'\ 50'',8$	$r+s = 92^\circ\ 26'\ 55'',7$
$r = 47^\circ\ 48'\ 38'',5$	$q = 40^\circ\ 13'\ 17'',5$
$p+q+r = 144^\circ\ 19'\ 29'',3$	$q+r+s = 132^\circ\ 40'\ 13'',3$

I. OPLOSSING.

Log. sin. $(r+s) = 9,9996032$
Log. sin $(p+q+r) = 9,7658098$
$19,7654130$
Log. sin. $r = 9,8697771$
Log. sin. $(q+r+s) = 9,8664443$
Log. tang. $\phi = 0,0291916$
$\phi = 46^\circ\ 55'\ 29'',943$
$\phi - 45^\circ = 1^\circ\ 55'\ 26'',943$
$\frac{1}{2}p = 28^\circ\ 8'\ 46'',65$
$90^\circ - \frac{1}{2}p = 61^\circ\ 51'\ 13'',35$
Log. tang. $(\phi - 45^\circ) = 8,5226798$
L. tang. $(90^\circ - \frac{1}{2}p) = 0,2716552$
Log. tang. $\mu = 8,7979350$
$\mu = 3^\circ\ 35'\ 35'',71$
$90^\circ - \frac{1}{2}p = 61^\circ\ 51'\ 13'',35$
$m = 65^\circ\ 26'\ 49'',06$
$n = 58^\circ\ 15'\ 37'',64$

Log. $a = 3,7586621$
Log. sin. $r = 9,8697771$
Log. sin. $p = 9,9200619$
Log sin. $n = 9,9296479$
Log. sin. $(p+q+r) = 9,7658098$
Log. $Z = 3,8530434$

Log $a = 3,7586621$
Log. sin $p = 9,9200619$
Log. sin. $(r+s) = 9,9996032$
Log. sin. $m = 9,9588395$
Log. sin. $(q+r+s) = 9,8664443$
Log. $Z = 3,8530434$

II. OPLOSSING.

Log. sin. $(p+q) = 9,9971871$
Log sin. $(q+r+s) = 9,8664443$
$19,8636314$
Log. sin. $q = 9,8100608$
Log. sin. $(p+q+r) = 9,7658098$
Log. tang. $\phi' = 0,2877608$
$\phi' = 62^\circ\ 43'\ 41'',983$
$\phi' - 45^\circ = 17^\circ\ 43'\ 41'',988$
$\frac{1}{2}s = 22^\circ\ 19'\ 8'',6$
$90^\circ - \frac{1}{2}s = 67^\circ\ 40'\ 51'',4$
Log. tang. $(\phi' - 45^\circ) = 9,5047251$
L. tang. $(90^\circ - \frac{1}{2}s) = 0,3866673$
Log. tang $\mu' = 9,8913904$
$\mu' = 37^\circ\ 54'\ 33'',07$
$90^\circ - \frac{1}{2}s = 67^\circ\ 40'\ 51'',40$
$m' = 105^\circ\ 35'\ 24'',47$
$n' = 29^\circ\ 46'\ 18'',33$

Log. $a = 3,7586621$
Log. sin $q = 9,8100608$
Log. sin. $s = 9,8467245$
Log sin. $n' = 9,6959597$
Log. sin $(q+r+s) = 9,8664443$
Log. $Z = 3,8530434$

Log. $a = 3,7586621$
Log sin. $s = 9,8467245$
Log. sin. $(p+q) = 9,9971871$
Log. sin. $m' = 9,9837205$
Log. sin. $(p+q+s) = 9,7658098$
Log. $Z = 3,8530434$

Men vindt derhalve $Z = 7129m, 243$ voor den afstand der voorwerpen.

$$tang.\,\mu' = tang.\,(\Phi' - 45^\circ) \times tang.\,[90^\circ - \tfrac{1}{2}(r+s)] \quad . \; . \quad (2)$$

$$m' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(r+s) + \mu' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$n' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(r+s) - \mu' \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

en de begeerde afstand wordt dan:

$$Z = \frac{a \times sin.\,q \times sin.\,(r+s)}{sin.\,m' \times sin.\,(q+r)} = \frac{a \times sin.\,p \times sin.\,(r+s)}{sin.\,n' \times sin.\,(p+s)} \quad . \; . \; . \quad (5).$$

VOORBEELD. Gegeven zijnde $a = 3728m, 3$; $p = 63^\circ\ 17'\ 20''$, ... $q = 58^\circ\ 17'\ 20''$, $r = 45^\circ\ 19'\ 40''$, $s = 57^\circ\ 9'\ 10''$; dan zal men vinden: $Z = 5569m, 661$.

III. GEVAL. *Fig.* 62. Wanneer het verlengde van de lijn AB, welke de voorwerpen vereenigt, het verlengde van de basis CD doorsnijdt; dan blijven de formulen dezelfde, als voor het tweede geval; mits men de hoeken q en r negatief neme.

XII. VRAAGSTUK. *Fig.* 60, 61, 62.

§. 1113. *Onderstellende, dat de afstand van twee voorwerpen A en B bekend zij, en dat men, uit twee andere voorwerpen, (of bijzondere standpunten,) D en C, de hoeken BDA, ADC, DCB en BCA, of p, q, r en s, hebbe waargenomen; dan vraagt men: om, met behulp dezer gegevens, zoowel den afstand dezer twee voorwerpen, of standpunten D en C, als derzelver afstanden tot de twee eerste voorwerpen, A en B, te vinden?*

OPLOSSING. I. GEVAL. *Fig.* 60. Dit vraagstuk is van het voorgaande slechts daarin onderscheiden: dat aldaar de afstand CD bekend was, en naar den afstand AB gevraagd werd; terwijl in het tegenwoordige AB gegeven is, en CD moet bepaald worden. Voor het overige zijn de gegevens dezelfde, en de hoeken m, n, m', n', welke dezelfde zijn, als de hoeken ABD, BAD, BAC en ABC, in de figuur, worden, onafhankelijk van eenigen der afstanden, door de vergelijkingen (1), (2) en (3), der eerste en tweede oplossingen van het eerste geval van het voorgaande Vraagstuk gevonden. Dezen nu door de berekening dezer vergelijkingen bekend geworden zijnde, volgt, (dezelfde notatie als in het voorgaande Vraagstuk behoudende,)

uit den driehoek ABD, $\left\{ \begin{array}{l} D = Z \times sin.\,n : sin.\,p \\ D' = Z \times sin.\,m : sin.\,p \end{array} \right\}$

uit den driehoek ABC, $\left\{ \begin{array}{l} D'' = Z \times sin.\,m' : sin.\,s \\ D''' = Z \times sin.\,n' : sin.\,s \end{array} \right\}$

uit den driehoek BCD, . . . $a = D \times sin.\,(p+q+r) : sin.\,r$

uit den driehoek ACD, . . . $a = D''' \times sin.\,(q+r+s) : sin.\,q$

Het geheele zamenstel der vergelijkingen, waardoor de begeerde afstanden gevonden worden, is dan het volgende:

1°. Stel

1°. Stel, $tang.\, \phi = \frac{sin\, (r+s) \times sin.(p+q+r)}{sin.\, r \times sin.\, (q+r+s)}$

2°. $tang.\, \mu = tang.\, (\phi - 45°) \times tang\, (90° - \frac{1}{2} p)$

3°. $m = (90° - \frac{1}{2} p) + \mu$ en $n = (90° - \frac{1}{2} p) - \mu$

4°. Stel, $tang.\, \phi' = \frac{sin.\, (p+q) \times sin.\, (p+r+s)}{sin\, q \times sin.\, (p+q+r)}$

5°. $tang.\, \mu' = tang.\, (\phi' - 45°) \times tang.\, (90° - \frac{1}{2} s)$

6°. $m' = (90° - \frac{1}{2} s) + \mu'$ en $n' = 90° - \frac{1}{2} s) - \mu'$

Wanneer deze vergelijkingen naar behooren berekend zijn; dan moet 1°. $(p+q) + (r+s) + m + m' = 360°$, en 2°. $q + r = n + n'$ zijn. Voorts is

7°. $D = Z \times sin.\, n : sin.\, p$ . . 8°. $D' = Z \times sin.\, m : sin.\, p$

9°. $D'' = Z \times sin.\, m' : sin.\, s$ . . 10°. $D''' = Z \times sin.\, n' : sin.\, s$

en eindelijk:

11°. $a = \frac{D \times sin\, (p+q+r)}{sin.\, r} = \frac{D''' \times sin.\, (q+r+s)}{sin.\, q}$

De laatste dezer vergelijkingen geeft eene dubbele waarde voor a, en strekt alzoo tot eene bevestiging van de juistheid der berekening; nogtans kan men de gevondene uitkomst ook nog beproeven door

$$D'' = \frac{a \times sin.\, (p+q)}{sin.\, (p+q+r)} \text{ en } D' = \frac{a \times sin.\, (r+s)}{sin.\, (q+r+s)}$$

welke, indien alles naar behooren berekend is, dezelfde uitkomsten, als N°. (8) en (9), moeten geven. Wij herinneren nog: dat, wanneer ϕ of ϕ' kleiner dan 45° mogten zijn, μ of μ' negatief worden, in welk geval, de teekens van μ of μ', in N°. (3) of (6), moeten worden omgekeerd

Voorbeeld. *Fig.* 68. *De afstand der middelpunten van den* St. Laurens *Toren te* Rotterdam, *tot den Toren van de* St. Jan's *kerk te* Gouda, *door de schakel der groote driehoeken, welke een vervolg uitmaken van den middagscirkel van* Mechain *en* Delambre, *bij eene voorloopige berekening, bevonden zijnde gelijk te zijn aan* 18416,921 *meters, hebben wij, in den jare* 1803; *in de koepels van de Torens der dorpen*, Zoetermeer *en* Hazaartswoude, (*ten opzigte van* Rotterdam *en* Gouda, *als in de figuur wordt voorgesteld, gelegen*,) *met den* Sextant *waargenomen; uit* Zoetermeer, *den hoek van* Rotterdam *en* Gouda *gelijk* 73° 57′ 10″, *van* Gouda *en* Hazaartswoude *gelijk* 52° 1′ 50″; *uit den Toren van* Hazaartswoude, *den hoek van* Zoetermeer *met* Rotterdam *gelijk* 55° 34′ 20″, *en van* Rotterdam *met* Gouda *gelijk* 61° 6, 30″. *Hoe ver zijn de Torens dezer dorpen elkander en van de twee hoofdpunten*, Rotterdam *en* Gouda, *gelegen?* Zie de berekening van dit voorbeeld, *op de volgende Bladzijde*, Letter B.

(*Zie vervolg, op Bladz.* 181.)

LETTER B.

Berekening *van de afstanden van* Zoetermeer *en* Hazaartswoude *tot elkander en tot* Rotterdam *en* Gouda.

Gegevens $Z = 18416m,921$ en *Log.* $Z = 4,2652170$

Uit Zoetermeer	Rotterdam *en* Gouda	$= 73^\circ 57' 10'' = p$
	Gouda *en* Hazaartsw.	$= 52^\circ 1' 50'' = q$
Uit Hazaartswoude	Zoetermeer *en* Rotterdam	$= 35^\circ 34' 20'' = r$
	Rotterdam *en* Gouda	$= 61^\circ 6' 30'' = s$

$p + q = 125^\circ 59' 00''$	$r + s = 96^\circ 40' 50''$
$p + q + r = 161^\circ 33' 20''$	$q + r + s = 148^\circ 42' 40''$
Berekening van m en n.	*Berekening van m' en n'.*
Log. sin. $(r+s) = 9,9970412$	*Log. sin.* $p+q) = 9,9080494$
Log. sin. $(p+q+r) = 9,5002159$	*Log. sin.* $(q+r+s) = 9,7154630$
$19,4972571$	$19,6235124$
Log. sin. $r = 9,7647205$	*Log. sin.* $q = 9,8967130$
Log. sin. $(q+r+s) = 9,7154630$	*Log. sin.* $(p+q+r) = 9,5002159$
Log. tang. $\phi = 0,0170736$	*Log. tang.* $\phi = 0,2265835$
$\phi = 46^\circ 7' 38'',444$	$\phi = 59^\circ 18' 40''$
$\phi - 45^\circ = 1^\circ 7' 33'',444$	$\phi' - 45^\circ = 14^\circ 18' 40''$
$\frac{1}{2} p = 36^\circ 58' 35''$	$\frac{1}{2} s = 30^\circ 33' 15''$
$90^\circ - \frac{1}{2} p = 53^\circ 1' 25''$	$90^\circ - \frac{1}{2} s = 59^\circ 26' 45''$
Log. tang. $(\phi - 45^\circ) = 8,2934550$	*Log. tang.* $(\phi' - 45^\circ) = 9,4067161$
L. tang. $(90^\circ - \frac{1}{2} p) = 0,1232580$	*L. tang* $(90^\circ - \frac{1}{2} s) = 0,2289131$
Log. tang. $\mu = 8,4167130$	*Log. tang.* $\mu' = 9,6356292$
$\mu = 1^\circ 29' 43'',187$	$\mu' = 23^\circ 22' 16'',8$
$90^\circ - \frac{1}{2} p = 53^\circ 1' 25''$	$90^\circ - \frac{1}{2} s = 59^\circ 26' 43''$
$m = 54^\circ 31' 8'',187$	$m' = 82^\circ 49' 01''.8$
$n = 51^\circ 31' 41'',813$	$n' = 36^\circ 04' 28'',2$

Log. $Z = 4,2652170$	*Log.* $Z = 4,2652170$
Log. sin. $n = 9,8937147$	*Log. sin.* $m = 9,9107884$
$14,1589317$	$14,1760054$
Log. sin. $p = 9,9827388$	*Log. sin.* $p = 9,9827388$
Log. $D = 4,1761929$	*Log.* $D' = 4,1932666$
Log. $Z = 4,2652170$	*Log.* $Z = 4,2652170$
Log sin. $m' = 9,9965783$	*Log. sin.* $n' = 9,7699949$
$14,2617943$	$14,0352119$
Log. sin. $s = 9,9422734$	*Log. sin.* $s = 9,9422734$
Log. $D'' = 4,3195219$	*Log.* $D''' = 4,0929385$
Log. $D = 4,1761929$	*Log.* $D''' = 4,0929385$
Log. sin. $(p+q+r) = 9,5002159$	*Log sin.* $(q+r+s) = 9,7154630$
$13,6764088$	$13,8084015$
Log. sin. $r = 9,7647205$	*Log. sin.* $q = 9,8967130$
Log. $a = 3,9116884$	*Log.* $a = 3,9116885$

Het blijkt uit deze berekening: dat de afstanden zijn van

$$\textit{Zoetermeer tot} \begin{cases} \textit{Rotterdam} = D = 15003^m,51 \\ \textit{Gouda} = D' = 15605^m,10 \end{cases}$$

$$\textit{Hazaartswoude tot} \begin{cases} \textit{Rotterdam} = D'' = 20869^m,97 \\ \textit{Gouda} = D''' = 12386^m,21 \end{cases}$$

$$\textit{Zoetermeer en Hazaartswoude} = a = 8159^m,97$$

welke afstanden nog, op verscheidene andere wijzen, door andere waarnemingen en andere bekende afstanden, aldus bevonden zijn.

II. GEVAL. *Fig.* 62. Snijdt de lijn, welke de standpunten C en D vereenigt, de lijn, die van het ééne tot het andere voorwerp loopt; dan zal men, even als in het tweede geval van het vorig Vraagstuk, vinden: dat, wanneer men

$$1^\circ.\quad \text{tang.}\,\phi = \frac{\sin.s \times \sin\,(q+r)}{\sin.r \times \sin.\,(q+s)}$$

$$2^\circ.\quad \text{tang.}\,\mu = \text{tang.}\,(\phi - 45^\circ) \times \text{tang.}\,[90^\circ - \tfrac{1}{2}(p+q)]$$

$$3^\circ.\quad m = 90^\circ\ \tfrac{1}{2}(p+q) + \mu,\ \text{en}\ n = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(p+q) - \mu$$

$$4^\circ.\quad \text{tang.}\,\phi' = \frac{\sin.q \times \sin.(p+s)}{\sin.p \times \sin.(q+r)}$$

$$5^\circ.\quad \text{tang.}\,\mu' = \text{tang.}\,(\phi' - 45^\circ) \times \text{tang.}\,[90^\circ - \tfrac{1}{2}(r+s)]$$

$$6^\circ.\quad m' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(r+s) + \mu';\ \text{en}\ n' = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(r+s) - \mu'$$

stelt, alsdan

$$7^\circ.\quad D = Z \times \sin.m : \sin.(p+q)$$

$$8^\circ.\quad D' = Z \times \sin\,n : \sin.(p+q)$$

$$9^\circ.\quad D'' = Z \times \sin.m' : \sin.(r+s)$$

$$10^\circ.\quad D''' = Z \times \sin.n' : \sin.(r+s)$$

$$11^\circ.\quad a = \frac{D \times \sin.(p+s)}{\sin.s} = \frac{D' \times \sin.(q+r)}{\sin.r} = \frac{D'' \times \sin.(q+r)}{\sin.q} = \frac{D''' \times \sin.(p+s)}{\sin\,p}$$

zal zijn; terwijl, de zes eerste vergelijkingen berekend zijnde, dezelve, met behulp der vergelijkingen, $180^\circ - (p+q) = m+n$; $180^\circ - (r+s) = m'+n'$; en voornamelijk, door $m+n' = 180^\circ - (q+r)$ en $m'+n = 180^\circ - (p+q)$, zullen beproefd worden.

III. GEVAL. *Fig.* 63. Indien niet de lijn, welke de voorwerpen vereenigt, maar wel derzelver verlengde, de lijn CD snijdt, dan zullen de hoeken q en r negatief worden, en men zal dus, door, in de vergelijkingen van het voorgaande geval, de teekens behoorlijk te veranderen, de bijzondere vergelijkingen voor dit geval verkrijgen. Wij zullen dit aan des Leerlings vlijt overlaten. Vergelijk onze meer aan-

gehaalde *Proeve over den waren aard van de positieve en negatieve toestanden der grootheden.*

XIII. VRAAGSTUK. *Fig.* 64.

§. 1114. *Ondersteld zijnde, dat men, uit een standpunt P, de hoeken, APB en BPC, onder welke drie voorwerpen, welker onderlinge afstand bekend is, gezien worden, door waarneming bepaald hebbe, zoo vraagt men: om, uit deze gegevens, de afstanden van dit standpunt tot elk dezer voorwerpen te vinden?*

I. OPLOSSING. Om, in de oplossing van dit gewigtige vraagstuk, waarvan SNELLIUS het eerste denkbeeld gegeven heeft, met de meest mogelijke duidelijkheid, te werk te gaan, zullen wij de voorwerpen, zoo als zij uit het standpunt *P* gezien worden, van de regter- naar de linkerhand gaande, *A* het eerste, *B* het tweede, *C* het derde voorwerp noemen; voorts den afstand van het eerste tot het tweede voorwerp, dat is, $AB = a$; dien van het tweede tot het derde voorwerp, of $BC = b$; dien van het derde tot het eerste voorwerp, of $AC = c$; deze afstanden, als bekend, aannemende, zoo kunnen de hoeken des driehoeks *ABC*, indien deze niet, door waarneming, gegeven zijn, volgens het vierde geval, door de berekening gevonden worden. Echter is het, in de oplossing, welke wij hier geven zullen, voldoende, den hoek *B* aan het tweede voorwerp te kennen. Eindelijk zullen wij de afstanden van het standpunt *P*, tot de eerste, tweede en derde voorwerpen, door D, D' en D'' uitdrukken. Wij merken op: dat, wanneer de hoeken *PAB* en *PCB* bekend waren, de afstanden D, D' en D'', door het eerste geval van de oplossing der scheefhoekige driehoeken, *ABP* en *CBP*, zouden gevonden worden; indien derhalve deze hoeken, die wij $PAB = p$ en $PCB = q$ zullen stellen, kunnen gevonden worden, zal de geheele zwarigheid ontknoopt en het vraagstuk opgelost zijn.

Deze hoeken kunnen nu gemakkelijk gevonden worden; want de driehoeken *PAB* en *PCB*, geven ons (III. *Stell.*) de evenredigheden:

$$sin.\, m : a = sin.\, p : D'$$

$$b : sin.\, n = D' : sin.\, q$$

welke, met elkander vermenigvuldigd zijnde, deze andere evenredigheid (XVI. *Stell.* II. *B.*) voorbrengen:

$$b\, sin.\, m : a\, sin.\, n = sin.\, p : sin\, q$$

waaruit wederom (VII. *Stell.* IX. *B.*) volgt:

$$b\, sin\, m + a\, sin.\, n : b\, sin.\, m - a\, sin.\, n = sin\, p + sin.\, q : sin\, p - sin.\, q$$

of, eindelijk, omdat (VII. *Stell.* IX. *B.*)

$$sin.\, p + sin.\, q : sin.\, p - sin.\, q = tang.\, \tfrac{1}{2}(p + q) : tang.\, \tfrac{1}{2}(p - q)$$

is, de evenredigheid:

b sin.

$$b\ sin.\ m + a\ sin.\ n : b\ sin\ m - a\ sin.\ n = tang.\ \tfrac{1}{2}(p+q) : tang.\ \tfrac{1}{2}(p-q)$$

waaruit, als naar gewoonte, de vergelijking:

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{b\ sin.\ m - a\ sin.\ n}{b\ sin.\ m + a\ sin.\ n} \times tang.\ \tfrac{1}{2}(p+q)$$

wordt afgeleid.

Nu bestaat het laatste lid dezer vergelijking uit geheel bekende termen; want, omdat de som van de hoeken van eenen vierhoek vier regte hoeken bedraagt, zoo heeft men:

$$(p+q) + (B+m+n) = 360^\circ$$

en hieruit volgt dan:

$$\tfrac{1}{2}(p+q) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B+m+n)$$

Stellen wij dan, kortheidshalve:

$$\tfrac{1}{2}(p+q) = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B+m+n) = M$$
$$\tfrac{1}{2}(p-q) = N;$$

dan zal

$$tang.\ N = \frac{b\ sin.\ m - a\ sin.\ n}{b\ sin.\ m + a\ sin.\ n} \times tang.\ M$$

zijn, welke vergelijking, indien men den teller en noemer der breuk, welke in derzelver tweede lid voorkomt, door $b\ sin.\ m$ deelt, en $a\ sin.\ n : b\ sin.\ m = tang.\ \phi$, in deze volgende

$$tang.\ N = \frac{1 - tang.\ \phi}{1 - tang.\ \phi} \times tang.\ M$$

verandert, of (volgens I. *Gev.* IV. *Stell.* VIII. *B.*) *Verg.* (67) in

$$tang.\ N = tang.\ (45^\circ - \phi) \times tang.\ M$$

Wanneer N, door deze vergelijking, gevonden is; dan zal, omdat M de halve som en N het halve verschil der hoeken p en q voorstelt,

$$p = M + N \text{ en } q = M - N$$

zijn. De hoeken p en q alzoo bekend zijnde, zullen ook, wanneer de hoeken A en C, door waarneming of berekening, bekend zijn, de andere hoeken der figuur bekend worden; namelijk

$$hoek\ ABP = 180^\circ - (m+p)$$
$$hoek\ CBP = 180^\circ - (n+q)$$
$$hoek\ CAP = p - A; \text{ en } hoek\ ACP = q - C$$

Zijn dan alle deze hoeken bekend; dan zal men, met behulp der III. *Stelling*, voor elk der begeerde afstanden, twee onderscheidene uitdrukkingen vinden, welke in het volgende stelsel van vergelijkingen voorkomen.

1°. Stel $tang.\ \phi = \dfrac{a\ sin.\ n}{b\ sin\ m}$

2°. $M = 180^\circ - \tfrac{1}{2}(B+m+n)$
of $M = \tfrac{1}{2}(B-m-n)$

M 4 Men

Men gebruikt de laatste vergelijking, indien het punt B beneden de lijn AC valt. (Zie onderstaande aanmerking.)

$$3°.\quad tang.\,N = tang.(45° - \varphi) \times tang.\,M$$

Ten blijke van de juistheid van dit eerste gedeelte der berekening, moet $B + m + n + p + q = 360°$ zijn.

$$4°.\quad p = M + N, \text{ en } q = M - N$$

$$5°.\quad D' = \frac{a \sin p}{\sin. m} = \frac{b \sin. q}{\sin. n}$$

$$6°.\quad D = \frac{a \sin (p + m)}{\sin. m} = \frac{c \sin. (q - C)}{\sin. (m + n)}$$

$$7°.\quad D'' = \frac{b \sin. (q + n)}{\sin. n} = \frac{c \sin. (p - A)}{\sin (m + n)}$$

Aanmerking. Dit vraagstuk is aan onderscheidene gevallen onderworpen, welke in de gevondene vergelijkingen, op eene algemeene wijze, liggen opgesloten.

1°. Indien het punt B in de lijn AC valt; dan is $c = a + b$ en hoek $B = 180°$. De vergelijking (2) wordt, in dit geval, $M = 180° - (90° + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}n) = 90° - \frac{1}{2}(m + n)$ en de hoeken A en C worden gelijk nul. De andere vergelijkingen blijven dezelfde.

2°. Valt het punt B beneden de lijn AC; dan is klaarblijkelijk $p + q = B - m - n$, en de tweede vergelijking verandert in $M = \frac{1}{2}(B - m - n)$, en daar, in dat geval, de hoeken A en C negatief worden, moeten de teekens dezer hoeken, in de vergelijking (6) en (7), van $-$ in $+$ veranderen.

3°. Eindelijk kan het standpunt P binnen den driehoek vallen. In dit geval, is de som der hoeken m en $n > 180°$; alle vergelijkingen blijven dan dezelfde. De hoeken $q - C$ en $q - A$ worden wel negatief; maar aangezien de sinus van $m + n$ insgelijks negatief is, maakt zulks geene verandering in het teeken van de tweede waarden van D en D'', welke, even als de eerste waarden, positief blijven.

Men moet hier nog bijvoegen, dat men, in de berekening van de vergelijking (3), op de teekens van $tang.\,(45° - \varphi)$ en $tang.\,M$, behoorlijk acht moeten geven; zijnde het teeken van $tang.\,(45° - \varphi)$ negatief, indien $\varphi < 45°$; en $tang\,M$ negatief, wanneer $M < 90°$ is, het zijn deze teekens, welke het teeken van den hoek N bepalen, hebbende die hoek altijd hetzelfde teeken, als zijne tangens.

Voorbeeld. *Fig* 64. *Ik bevond, in den jare* 1803, *op het midden van het plat van den Toren van* Wijk aan Zee, *met den sextant, van de regter- naar de linkerhand gaande, den hoek van den Kerktoren van* Haarlem *met den Westertoren van* Amsterdam, 42° 37′ 5″; *den hoek van den Westertoorn van* Amsterdam *met den Kerktoren van* Alkmaar, 89° 49′ 15″; *de driehoek van de middelpunten der gezegde Torens van* Haarlem, Amsterdam *en* Alkmaar, *was te voren, met den herhalingscirkel van* Borda, *genomen en bevonden te zijn;* Amsterdam *en* Alkmaar,

maar, *uit* Haarlem 77° 54′ 54″, 3; Alkmaar *en* Haarlem, *uit* Amsterdam 69° 11′ 54″, 4, *en* Haarlem *en* Amsterdam, *uit* Alkmaar 32° 54′ 10″, 8: *men kende ook, bij eene voorloopige berekening, de Logarithmen van de afstanden dezer plaatsen, in meters:*

Van Haarlem *tot* Amsterdam = 4,2250569
—— Amsterdam *tot* Alkmaar = 4,4805477
—— Alkmaar *tot* Haarlem = 4,4610364

Men vraagt: hoe ver de Toren van Wijk aan Zee *van de opgenoemde Torens van elke dezer plaatsen gelegen is?*

Zie de oplossing op de volgende *Bladzijde*, Letter *C*.

Aanmerking. In de berekening van dit voorgaande voorbeeld, vindt men eenige Logarithmen, welke met een * geteekend zijn: deze Logarithmen moeten van de som der Logarithmen, onder welke zij geplaatst zijn: ingevolge de gegevene vergelijkingen, afgetrokken worden; dan, deze aftrekking kan in eene optelling veranderd worden, mits men het arithmetisch complement van het achterste cijfer tot tien, en van al de andere cijfers tot negen neme, en deze arithmetische complementen met de cijfers, welke in dezelfde kolom staan, naar den gewonen regel, optelle. (Zie *Allereerste Gronden der Cijferkunst*, §. 925.) In de berekening van de waarde van *Log. targ.* φ, werkt men aldus: het arithm. compl. van 8 en 7 tot 10 is 2 en 3; 2+3+9+6=20= de som der éénheden; de arithm. compl. van 7 en 7 tot 9 zijn 2 en 2; 2+2+7+9+2=22= de som der tweede kolom, *enz.* Meestal schrijft men, in de plaats van deze Logarithmen, de complementen; (zie §. 890, I. C.) doch het is ons toegeschenen, dat het beter is de Logarithmen zelve te schrijven, en, onder het optellen, de complementen der afzonderlijke cijfers te nemen.

Men zal zich, door het berekenen van de volgende waarnemingen, met de berekening van dit Vraagstuk verder bekend kunnen maken.

Voorbeeld. *Het is, door de waarnemingen van den Heer* Kraijenhoff *en ons, met den herhalingscirkel van* Borda, *in* 1802 *in het werk gesteld, gebleken: dat de hoeken, onder welke de middelpunten van de Torens der hoofdkerken van den* Haag, Rotterdam *en* Gouda, *uit het middelpunt van het* Observatorium *van de* Koninklijke Hooge School *te* Leiden, *gezien worden, zijn als volgt: den* Haag *en* Rotterdam *gelijk* 54° 6′ 8″, 9; Rotterdam *en* Gouda *gelijk* 43° 37′ 59″, 5. *Naderhand bleek het, dat de Logarithmen der afstanden in meters waren*

Van den Haag *tot* Rotterdam = 4,3270577
Van Rotterdam *tot* Gouda = 4,2652160

en dat de hoek van Gouda *en den* Haag, *uit* Rotterdam *waargenomen, gelijk is aan* 93° 26′ 28″, 8. *Men vraagt: hoe ver het middelpunt van het voornoemde* Observatorium *van de middelpunten van de Torens dezer plaatsen verwijderd is?* Men zal vinden:

(*Zie vervolg, op Bladz.* 187.)

LETTER C.

Berekening *van den afstand van den Toren van* Wijk aan Zee, *tot den Kerktoren van* Haarlem, *den* Westortoren *van* Amsterdam, *en den Kerktoren van* Alkmaar.

Gegevens.

$Log.\,a = 4,2250596$
$Log.\,b = 4,4805477$
$Log.\,c = 4,4610064$
$A = 77^{\circ}\,54'\,54'',8$
$B = 69^{\circ}\,11'\,54'',4$
$C = 32^{\circ}\,53'\,10''.1$
$m = 42^{\circ}\,37'\,05''.0$
$n = 89^{\circ}\,49'\,15'',0$
$m+n = 132^{\circ}\,26'\,20'',0$
$B = 69^{\circ}\,11'\,54'',4$
$B+m+n = 201^{\circ}\,38'\,14'',4$
$\tfrac{1}{2}(B+m+n) = 100^{\circ}\,49'\,07'',2$
$M = 79^{\circ}\,10'\,52'',8$

Berekening *van p, q, enz.*

$Log.\,a = 4,2250596$
$Log.\,sin.\,n = 9,9999979$
$Log.\,b = 4,4805477$
$Log.\,sin.\,m = 9,8306578^{*}$
$Log.\,tang.\,\phi = 9,9138520$
$\phi = 39^{\circ}\,21'\,15''.2$
$45^{\circ} - \phi = 5^{\circ}\,38'\,44''.8$
$L.\,tang\,(45^{\circ}-\phi) = 8,9950099+$
$Log\,tang.\,M = 0,7187442+$
$Log.\,tang.\,N = 9,7137541+$
$N = 27^{\circ}\,21'\,11'',34+$

$M = 79^{\circ}\,10'\,52'',8$
$N = 27^{\circ}\,21'\,11''.34$
$p = M+N = 106^{\circ}\,32'\,04'',14$
$q = M-N = 51^{\circ}\,49'\,41'',46$
$p = 106^{\circ}\,32'\,04'',14$
$m = 42^{\circ}\,37'\,05''.00$
$p+m = 149^{\circ}\,09'\,09'',14$
$q = 51^{\circ}\,49'\,41''.46$
$n = 89^{\circ}\,49'\,15''.00$
$q+n = 141^{\circ}\,38'\,56'',46$
$q = 51^{\circ}\,49'\,41''.46$
$C = 32^{\circ}\,53'\,10'',80$
$q-C = 18^{\circ}\,56'\,30'',66$
$p = 106^{\circ}\,32'\,04''.14$
$A = 77^{\circ}\,54'\,54''.80$
$p-A = 28^{\circ}\,37'\,09'',34$

Zijnde $p+q+m+n+B = 360^{\circ}$ ten proeve van de juistheid van dit eerste gedeelte der berekening.

Berekening *der afstanden.*

$Log.\,a = 4,2250596$
$Log.\,sin\,p = 9,9816595$
$Log.\,sin.\,m = 9.8306578^{*}$
$Log.\,D' = 4,3760613$

$Log.\,b = 4,4803477$
$Log.\,sin.\,q = 9,8955114$
$Log.\,sin.\,n = 9,9999979^{*}$
$Log.\,D' = 4,3760612$

$Log.\,a = 4,2250696$
$Log.\,sin.\,(p+m) = 4,7099092$
$Log.\,sin.\,m = 9.8306578^{*}$
$Log.\,D = 4,1043110$

$Log\,c = 4,4610064$
$Log.\,sin.\,(q-C) = 9.5113597$
$Log.\,sin.\,(m+n) = 9,8680549^{*}$
$Log.\,D = 4,1043112$

$Log.\,b = 4,4805477$
$Log.\,sin.\,(q+n) = 9,7927257$
$Log.\,sin.\,n = 9,9999979^{*}$
$Log.\,D'' = 4,2732755$

$Log.\,c = 4,4610064$
$Log.\,sin.\,(p-A) = 1,6803237$
$Log.\,sin.\,(m+n) = 9,8680649^{*}$
$Log.\,D' = 5,2732752$

Uitkomsten *dezer Berekening.*

Afstand van *Wijk aan Zee* tot *Haarlem* = 12714m, 844.

Afstand van *Wijk aan Zee* tot *W. Amsterdam* = 23771m, 752.

Afstand van *Wijk aan Zee* tot *Alkmaar* = 18761m, 832.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Haarlem*, uit *Amsterdam*, W. Toren = 40° 50' 50'', 86.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Alkmaar*, uit *Amsterdam*, W. Toren = 38° 21' 03'', 54.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Alkmaar*, uit *Haarlem* = 28° 37' 09'', 34.

Hoek van *Wijk aan Zee* en *Haarlem*, uit *Alkmaar* = 18° 56' 30'', 66.

Observatorium te Leyden *tot* $\begin{cases} \text{den Haag} = 15119^m, 187 \\ \text{Rotterdam} = 26212^m, 391 \\ \text{Gouda} = 22439^m, 167 \end{cases}$

Men zal uit eene gewone kaart zien, hoe de driehoek, ten opzigte van het standpunt, gelegen is.

II. Oplossing. Men stelle de onbekende hoeken ABP en CBP (*fig.* 64) gelijk aan r en s; dan zal men, met behulp der driehoeken ABP en CBP, het volgende stelsel van vergelijkingen vinden:

$$1^\circ.\quad \text{Stel, } tang.\,\phi = \frac{a\,sin.\,n}{b\,sin.\,m}$$

$$2^\circ.\quad tang.\,N = tang.\,(\phi - 45^\circ) \times tang.\,\tfrac{1}{2}(B + m + n)$$

$$3^\circ.\quad \text{en } M = N + \tfrac{1}{2}(m - n)$$

dan zal men hebben:

$$4^\circ.\quad r = \tfrac{1}{2}B - M \text{ en } s = \tfrac{1}{2}B + M$$

$$5^\circ.\quad D = \frac{a\,sin.\,(m + r)}{sin.\,m} = \frac{b\,sin.\,(n + s)}{sin.\,n}$$

$$6^\circ.\quad D = \frac{a\,sin.\,r}{sin.\,m} \text{ en } D'' \frac{b\,sin.\,s}{sin.\,n.}$$

III. Oplossing. Stelt men, *fig.* 64, de onbekende hoeken PAC en ACP respectievelijk aan t en u, dan zal men, met behulp der driehoeken ABP en CBP, bijna op gelijke wijze, als in de twee voorgaande oplossingen, dit andere stelsel van vergelijkingen vinden:

$$1^\circ.\quad \text{Stel, } tang.\,\phi = \frac{a\,sin.\,n}{b\,sin.\,m}$$

$$2^\circ.\quad tang\,K = tang.\,\phi \times tang.\,\tfrac{1}{2}(B + m + n)$$

$$3^\circ.\quad \begin{cases} t = 90^\circ + K - \tfrac{1}{2}(m + n + A - C) \\ u = 90^\circ - K - \tfrac{1}{2}(m + n - A + C) \end{cases}$$

$$4^\circ.\quad D' = \frac{a\,sin.\,(A + t)}{sin.\,m} = \frac{b\,sin\,(C + u)}{sin.\,n}$$

$$5^\circ.\quad D = \frac{c \times sin.\,u}{sin.\,(m + n)};\qquad 6^\circ.\quad D'' = \frac{c \times sin.\,t}{sin.\,(m + n)}$$

Behalve deze bijgebragte Oplossingen, zal men er nog verscheidene anderen kunnen bedenken.

XIV. Vraagstuk. *Fig.* 66.

§. 1115. *De onderlinge ligging van drie punten A, B en C gegeven en gesteld zijnde, dat men, twee standpunten D en E gekozen hebbende, uit het standpunt D waargenomen hebbe, den hoek $ADB = \alpha$, en den hoek $BDE = \beta$, en uit het standpunt E den hoek $BEC = \delta$, en den hoek $BED = \gamma$; zoo begeert men de formulen*

te

te vinden, door welke men de afstanden dezer punten D en E, zoo tot elkander, als tot de punten A, B en C, zal kunnen berekenen; gesteld zijnde, dat deze vijf punten in hetzelfde vlak liggen?

I. Oplossing. Wanneer men zegt, dat de onderlinge ligging der punten A, B en C bekend is; dan moeten $AB = a$ en $BC = b$, benevens de ingesloten hoek $ABC = B$ voor bekend gehouden worden.

Indien de hoeken $BAD = p$ en $BCE = q$ bekend waren; dan zouden alle hoeken bekend zijn, die men noodig heeft, om, volgens de regels van het eerste geval, al de onbekende afstanden te berekenen.

De som dezer onbekende hoeken is gemakkelijk te vinden; want, volgens de eigenschap van den vijfhoek, is

$$p + q + B + \alpha + \beta + \gamma + \delta = 540^\circ$$
$$p + q = 540^\circ - (B + \alpha + \beta + \gamma + \delta)$$
$$\tfrac{1}{2}(p + q) = M = 270^\circ - \tfrac{1}{2}(B + \alpha + \beta + \gamma + \delta) \quad . \; . \; (a)$$

bekend; waaruit blijkt, dat, indien men het halve verschil der onbekende hoeken, namelijk $\tfrac{1}{2}(p - q)$, vinden kan, de hoeken p en q zelve zullen bekend worden.

In den driehoek ABD, is, volgens de III. *Stelling:*

$$\sin.\alpha : \sin.p = a : BD$$
$$\sin.\alpha : \sin.(p + \alpha) = a : AD$$
$$BD = \frac{a \times \sin p}{\sin.\alpha}, \text{ en } AD = \frac{a \times \sin.(p + \alpha)}{\sin.\alpha}$$

En, in den driehoek BCE, is, om dezelfde reden:

$$\sin.\delta : \sin.q = b : BE$$
$$\sin.\delta : \sin.(q + \delta) = b : CE$$
$$BE = \frac{b \times \sin.q}{\sin.\delta}, \text{ en } CE = \frac{b \times \sin(q + \delta)}{\sin.\delta}$$

Eindelijk is, in den middelsten driehoek BED,

$$\sin.\beta : \sin.\gamma = BE : BD = \frac{b \times \sin.q}{\sin.\delta} : \frac{a \times \sin.p}{\sin.\alpha}$$

Men vermenigvuldige in deze evenredigheid de uiterste en middelste termen; dan wordt

$$\frac{a \times \sin.\beta \times \sin.p}{\sin \alpha} = \frac{b \times \sin.\beta \times \sin.q}{\sin \delta}$$

uit welke dan verder volgen zal:

$$\sin.p : \sin.q = \frac{b \times \sin.\gamma}{\sin.\delta} : \frac{a \sin \beta}{\sin.\alpha} = b \sin.\alpha \sin.\gamma : a \sin.\beta \sin.\delta$$

Uit deze evenredigheid volgt dan eindelijk:

$$\sin p + \sin.q : \sin.p - \sin.q = b \sin.\alpha \sin.\gamma + \sin.\beta \sin.\delta : b \sin.\alpha \sin.\gamma - a \sin.\beta \sin.\delta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

nu is, zie VII. *Stell.* XI. *B.*

$$\sin.p + \sin.q : \sin.p - \sin.q = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(p + q) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(p - q)$$

dat

dat is, zie vergelijking (a),

$$b \sin. \alpha \sin. \gamma + a \sin. \beta \sin. \delta : b \sin. \alpha \sin. \gamma - a \sin. \beta \sin. \delta$$
$$= tang. M : tang. \tfrac{1}{2}(p-q)$$

derhalve wordt

$$tang. \tfrac{1}{2}(p-q) = \frac{b \sin \alpha \sin. \gamma - a \sin. \beta \sin. \delta}{b \sin \alpha \sin \gamma + a \sin. \beta \sin. \delta} \times tang. M$$

Men deele teller en noemer van deze breuk door $a \sin. \beta \sin. \delta$; dan verkrijgt men, $\tfrac{1}{2}(p-q) = N$ ftellende,

$$tang. \tfrac{1}{2}(p-q) = tang. N = \frac{\frac{b \sin \alpha \sin. \gamma}{a \sin. \beta \sin. \delta} - 1}{\frac{b \sin. \alpha \sin. \gamma}{a \sin. \beta \sin. \delta} + 1} \times tang. M$$

Men ftelle in deze $\frac{b \sin. \alpha \sin. \gamma}{a \sin. \beta \sin. \delta} = tang. \varphi$; dan wordt

$$tang. N = \frac{tang. \Phi - 1}{tang. \varphi + 1} \times tang. M$$

of, zie *Gevolgen* IV. *Stell.* XI. *B.*

$$tang. N = tang. (\Phi - 45°) \times tang. M$$

Wij hebben dan, dit alles te zamen nemende, het volgende ftelfel van vergelijkingen:

$$M = 270° - \tfrac{1}{2}(B + \alpha + \beta + \gamma + \delta) \quad . \; . \; . \quad (1)$$

$$tang. \varphi = \frac{b \sin. \alpha \sin. \gamma}{a \sin. \beta \sin. \delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

$$tang. N = tang. (\varphi - 45°) \times tang. M \quad . \; . \; . \quad (3)$$

$$A = M + N \quad \text{en} \quad B = M - N \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Deze hoeken A en B gevonden hebbende, zoo heeft men verder:

$$AD = a \times \frac{\sin. (A + \alpha)}{\sin. \alpha} \quad (5) \qquad BD = a \times \frac{\sin. A}{\sin. \alpha} \quad . \; . \; . \quad (6)$$

$$CE = b \times \frac{\sin. (C + \delta)}{\sin. \delta} \quad (7) \qquad BE = b \times \frac{\sin. C}{\sin. \delta} \quad . \; . \; . \quad (8)$$

$$DE = BD \times \frac{\sin. (\beta + \gamma)}{\sin. \gamma} = BE \times \frac{\sin. (\beta + \gamma)}{\sin.} \quad . \; . \; . \quad (9)$$

II. Oplossing. In plaats van eerst de onbekende hoeken p en q te zoeken, zoeke men de onbekende hoeken r en s, welke, op de volgende wijze, kunnen gevonden worden.

Volgens de figuur, is hoek $DBE = 180° - (\beta + \gamma)$; derhalve zal, indien men beide leden dezer vergelijking $r + s = r + s$ bijtelt, worden:

$$B = 180° + r + s - (\beta + \gamma)$$
$$r + s = B + \beta + \gamma - 180°$$
$$\tfrac{1}{2}(r + s) = \tfrac{1}{2}(B + \beta + \gamma) - 90° = P$$

in-

indien wij derhalve nog de waarde van $\frac{1}{2}(r - s)$ kunnen vinden; dan zal alles bekend zijn.

In de driehoeken ABD en BCE, is

$$\sin.\alpha : \sin.(\alpha + r) = a : BD$$

$$\sin.\alpha : \sin r = a : AD$$

$$BD = a \times \frac{\sin.(\alpha + r)}{\sin.\alpha} \text{ en } AD = a \times \frac{\sin.r}{\sin.\alpha}$$

En, in den driehoek BCE, is verder:

$$\sin.\delta : \sin.(\delta + s) = b : BE$$

$$\sin.\delta : \sin.s = b : CE$$

$$BE = b \times \frac{\sin(\delta + s)}{\sin.\delta} \text{ en } CE = b \times \frac{\sin.s}{\sin.\delta}$$

Eindelijk is, in den driehoek BDE,

$$BD : DE = \sin\gamma : \sin.\beta = a \times \frac{\sin.(\alpha + r)}{\sin.\alpha} : b \times \frac{(\delta + s)}{\sin.\delta}$$

Vermenigvuldig deze evenredigheid met de evenredigheid

$$b \times \sin.\alpha : a \times \sin.\delta = b \times \sin.\alpha : a \times \sin.\delta$$

dan zal men eene nieuwe evenredigheid verkrijgen, en, indien men in deze de termen van de tweede reden door ab deelt,

$$b \times \sin.\alpha \sin.\gamma : a \times \sin.\beta \sin.\delta = \sin.(\alpha + r) : \sin.(\delta + s)$$

Uit deze evenredigheid volgt nu onmiddellijk:

$$b \times \sin.\alpha \sin.\gamma + a \times \sin.\beta \sin.\delta : b \times \sin.\alpha \sin.\gamma - a \times \sin.\beta \sin.\delta =$$
$$\sin.(\alpha + r) + \sin.(\delta + s) : \sin.(\alpha + r) - \sin.(\delta + s)$$

Volgens de VI. *Stell.* XI. *B.* is, als volgt:

$$\sin.(\alpha + r) + \sin.(\delta + s) = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + r + s)\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s)$$
$$\sin.(\alpha + r) - \sin.(\delta + s) = 2\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + r + s)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s)$$

stelt men nu die waarden in de voorgaande evenredigheid; dan verkrijgt men:

$$\frac{b \times \sin.\alpha \sin.\gamma - a \times \sin\beta \sin.\delta}{b \times \sin.\alpha \sin.\gamma + a \times \sin.\beta \sin.\delta} = \frac{2\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + r + s)\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s)}{2\sin.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + r + s)\cos.\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s)}$$
$$= \cot.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + r + s) \times \tang.\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s)$$
$$= \cot.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + 2P) \times \tang.\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s)$$

waaruit dan eindelijk volgt:

$$\tang.\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r + s) = \frac{b \times \sin.\alpha \sin.\gamma - a \times \sin\beta \sin.\delta}{b \times \sin.\alpha \sin.\gamma + a \times \sin.\beta \sin.\delta} \times \tang.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + 2P)$$

Men stelle nu, even als in de I. *Oplossing*,

$$\frac{b \times \sin.\alpha \sin.\gamma}{a \times \sin.\beta \sin.\delta} = \tang.\phi$$

dan wordt $\frac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s) = Q$ stellende,

$$\tang.Q = \tang.(\phi - 45^\circ) \times \tang.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + 2P)$$

$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \delta + r - s) = Q$$

a —

$$\alpha - \delta + r - s = 2Q$$
$$r - s = 2Q - (\alpha - \delta)$$
$$\tfrac{1}{2}(r - s) = Q - \tfrac{1}{2}(\alpha - \delta)$$
$$\tfrac{1}{2}(r + s) = P$$

en de twee onbekende hoeken worden dan eindelijk:

$$r = P + Q - \tfrac{1}{2}(\alpha - \delta)$$
$$s = P - Q + \tfrac{1}{2}(\alpha - \delta)$$

Wij hebben gevolgelijk, dit alles te zamen nemende, het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\text{Stel } P = \tfrac{1}{2}(B + \beta + \gamma) = 90^\circ \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$\frac{b \times \sin.\alpha \sin.\gamma}{a \times \sin.\beta \sin.\delta} = tang.\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$tang.\,Q = tang.(\varphi - 45^\circ) \times tang.\tfrac{1}{2}(\alpha + \delta + 2P) \quad \ldots \quad (3)$$
$$r = P + Q - \tfrac{1}{2}(\alpha - \delta) \quad \ldots\ldots \quad (4)$$
$$s = P - Q + \tfrac{1}{2}(\alpha - \delta) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

De formulen voor het berekenen der onbekende afstanden zijn (met verandering van letters) dezelfde, als in de eerste oplossing.

VOORBEELD. *Gegeven zijnde*, $a = 4567$, $b = 3998,5$, $B = 113^\circ\, 27'\, 30''$, $\alpha = 39^\circ\, 27'\, 20''$, $\beta = 65^\circ\, 8'\, 30''$, $\gamma = 74^\circ\, 49'\, 50''$, $\delta = 33^\circ\, 55'\, 10''$; dan zal men vinden; $AD = 4579,912$; $BD = 7755,478$; $CE = 3991,486$; $BE = 6632,903$; $DE = 4700,615$.

XV. VRAAGSTUK. *Fig. 67.*

§. 1116. *Wanneer, door eene voorafgaande triangulatie, de afstanden $BA = a$ en $CD = b$, benevens de hoeken $ABC = B$ en $BCD = C$ zijn bekend geworden, en men, uit eenig punt P, de hoeken $APB = \alpha$, $BPC = \beta$ en $CPD = \gamma$ heeft waargenomen; zoo vraagt men: de onbekende afstanden BC, AP, BP, CP en DP te vinden?*

OPLOSSING. Bij de oppervlakkige beschouwing der figuur, valt het terstond in het oog, dat, wanneer de hoeken $BAP = p$ en $CBP = q$ bekend waren, al de onbekende afstanden, door het eerste geval der driehoeksrekening zouden gevonden worden.

Het blijkt verder, uit de figuur, dat, wanneer al de vijf punten A, B, C, D en P, in een vlak liggen (hetgeen hier ook stilzwijgend ondersteld wordt,) de som der onbekende hoeken p en q bekend zal zijn; want, volgens de eigenschap van den vijfhoek, is

$$p + q + B + C + \alpha + \beta + \gamma = 540^\circ$$

en derhalve zal $p + q$, die wij kortheidshalve M stellen, door de formule

$$p + q = M = 540^\circ - (B + C + \alpha + \beta + \gamma)$$

bekend zijn.

Stel-

Stellen wij nu $p = \frac{1}{2} M + r$ en $q = \frac{1}{2} M - r$; dan ziet men, dat, wanneer men den hoek r vinden kan, men de moeijelijkheid der oplossing zal zijn te boven gekomen.

In den driehoek ABP is, volgens den bekenden regel,

$$sin.\, \alpha : sin.\, p = a : BP; \text{ en } BP = \frac{a\, sin.\, p}{sin.\, \alpha}$$

$$sin.\, \alpha : (\alpha + p) = a : AP; \text{ en } AP = \frac{a\, sin.\, (\alpha + p)}{sin.\, \alpha}$$

en, in den driehoek CDP, is insgelijks,

$$sin.\, \gamma : sin.\, q = b : CP; \text{ en } CP = \frac{b\, sin.\, q}{sin.\, \gamma}$$

$$sin.\, \gamma : sin.\, (\gamma + q) = b : DP; \text{ en } DP = \frac{b\, sin\, (\gamma + q)}{sin.\, \gamma}$$

In den middelsten driehoek BCP, is

$$hoek\, CBP = hoek\, ABC - hoek\, ABP = B + \alpha - 180^\circ + p$$
$$hoek\, BCP = hoek\, BCD - hoek\, DCP = C + \gamma - 180^\circ + q$$

of wel, indien wij

$$B + \alpha - 180^\circ = d, \quad \text{en } C + \gamma - 180^\circ = e$$

stellen,

$$hoek\, BBP = d + \tfrac{1}{2} M + r$$
$$hoek\, CCP = e + \tfrac{1}{2} M - r$$

Nu is, in dezen driehoek,

$$BP : CP = sin\, BCP : sin.\, CBP$$

dat is, indien men voor die lijnen en hoeken de waarden stelt,

$$\frac{a\, sin.\, (\frac{1}{2} M + r)}{sin.\, \alpha} : \frac{b\, sin.\, (\frac{1}{2} M - r)}{sin.\, \gamma} = sin.\, (d + \tfrac{1}{2} M + r) : sin.\, (e + \tfrac{1}{2} M - r)$$

in de termen van welke evenredigheid slechts de onbekende hoek r voorkomt, die nu uit dezelve moet worden opgelost.

Men stelle, in de laatste evenredigheid, het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelsten, en men make de breuken weg; dan verkrijgt men de vergelijking:

$$a\, sin.\, \gamma\, sin.\, (\tfrac{1}{2} M + r)\, sin.\, (e + \tfrac{1}{2} M - r) = b\, sin.\, \alpha \times$$
$$sin.\, (\tfrac{1}{2} M - r)\, sin.\, (d + \tfrac{1}{2} M + r)$$

Omdat nu, in het algemeen,

$$sin.\, x\, sin.\, y = \tfrac{1}{2} cos.\, (x - y) - \tfrac{1}{2} cos.\, (x + y)$$

is, zoo wordt deze laatste vergelijking, na alles met twee vermenigvuldigd te hebben:

$$a\, sin.\, \gamma\, [cos.\, (2\gamma - e) - cos.\, (e + M)] = b\, sin.\, \alpha \ldots$$
$$[cos.\, (2r + d) - cos.\, (d + M)]$$

of, wanneer men de leden dezer vergelijking verder ontwikkelt,

$$a\, sin.\, \gamma\, cos.\, (2\gamma - e) - a\, sin.\, \gamma\, cos.\, (e + M) = b\, sin.\, \alpha \ldots$$
$$cos.\, (2r + d) - b\, sin.\, \alpha\, cos.\, (d +)$$

Men

Men ontwikkele nu verder de waarden van $cos.(2\gamma - e)$ en $cos.(2\gamma + d)$, naar de bekende regels, en brenge de termen, in welke de onbekende voorkomt, in het voorste lid der vergelijking; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$\begin{gathered}(a\,sin.\gamma\,sin.e + b\,sin.a\,sin.d)\,sin.2r \\ + (a\,sin.\gamma\,cos.e - b\,sin.a\,cos.d)\,cos.2r = \\ a\,sin.\gamma(e + M) - b\,sin.a\,cos.(d + M)\end{gathered}$$

Deze vergelijking, in welke $2r$ de onbekende is, is van denzelfden vorm, als de vergelijking, die wij, in het XVIII. *Vraagst.* XI. *B.*, hebben leeren oplossen.

Men stelle, om de uitdrukkingen te bekorten,

$$\begin{gathered}a\,sin.\gamma\,cos.e = A,\quad b\,sin.a\,cos.d = B \\ a\,sin.\gamma\,sin.e = C,\quad b\,sin.a\,sin.d = D \\ a\,sin.\gamma\,cos.(e + M) = E,\quad b\,sin.a\,cos.(d + M) = F\end{gathered}$$

dan wordt de laatste vergelijking,

$$(C + D)\,sin.2r + (A - B)\,cos.2r = E - F$$

Men deele alles door $C + D$; dan verkrijgt men:

$$sin.2r + \frac{A - B}{C + D} \times cos.2r = \frac{E - F}{C + D}$$

Het gebroken $(A - B):(C + D)$ stelt altijd de tangens van zekeren boog voor; men stelle daarom

$$\frac{A - B}{C + D} = tang.h = \frac{sin.h}{cos.h}$$

dan wordt de laatste vergelijking, na dezelve met $cos.h$ vermenigvuldigd te hebben:

$$sin.2r\,cos.h + sin.h\,cos.2r = \frac{E - F}{C + D} \times cos.h = K$$

derhalve wordt eindelijk, zie III. *Stell.* XI. *B.*

$$\begin{gathered}2r + h = B.sin.(K) \\ 180^\circ - 2r - h = B.sin.(K)\end{gathered}$$

en wij verkrijgen voor $2r$ deze twee verschillende waarden:

$$\begin{gathered}2r = B.sin.(K) - h \\ 2r = 180^\circ - h - B.sin(K)\end{gathered}$$

of eindelijk, alles door twee deelende,

$$\begin{gathered}r = \tfrac{1}{2}B.sin.(K) - \tfrac{1}{2}h \\ r = 90^\circ - \tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{2}B.sin.(K)\end{gathered}$$

en het blijkt dus, dat er op deze vraag twee antwoorden zijn.

Men kan op dit Vraagstuk nog verscheidene andere manieren van oplossen vinden.

E. *Aanmerkingen over het meten der Hoeken.*

§. 1117. Om, op het oppervlak der Aarde, de afstanden van ver van elkander verwijderde punten te vinden, bedient men zich van verhevene voorwerpen, die op eenen verren afstand kunnen gezien worden, of, waar deze niet voorhanden zijn, van *signalen*. In die voorwerpen of signalen, kiest men een merkbaar en zigtbaar punt, op hetwelk men de as van de kijkers der werktuigen, waarmede men de hoeken meet, rigt. Deze punten, die men *points de mire* noemt, liggen niet altijd in de horizontale vlakte, welke door het standpunt van den waarnemer gaat, en de gemetene hoeken zijn dus niet precies de horizontale, welker naauwkeurige kennis tot het oogmerk der triangulatie vereischt wordt. Men moet de gezigtslijnen, die, uit het middelpunt van den hoekmeter, tot de *points de mire* van de voorwerpen loopen, welker hoek men uit eenig standpunt neemt, denken, op de horizontale vlakte van de standplaats van den waarnemer, geprojecteerd te zijn, en die projectien gaan door de verticalen van de twee *points de mire*. Men moet dus, uit den waargenomen hoek, den hoek van de horizontale projectien der gezigtslijnen zoeken, en dan zal men hetzelfde verkrijgen, als of men inderdaad den hoek, onder welke de projectien van de twee *points de mire*, op het horizontale vlak des waarnemers, gemeten had. Het zoeken van dien hoek, noemt men *het herleiden van den waargenomen hoek tot den horizon.*

Bovendien is er nog eene andere herleiding noodig. Men kan zich zelden plaatsen in de verticaal of het middelpunt van de standplaats, (een toren bij voorbeeld,) alwaar men eene hoekmeting doet. Men is doorgaans verpligt, zich op eenige meters afstands buiten de verticaal van het *point de mire* te plaatsen; en dan moet de waargenomen hoek tot het middelpunt worden overgebragt. Men noemt dit *den waargenomen hoek te centreren.*

XVI. Vraagstuk. *Fig. 68.*

§. 1118. *Gesteld zijnde, dat M het punt is, alwaar de verticaal van het* point de mire *van den toren of het gebouw, alwaar men zich bevindt, het horizontale vlak van den waarnemer ontmoet; zoo dat M het middelpunt van het gebouw is, uit hetwelk den horizontalen hoek, onder welken twee afgelegene voorwerpen B en C gezien*

zien worden, moet worden waargenomen; nu is men, wegens beletselen, verpligt, zich in het punt A te plaatsen, en den hoek BAC $= O$ waar te nemen. Gesteld zijnde, dat men, door eene ruwe berekening, gevonden heeft, de afstanden $MC = D$ en $MB = G$, en dat men nog bovendien gemeten heeft hoek $BAM = y$ en $AM = r$; zoo vraagt men, den hoek $BMC = A$ te vinden?

OPLOSSING. In den driehoek AME, is

$$\text{hoek } AEM = O + C = A + B$$

derhalve wordt

$$A = O + C - B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In den driehoek AMC, is, naar den regel:

$$D : r = \sin.(O + y) : \sin. C$$

$$\sin. C = \frac{r \sin.(O + y)}{D}.$$

en, in den driehoek AMB, is verder

$$G : r = \sin. y : \sin. B$$

$$\sin. B = \frac{r \sin. y}{G}$$

Aangezien nu de hoeken C en B zeer klein zijn, zoo kunnen de sinussen dezer hoeken voor de hoeken zelve genomen worden; en wij hebben dan, zie IV. *Vraagst.* XI. *B.*

$$C = \frac{r \sin (O + y)}{D \sin. 1''} \text{ en } B = \frac{r \sin. y}{G \sin. 1''}$$

en de vergelijking (1), wordt derhalve:

$$A = O + \frac{r \sin.(O + y)}{D \sin. 1''} - \frac{r \sin. y}{G \sin. 1''} \quad \ldots \quad (A)$$

De termen $\frac{r \sin.(O + y)}{D \sin. 1''}$ en $\frac{r \sin. y}{G \sin. 1''}$ geven, in secunden, de correctie, welke aan den waargenomen hoek moet aangebragt worden, om den eigenlijken middelpunts-hoek BMC te vinden.

VOORBEELD. Zij gegeven $O = 66^\circ\ 17'\ 10''$, $y = 10^\circ\ 13'20''$, $D = 6712m,4$, $G = 10719m,5$ en $r = 24m,731$? dan zal men vinden:

$$A = 66^\circ\ 17'\ 10'' + 739'',0 - 84'',45 = 66^\circ\ 28'\ 4'',55$$

Om de formule (A), in alle gevallen, te kunnen gebruiken, moeten de hoeken $O + y$ en y, van AC naar AB, den geheelen omtrek worden rondgeteld, en de teekens der sinussen overeenkomstig de quadranten, in welke de hoeken vallen, genomen worden.

XVII. VRAAGSTUK. *Fig.* 69.

§. 1119. *Gesteld zijnde, dat M de standplaats van eenen waarnemer zij, de punten C en B de* points de mire *van twee verafgele-*

legene voorwerpen; CMB de waargenomen hoek (hoek CMB = A). Laat MT de verticaal van de plaats des waarnemers zijn; hoek DMC = H en hoek LMB = h, welke hoeken door waarneming gevonden worden; indien men dan, in de verticale vlakken TMC en TMB, de lijnen MD en ME, loodregt op MT, trekt; dan is DME de horizontale vlakte van het punt M; MD en ME zijn de projectien van de gezigtslijnen MC en MD, en de hoek DME is dan de hoek, onder welken de projectien van de punten C en B op de horizontale vlakte DME, uit het punt M, gezien worden, of de waargenomen hoek CMB, die op den horizon overgebragt is. Men vraagt nu: om, uit de waargenomene hoeken CMB, TMC en TMB, den hoek DME te vinden?

Oplossing. Men verbeelde zich, dat, uit het punt *M*, met eenen straal *MT*, eenen bol, welks oppervlak door de vlakken *CMB*, *DEM*, *TMD* en *TME*, volgens de bogen *FG*, *HI*, *TFH* en *TMI* wordt doorgesneden, beschreven zij; dan zijn, in den bolvormigen driehoek *TFG*, bekend de zijde $FG = A$, de zijde $TF = H$, en de zijde $TG = h$; de bolvormige hoek *FTG*, die de maat van den horizontalen hoek *DME* is, moet nu uit deze drie zijden gevonden worden.

Volgens het II. *Vraagst.* VIII. *Boek*, is

$$\cos DME = \frac{\cos. GF - \cos. TF \times \cos. TG}{\sin. TF \times \sin. TG}$$

of $DME = A + x$ stellende, volgens de aangenomene notatie,

$$\cos. (A + x) = \frac{\cos. A - \sin H \times \sin. h}{\cos. H \times \cos. h}$$

welke vergelijking aldus kan herleid worden.

Aangezien de bogen x, H en h altijd zeer klein zijn, en, op zijn hoogst genomen, eenige minuten bedragen; zoo is

$$\cos. (A + x) = \cos. x \cos. A - \sin. A \sin. x$$
$$\sin. H \times \sin. h = (H - \tfrac{1}{6} H^3)(h - \tfrac{1}{6} h^3)$$
$$\sin. H \sin h = Hh - \tfrac{1}{6} Hh (H^2 + h^2) + \tfrac{1}{36} H^3 h^3$$
$$\cos. H \cos. h = 1 - \tfrac{1}{2}(H^2 + h^2) + \tfrac{1}{4} H^2 h^2$$

de uitgebragte vergelijking wordt dan, indien wij ons slechts bij de eerste en tweede magten van x, H en h bepalen.

$$\cos. A - x \sin. A = \cos. A + \tfrac{1}{2}(H^2 + h^2) \cos. A - Hh$$
$$- x \sin. A = + \tfrac{1}{2}(H^2 + h^2) \cos. A - Hh$$
$$x \sin. A = Hh - \tfrac{1}{2}(H^2 + h^2) \cos. A$$
$$x = \frac{Hh}{\sin. A} - \tfrac{1}{2}(H^2 + h^2) \cot. A$$

door welke formulen nagenoeg de verbetering of herleiding, in deelen

van den ftraal, wordt voorgefteld. In onze *Befchrijving van den Sextant* hebben wij eene uitvoeriger en naauwkeuriger vergelijking uitgebragt.

§. 1120. Aanmerking. Men zal nu, uit dit laatfte Vraagftuk, een regt denkbeeld verkrijgen van de wijze, op welke, in de *Geodefie* of *hoogere Landmeetkunst*, driehoeken van groote uitgeftrektheid moeten befchouwd worden. Aan de hoekpunten dezer driehoeken, moet men zich verticalen verbeelden. Aan die verticalen worden de hoeken gemeten, (of door herleiding uit de waarnemingen afgeleid,) welke de verticale vlakken, die door de twee andere hoekpunten gaan, met elkander maken: en deze zijn de horizontale hoeken, welke wij, in het voorgaande Vraagftuk, uit de waarnemingen, hebben leeren afleiden. De horizontale hoeken zijn eigenlijk de hoeken van eenen bolvormigen driehoek, welke, op de middelbare waterpasvlakte, gevormd worden. Indien men naauwkeurig wil te werk gaan; dan moet men, in al de drie ftandpunten van den driehoek, de waarnemingen doen; en zoo men dan al de horizontale hoeken door herleiding uit de waarnemingen gevonden heeft; dan zal de fom van die herleide hoeken altijd iets grooter dan 180° moeten zijn; en zooveel grooter dan 180°, als aangeduid wordt door het gebroken, dat den inhoud van den driehoek tot teller, en het geheele oppervlak van den aardbol tot noemer heeft.

F. *Verzameling van Vraagftukken over verfchillende Onderwerpen.*

XVIII. Vraagstuk. *Fig. 70.*

§. 1121. *Onderfteld zijnde, dat de Aarde een volmaakte ronde bol zij, ZAN den omtrek van den middagscirkel; en, dat men, ergens in A, in den vollen oceaan, zijnde, van rondsom eene vrije kim heeft; indien men dan, op eene zekere hoogte, boven het oppervlak der zee, in B, verheven ftaat, en uit het punt B eene raaklijn BC trekt, die den omtrek van den middagscirkel in het punt C aanraakt; dan zal de lijn, die uit het middelpunt M door B getrokken wordt, de verticaal van het punt B, en eene lijn EF, door B, loodregt op MT getrokken zijnde, de doorfnijding van het vlak van den middagscirkel met het vlak van den horizon genoemd worden. Indien men dan verder de figuur, om de lijn TM, laat omdraaijen; dan zal de loodlijn EF den fchijnbaren horizon van het punt B, de lijn ZN (evenwijdig aan EF loopende) de waren of*

middelpunts-horizon van datzelfde punt beschrijven; en de raaklijn BG eene kegelvlakte, welke het oppervlak der zee, in den omtrek van den kleinen cirkel Og, aanraakt. De omtrek van dien kleinen cirkel wordt de KIM *genoemd, en de hoek EBG de* KIMSDUIKING. *Wanneer men nu, op zee, de hoogte van de Zon (in Z) waarneemt; dan meet men den hoek ZBG; en de ware hoogte van de Zon, boven het vlak van den horizon van het punt B, is dan de hoek ZBE. Men vraagt: eene formule te vinden, waardoor, gegeven zijnde de straal der Aarde AM = r, en de hoogte AB = h van het oog des waarnemers, boven het oppervlak der zee, die kimsduiking, dat is de hoek EBG, kan gevonden worden?*

OPLOSSING. Men trekke den straal *MG*; dan is *hoek BMG = hoek EBG* = de kimsduiking; want, omdat de hoek *MGB* (XII. *Stell.* V. *B.*) regt is, zoo is *BMG* een regthoekige driehoek; en, omdat de hoek *MBE* een regte hoek is, zoo is *hoek MBG* het complement, zoowel van den *hoek EBG*, als van den *hoek BMG*; derhalve is

$$\text{hoek } EBG = \text{hoek } BMG$$

Nu is, in den regthoekigen driehoek *BMG*,

$$\cos. BMG = \cos. EBG = \frac{GM}{BM} = \frac{r}{r+h}$$

of, omdat, in het algemeen, $\sin^2. p = 1 - \cos^2. p$ is,

$$\sin^2. BMG = 1 - \frac{r^2}{(r+h)^2} = \frac{(h+r)^2 - r^2}{(h+r)^2} = \frac{h(2r+h)}{(r+h)^2}$$

$$\sin. BMG = \sin. EBG = \frac{\sqrt{h}\sqrt{(2r+h)}}{r+h}$$

of, wanneer men den hoek, die altijd zeer klein is, onmiddellijk in secunden hebben wil.

$$\text{hoek } EBG = \frac{\sqrt{h(2r+h)}}{(r+h) \times \sin. 1''} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

AANMERKING. In eene platronde Aarde, is *r*, van punt tot punt, veranderlijk, en eigenlijk de kromtestraal van het punt, alwaar men zich bevindt; en wel de kromtestraal van den boog, genomen in de rigting van den middagscirkel. Want, indien men de Aarde doorsnijdt in onderscheidene vlakken, door de verticaal van eenig punt gaande; dan zijn al die vlakken van doorsnijding ellipsen, die in grootte van den elliptischen middagscirkel verschillen; de kromtestralen nu, van het punt *A*, van al die ellipsen verschillen, en zijn afhankelijk van den kromtestraal van den middagscirkel en van het azimuth der verticale vlakte, in welken de hoek *ZBG* gemeten is. Wij laten het verder onderzoek daarvan aan den Lezer over.

Men heeft voor de Zeevarenden tafels van de kimsduiking berekend, welke altijd van den waargenomen hoek moet afgetrokken worden. Men

zou

zou echter bij die kimsduiking de uitwerking van de straalbreking in aanmerking behooren te nemen, waarvan de grootte, volgens de waarnemingen van DELAMBRE, is 0, 08 × *hoek E B G*. De straalbreking doet den hoek *E B G* grooter schijnen, dan hij inderdaad is, en moet dus van denzelven worden afgetrokken.

XIX. VRAAGSTUK. *Fig. 71.*

§. 1122. *Om een denkbeeld te verkrijgen van de wijze, op welke men, door waarneming, den afstand van een voorwerp in de hemelruimte, bij voorbeeld, de Maan, tot het middelpunt der Aarde vinden kan, zoo laat P A B Q den omtrek van eenen elliptischen middagscirkel verbeelden, P de noord- en Q de zuidpool, en de punten A en B, in dien middagscirkel, de standplaatsen van twee waarnemers, welker verticalen zijn de lijnen M A T en M B V, en gezigtseinders de lijnen A H en B h; indien deze waarnemers afspreken, om dagelijks, wanneer de Maan door den middagscirkel gaat, derzelver zenith-afstanden; dat is, de hoeken T A L = α en V B L = β waar te nemen, en de breedte dezer twee punten A en B bekend is; zoo vraagt men: om, uit deze waarnemingen, den afstand van het middelpunt der Maan tot het middelpunt der Aarde te vinden?*

OPLOSSING. In eene platronde Aarde zullen de verticalen *A T* en *B M* niet in het middelpunt zamen komen; maar wel binnen het ligchaam der Aarde, ergens in het vlak van den middagscirkel, in het punt *M*. Bijaldien nu de waarnemers ten naauwkeurigste de breedte hunner standpunten (wij onderstellen *A* op noorder- en *B* op zuiderbreedte,) hebben waargenomen; *dan is de noorderbreedte van het punt A, opgeteld met de zuiderbreedte van B, gelijk aan den hoek A M B = M*, welke de verticalen der waarnemers met elkander maken, en die hoek *A M B* = *M*, kan derhalve, met en benevens de hoeken *T A L* = α en *V B L* = β, als bekend worden aangenomen.

Ook kan men, de afmetingen der Aarde (zie IX. *Vraagstuk*) naauwkeurig kennende, berekenen de lengte van de lijnen *A M* = *a meters* en *B M* = *b meters*; alsmede hoe ver het punt *M* van het eigenlijke middelpunt *O* der Aarde verwijderd is.

Men trekke van *L* tot *M* de lijn *M L* = *x*; dan is deze de afstand van het middelpunt der Maan tot het punt *M*. Die afstand kan nu uit de gegevens aldus berekend worden.

Men stelle de hoeken *A L M* = *p* en *B L M* = *q*; dan is, uit de bekende eigenschap des driehoeks:

$$\text{hoek } A L M = p = \alpha - \text{hoek } A M L$$
$$\text{hoek } B L M = q = \beta - \text{hoek } B M L$$

 en,

en, indien men deze vergelijkingen optelt,

$$p + q = \alpha + \beta - M$$
$$\tfrac{1}{2}(p + q) = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - M) = K$$

In de driehoeken *AML* en *BML* is, volgens de III. *Stell.*

$$x : a = \sin.\alpha : \sin.p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$x : b = \sin.\beta : \sin.q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

derhalve wordt

$$\sin.p = \frac{a \sin.\alpha}{x} \text{ en } \sin.q = \frac{b \sin.\beta}{x}$$

en, uit deze twee vergelijkingen, kan men dan de volgende evenredigheid opstellen:

$$\sin.p : \sin.q = a \sin.\alpha : b \sin.\beta$$

uit welke dan onmiddellijk zal volgen:

$$\sin.p + \sin.q : \sin.p - \sin.q = a \sin.\alpha + b \sin.\beta : a \sin.\alpha - b \sin.\beta$$

maar nu is (VII. *Stell.* IX. *B*)

$$\sin.p + \sin.q : \sin.p - \sin.q = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(p + q) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(p - q)$$

derhalve wordt:

$$a \sin.\alpha + b \sin.\beta : a \sin.\alpha - b \sin.\beta = \text{tang.}\tfrac{1}{2}(p + q) : \text{tang.}\tfrac{1}{2}(p - q)$$
$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(p - q) = \frac{a \sin.\alpha - b \sin.\beta}{a \sin.\alpha + b \sin.\beta} \times \text{tang.}\tfrac{1}{2}(p + q)$$

Men kan deze laatste vergelijking aldus voorstellen:

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(p - q) = \frac{\dfrac{a \sin.\alpha}{b \sin.\beta} - 1}{\dfrac{a \sin.\alpha}{b \sin.\beta} + 1} \times \text{tang.}K$$

en, indien wij nu $\tfrac{1}{2}(p - q) = L$ en $\text{tang.}\varphi = \dfrac{a \sin.\alpha}{b \sin.\beta}$ stellen; dan wordt:

$$\text{tang.}L = \frac{\text{tang.}\varphi - 1}{\text{tang.}\varphi + 1} \times \text{tang.}K$$

of $\text{tang.}L = \text{tang.}(\varphi - 45°) \times \text{tang.}K$

Wij hebben dan, om den onbekenden afstand te vinden, het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$\text{stel } K = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - M) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\text{tang.}\varphi = \frac{a \sin.\alpha}{b \sin.\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$\text{tang.}L = \text{tang.}(\varphi - 45°) \times \text{tang.}K \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
$$p = K + L \text{ en } q = K - L \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
$$x = \frac{a \sin.\alpha}{\sin.p} = \frac{b \sin.\beta}{\sin.q} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Wan-

Wanneer nu ergens het middelpunt der Aarde in het punt O ligt; dan zal men, uit de naauwkeurig bekende afmetingen der Aarde, den afstand $OM = r$, benevens de hoeken AMO en BMO kunnen berekenen; en, daar hoek $AML = a - p$ is, zoo zal de hoek LMO insgelijks bekend zijn. In den driehoek LMO, zijn dan de twee zijden $LM = x$ en $OM = r$, met den ingesloten hoek LMO, bekend; men zal derhalve de derde zijde OL, dat is, den waren afstand van de middelpunten der Aarde en Maan, op het oogenblik der waarneming, kunnen vinden.

XX. VRAAGSTUK. *Fig. 72.*

§. 1123. *Ondersteld zijnde, dat men den afstand van een voorwerp in de hemelruimte (bij voorbeeld van de Maan) tot het middelpunt der Aarde kent; en tevens weet, hoe ver men, uit eenig punt A, op het oppervlak der Aarde genomen, van den waren of middelpunts-horizon verwijderd is; zoo vraagt men: hoe, uit eene waargenomene hoogte van dit voorwerp, boven den schijnbaren horizon (uit den hoek LAH namelijk) de ware hoogte; dat is, de hoek LMh, kan gevonden worden?*

OPLOSSING. Men stelle den afstand van het voorwerp L tot het middelpunt der Aarde, dat is de lijn $LM = A$, de afstand $AM = r$, en den hoek TAL, of het complement van de hoogte $= a$.

De hoek ALM, die men de parallaxis van hoogte noemt, zal, uit den driehoek AML, aldus gevonden worden. Men heeft namelijk:

$$LM : AM = sin.\ MAL : sin.\ L$$

$$\text{of}\quad A : r = sin.\ a : sin.\ L$$

$$\text{derhalve}\quad sin.\ L = \frac{r \times sin.\ a}{A}$$

of, aangezien die hoek L altijd zeer klein is, zoo zal men $r \times sin.\ a : A = m$ stellende, voor de waarde van den hoek L; dat is, voor de parallaxis van de hoogte, verkrijgen, zie VIII. *Vraagst.* XI. *B.*

$$L = m + \tfrac{1}{6}m^3 + \tfrac{3}{40}m^5 + \text{enz.}$$

van welke reeks de twee eerste termen voldoende zullen zijn, om de parallaxis in hoogte naauwkeurig te verkrijgen.

Die hoogte-parallaxis moet nu bij den waargenomen hoek LAH worden opgeteld, om den hoek LMh, dat is de hoogte, uit het middelpunt gezien, te verkrijgen; want, volgens de figuur, is

$$\text{hoek } LAT = 90^\circ - \text{hoek } LAH$$

$$\text{hoek } LMT = 90^\circ - \text{hoek } LMh$$

trekt men deze vergelijkingen van elkander af; dan verkrijgt men:

$$\text{hoek } LAT - \text{hoek } LMT = \text{hoek } LMh - \text{hoek } LAH$$

 maar

maar *hoek LAT — hoek LMT = hoek L*
derh. *hoek L = hoek LMh — hoek LAH*
en *hoek LMh = hoek LAH + hoek L*

Eigenlijk is het punt *M*, in *fig.* 72, niet het middelpunt der Aarde; maar wel het punt *H*, uit *fig.* 54, in welke figuur, $AM = r$ is, en den afstand *A* uit het punt *H* tot het voorwerp moet gedacht worden; men moet dus, uit den afstand *MH*; dat is, uit de excentriciteit van de loodlijn, die voor elke breedte bekend is, de berekende parallaxis van hoogte uit het punt *H* tot het middelpunt *M* der Aarde overbrengen; hetwelk wij verder aan den Lezer overlaten.

XXI. VRAAGSTUK. *Fig.* 73.

§. 1124. *Gegeven zijnde de Noorder- of Zuider-breedte van eene plaats, benevens de Zons Noorder- of Zuider-declinatie; den tijd van de Zons-opgang, de plaats aan den horizon, waar zij opgaat, en den tijd, wanneer zij door het verticale vlak van het Oosten gaat, te vinden?*

OPLOSSING *door constructie.* Zij wederom, als in de voorgaande Vraagstukken, de cirkel *ZTNV* de middagscirkel aan den Hemel, *TV* de verticaal van de plaats des waarnemers, *ZN* de doorsnijding van zijnen horizon met den middagscirkel.

Maak hoek *NMP*, met eenen transporteur, gelijk aan de gegevene noorder-breedte; dan zal *PMQ* de as des hemels zijn, en de lijn *LME*, die dezelve loodregt doorsnijdt, de doorsnijding van het vlak van den equator met de middagvlakte.

Neem den boog *LA* gelijk de Zons-noorder-declinatie, en trek *AB*, evenwijdig aan *LE*; dan is *AB* de middellijn van den dagcirkel der Zon, welker oostelijke helft is de halve cirkel *AORB*, die, uit *I*, met $IA = IB$, als straal, is beschreven; welke halve cirkel de Zon, van middernacht tot den middag, van *B*, door *R* en *O* tot *A*, doorloopt.

Men trekke *HR* en *KO*, loodregt op *AB*; dan zal de Zon, opkomende, in het punt *R*, en door de verticaal van het oosten gaande, in *O* zijn; en trekt men nu de stralen *IR* en *IO*; dan zullen de hoeken *BIR* en *BIO* de uurhoeken zijn, sedert middernacht; dat is, op de oogenblikken, dat het middelpunt der Zon in het vlak van den horizon en het verticale vlak van het oosten is. Deze hoeken *BIR* en *BIO* met eenen transporteur gemeten, en, tegen 15° voor één uur, in tijd overgebragt zijnde, zal men den tijd van de zons-opgang en den tijd, wanneer zij door het oosten gaat, verkrijgen.

Nog trekke men *HR*, loodregt op *ZN*, en den straal *MR*; dan zal de hoek *NMR* het azimuth van de Zon zijn, op den oogenblik van haren opgang.

Want, laat men de halve cirkels *ZVN* en *AORB*, om de middellijn

ZN

ZN en AB omdraaijen, tot dat zij loodregt op het vlak van den middagcirkel staan; dan zullen de lijnen HR en KO loodregt op het vlak van den middagscirkel komen te staan; het punt R zal dan het punt aan den horizon zijn, waar de Zon opkomt; het punt O de plaats, alwaar de Zon het verticale vlak van het oosten, in haren dagelijkschen loop, ontmoet.

Oplossing, *door berekening.* Stellende de Noorder-breedte van de plaats des waarnemers B, de noorder-declinatie der Zon D; den uurhoek, die de Zon, bij haar opkomen, heeft, U; derzelver azimuth buiten het noorden A; en derzelver uurhoek, op den oogenblik, dat haar middelpunt in het oostelijke verticale vlak is, u; dan is, $MN = 1$ stellende, $MI = sin.\, D$, $AI = IB = IR = IO = cos.\, D$; $MH = cos.\, A$, $HR = sin.\, A$.

In den regthoekigen driehoek MIH, is hoek $IMH = B$, en verder, $MH = MI : cos.\, B$ en $IH = MI \times tang.\, B$; dat is:

$$cos.\, A = sin.\, D : cos.\, B \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$IH = sin.\, D \times tang.\, B.$$

In den regthoekigen driehoek IHR, is $cos.\, HIR = cos.\, U = IH : IR = MH = MI : sin.\, D \times tang.\, B : cos.\, D$; dat is:

$$cos.\, U = tang\, D \times tang.\, B \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

In den regthoekigen driehoek IMK, is $IK = IM \times tang.\, IMK = sin.\, D \times cot.\, B$; en, in den regthoekigen driehoek ~~IKO~~, is $cos.\, IKO = IK : IO = sin.\, D \times cot.\, B : cos.\, D$, of

$$cos.\, u = -cot.\, B \times tang.\, D \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Uit den regthoekigen driehoek IMK, is $MK = IM : cos.\, IMK = sin.\, D : sin.\, B$, of

$$sin.\, H = \frac{sin.\, D}{sin.\, B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Door welke eenvoudige formulen al het gevraagde zal kunnen berekend worden. De gevondene formulen gelden voor alle breedten en declinatien; mits men op de teekens lette, en eene zuider-breedte en zuider-declinatie als eene positieve breedte en declinatie beschouwe.

XXII. Vraagstuk. *Fig. 74.*

§. 1125. *De Noorder- of Zuider-breedte van eene plaats, de Zons Noorder- of Zuider-declinatie, benevens de Zons ware hoogte, op eenig tijdpunt, voor- of nademiddag, gegeven zijnde, het azimuth en den uurhoek van de Zon, op den oogenblik der waarneming, zoo door constructie, als door berekening, te vinden?*

Oplossing *door constructie.* Zij M het middelpunt der Aarde, MN de afstand van het middelpunt der Aarde tot dat van de Zon. Stel, dien afstand gelijk aan de éénheid; beschrijf uit M, met MN als straal, eenen cir-

cirkel *MTZV*. Laat het vlak van de teekening de middagvlakte van de plaats des waarnemers verbeelden; dan zal de cirkel *NTZV* de hemelschen middagscirkel van den waarnemer zijn.

Zij verder *TMV* de verticaal of loodlijn van den waarnemer. Trek *NMZ* loodregt op *TMV*; dan is *ZN* de lijn, volgens welke de ware horizon van de plaats des waarnemers de middagsvlakte snijdt; *MN* de streek van het noorden, *MZ* de streek van het zuiden.

Maak hoek *NMP* gelijk aan de gegevene noorder-breedte, en trek de middellijn *PMQ*; dan is deze de as des Hemels, of de as der Aarde, tot aan den Hemel verlengd zijnde; *P* en *Q* de noord- en zuid-polen des hemels.

Trek de middellijn *LME*, loodregt op de as *PQ*; dan is deze middellijn de lijn, volgens welke het vlak van de nachteveningen het vlak van den middagscirkel snijdt.

Men make de boog *LA* gelijk aan de Zons-noorder-declinatie, op den oogenblik van de waarneming. Trek dan *AB* evenwijdig aan *LE*, snijdende de as *PQ* regthoekig in *F*. Indien men dan, uit *F*, met *AF* = *BF*, als straal, eenen cirkel *AIB* beschrijft; dan zal die cirkel de kleine cirkel zijn, welke de Zon (hare declinatie dezelfde blijvende), in 24 uren, aan den hemel schijnt door te loopen.

Nog make men den boog *CZ*, gelijk aan de waargenomene ware zonshoogte, en trekke *CGD* evenwijdig aan *ZMN*. Die lijn snijdt de verticaal *TV* regthoekig in *G*. Beschrijf nu, uit *G*, met *CG* als straal, den cirkel *CKD*; deze zal dan, indien men deszelfs vlak loodregt op het vlak van den middagcirkel plaatst, in deszelfs omtrek alle punten bevatten, die, boven den waren horizon, dezelfde hoogte hebben.

Het punt *S*, in hetwelke de middellijn *CD* van den cirkel der gelijke hoogten de middellijn *AB* van den dagcirkel der Zon snijdt, is de projectie van het middelpunt der Zon op de middagsvlakte, ten tijde der waargenomene Zons-hoogte.

Men trekke *SI* en *SK*, loodregt op *AB* en *CD*, en late de vlakken der kleine cirkels *AIB* en *CKD*, om derzelver middellijnen *AB* en *CD*, omdraaijen, tot dat zij beide regthoekig op het vlak van den middagcirkel staan; dan zullen de loodlijnen *SI* en *SK*, elk in eenen loodregten stand, op het vlak van den middagscirkel geplaatst zijn; de lijnen *SI* en *SK* zullen langs elkander vallen, en (omdat beide halve cirkels in het oppervlak van den hemelbol liggen,) het punt *I* in het punt *K*.

Die punten *I* of *K*, zullen dan de ware plaats der Zon, op den oogenblik der waarneming, voorstellen, en, in *S*, op de middagvlakte geprojecteerd zijn.

Een vlak, dat, in dien stand der figuur, door de as *PQ*, en het punt *I* of *K* gaat, zal het vlak van den declinatie-cirkel, en een vlak, dat door de verticaal *TV*, en het punt *I* of *K* gaat, zal het verticale vlak zijn, in welke zich, op den oogenblik van de waarneming, het middelpunt van de Zon bevindt.

De

De hoek KGC, is derhalve het azimuth van de Zon, op den oogenblik van de waarneming; en de hoek AFI de uurhoek van de Zon, die nog tot den middag verloopen moet, op datzelfde tijdstip.

Beide hoeken zijn dus, door de constructie, in hunne natuurlijke grootte, bepaald. Meet men dezelve met eenen transporteur; dan zal, in graden, het azimuth en de uurhoek bekend worden. Maakt men den uurhoek, tegen 15^o voor 1 uur, tot tijd; dan zal de tijd der waarneming bekend zijn.

Oplossing *door berekening*. Men stelle de bekende noorder-breedte *hoek* $PMN =$ *hoek* $MHF =$ *hoek* $SHG = B$; de declinatie of *boog* $AL = D$; de waargenomene ware hoogte of *boog* $ZC = H$; het azimuth of *hoek* $SGK = A$, en de uurhoek $SFI = U$; dan is $MF = sin.\, D$, $AF = FI = cos.\, D$, $MG = sin.\, H$, en $CG = GK = cos.\, H$.

In den regthoekigen driehoek FIS, is (II. *Stell.*) $SI = IF \times sin.\, F = cos.\, D \times sin.\, U$, en $SF = IF \times cos.\, F = cos.\, D \times cos.\, U$.

In den regthoekigen driehoek GKS, is $SK = GK \times sin.\, G = cos.\, H \times sin.\, A$, en $SG = GK \times cos.\, G = cos.\, H \times cos.\, A$.

In den regthoekigen driehoek MFH, is $MF = FH \times tang.\, H$, derhalve $FH = \frac{MF}{tang.\, H} = \frac{sin.\, D}{tang.\, B}$, en $HM = \frac{sin.\, D}{sin.\, B}$.

Eindelijk is, in den regthoekigen driehoek SGH,

$$GH = \frac{cos.\, H \times cos.\, A}{tang.\, B}, \quad \text{en } SH = \frac{cos.\, H \times cos.\, A}{sin.\, B}$$

Volgens de figuur, is nu vooreerst $GM = GH + HM$; dat is, zie boven:

$$sin.\, H = \frac{cos.\, H \times cos.\, A}{tang.\, B} + \frac{sin.\, D}{sin.\, B}$$

Uit deze vergelijking, wordt de $cos.\, A$, aldus gevonden:

$$\frac{cos.\, H \times cos.\, A}{tang.\, B} = sin.\, H - \frac{sin.\, D}{sin.\, B}$$

Men vermenigvuldige deze vergelijking eerst met $tang.\, B$, en deele het product door $cos.\, H$; dan verkrijgt men:

$$cos.\, A = tang.\, H \times tang\, B - \frac{sin.\, D}{cos.\, B \times cos.\, H}$$

$$cos.\, A = \frac{sin\, H \times sin\, B}{cos.\, H \times cos.\, B} - \frac{sin.\, D}{cos.\, B \times cos.\, H}$$

of, eindelijk, zoo als van zelf blijkt,

$$cos.\, A = \frac{sin.\, B \times sin.\, H - sin.\, D}{cos.\, B \times cos.\, H} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Verder is, volgens de figuur, $SF = SH + HF$; of

$$cos.\, D \times cos.\, U = \frac{cos.\, H \times cos.\, A}{sin.\, B} + \frac{sin.\, D}{tang.\, B}$$

of, wanneer men deze vergelijking door $cos.\, D$ deelt,

cos. U

$$\cos. U = \frac{\cos. H}{\sin. B \times \cos. D} \times \cos. A + \frac{\sin. D}{\tang. B \times \cos. D}$$

Men ſtelle, in deze laatſte vergelijking, voor $\cos.\ A$, derzelver waarde, in vergelijking (1) voorkomende; dan wordt

$$\cos. U = \frac{\cos. H}{\sin. B \times \cos. D} \times \frac{\sin. B \times \sin H - \sin. D}{\cos. B \times \cos. H} + \frac{\sin. D}{\tang. B \times \cos. D}$$

$$\cos. U = \frac{\sin. B \times \sin. H - \sin. D}{\sin. B \times \cos. B \times \sin. D} + \frac{\sin. D}{\tang. B \cos. D}$$

$$\cos. U = \frac{\sin. H - \frac{\sin. D}{\sin. B}}{\cos. B \times \cos. D} + \frac{\sin. D \times \cot. B}{\cos. D}$$

$$\cos. U = \frac{\sin. H - \frac{\sin. D}{\sin. B}}{\cos. B \times \cos. D} + \frac{\sin. D \times \frac{\cos. B}{\sin. B} \times \cos. B}{\cos. B \times \cos. D}$$

$$\cos. U = \frac{\sin. H - \frac{\sin. D}{\sin. B} + \frac{\sin. D \times \cos^2. B}{\sin. B}}{\cos. B \times \cos. D}$$

$$\cos. U = \frac{\sin. H - \frac{\sin. D}{\sin. B} + \frac{\sin. D\,(1 - \sin^2. B)}{\sin. B}}{\cos. B \times \cos. D}$$

of, eindelijk:

$$\cos. U = \frac{\sin. H - \sin. B \times \sin. D}{\cos B \times \cos. D} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Uit welke vergelijkingen (1) en (2) blijkt, hoe het azimuth en den uurhoek door berekening worden gevonden. De vergelijking (1) ſtelt het azimuth, uit het zuiden gerekend, voor. Wil men echter het azimuth uit het noorden; dan zal, omdat $\cos. (180^\circ - p) = -\cos. p$ is,

$$\cos. A = \frac{\sin. D - \sin. B \times \sin. H}{\cos. B \times \cos. H}$$

moeten genomen worden.

XXIII. VRAAGSTUK. *Fig. 75 en 76.*

§. 1126. *Onderſtellende, dat, op eene gegevene breedte B, een platte vlakte, naar eenen ſtreek van den horizon, tusſchen het Oosten en Zuiden, gekeerd zij, en eenige graden achter over helle; dat verder de doorſnijding van die vlakte en het horizontale vlak, met die lijn van het Noorden en Zuiden, een gegeven hoek make; indien men dan verder onderſtelt, dat eene lijn, evenwijdig aan de as des hemels getrokken, die vlakte ergens in een punt doorſnijde; de ſcha-*

schaduwen te vinden van die lijn, welke de Zon, op elk uur van den dag, werpt? met andere woorden, eenen zonnewijzer, door berekening, te construeren?

Oplossing *door constructie.* Laat, *fig.* 75, *ABCD* de platte vlakte zijn, op welke de zonnewijzer moet worden geconstrueerd, en welke wij stellen in de horizontale vlakte te liggen. Zij *MN* de streek van het noorden, *MO* en *MZ* de streken van het oosten en zuiden.

Zij verder *AB* de lijn, volgens welke het vlak van den zonnewijzer het vlak van den horizon snijdt, en *ME* loodregt op *AB*; dan is *ME* de streek van den horizon, tusschen het zuiden en het oosten, naar welke het vlak van den zonnewijzer gekeerd is.

Laat de hoek *AMF* de hoek zijn, welke aanwijst, hoe veel het vlak van den zonnewijzer achterover moet hellen.

Verleng *EM* tot aan *L* en beschrijf, uit *M*, als middelpunt, met *ML* als straal, den cirkelboog *LF*. Indien men dan, door *F*, de lijn *FGHIK*, evenwijdig aan *AB*, trekt; dan zal de regthoek *ABKG* de horizontale projectie van het zonnewijzervlak op het horizontale vlak zijn; *KG* de horizontale projectie van *CD*, en het punt *H* die van het punt *L*.

Want, indien men den regthoekigen driehoek *MHF*, om de zijde *MH*, laat omdraaijen, tot dat deszelfs vlak regthoekig op het vlak van den horizon staat, en dan voorts het zonnewijzervlak *ABCD*, om de lijn *AB*, tot dat eindelijk de lijn *ML* (die altijd in het vlak van den regtopstaanden driehoek *MAF* blijft,) langs *MF*, en het punt *L* in *F* valt; dan zal het zonnewijzervlak den stand en de helling verkregen hebben, die men aan hetzelve voornemens is te geven.

Om de lijn *MR* te vinden, volgens welke de middagvlakte het zonnewijzervlak snijdt, zoo trekke men vooreerst de lijn *IS*, loodregt op *MI*, en, door het punt *I*, de lijn *RN*, loodregt op *AB*; dan zal, indien men de lijn *MR* trekt, die lijn *MR* de begeerde lijn van doorsnijding zijn.

Want, indien men *NQ*, evenwijdig aan *MF* trekt, en $IS = IQ$ neemt; dan zijn de driehoeken *NIQ* en *MHG* gelijk- en gelijkvormig, en bijgevolg *hoek ANQ* = *hoek AMF*. Wanneer men dus de regthoekige driehoeken *NIQ* en *MIS*, om derzelver grondzijden *NI* en *MI*, laat omdraaijen, tot dat zij beide loodregt op de horizontale vlakte staan; dan zal *IQ* langs *IS*, *NQ* langs *NR*, de punten *Q*, *R* en *S*, in elkander, en de lijn *MS* langs de lijn *MR* vallen; en, daar het vlak van den driehoek *MIS* in de middagvlakte valt, *zoo zal MR de lijn zijn, volgens welke de middagvlakte het zonnewijzervlak snijdt.*

Laat de hoek *MTS* gelijk genomen worden aan de Noorder-breedte van de plaats, alwaar men den zonnewijzer wil plaatsen. Indien men dan den driehoek *TMS*, om de zijde *TM*, laat omdraaijen, tot dat hij loodregt op den horizon staat; dan zal hij in de middagvlakte liggen, en *MS* zal dan, zoo als wij reeds gezien hebben, langs *MR* vallen. De lijn

lijn *TS* zal evenwijdig aan de as des hemels loopen; en, wegens de groote afstand van de Zon tot de Aarde, voor de as des hemels zelve kunnen gehouden worden.

Indien men dan van dun ijzer, in de plaats van de lijn *TS*, eene stift of stijl plaatst; dan zal de schaduw van dien stijl de uren van den dag aanwijzen; en zoo die schaduw langs de lijn *MR* valt; *dan zal het, aangezien beide lijnen TS en MR in het vlak van den middagscirkel liggen, middag zijn.* De lijn *MR* is alzoo de *middaglijn* op het zonnewijzervlak, en de lijn *TS* de *stijl* of *schaduwwijzer.*

Om nu dien stijl behoorlijk op het vlak van den zonnewijzer te plaatsen, en voorts de schaduwlijnen der verschillende uren te vinden, zoo is het noodig: *dat men de projectie van de lijn TS op de zonnewijzervlakte vinde.* Die projectie nu zal gevonden zijn, wanneer men de projectie van *T* op de zonnewijzervlakte zal gevonden hebben.

Aangezien die projectie gevonden wordt, wanneer men, uit het punt *T*, eene loodlijn op het zonnewijzervlak *ABCD* laat vallen; zoo trekke men, uit het punt *T*, de lijn *Tab*, loodregt op *AB*; en, *dac*, evenwijdig aan *MF* getrokken hebbende, *Tc* loodregt op *dac*. Indien men dan *at* = *ac* neemt, en de lijn *Rt* trekt; dan zal *t* de projectie van *T* en *tR* de projectie van den stijl op de zonnewijzervlakte *ABCD* zijn.

Want, indien men het vlak van den driehoek *Tac*, om de lijn *Ta*, naar beneden, laat omdraaijen; dan zal (omdat *hoek Aad* = *hoek FMA* is,) de lijn *dac* langs de lijn *tab* vallen; en, omdat *at* = *ac* is, het punt *c* in *t*; het punt *c* of *t* zal dan de projectie van *t*, en gevolgelijk de lijn *Rt* de projectie van *ST*, op het zonnewijzervlak *ABCD* zijn.

De hoek *MRt* is de hoek, welken de projectie van den stijl met de middagsschaduw *MR* maakt; en, indien men *te* loodregt op *Rt* stelt, en, *te* = *Tc* gemaakt hebbende, de lijn *Re* trekt; dan zal de hoek *tRe* de hoek zijn, welken de stijl *TS* met deszelfs projectie *Rt* maakt; *men heeft dus alles bekend, wat noodig is, om den stijl of schaduwwijzer behoorlijk op het vlak ABCD te plaatsen.*

Er blijft nu nog over: *dat de schaduwen, welke de stijl, van uur tot uur, werpt, bepaald worden.*

Men trekke, door eenig punt *H* van de projectie *Rt* van den stijl, (zie *fig.* 76,) in welke de lijnen, die voor het vervolg van de oplossing onnoodig zijn, zijn weggelaten, en de driehoek *TMS* of *RMT* op het vlak *ABCD* is neergelegd,) eene onbepaalde loodlijn *GHI*, welke de middaglijn, in het punt *K*, doorsnijdt; en, door het punt *K*, eene lijn *VLKW*, loodregt op *RT*. Indien men dan den driehoek *RMT* in zijne ware stelling brengt, zoodanig, dat *RT* in *Rt* geprojecteerd is; dan zullen, in dien stand, de lijnen *GKI* en *VKW* een vlak voorstellen, hetwelk loodregt op den stijl of de as des Hemels staat, en derhalve evenwijdig loopt aan het vlak van de nachteveningen, voor welke hetzelve ook kan worden gehouden.

Want, laat men den driehoek *RMT*, om de lijn *MR*, omdraaijen, tot

tot dat hij in zijn vereischten stand kome, of *R T* in *R t* geprojecteerd is; dan zal het vlak, dat door de lijn *G H I* en het punt *L* gaat, loodregt op *R T* staan, omdat *V L W*, gedurende de beweging, loodregt op de lijn *R T* blijft; en de lijn, die van *L* tot *H* getrokken wordt, zal loodregt op *G H I* vallen.

Indien wij derhalve uit *K*, met *K L*, als straal, eenen cirkelboog beschrijven, die *R t* in *l* snijdt, en men den driehoek *K H l*, om *K H*, laat omdraaijen; tot dat het punt *l* in *L* valt; dan zal het vlak van dien driehoek, onbepaaldelijk uitgestrekt zijnde, het vlak van de nachteveningen voorstellen, dat nu, zoo als wij boven reeds gezegd hebben, het zonnewijzervlak, volgens de lijn *G H I*, snijdt.

Men verbeelde zich, dat dit vlak der nachteveningen wederom in het vlak *A B C D* zij nedergelegd, en men beschrijve, uit *l*, als middelpunt, met *l H*, als straal, eenen cirkel; dan zal deze de lijn *l K* in het punt *a* snijden; *en dit punt a zal dan, met de lijnen R M en R T, in de middagvlakte liggen.*

De uurlijnen, of de schaduwlijnen der uren, worden nu aldus gevonden. Zij de boog *a b* één twaalfde gedeelte van den omtrek. Men trekke de lijn *l b c*, die *G H I* in *c* doorsnijdt; *dan zal de lijn R c de schaduw zijn, welke de stijl des namiddag, ten twee uren, werpt.*

Want, wanneer men het vlak van dien cirkel, en het vlak van den driehoek *R M T*, het eerste, om de lijn *G H I*, en het tweede, om de lijn *R M*, laat omdraaijen, tot dat de punten *L* en *l* in elkander vallen; dan zal *R T* evenwijdig aan de as des hemels, en het vlak *G H I l* evenwijdig aan het vlak van de nachteveningen loopen, of wel voor die as en dat vlak zelve kunnen gehouden worden. Indien men nu weet, dat de Aarde met eene eenparige beweging om hare as draait, en, om die reden, de Zon, in den tijd van vier-en-twintig uren, met de geheele hemelruimte eenparig schijnt om te wentelen; dan zal men de grond van het laatste gedeelte der constructie inzien en kunnen nagaan: hoe de schaduw van den stijl of de hemelas, voor al de overige uren van den dag, bepaald worden.

Uit deze constructie zal men gemakkelijk kunnen afleiden: 1°. hoe dezelve moet worden ingerigt, wanneer het vlak van den zonnewijzer voorover helt. 2°. Wanneer het vlak gekeerd is naar eene streek *M E*, die tusschen het zuiden en het westen, tusschen het westen en het noorden, en tusschen het noorden en het oosten valt. Eenvoudiger wordt de constructie, wanneer de vlakken der zonnewijzers verticaal staan. Nog eenvoudiger, wanneer zij precies tegen het zuiden, het noorden, het oosten of het westen zijn gekeerd, en ook, wanneer het vlak van den zonnewijzer horizontaal ligt. Zich in zulke soort van constructien te oefenen, is ten hoogsten aan te raden; aangezien men daardoor eene groote vlugheid in het inzien van de eigenschappen der ligchamelijke uitgebreidheden verkrijgt.

OPLOSSING *door berekening.* Hoe eenvoudig echter de constructien zijn,

is de berekening (wanneer men op de naauwkeurigheid acht geeft,) verre te verkiezen.

Zij, in *fig.* 75, $MF = ML = NR = ab = 1$. Wij nemen die lijn gelijk aan de éénheid. Eigenlijk is die lijn geheel willekeurig; men onderstelt eene éénheid, die ten naauwkeurigste in tiendeelige deelen verdeeld is.

Men stelle de gegevene hoeken, als volgt:

$$\text{hoek } MTS = B, \text{ hoek } ZME = a, \text{ en hoek } AMF = i$$

en de onbekende hoeken,

$$\text{hoek } MRN = p, \text{ en hoek } MSI = q$$

dan is, in den regthoekigen driehoek MHF, in welken $MF = 1$ is, volgens de constructie,

$$MH = NI = \sin. i, \text{ en } FH = QI = SI = \cos. i$$

In den regthoekigen driehoek MHI, in welken hoek $HMI = a$ is, is, volgens de II. *Stelling*,

$$HI = MN = MH \times \tan g. a = \sin. i \times \tan g. a$$

$$\text{en } MI = \frac{MH}{\cos. a} = \frac{\sin. i}{\cos. a}$$

In den regthoekigen driehoek MRN, in welken $NR = ML = 1$ is, is

$$MN = \tan g. p = \sin. i \times \tan g. a$$

$$MR = MS = \sec. p = \sqrt{(1 + \sin^2. i \times \tan g^2. a)}$$

In den regthoekigen driehoek MIS, is

$$\tan g. MSI = \tan g. OMS = \frac{MI}{IS} = \frac{\sin i}{\cos. a} \times \frac{1}{\cos. i} = \frac{\tan g. i}{\cos. a}$$

$$\text{of } \tan g. q = \frac{\tan g. i}{\cos. a}$$

In den regthoekigen driehoek TIS, is

$$TS = \frac{IS}{\sin. ITS} = \frac{\cos. i}{\sin. B}$$

In den scheefhoekigen driehoek FMS, die gelijk- en gelijkvormig is aan den driehoek RMT, in *fig.* 76, is

$$\text{hoek } MTS = B, \text{ hoek } TMS = 90^\circ + q, \text{ en hoek } TSM = 90^\circ - (B + q)$$

en wij hebben in denzelven, volgens de III. *Stelling*,

$$\sin. TMS : \sin. TSM = TS : TM$$

$$\sin. (90^\circ + q) : \sin. [90^\circ - (B + q)] = \frac{\cos. i}{\sin. B} : TM$$

$$\cos. q : \cos. (B + q) = \frac{\cos. i}{\sin. B} : TM$$

$$TM = \frac{\cos. i \times \cos. (B + q)}{\sin. B \times \cos. q} = \tan g. M$$

In

In den regthoekigen driehoek TMa, in welken hoek $MTa = a$ is, heeft men verder:

$$aM = TM \times sin.a, \text{ en } aT = TM \times cos.a$$

$$\text{of } aM = tang.M \times sin.a, \text{ en } aT = tang.M \times cos.a$$

In den regthoekigen driehoek Tac, in welken de hoek $aTc = i$ is, heeft men, als volgt:

$$ac = aT \times sin.i = tang.M \times cos.a \times sin.i$$

$$Tc = aT \times cos.i = tang.M \times cos.a \times cos.i$$

Nu is $ab = ML = 1$ en $at = ac$, volgens de constructie, en daarom is,

$$bt = 1 + tang.M \times cos.a \times sin.i$$

$$aM = bL = tang.M \times cos.a$$

$$bR = bL + LR = bL + MN = tang.M \times cos.a + sin.i \times tang.a$$

In den regthoekigen driehoek tbR, is

$$tang.btR = tang.tRN = \ldots.$$

$$\frac{bR}{bt} = \frac{tang.M\,cos.a + sin.i\;tang.a}{1 + tang.M\,cos.a\,sin.i} = tang\,N$$

en in den regthoekigen driehoek Rte, in welken, volgens de constructie, $te = Tc$ is, is

$$tang.tRe = \frac{te}{tR} = \frac{tang.M\,cos.a\,cos.i}{tR}$$

$$\text{en } tR = bt : sin.bTR = bt : sin.N$$

$$\text{of } tR = \frac{1 + tang.M\,cos.a\,sin.i}{sin.N}$$

$$tang.tRe = \frac{tang.M\,sin.N\,cos.a\,cos.i}{1 + tang.M\,cos.a\,sin.i}$$

Wij hebben nu, in *fig.* 75, alle lijnen en hoeken berekend, welke den stand van de middaglijn op het zonnewijzervlak, de projectie van den stijl en den hoek, dien hij met het zonnewijzervlak maakt, ten naauwkeurigste bepalen. Nemen wij nu, dat in *fig.* 76, al die lijnen zijn overgebragt, en stellen wij, na ergens door een punt H eene onbepaalde lijn GHI, loodregt door de projectie van den stijl getrokken te hebben,

$$HR = a, \text{ hoek } HRK = r, \text{ en hoek } LRH = s$$

hoeken, welke uit de voorgaande berekening bekend zijn; dan is in den regthoekigen driehoek RHK,

$$HK = a \times tang.r$$

en, in den regthoekigen driehoek LHR, die regthoekig in L is,

$$LH = lH = a \times sin.s$$

en, eindelijk, in den regthoekigen driehoek lHK,

$$tang.HlK = \frac{HK}{lH} = \frac{a \times tang.r}{a \times sin.s} = \frac{tang.r}{sin.s}$$

ftellen wij dien hoek $HlK = h$; dan is

$$tang.\, h = tang.\, r : sin.\, s$$

Laat nu eenigen uurhoek, na den middag, den hoek $Klc = u$ gefteld worden; dan is *hoek* $Hlc = h + u$, en wij hebben dan, in den regthoekigen driehoek Hlc:

$$Hc = Hl \times tang.\, (h + u)$$

of $$Hc = a \times sin.\, s \times tang.\, (h + u)$$

en, wanneer men de fchaduw van de voormiddag-uren wil hebben,

$$Hc = a \times sin.\, s \times tang.\, (h - u)$$

door deze vergelijking, zal men op de lijn GHI, naar den eenen of anderen kant, van uur tot uur, of van half uur, tot half uur, of van kwartier tot kwartier, de punten c kunnen vinden, van welke tot aan het punt R de lijnen Rc getrokken zijnde, de zonnewijzer zal geconftrueerd zijn.

XXIV. Vraagstuk. *Fig. 77.*

§. 1127. *Wanneer men van eenen driehoek de fom of het verfchil van twee zijden* $BC = a$ *en* $AC = b$, *met de derde zijde* $AB = c$, *en den hoek C over die zijde gegeven zijn; zoo vraagt men: de onbekende hoeken en zijden te vinden?*

Oplossing. Volgens de III. *Stelling*, is

$$(a,\, b,\, c,) :: (sin.\, A,\, sin.\, B,\, sin.\, C)$$

uit welke gedurige evenredigheid terftond volgt:

$$a + b : c = sin.\, A + sin.\, B : sin.\, C$$

Nu is, zie VI. *Stell.* XI. *B.* en *Gev.* III. *Stell.* XI. *B.*

$$sin.\, A + sin.\, B = 2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(A + B)\, cos.\, \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$sin.\, C = 2\, sin.\, C \times cos.\, \tfrac{1}{2} C$$

derhalve wordt

$$a + b : c = sin.\, \tfrac{1}{2}(A + B) \times cos.\, \tfrac{1}{2}(A - B) : sin.\, \tfrac{1}{2} C \times cos.\, \tfrac{1}{2} C$$

Nu is $A + B = 180^\circ - C$; derhalve is $\tfrac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C$ en $sin.\, \tfrac{1}{2}(A + B) = sin.\, (90^\circ - \tfrac{1}{2} C) = cos.\, \tfrac{1}{2} C$; de voorgaande evenredigheid wordt dan:

$$a + b : c = cos.\, \tfrac{1}{2} C \times cos.\, \tfrac{1}{2}(A - B) : sin.\, \tfrac{1}{2} C \times cos.\, \tfrac{1}{2} C$$

of de termen van de tweede reden door $cos.\, \tfrac{1}{2} C$ deelende, en de redens omkeerende:

$$c : a + b = sin.\, \tfrac{1}{2} C : cos.\, \tfrac{1}{2}(A - B)$$

Men zal, op dezelfde wijze werkende, verkrijgen:

$$c : a - b = cos.\, \tfrac{1}{2} C : sin.\, \tfrac{1}{2}(A - B)$$

Het blijkt, uit deze evenredigheden, welke men ook uit de formulen voor de II. *Oplosfing* van het III. *Geval*, *Bladz.* 138, kan afleiden: *dat elke zijde eens driehoeks tot de fom van zijne twee andere zijden ftaat,*

ſtaat, gelijk de ſinus van de helft van den hoek, over de eerſte zijde, tot de coſinus van het halve verſchil der hoeken, over de twee andere zijden; — en wederom, — *dat elke zijde tot het verſchil der twee andere zijden ſtaat, gelijk de coſinus van den halven hoek over die zijde tot de ſinus van het halve verſchil der twee andere hoeken.*

1°. Wanneer nu de ſom $a+b$, benevens de zijde c met den overſtaanden hoek C gegeven zijn; dan heeft men:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a+b}{b}\times \sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$A=(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)+\tfrac{1}{2}(A-B),\text{ en } B=(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)-\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$a-b=\frac{c\times \sin.\tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos.\tfrac{1}{2}C}$$

$$a=\tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}(a-b),\text{ en } b=\tfrac{1}{2}(a+b)-\tfrac{1}{2}(a-b)$$

2°. Is $a-b$, met c en C, gegeven; dan zal

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{c}\times \cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$A=(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)+\tfrac{1}{2}(A-B),\text{ en } B=(90^\circ-\tfrac{1}{2}C)-\tfrac{1}{2}(A-B)$$

$$a+b=\frac{c\times \cos.\tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin.\tfrac{1}{2}C}$$

$$\text{en } a=\tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}(a-b),\text{ en } b=\tfrac{1}{2}(a+b)-\tfrac{1}{2}(a-b)$$

zijn; door welke vergelijkingen, de onbekende zijden en hoeken in getallen zullen kunnen berekend worden.

XXV. Vraagstuk. *Fig.* 78.

§. 1128. *De opſtaande zijden AC en BC, of b en a, benevens den tophoek C, gegeven zijnde, te vinden: hoe ver het toppunt C van het midden van de baſis verwijderd is? alsmede de hoeken, welke de lijn CD, die tot midden van de baſis loopt, met de opſtaande zijden maakt?*

Oplossing. Men ſtelle $CD=d$; *hoek* $ACD=r$ en *hoek* $BCD=s$; dan is (VII. *Stell.*) $c^2=a^2+b^2-2ab\times\cos.C$, en (XX. *Stell.* III. *B.*) $c^2=2a^2+2b^2-4d^2$: uit deze twee vergelijkingen volgt:

$$4d^2=a^2+b^2+2ab\times\cos.C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

waardoor de waarde van d kan gevonden worden; en welke, indien men dezelve, met behulp van het II. *Gev.* III. *Stell.* XI. *B.*, onder de volgende gedaante

$$4d^2=(a+b)^2\times\left\{1-\frac{4ab\times\sin^2.\tfrac{1}{2}C}{(a+b)^2}\right\} \quad . \quad . \quad (\beta)$$

ſtelt, en $4ab\times\sin^2.\tfrac{1}{2}C:(a+b)^2$ gelijk aan $\cos.\omega$ maakt, door de gewone Logarithmus-tafel, zal kunnen berekend worden: doch men kan voor de waarde van d eene kortere en ſierlijker uitdrukking vinden. Indien men de evenredigheden

$$\tfrac{1}{2}c : b = sin.\,r : sin.\,D$$
$$a : \tfrac{1}{2}c = sin.\,D : sin.\,s$$

welke de driehoeken *ADC* en *BCD* geven, met elkander vermenigvuldigt; dan vindt men:

$$a : b = sin.\,r : sin.\,s$$

evenredigheid, welke ons leert: *dat de opstaande zijden eens driehoeks wederkeerig evenredig zijn met de sinussen der hoeken, in welke de lijn, die de basis midden door deelt, den tophoek verdeelt.*

Uit deze evenredigheid volgt: (VIII. *Stell.* II. *B.* en VII. *Stell.* XI. *B.*)

$$a + b : a - b = tang.\,\tfrac{1}{2}(r + s) : tang.\,\tfrac{1}{2}(r - s)$$

derhalve zal

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(r - s) = \frac{a-b}{a+b} \times tang.\,\tfrac{1}{2}(r+s) = \frac{a-b}{a+b} \times tang.\,\tfrac{1}{2}C \;(\gamma)$$

zijn; maar uit diezelfde evenredigheid volgt nog verder:

$$a + b : 2a = sin.\,r + sin.\,s : 2\,sin.\,r$$
$$a + b : 2b = sin.\,r + sin.\,s : 2\,sin.\,s$$

of, omdat (VI. *Stell.* XI. *B.*) $sin.\,r + sin.\,s = 2\,sin.\,\tfrac{1}{2}(r+s) \times cos.\,\tfrac{1}{2}(r-s) = sin.\,\tfrac{1}{2}C \times cos.\,\tfrac{1}{2}(r-s)$ en $r + s = C$ is,

$$a + b : 2a = sin.\,\tfrac{1}{2}C \times cos.\,\tfrac{1}{2}(r-s) : sin.\,r$$
$$a + b : 2b = sin.\,\tfrac{1}{2}C \times cos.\,\tfrac{1}{2}(r-s) : sin.\,s$$

Het product van de overeenkomstige termen dezer evenredigheden geeft:

$$(a+b)^2 : 4ab = sin^2.\,\tfrac{1}{2}C \times cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s) : sin.\,r \times sin.\,s$$

en daarom is

$$\frac{4ab \times sin^2.\,\tfrac{1}{2}C}{(a+b)^2} = \frac{sin.\,r \times sin.\,s}{cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s)}$$

Men kan dan de vergelijking (β), in de volgende veranderen:

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \left\{1 - \frac{sin.\,r \times sin.\,s}{cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s)}\right\}$$

maar (V. *Stell.* VIII. *B.*) $sin.\,r \times sin.\,s = \tfrac{1}{2}cos.\,(r-s) - \tfrac{1}{2}cos.\,(r+s) = \tfrac{1}{2}cos.\,(r-s) - \tfrac{1}{2}cos.\,C$ zijnde, zal de laatste wederom in

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \left\{\frac{cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s) - \tfrac{1}{2}cos.\,(r-s) + \tfrac{1}{2}cos.\,C}{cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s)}\right\}$$

veranderen. Nu is, (II. *Gev.* III. *Stell.* XI *B.*,) $cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}cos.\,(r-s)$, en, om die reden, $cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s) - \tfrac{1}{2}cos.\,(r-s) = \tfrac{1}{2}$, en

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \left\{\frac{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}cos.\,C}{cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s)}\right\}$$

welke vergelijking, wanneer men, in plaats van $\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}cos.\,C$, (II. *Gev.* III. *Stell.* VIII. *B.*) schrijft $cos^2.\,\tfrac{1}{2}C$, in

$$4d^2 = (a+b)^2 \times \frac{cos^2.\,\tfrac{1}{2}C}{cos^2.\,\tfrac{1}{2}(r-s)}\text{; of, in } d = \tfrac{1}{2}(a+b) \times \ldots$$

$$\frac{cos.\,\tfrac{1}{2}C}{cos.\,\tfrac{1}{2}(r-s)} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(\delta)$$

ver-

verandert; ons leerende: *dat de lijn, welke de basis midden door deelt, gelijk is aan de halve som der opstaande zijden, vermenigvuldigd met de cosinus van den halven ingesloten hoek, en gedeeld door de cosinus van het halve verschil van deszelfs deelen.* En het blijkt nu: dat, wanneer a, b en C gegeven zijn, de afstand van het toppunt tot het midden van de basis, benevens de hoeken, welke de lijn, uit den tophoek tot het midden van de basis loopende, met de opstaande zijden maakt, door de vergelijkingen:

$$tang.\tfrac{1}{2}(r-s)=\frac{a-b}{a+b}\times tang.\tfrac{1}{2}C,\ \text{en}\ d=\tfrac{1}{2}(a+b)\times\frac{cos.\tfrac{1}{2}C}{cos.\tfrac{1}{2}(r-s)}$$

zullen gevonden worden.

XXVI. VRAAGSTUK. *Fig.* 79.

§. 1129. *De opstaande zijden en den tophoek eens driehoeks gegeven zijnde, de loodlijn, welke, uit den tophoek, op de basis valt, benevens de hoeken, welke zij met de opstaande zijden maakt, te vinden?*

OPLOSSING. Men onderstelle CD loodregt op AB, en behoude dezelfde notatie, als in het voorgaande Vraagstuk; dan is, volgens de bekende eigenschappen des driehoeks, (VIII. *Stell.* III. *B.* en IX. *Stell.*) $cd=ab\times sin.C$; derhalve $d=ab\times sin.C:c$, of $d^2=a^2b^2\times sin^2.C:c^2$, maar nu is (VII. *Stell.*) $c^2=a^2-2ab\times cos.C+b^2$, en men verkrijgt derhalve:

$$d^2=\frac{a^2b^2\times sin^2.C}{a^2-2ab\times cos.C+b^2}\quad\ldots\ldots\quad(\alpha)$$

men zal door deze formule de loodlijn vinden.

De regthoekige driehoeken ADC en BDC, geven (II. *Stell.*) $d=b\times cos.r=a\times cos.s$; derhalve

$$a:b=cos.r:cos.s$$

$$a+b:a-b=cos.r+cos.s:cos.r-cos.s$$

dat is, volgens de VIII. *Stell.* XI. *B.*

$$a+b:a-b=cot.\tfrac{1}{2}(r+s):tang.\tfrac{1}{2}(r+s)$$

of, dat hetzelfde is,

$$a+b:a-b=cot.\tfrac{1}{2}C:tang.\tfrac{1}{2}(r-s)$$

waaruit men, voor de waarde van de tangens van het halve verschil der deelen van den tophoek, vindt:

$$tang.\tfrac{1}{2}(r-s)=\frac{a-b}{a-b}\times cot.\tfrac{1}{2}C\quad\ldots\ldots\quad(\beta)$$

Volgens de IV. *Oplosf.* III. *Gev.* §. 1084, *Bladz.* 141, kan de vergelijking (α) onder de volgende gedaante

$$d^2=\frac{a^2b^2\times sin^2.C}{(a+b)^2\times\left\{1-\frac{4ab}{(a+b)^2}\times cos^2.\tfrac{1}{2}C\right\}}\quad\ldots\quad(\lambda)$$

 ge-

gebragt worden, en is, onder dien vorm gebragt zijnde, voor eene bijzondere herleiding vatbaar.

Uit de reeds opgenoemde regthoekige driehoeken, *ADC* en *BCD*, volgt: (II. *Stell.* en VIII. *Stell.* II. *B.*)

$$a+b : a = \cos. r + \cos. s : \cos. r$$
$$a+b : b = \cos. r + \cos. s : \cos. s$$

of, volgens de VI. *Stell.* XI. *Boek*,

$$a+b : a = 2\cos. \tfrac{1}{2} C \times \cos. \tfrac{1}{2}(r-s) : \cos. r$$
$$a+b : b = 2\cos. \tfrac{1}{2} C \times \cos. \tfrac{1}{2}(r-s) : \cos. s$$

het product dezer evenredigheden geeft:

$$(a+b) : ab = 4\cos^2. \tfrac{1}{2} C \times \cos^2. \tfrac{1}{2}(r-s) \times \cos. r \times \cos. s$$

en hieruit volgt dan:

$$\frac{4ab \times \cos^2. \frac{1}{2} C}{(a+b)^2} = \frac{\cos. r \times \cos. s}{\cos^2. \frac{1}{2}(r-s)}$$

of, volgens de V. *Stell.* VIII. *B.*

$$\frac{4ab \times \cos^2. \frac{1}{2} C}{(a+b)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cos.(r-s) + \frac{1}{2}\cos C}{\cos^2. \frac{1}{2}(r-s)}$$

Hieruit volgt nu:

$$1 - \frac{4ab \times \cos^2. \frac{1}{2} C}{(a+b)^2} = \frac{\cos^2 \frac{1}{2}(r-s) - \frac{1}{2}\cos.(r-s) - \frac{1}{2}\cos. C}{\cos^2. \frac{1}{2}(r-s)}$$

welke, met behulp der Verg. (32) en (33), II. *Gev.* III. *Stell.* XI. *B.* onder de volgende gedaante kan gebragt worden,

$$1 - \frac{4ab \times \cos^2. \frac{1}{2} C}{(a+b)^2} = \frac{\sin^2. \frac{1}{2} C}{\cos^2. \frac{1}{2}(r-s)}$$

brengende nu deze waarde in vergelijking (γ) over; dan verkrijgt men:

$$d = \frac{2ab}{a+b} \times \cos. \tfrac{1}{2} C \times \cos. \tfrac{1}{2}(r-s) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

Het blijkt dan, uit deze oplossing: dat de gevraagde loodlijn, en de deelen, waarin zij den tophoek verdeelt, door de twee vergelijkingen

$$1^\circ. \quad \text{tang.} \tfrac{1}{2}(r-s) = \frac{2ab}{a+b} \times \cot. C$$

$$2^\circ. \quad d = \frac{2ab}{a+b} \times \cos. \tfrac{1}{2} C \times \cos. \tfrac{1}{2}(r-s)$$

zullen kunnen berekend worden.

XXVII. VRAAGSTUK. *Fig.* 80.

§. 1130. *Om den afstand van de uiteinden van eene basis AB, door dadelijke meting, te vinden, is men, wegens beletselen, verpligt geweest, van de regte lijn AB afte wijken, en de geknikte lijn ACB te meten; te weten, van A tot C, in eene regte lijn b =*
6839m, 7;

6839^m,7; *en van C tot B, in eene lijn a* = 9784^m,43; *wanneer men nu bevonden heeft, dat de hoek ACB* = 175° 17′ 32″,5 *bedraagt; vraagt men: eene geschikte formule te vinden, om, in dit geval, zonder den driehoek ACB op de gewone wijze op te lossen, den afstand van A tot B, ten naauwkeurigste, te vinden?*

OPLOSSING. Volgens de V. *Oplossing* III. *Geval*, is:

$$c^2 = (a+b)^2 \times \left\{ 1 - \frac{4\,a\,b\,cos^2.\,\frac{1}{2}C}{(a+b)^2} \right\}$$

Stelt men nu $\frac{4\,a\,b \times cos^2\,\frac{1}{2}\,C}{(a+b)^2} = \Omega$; dan wordt

$$c = (a+b) \times \sqrt{\left\{ 1 - \Omega \right\}} = (a+b) \times (1-\Omega)^{\frac{1}{2}}$$

of, wanneer men den factor $(1-\Omega)^{\frac{1}{2}}$ ontwikkelt,

$$c = (a+b) \times \left\{ 1 - \tfrac{1}{2}\Omega - \tfrac{1}{8}\Omega^2 - \tfrac{1}{16}\Omega^3 - \tfrac{5}{128}\Omega^4 - \tfrac{7}{256}\Omega^5 \right.$$

$$\left. - \tfrac{21}{1024}\Omega^6 - \tfrac{33}{2048}\Omega^7 - \tfrac{429}{32768}\Omega^8 - enz. \right\}$$

welke reeks onder deze gedaante kan gebragt worden:

$$c = (a+b) - (a+b) \times \left\{ \tfrac{1}{2}\Omega + \tfrac{1}{8}\Omega^2 + \tfrac{1}{16}\Omega^3 + \tfrac{5}{128}\Omega^4 + enz. \right\}$$

of, stellende $\frac{1}{2}\Omega + \frac{1}{8}\Omega^2 + enz. = r$ en $(a+b) \times r = s$,

$$c = a + b - s$$

Die reeks zal zooveel te sterker zamenloopen, naarmate Ω kleiner wordt; en Ω wordt zooveel te kleiner, als de hoek *C* minder van 180° verschilt. Volgens deze oplossing, wordt nu de begeerde afstand aldus berekend.

GEGEVEN a = 9784^m,43 $\qquad C$ = 175° 17′ 32″,5
b = 6839^m,70 $\qquad \frac{1}{2}C$ = 87° 38′ 46″,25
$a+b$ = 16624^m,13 $\qquad 90° - \frac{1}{2}C$ = 2° 21′ 13″,75
nu is . . . $cos.\,\frac{1}{2}C = sin.\,(90° - \frac{1}{2}C)$

Log. a = 3,9905356 $\qquad$ *Log. sin.* $(90° - \frac{1}{2}C)$ = 8,6135284
Log. b = 3,8350371 $\qquad$ (2
Log. 4 = 0,6020600 $\qquad$ *Log.* $cos^2.\,\frac{1}{2}C$ = 7,2270568
Log. $cos^2.\,\frac{1}{2}C$ = 7,2270568 $\qquad$ *Log.* $(a+b)$ = 4,2207389
5,6546895 $\qquad$ (2
Log. $(a+b)^2$ = 8,4414778* af $\qquad$ *Log.* $(a+b)^2$ = 8,4414778*

Log. Ω = −3,2132117 . . . derhalve Ω = 0,0016338482
Log. Ω² = −6,4264234 . . . . Ω² = 0,0000026694
Log. Ω³ = −9,6396351 . . . . Ω³ = 0,0000000044
derhalve ½Ω = 0,0008169241
⅛Ω² = 0,0000003337

$$\tfrac{1}{16}\Omega = 0,0000000003$$

$$\tfrac{1}{2}\Omega + \tfrac{1}{8}\Omega^2 + \tfrac{1}{16}\Omega^3 + enz. = 0,0008172581 = r$$

$$Log.(a+b) = +4,2207389 \qquad a+b = 16624^m,13$$

$$Log.\,r = -4,9123592 \qquad s = 13^m,5862$$

$$Log.\,s = 1,1330981 \qquad c = 16610^m,5438$$

Deze oplossing is omslagtiger dan de gewone; maar zij geeft eene grootere naauwkeurigheid; waarom men dan ook, onder zulke omstandigheden, zich van dezelve, in het werkdadige, bedient.

XXVIII. VRAAGSTUK.

§. 1131. *De straal van eenen cirkel gegeven zijnde, de zijden, de apothema en de inhouden der in- en omgeschrevene regelmatige n-hoeken te vinden?*

OPLOSSING. Stellen wij den straal des gegeven cirkels $= r$, de zijde van den ingeschrevenen veelvoek $= a$; de apothema $= h$; den inhoud $= I$, de zijde van den omgeschrevenen veelhoek $= a'$; den inhoud $= I'$; het getal der hoeken of zijden $= n$; dan is de centerhoek $= \frac{360^\circ}{n}$; de halve centerhoek $= \frac{180^\circ}{n}$.

Met betrekking tot den ingeschrevenen veelhoek, zijn $\frac{1}{2}a$ en h de regthoekszijden, en r de hypothenusa van eenen regthoekigen driehoek, en wij hebben dus: (II. *Stell.*)

$$1^\circ.\quad a = 2r \times sin.\frac{180^\circ}{n}; \quad 2^\circ.\quad h = r \times cos.\frac{180^\circ}{n}$$

$$3^\circ.\quad I = n \times \tfrac{1}{2}ah = nr^2 \times sin.\frac{180^\circ}{n} \times cos.\frac{180^\circ}{n}$$

of, volgens het I. *Gev.* III. *Stell.* VIII. *B.*

$$4^\circ.\quad I = \tfrac{1}{2}nr^2 \times sin.\frac{360^\circ}{n} = \tfrac{1}{4}na^2 \times cot.\frac{180^\circ}{n}$$

En, uit deze vergelijkingen, volgt verder:

$$5^\circ.\quad r = \tfrac{1}{2}a \times cosec.\frac{180^\circ}{n}; \quad 6^\circ.\quad r = h \times sec.\frac{180^\circ}{n}$$

Met betrekking tot den omgeschrevenen veelhoek, welks apothema $= r$ is, is (I. *Stell.*)

$$7^\circ.\quad a' = 2r \times tang.\frac{180^\circ}{n}; \quad 8^\circ.\quad I' = n \times r^2 \times tang.\frac{180^\circ}{n}$$

Met behulp dezer vergelijkingen, zal men de zijden en inhouden der in- en omgeschrevenen regelmatige n-hoeken vinden, en ook omgekeerd, wanneer, het zij eene zijde, het zij de inhoud van een regel-

gelmatigen veelhoek gegeven is, den ftraal van den cirkel bepalen kunnen, welke, om of in denzelven befchreven is. Wanneer, bij voorbeeld, in de vierde vergelijking, I als bekend wordt aangemerkt, dan zal men vinden:

$$r = \sqrt{\left\{\frac{2\,I}{n \times \sin.\frac{360^\circ}{n}}\right\}} \quad \text{en} \quad a = \sqrt{\left\{\frac{4\,I}{n \times \cot.\frac{180^\circ}{n}}\right\}}$$

waardoor men berekenen zal, met welk eenen ftraal, of met welke zijde, eenen n-hoek, onder eenen gegevenen inhoud, zal moeten gemaakt worden.

XXIX. VRAAGSTUK. *Fig.* 81.

§. 1132. *Eene vergelijking tusfchen de vier zijden en de twee hoekpuntslijnen van eenen onregelmatigen vierhoek te vinden?*

OPLOSSING. Men ftelle $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = p$ en $BD = q$; en verder *hoek* $BAD = \alpha$, *hoek* $DAC = \beta$ en *hoek* $BAC = \gamma$; dan is $\alpha = \beta + \gamma$, en derhalve

$$\cos.\alpha = \cos.\beta \times \cos.\gamma - \sin.\beta \times \sin.\gamma$$

en, door verfchikking der termen,

$$\sin.\beta \times \sin.\gamma = \cos.\beta \times \cos.\gamma - \cos.\alpha$$

Men verheffe de leden dezer vergelijking tot de tweede magt; dan zal men verkrijgen:

$$\sin^2.\beta \sin^2.\gamma = \cos^2.\beta \cos^2.\gamma - 2\cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma + \cos^2.\alpha$$

Nu is, gelijk bekend is,

$$\sin^2.\beta \sin^2.\gamma = (1 - \cos^2.\beta)(1 - \cos^2.\gamma)$$

of $\sin^2.\beta \sin^2.\gamma = 1 - \cos^2.\beta - \cos^2.\gamma + \cos^2.\beta \cos^2.\gamma$

derhalve

$$1 - \cos^2.\beta - \cos^2.\gamma + \cos^2.\beta \cos^2.\gamma = \cos^2.\beta \cos^2.\gamma - 2\cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma + \cos^2.\alpha$$

en dan volgt eindelijk:

$$1 + 2\cos.\alpha \cos.\beta \cos.\gamma = \cos^2.\alpha + \cos^2.\beta + \cos^2.\gamma \quad . \; . \; (A)$$

Deze vergelijking zal nu tot ons oogmerk kunnen dienen; want, uit de driehoeken ABD, ABC en ACD, zal men, zie VII. *Stell.* kunnen opftellen:

$$q^2 = a^2 + d^2 - 2\,a\,d \times \cos.\alpha$$
$$b^2 = a^2 + p^2 - 2\,a\,p \times \cos.\gamma$$
$$c^2 = d^2 + p^2 - 2\,d\,p \times \cos.\beta$$

en uit deze vergelijkingen volgt dan:

$$\cos.\alpha = \frac{a^2 + d^2 - q^2}{2\,a\,d}$$

cos. β

$$cos.\beta = \frac{d^2 + p^2 - c^2}{2dp}$$

$$cos.\gamma = \frac{a^2 + p^2 - b^2}{2ap}$$

Men brenge nu de waarde dezer cosinussen in de vergelijking ($\mathcal{A}$) over; dan zal men, na eenige herleidingen en ontwikkelingen van producten, verkrijgen:

$$\begin{aligned} &+[a^4c^2 + c^4a^2 + b^4d^2 + d^4b^2 + p^4q^2 + q^4p^2] \ldots \\ &+[a^2b^2p^2 + a^2d^2q^2 + b^2c^2q^2 + c^2d^2p^2] \ldots\ldots \\ &-\left\{\begin{matrix} a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 \\ a^2q^2c^2 + a^2p^2q^2 + a^2c^2p^2 + q^2c^2p^2 \\ p^2b^2q^2 + p^2b^2d^2 + p^2q^2d^2 + b^2q^2d^2 \end{matrix}\right\} = 0 \ldots (B) \end{aligned}$$

Door deze vergelijking, in welke de getallen a, b, c, d, p en q op dezelfde wijze voorkomen, en die, om die reden volmaakt symetriek is, wordt de gevraagde betrekking tusschen de zijden en de hoekpuntslijnen voorgesteld.

Niettegenstaande deze vergelijking (B) zeer zamengesteld schijnt te zijn, is dezelve gemakkelijk te onthouden; want

1°. *De zes termen van den eersten regel vindt men (de hoekpuntslijnen als twee overstaande zijden van den vierhoek beschouwende,) door de vierde magt van elke zijde met de tweede magt van de overstaande te vermenigvuldigen.*

2°. *Wanneer men zich de vier driehoeken ABC, BCD, CAD en DAB, afzonderlijk voorstelt; dan bestaan de vier termen op den tweeden regel uit de gedurige producten van de tweede magten van de zijden dezer driehoeken.*

3°. *De twaalf termen, welke in de drie laatste regels staan, en welker som van de som der tien eerste termen moet worden afgetrokken, zijn de producten van de drie op elkander volgende zijden (de hoekpuntslijnen mede onder de zijden tellende.)*

§. 1133. Aanmerking. *Men kan nu gemakkelijk eene formule vinden, door welke wordt aangewezen: hoe de inhoud van den vierhoek van zijne zijden en hoekpuntslijnen afhangt.*

Want, volgens de X. *Stelling*, is

$$2I = ap\,sin.\gamma + 2dp\,sin.\beta$$

en deze vergelijking in het vierkant brengende, zoo verkrijgt men:

$$4I^2 = a^2p^2\,sin^2.\gamma + 2adp^2\,sin.\gamma\,sin.\beta + d^2p^2\,sin^2.\beta \ldots (C)$$

Maar nu is, volgens de bekende beginselen,

$$sin^2.\gamma = 1 - cos^2.\gamma$$

$$sin^2.\beta = 1 - cos^2.\beta$$

$$sin.\beta \times sin.\gamma = cos.\beta\,cos.\gamma - cos.\alpha$$

stelt men die waarden in de vergelijking (C), dan zal men vinden:

$$4\,l^2 = a^2p^2 + d^2p^2 + 2\,a\,d\,p^2 + (\cos.\beta \times \cos.\gamma - \cos.\alpha)$$
$$- a^2p^2 \cos^2.\gamma - d^2p^2 \cos^2.\beta$$

en, ſtelt men in deze de waarden van de coſinusſen boven gevonden, dan zal men verkrijgen:

$$16\,l^2 = 2\,a^2b^2 + 2\,b^2c^2 + 2\,c^2d^2 + 2\,d^2a^2 - 2\,a^2c^2 - 2\,b^2d^2$$
$$- a^4 - b^4 - c^4 - d^4 + 4\,p^2q^2$$

en het zal weinig moeite kosten, om deze vergelijking onder de volgende gedaante te brengen,

$$16\,l^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)$$
$$(a+b+c-d) + 4\,p^2q^2 - 4\,(a\,c + b\,d)^2 \quad . \quad . \quad (D)$$

welke vergelijking wegens derzelver eenvoudigen vorm zeer merkwaardig is.

Stelt men, dat de vierhoek in den cirkel beſchreven is; dan is (XXVIII. *Stell.* V. *B.*) $p\,q = a\,c + b\,d$, en de vergelijking (D) wordt dan dezelfde, die wij, in het I. *Bijv.* op die Stelling, gevonden hebben.

DER-

DERTIENDE BOEK.

Over de Bolvormige Driehoeken, in het algemeen. Ontvouwing van derzelver eerste en voornaamste eigenschappen, uit welke de overeenstemming tusschen derzelver hoeken en zijden blijkt. Oplossing van alle gevallen der regthoekige en scheefhoekige bolvormige driehoeken. Verdere beschouwing van meer bijzondere eigenschappen en kunstgrepen ter berekening van een bolvormigen driehoek. Nuttig gebruik der bolvormige driehoeksmeting in het meten der ligchamen. Verscheidenheid van Vraagstukken, uit welke het gebruik der bolvormige driehoeken in de Aardrijks-, Sterre- en Zeevaartkunde blijkt.

INLEIDING. *Herinnering, uit het VIII. Boek.*

§. 1134. Men weet reeds, uit het laatste gedeelte van het *VIII. Boek* (*I. Deel*), wat bolvormige driehoeken zijn, en hoe derzelver zijden en hoeken kunnen dienen, om de standhoeken van de ribben en de zijvlakken van eenigen drievlakkigen hoek, uit wiens hoekpunt, als middelpunt, de bol beschreven is, in wiens oppervlak de bolvormige driehoek ligt; *om alzoo, in eene enkele eenvoudige figuur, alles bij elkander te hebben, wat tot een drievlakkigen hoek behoort.* De Meetkunst der bolvormige of spherische driehoeken is dus dezelfde, als de Meetkunst der drievlakkige hoeken. *Al de eigenschappen van een bolvormigen driehoek, zijn dan tevens eigenschappen van den drievlakkigen hoek, wiens standhoeken hij voorstelt.*

Overal, waar, zie *fig.* 82, drie lijnen *AM*, *BM* en *CM*, die niet alle drie in hetzelfde vlak liggen, in één punt zamenkomen, bestaat een drievlakkige hoek. Indien men nu, met eenen straal *MD*, naar welgevallen genomen, eenen bol beschrijft; dan zal het gedeelte van het oppervlak van dien bol *DEF*, tusschen de zijvlakken van den drievlakkigen hoek begrepen, de bolvormige driehoek zijn; wiens zijden *DE*, *EF* en *DF* de standhoeken *AMC*, *AMB* en *CMB* der ribben, en wiens hoeken *D*, *E* en *F*, de standhoeken der zijvlakken *AMC* en *BMC*, *AMC* en *AMB*, *AMB* en *BMC*, van den drievlakkigen hoek voorstellen. *Of nu de straal van den bol groot of klein genomen wordt; bij voorbeeld, een straal Md; dan zal toch de bolvormige driehoek def, die tot dien straal behoort, alhoewel hij grooter of kleiner is dan de eersten driehoek DEF, dezelfde diensten bewijzen;* omdat de overeenstemmende hoeken en zijden in beide drie-

hoe-

hoeken hetzelfde getal graden bevatten. Ook zijn beide die driehoeken gelijkvormig, en ftaan derzelver inhouden tot elkander in dezelfde reden, als de inhouden van de oppervlakken der bollen, tot welke zij behooren. *Doorgaans onderftelt men, dat de ftraal van den bol tot welken de bolvormigen driehoek behoort, die den drievlakkigen hoek voorftelt, gelijk aan de éénheid; waardoor alle formulen, zonder iets van derzelver algemeenheid te verliezen, veel eenvoudiger worden.*

Men begrijpt, uit deze verklaring, om dit in het voorbijgaan op te merken, waarom de valfche onderftelling van de bolvormige gedaante, die het algemeen aan den Hemel toefchrijft, alhoewel deze meening, zoo als wij in het voorgaande *Boek*, §. 1083 en §. 1089, verklaard hebben, valsch is, geen invloed kan hebben op de gevolgen, welke de Sterrekundigen uit dezelve afleiden. Want alle lijnen, die uit de voorwerpen, die in de hemelruimte verfpreid zijn, tot het oog van den waarnemer worden getrokken, maken, drie aan drie genomen, drievlakkige hoeken; met welk eenen ftraal nu, groot of klein, het zij met eenen ftraal, die gelijk is aan de afftand van de Zon tot de Aarde, of van de Maan tot de Aarde, of met eenen ftraal zoo groot als de onbedrevene zich de grootte van den ingebeelde hemelbol voorftelt, of met eenen ftraal, die flechts eenige ellen, palmen of duimen groot is, men zal aan de oppervlakken dezer bollen binnen elken drievlakkigen hoek, zooveel gelijkvormige bolvormige driehoeken verkrijgen, die elk op zich zelven genomen tot hetzelfde einde kunnen dienen. Men moge dan dwalen, met zich den Hemel als een masfieven vasten hollen bol voor te ftellen; daarin toch dwaalt men niet, wanneer men het oppervlak van dien ingebeelden hemelbol aanneemt voor het oppervlak, op welke alle bolvormige driehoeken, die de drievlakkige hoeken voorftellen te vinden zijn; en dit is het juist, wat de Sterrekundigen, in hunne leerboeken, ftilzwijgend onderftellen.

§. 1135. Om in geene noodelooze herhalingen te vervallen, moet men, alvorens verder te gaan, herlezen, wat wij, in het *VIII. Boek*, van *Bladz.* 242—265, van de twee- en drievlakkige hoeken gezegd hebben. In hetgeen aldaar, van *Bladz.* 265 tot het einde, volgt, zijn de eerfte en voornaamfte gronden van de Bolvormige Driehoeksmeting, uit teekenkunftige of graphifche conftructien afgeleid; thans zullen wij diezelfde algemeene waarheden en nog veel meer anderen, uit de befchouwing van den bolvormigen driehoek zelve, leeren kennen.

§. 1136. I. Bepaling. De uitvinding der regels, welke dienen moeten, om, wanneer van de zes hoeken, zijnde de ftandhoeken der ribben en zijvlakken van eenen drievlakkigen hoek, of uit de hoeken en de zijden van een bolvormigen driehoek, drie termen, zoo als het valt, gegeven zijn, de drie anderen, het zij door conftructie of

of berekening te vinden, noemt men *de Bolvormige (spherische) Driehoeksmeting.*

I. Stelling. *Fig.* 83.

§. 1137. *Wanneer men twee zijden (A C en B C) van eenen bolvormigen driehoek op het oppervlak van den bol verlengt; dan zullen zij elkander in een punt (D) ontmoeten, hetwelk, met het hoekpunt (C) dezer twee zijden en het middelpunt van den bol (M), in dezelfde regte lijn ligt; en, wanneer men, uit het hoekpunt (C) van den hoek van een bolvormigen driehoek, met eene koorde (C E) van 90°, den boog (E F) van eenen grooten cirkel beschrijft, tusschen de beenen van dien hoek (C) of derzelver verlengden begrepen zijnde; dan zal die boog (E F) de betrekkelijke maat zijn, zoowel van den bolvormigen hoek aan dit hoekpunt (C), als van den bolvormigen hoek (A D B), welke door de verlengde zijden (A C en B C), aan het tegenovergestelde hoekpunt (D), gemaakt wordt.*

Betoog *van het eerste.* Elke zijde *A C* of *B C* van een bolvormigen driehoek *A B C*, ligt in het vlak van een grooten cirkel, die derhalve door het middelpunt van den bol gaat; dat is, in een zijvlak van den drievlakkigen hoek, welke door dien bolvormigen driehoek gemeten wordt. Verlengt men nu éene zijde van den bolvormigen driehoek; dan blijft men natuurlijk in het vlak van dien grooten cirkel, en gevolgelijk in het zijvlak; daar nu alle groote cirkels van een bol, elkander volgens éene zijner middellijnen doorsnijden, zoo zal het punt *D*, alwaar de bogen, die op het oppervlak van den bol verlengd zijn, elkander ontmoeten, met het hoekpunt *C*, op dezelfde middellijn *C M D*, moeten liggen.

Betoog *van het tweede.* Wanneer *C E* de koorde van een quadrant (een boog van 90°) is, en de straal *E M* getrokken wordt; dan is *hoek* *C M E* = 90°. Laat men nu het vlak van den halven cirkel *C A E D* om de middellijn *C M D* omdraaijen; dan zal (V. *Stell.* VIII. *B.*) de straal *E M* het vlak van een grooten cirkel beschrijven, op hetwelk de middellijn *C M D* regthoekig staat, en *E F* zal dan een boog van den omtrek van dien grooten cirkel zijn; de boog namelijk, die met de koorde van een quadrant, uit het hoekpunt *C*, op het oppervlak van den bol beschreven is. Nu zijn de hoeken *C M E* en *C M F* regte hoeken; dienvolgens is hoek *E M F* de standhoek der zijvlakken van den drievlakkigen hoek, welke door de zijden *A C* en *B C* van den bolvormigen driehoek *A B C* worden voorgesteld; die hoek *E M F* is derhalve ook gelijk aan de hoeken, welke de raaklijnen der bogen *A C* en *B C*, en der bogen *A D* en *B D*, aan de punten *C* en *D*, met elkander maken; aangezien nu die hoek *E M F* gemeten wordt, door den boog *E F*, zoo zal men

men kunnen zeggen: de boog *EF*, welke uit het hoekpunt *C*, met de koorde van een quadrant, op het oppervlak van den bol beschreven is, meet de bolvormige hoeken *ACB* en *ADB*, of (bij verkorting) is aan die hoeken gelijk.

§. 1138. II. BEPALING. *Fig.* 83. Wanneer men twee zijden *AC* en *BC* van een bolvormigen driehoek *ABC* verlengt, tot dat zij elkander in een tegen overgesteld hoekpunt *D* ontmoeten; dan ontstaat er een anderen bolvormigen driehoek *ABD*, die de *supplements-driehoek* van den eersten genoemd wordt. De driehoek *ABD* wordt de supplements-driehoek van den driehoek *ABC* genoemd; omdat de zijde *BD* het supplement van de zijde *BC*, de zijde *AD* het supplement van de zijde *AC*, de hoek *ABD* het supplement van den hoek *ABC*, en de hoek *BAD* het supplement van den hoek *BAC* is; zijnde, zoo als in de voorgaande Stelling betoogd is, de overstaande hoeken *ACD* en *ADB* gelijk. *Elke bolvormige driehoek heeft, aangezien er drie bolvormige hoeken in denzelven bestaan, drie zulke onderscheidene supplements-driehoeken*

§. 1139. GEVOLG. Uit dit alles, als ook uit hetgeen, in het *VIII. Boek*, in de *XXXIX* en *XL. Stellingen*, verklaard is, blijkt het: *dat, wanneer men al de zijden van een bolvormigen driehoek verlengt, of, wanneer men naar welgevallen drie grooten cirkels, op een bol beschrijft, het geheele oppervlak van den bol in acht bolvormige driehoeken zal verdeeld zijn, welke, twee aan twee, tegen over elkander staan, onderling* (doch in eene omgekeerde orde) *gelijkzijdig en gelijkhoekig zijn, en denzelfden inhoud hebben; terwijl van twee dezer driehoeken, die aan elkander grenzen, de één de supplements-driehoek van den anderen is.* En verder, *dat, wanneer drie groote cirkels van eenen bol elkander regthoekig doorsnijden, er acht gelijke- en gelijkvormige gelijkzijdige bolvormige driehoeken ontstaan, welke alle te zamen genomen, aan het oppervlak van den bol gelijk zijn.*

II. STELLING. *Fig.* 84.

§. 1140. *Wanneer men, door twee punten (A en B) van den omtrek van zekeren grooten cirkel van eenen bol, (wiens middelpunt in M is) twee vlakken (AMC en BMC) door het middelpunt van den bol laat gaan, die beide loodregt op het vlak van dien grooten cirkel (AMB) staan; dan zullen die twee vlakken het oppervlak van den bol, volgens groote cirkels (AC en BC) doorsnij-*

 den,

den, en die groote cirkels zullen elkander, volgens eene middellijn (C M) doorsnijden, die loodregt op het vlak van den eersten grooten cirkel staat.

Betoog. Want, omdat (zie XI. *Stell.* VIII. *B.*) twee vlakken, die beide regthoekig op hetzelfde vlak staan, elkander doorsnijden, in eene lijn, die insgelijks regthoekig op dit vlak staat, zoo is het klaar, dat de groote cirkels *A C M* en *B C M*, die regthoekig op het vlak van den grooten cirkel *A M B* staan, elkander volgens de middellijn *C M* snijden; die middellijn *C M* zal derhalve regthoekig op het vlak *A M B* staan; zoo dat de hoeken *A M C* en *B M C* regte hoeken, en de bogen *A C* en *B C* quadranten zijn.

§. 1141. Aanmerking. *Fig.* 84. In plaats van te zeggen, dat men op het vlak van den grooten cirkel *A M B*, twee vlakken, door het middelpunt gaande, loodregt plaatst, zegt men, bij verkorting; *uit twee punten A en B van den omtrek van zekeren grooten cirkel van eenen bol, twee loodregte bogen A C en B C op te rigten. Die loodregte bogen zijn dan van zelve groote cirkels van den bol, en ontmoeten elkander in een punt C, op 90° afstands van de punten A en B; aan welk punt C zij een bolvormigen hoek maken, die gelijk is aan boog A B.* Dit punt *C* wordt de pool of het aspunt van den grooten cirkel *A B M* genoemd; omdat, wanneer men, met eenen straal, die gelijk is aan de koorde van een quadrant, uit het punt *C*, op het oppervlak van den bol, eenen cirkel beschrijft, die cirkel een groote cirkel is. *Elke groote cirkel E F* (*zie* fig. 83,) *nu heeft twee zulke polen of aspunten C en D, welke gelegen zijn in de uiteinden van de middellijn C D, die loodregt op het vlak van dien grooten cirkel E F staat. Alle punten van den omtrek van eenen grooten cirkel hebben een gelijken afstand van 90° tot deszelfs aspunten.*

§. 1142. III. Bepaling. *Fig.* 85. Wanneer men, uit de hoekpunten *A*, *B* en *C* van een bolvormigen driehoek *A B C*, als aspunten, bogen van groote cirkels (met stralen anders, die gelijk zijn aan de koorde van een boog des grooten cirkels van 90°) beschrijft; dan ontstaat er, op het oppervlak van den bol, een bolvormigen driehoek *a b c*, welke de *aspunts-driehoek* van den eersten *A B C* genoemd wordt; *terwijl de driehoek A B C wederkeerig voor den aspunts-driehoek van den driehoek a b c gehouden wordt.* — Men zegt: *dat de zijden A B, A C en B C, en de hoeken A, B en C van den driehoek tegen over de hoeken c, b en a, en tegen over de zijden b c, a c en a b van den aspunts-driehoek staan; of met de-*

zel-

zelve overeenstemmen; zoo alsdan ook de zijden *a b*, *a c* en *b c*, en de hoeken *a*, *b* en *c* van den driehoek *a b c* overeenstemmen met de hoeken *C*, *B* en *A*, en de zijden *B C*, *A C* en *A B* van den driehoek *A B C*; of tegen over dezelve staan.

III. Stelling. *Fig.* 85.

§. 1143. *Elke hoek en elke zijde van een bolvormigen driehoek (A B C) is gelijk aan het supplement van de overeenstemmende zijde of hoek van zijnen aspunts-driehoek (a b c); dat is, de zijden a b, b c en a c zijn de supplementen van de hoeken C, A en B; en de zijden A B, B C en A C de supplementen van de hoeken c, a en b. — En, indien men verder, uit een hoekpunt (C) van den driehoek A B C, een loodregten boog C I op de zijde A B laat vallen; dan zal die boog, verlengd zijnde, de overeenstemmende zijde a b van den aspunts-driehoek a b c, in L, regthoekig doorsnijden, en door het tegenoverstaande hoekpunt c gaan.*

Betoog *van het eerste.* Dit betoog is uitvoerig in de XXXIV. *Stelling* VIII. *Boek* te vinden. Uit betoog is gebleken dat

boog A B + *hoek c* = 180°	*boog a b* + *hoek C* = 180°
boog B C + *hoek a* = 180°	*boog b c* + *hoek A* = 180°
boog A C + *hoek b* = 180°	*boog a c* + *hoek B* = 180°

is; en, dat, wanneer men uit de hoekpunten *a*, *b* en *c*, van den aspunts-driehoek *a b c* als polen, met eenen straal, die gelijk is aan de koorde van het quadrant eens grooten cirkels, groote cirkelbogen op het oppervlak van den bol beschrijft, uit derzelver doorsnijding wederom de bolvormige driehoek *A B C* zal ontstaan; om welke reden dan die driehoek *A B C* wederkeerig de aspunts-driehoek van den driehoek *a b c* genoemd wordt.

Betoog *van het tweede.* Wanneer men uit het hoekpunt *C* een loodregten boog *C K L* op de overstaande zijde *A B* laat vallen; dan staan de bogen *K C*, *I H* en *F G* loodregt op denzelfden boog *I A B F*, en moeten dan (II. *Stell.*) elkander in hetzelfde punt *c* ontmoeten; welk punt *c* het aspunt of de pool van den boog *I A B F* is. Aangezien nu het punt *C*, volgens de constructie, de pool van den boog *a D E h* is, zoo zal het verlengde van den loodregten boog *C K*, den boog *a D L E b* in het punt *L* loodregt ontmoeten; de boog *c C K L* is dus de boog, welke uit het hoekpunt *c* van den aspunts-driehoek *a b c* op de overstaande *a b* valt.

Omdat nu *c* de pool van den boog *A B* is, zoo is $cCK = 90°$; en, omdat *C* de pool van den boog *a D L E b* is, zoo is, om dezelfde reden, $CKL = 90°$; en daarom $cCK + CKL = 90° + 90° = 180°$. Nu is

$cL + CK = cC + CK + KL + CK = cK + CL$; derhalve $cL + CK = 180°$.

Indien men, uit de twee andere hoekpunten A en B loodregte bogen, op de overstaande laat vallen; dan zal hetzelfde plaats hebben. Men heeft namelijk

$$\text{boog } CK + \text{boog } cL = 180°$$
$$\text{boog } AM + \text{boog } aN = 180°$$
$$\text{boog } BO + \text{boog } bP = 180°$$

§. 1144. Aanmerkingen. 1°. *Omdat de bogen aE en bD, volgens het betoogde, bogen van 90° zijn; en EL de maat van den hoek BCK, en DL de maat van den hoek ACK is; zoo is*

$$\text{boog } aL + \text{hoek } BCK = 90°$$
$$\text{boog } bL + \text{hoek } ACK = 90°$$

Om dezelfde reden, zal, aangezien BI = 90° en AF = 90° is, en, omdat boog IK = hoek acL en boog KF = hoek bcL is,

$$\text{boog } AK + \text{hoek } bcL = 90°$$
$$\text{boog } BK + \text{hoek } acL = 90°$$

Men heeft, om dezelfde reden, nog de vergelijkingen:

$$\text{boog } bN + \text{hoek } CAM = 90°$$
$$\text{boog } cN + \text{hoek } BAM = 90°$$
$$\text{boog } BM + \text{hoek } caN = 90°$$
$$\text{boog } CM + \text{hoek } baN = 90°$$
$$\text{boog } aP + \text{hoek } CBO = 90°$$
$$\text{boog } cP + \text{hoek } ABO = 90°$$
$$\text{boog } AO + \text{hoek } cbP = 90°$$
$$\text{boog } OC + \text{hoek } abP = 90°$$

2°. *Wanneer de zijden van den bolvormigen driehoek ABC, alle minder dan 90° zijn; dan ligt, hij geheel binnen de zijden van den aspunts-driehoek abc; zijn één of twee dezer zijden grooter dan 90°; dan liggen zij door elkander. Zijn al de zijden gelijk aan 90°; dan vallen beide driehoeken, ABC en abc, op en in elkander.*

3°. De juiste kennis van de eigenschappen der wederkeerige aspunts-driehoeken ABC en abc van zulk een groot belang zijnde, zoo is het noodzakelijk, dat men deze figuur uit karton-papier leere maken.

Constructie. Men make uit karton-papier een bolvormigen driehoek ABC, wiens zijden alle minder dan 90° zijn. Men zoeke, volgens II. *Vraagst.* VIII. *B.* al de hoeken van dien driehoek door constructie.

Die hoeken gevonden hebbende, make men den omtrek van eenen grooten cirkel; dat is, van eenen cirkel, die denzelfden straal heeft, met wel-

welke de bogen van den driehoek *ABC* gemaakt zijn. Op den omtrek van dien cirkel, neme men $bG = 90°$, $GF =$ *hoek A*, $Fc = 90°$, $cI = 90°$, $IH =$ *hoek B*, $Ha = 90°$, $aE = 90°$, $ED =$ *hoek C* en $Db = 90°$; dan zullen *ab*, *bc* en *ac* de zijden van den aspunts-driehoek zijn.

Voorts neme men *IABF*, *EBCH* en *DACG*, op de volgende wijze. Men neme eerst een boog *AB*, gelijk aan de zijde *AB* van den bolvormigen driehoek *ABC*. Men verlenge dien boog aan beide zijden, tot in *F*, en *I*, zoodanig, dat $ABF = BAI = 90°$ zij. Deze drie fectors *IABF*, *EBCH* en *DACG*, voege men bij de punten *A*, *B* en *C* in elkander; dan zal het zamenftel van deze drie fectors in den bolvormigen driehoek *abc* fluiten; en men zal de figuur *in naturâ* verkrijgen, welke, in *fig.* 85, is afgebeeld.

Men zal ook gemakkelijk de loodregte bogen door conftructie verkrijgen.

IV. STELLING.

§. 1145. *Elke bolvormige driehoek heeft de eigenfchap, dat de fom van twee zijner zijden altijd grooter is dan de derde zijde; dat de fom zijner zijden altijd grooter dan* 0°, *en kleiner dan* 360° *is; en dat eindelijk de fom der hoeken altijd grooter dan twee, en kleiner dan zes regte hoeken is.*

BETOOG. Men vindt het betoog van het eerfte en tweede gedeelte, in de XXXIII. *Stell.* van het derde gedeelte, in de XXXV. *Stell.* van het VIII. *Boek.*

§. 1146. AANMERKING. Uit het betoogde in de twee voorgaande Stellingen volgt: *dat er, in de bolvormige driehoeken, eene grootere verfcheidenheid beftaat, dan in de regtlijnige*; welke grootere verfcheidenheid daarin gegrond is, dat de fom der hoeken veranderlijk is, en tusfchen twee en zes regte hoeken valt. Men heeft

A. *Ongelijkzijdige, gelijkbeenige en gelijkzijdige bolvormige driehoeken.*

1°. *Gelijkzijdige bolvormige driehoeken* zijn driehoeken, die drie gelijke zijden hebben.

2°. *Gelijkbeenige bolvormige driehoeken* zijn zulke driehoeken, die twee gelijke zijden hebben.

3°. *Ongelijkzijdige bolvormige driehoeken* zijn zulke driehoeken, welker zijden alle in grootte van elkander verfchillen.

B. Verder heeft men, *fcherphoekige, regthoekige* en *ftomphoekige bolvormige driehoeken.*

1°. Een *fcherphoekigen bolvormige driehoek* is een driehoek, die drie fcherpe hoeken heeft.

2°. Een *regthoekige bolvormige driehoek* is een driehoek, die ten minsten éénen regten hoek heeft. Indien één der twee andere hoeken of wel beide die hoeken niet regt zijn; dan worden zij *scheve* (geen *scherpe*) hoeken genoemd; want die twee scheve hoeken kunnen beide scherp, of beide stomp, of de een scherp en de andere stomp zijn. In elken regthoekigen bolvormigen driehoek, is de zijde, over den regten hoek, de *hypothenusa*; en de zijden, om den regten hoek, noemt men de *regthoekszijden*.

Die verscheidenheid der regthoekige bolvormige driehoeken, wordt door de volgende constructie blijkbaar. Zij, *fig* 86, *ABC* een bolvormigen driehoek, die regthoekig is in *B*, zoo dat *hoek ABC* = 90° is. Stel dat de hoeken *BAC* en *ACB* beide scherp zijn, en dat *M* het middelpunt van den bol is, tot welken de regthoekige bolvormige driehoek behoort. Indien men dan eerst de basis *AB* verlengt, zoo dat hij den geheelen cirkel *ABDEA* voortbrengt, den boog *AC* tot dat hij den cirkel *ABDE*, in *E*, en den boog *BC* tot dat hij dienzelfden cirkel in *D* ontmoet; dan zijn de bolvormige hoeken *ABC*, *DBC*, *AEC* en *DEC*, alle regt; de regthoekige driehoek *ABC* heeft dan twee scherpe hoeken *A* en *C*; de regthoekige driehoek *BCD*, een scherpe hoek *D*, en een stompe hoek *C*; de driehoek *BED*, een stompe hoek *D*, en een stompe hoek *C*, en de driehoek *ACE*, een stompe hoek *A*, en een stompe hoek *C*.

3°. Een *stomphoekige bolvormige driehoek* is een driehoek, die één, twee of drie stompe hoeken heeft.

V. STELLING. *Fig.* 87.

§. 1147. *De hoeken, welke, in een gelijkbeenigen bolvormigen driehoek, tegen over de gelijke zijden staan, gelijk zijn;* en, omgekeerd, *wanneer een bolvormige driehoek twee gelijke hoeken heeft, dan zijn de zijden, over die hoeken staande, insgelijks gelijk.*

BETOOG *van het eerste.* Wanneer, in *fig* 87, de zijden *AC* en *BC* van den bolvormigen driehoek *ABC* gelijk zijn; dan moet beweezen worden: dat de bolvormige hoeken *B* en *A*, over die zijden staande, gelijk zijn.

Zij *M* het middelpunt van den bol, tot welken de bolvormige driehoek *ABC* behoort. Trek de stralen *AM*, *BM* en *CM*, en, uit het hoekpunt *C* de lijnen *CD*. *CE* en *CF*, loodregt op de stralen *AM*, *BM*, en op het vlak *AMB*. Indien men nu, van het punt *F*. tot de punten *D* en *E*. de lijnen *FD* en *FE* trekt; dan staan (VIII *Stell.* VIII. *B.*) die lijnen loodregt op de stralen *AM* en *BM*, de hoeken *CDF* en *CEF* zijn dan gelijk aan de bolvormige hoeken *A* en *B*.

En,

En, omdat *CF* loodregt op het vlak *AMB* ſtaat, zijn de hoeken *CFD* en *CFE* regt, en de driehoeken *CFD* en *CFE* regthoekig in *F*.

Aangezien nu, volgens de onderſtelling, *AC* = *BC* is, zoo is ook *hoek AMC* = *hoek BMC*, en derhalve *CD* = *CE*. De regthoekige driehoeken *CFD* en *CFE*, hebben dan de gelijke regthoekszijde *CF*, en de gelijke hypothenuſen *CD* = *CE*, en daarom is (II. *Hulpſt*. I. *B*.) *hoek CDF* = *hoek CEF*, of *hoek A* = *hoek B*.

Betoog *van het omgekeerde*. *Fig*. 87. Indien de bolvormige hoeken *A* en *B* gelijk zijn; dan moet bewezen worden, dat de zijden *AC* en *BC* over die hoeken ſtaande gelijk zijn.

Indien *hoek A* = *hoek B* is; dan is ook *hoek CDF* = *hoek CEF*; de regthoekige driehoeken *CDF* en *CEF*, zijn dan onderling gelijkhoekig, en, omdat *CF* = *CF* is, onderling gelijk- en gelijkvormig, (zie IX. *Stell*. I. *B*.), en daarom is *CD* = *CE*.

De regthoekige driehoeken *CMD* en *CME*, hebben dan dezelfde hypothenuſa *CM*, en twee gelijke regthoekszijden *CD* en *CE*; zij zijn dan (II. *Hulpſt*. I. *B*.) gelijk- en gelijkvormig, en daarom is *hoek CMD* = *hoek CME*; en dienvolgens is *boog AC* = *boog BC*.

§. 1148. Gevolg. *Al de hoeken van een gelijkzijdigen bolvormigen driehoek zijn gelijk. En, zoo al de hoeken van een bolvormigen driehoek gelijk zijn; dan is hij ook gelijkzijdig.*

VI. Stelling. *Fig*. 88.

§. 1149. *In elken bolvormigen driehoek, ſtaat eene grootere zijde tegen een grooteren hoek*; en, omgekeerd, *een grooter hoek tegen over eene grootere zijde.*

Betoog *van het eerſte*. Wanneer, in den bolvormigen driehoek *ABC*, de hoek *A* grooter is dan de hoek *B*; dan moet bewezen worden, dat de zijde *BC* grooter is dan de zijde *AC*.

Indien hoek *A* grooter is dan hoek *B*; dan zal men den bolvormigen *hoek BAD* = *hoek B* kunnen maken; en de boog *AD* zal dan binnen den bolvormigen driehoek *ABC* vallen; terwijl dan, volgens de voorgaande *Stelling*, *AD* = *BD* zal zijn; derhalve is dan ook *AD* + *CD* = *BD* + *CD* = *BC*; nu is (zie *IV*. *Stell*.) *AD* + *CD* > *AD*; derhalve is ook *BC* > *AC*.

Betoog *van het omgekeerde*. *Fig*. 88. Hier moet bewezen worden: dat, wanneer *BC* > *AC* is, dan is ook de *hoek A* > *hoek B* zal zijn.

De hoek *A* is kleiner, gelijk of grooter dan de hoek *B*. In het eerſte geval, zou, volgens het eerſte gedeelte, *BC* kleiner, en in het tweede geval (volgens de *V*. *Stelling*) zou *BC* gelijk aan *AC* moeten zijn; hetgeen met de onderſtelling ſtrijdt; gevolgelijk is hoek *A* grooter dan hoek *B*.

VII. STELLING. *Fig.* 88.

§. 1150. *De inhoud van een bolvormigen driehoek* (*ABC*), *staat tot den inhoud van het oppervlak van den bol, tot welken hij behoort, als de som der hoeken dezes driehoeks, min twee regte hoeken, staat tot acht regte hoeken; dat is, indien wij het oppervlak van den bol gelijk* Ω *stellen; dan is*

$$Inh.\ ABC = \frac{A + B + C - 180^\circ}{720} \times \Omega$$

BETOOG. Zie het betoog, in de *XL. Stelling* van het *VIII. Boek.*

I. *Algemeene eigenschappen der regthoekige en scheefhoekige bolvormige driehoeken.*

§. 1151. De bolvormige driehoeken hebben zeer merkwaardige eigenschappen, die den grond uitmaken van de regels, waarvan men zich, in het berekenen der bolvormige driehoeken, en het oplossen der vraagstukken, die tot dezelve betrekking hebben, bedient. Zij zijn in de volgende Leerstellingen begrepen.

VIII. STELLING. *Fig.* 89, 90 *en* 91.

§. 1152. *In elken bolvormigen driehoek, bestaan er tusschen de zijden en hoeken de volgende overeenstemmingen:* 1°. *de sinus van elke regthoekszijde is gelijk aan de sinus van den scheven hoek, die tegen over dezelve staat, vermenigvuldigd met de sinus van de hypothenusa;* 2°. *de tangens van elke regthoekszijde is gelijk aan de tangens van den overstaanden hoek, vermenigvuldigd met de sinus van de andere regthoekszijde;* 3°. *de cosinus van de hypothenusa is gelijk aan het product van de cosinussen der regthoekszijden;* 4°. *de cosinus van éénen der scheve hoeken is gelijk aan de cosinus van de overstaande regthoekszijde, vermenigvuldigd met de sinus van den anderen scheven hoek;* 5°. *de tangens van ééne der regthoekszijden is gelijk aan de tangens van de hypothenusa, vermenigvuldigd met de cosinus van den scheven hoek, tusschen de hypothenusa en die regthoekszijde;* en 6°. *het product van de tangenten der scheve hoeken, vermenigvuldigd met de cosinus van de hypothenusa, is altijd gelijk aan de éénheid; dat is:*

sin.

$$sin.\,BC = sin.\,A \times sin.\,AC, \text{ en } sin.\,AB = sin.\,C \times sin.\,AC \quad (1)$$
$$tang.\,BC = tang.\,A \times sin.\,AB, \text{ en } tang.\,AB = tang.\,C \times sin.\,BC \quad (2)$$
$$cos.\,AC = cos.\,AB \times cos.\,BC \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$
$$cos.\,A = cos.\,BC \times sin.\,C, \text{ en } cos.\,C = cos.\,AB \times sin.\,A \; . \; . \quad (4)$$
$$tang.\,AB = tang.\,AC \times cos.\,A, \text{ en } tang.\,BC = tang.\,AC \times cos.\,C \quad (5)$$
$$tang.\,A \times tang.\,C \times cos.\,AC = 1 \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Al die vergelijkingen, welke in het *I. Vraagst. VIII. B.* uit eene meetkunstige constructie zijn afgeleid, kunnen nog aldus betoogd worden.

Betoog *van het eerste gedeelte. Fig.* 89. Zij *ABC* de regthoekige bolvormige driehoek, die in *B* zijn regten hoek heeft, en *M* het middelpunt van den bol, tot welken hij behoort. Trek de stralen *AM*, *BM* en *CM*; en, in het vlak *BMC*, de lijn *CD*, loodregt op *BM*, welke dan, omdat het vlak *BMC*, loodregt op het vlak *BM* staat, (*X. Stell. VIII. B.*) ook loodregt staat op het vlak *MAB*, en derhalve met elke lijn *DE*, in dit vlak getrokken, een regten hoek maakt. Nog trekke men, in het vlak *ACM*, de lijn *CE*, loodregt op *MA*; indien men nu $AM = BM = CM = 1$ stelt; dan is $CD = sin.\,BC$ en $CE = sin.\,AC$.

Trekt men van *D* tot *E*, de lijn *DE*; dan zal deze (*VIII. Stell. VIII. B.*) loodregt op *AM* staan, en de hoek *DEC* zal dan de standhoek der zijvlakken *BAM* en *CAM*, en derhalve aan den bolvormigen hoek *A* gelijk zijn; terwijl de driehoek *CDE* regthoekig is in *D*.

Nu is, volgens de *II. Stell. XII. B.* in dezen regthoekigen driehoek *CDE*, $CD = CE \times sin.\,CED$; of, omdat $CD = sin.\,BC$ en $CE = sin.\,AC$ en hoek $CED =$ hoek *A* is, $sin.\,BC = sin.\,A \times sin.\,AC$.

Betoog *van het tweede gedeelte. Fig.* 90. Stel, dat de figuur *MABC* dezelfde zij als in *fig.* 89. Men trekke dan, in het vlak *MBC*, de lijn *BD* loodregt op *MB*, die den verlengden straal in *D* ontmoet; dan staat wederom *BD* loodregt op het vlak *MAB*, en maakt dus met de lijn *BE*, die uit *B*, loodregt op *AM* valt, een regten hoek. Indien men nu, van *D* tot *E*, eene regte lijn trekt; dan zal deze (*VIII. Stell. VIII. B.*) loodregt op *AM* staan, en dus zal de scherpe hoek *DEB* van den regthoekigen driehoek *BDE* de standhoek der vlakken *ABM* en *ACM* zijn, en gelijk zijn aan den bolvormigen hoek *A*.

Indien men nu wederom $AM = 1$ stelt; dan is $BD = tang.\,BC$ en $BE = sin.\,AB$; en, volgens de *II. Stell. XII. B.* is $BD = BE \times tang.\,E$; dat is, $tang.\,BC = tang.\,A \times sin.\,AB$.

Betoog *van de vier laatste gedeelten.* De vier volgende vergelijkingen worden uit de twee eerste aldus afgeleid.

Onderstellen wij (*fig.* 91), dat de zijden van den regthoekigen bolvormigen driehoek *ABC* alle minder zijn dan een quadrant, en dat *B* de regte hoek is; dan zal men de regthoekszijde *AB*, en de hypothenusa *AC*, de eerste tot in *D*, en de tweede tot in *E*, kunnen verlengen; zoodanig dat $AD = 90^\circ$ en $AE = 90^\circ$ worde.

Indien men dan, uit A, als pool, met de koorde van den boog AD, als straal, op het oppervlak van den bol, een cirkelboog BEF beschrijft; dan zal deze de boog van een grooten cirkel zijn, op welke de vlakken van de bogen ABD en ACE regthoekig staan; de bolvormige hoeken bij D en E zijn derhalve regt; terwijl de boog DE gelijk aan den bolvormigen hoek A is.

Wanneer men nu nog de regthoekszijde BC, naar boven verlengt; dan zal zij den boog DEF, ergens in een punt F, ontmoeten; en, volgens de *II. Stell.* zal dan $BCF = DEF = 90°$ zijn; en de boog BD gelijk aan den bolvormigen hoek F.

Men verkrijgt dan, door deze constructie, een bolvormigen regthoekigen driehoek CEF, die regthoekig is in E. *Men noemt dien driehoek CEF den complements-driehoek van den driehoek ABC;* omdat CE het complement is van AC, EF het complement van DE, of van den hoek A, CF het complement van BC, hoek F of boog BD het complement van AB; terwijl de bolvormige hoek ACF gelijk is aan den bolvormigen hoek ECF.

Door middel nu van dezen regthoekigen complements-driehoek CEF, worden, uit de vergelijkingen (1) en (2), de vergelijkingen (4), (5), (6) en (7) aldus betoogd.

A. Volgens het eerste gedeelte, is, in den regthoekigen bolvormigen driehoek CEF, $sin.\ CE = sin.\ F \times sin.\ CF$; nu is $sin.\ CE = cos.\ AC$, $sin.\ F = sin.\ BD = cos.\ AB$ en $sin.\ CF = cos.\ BC$; derhalve is $cos.\ AC = cos.\ AB \times cos.\ BC$.

B. Nog is, volgens het eerste gedeelte, $sin.\ EF = sin.\ ECF \times sin.\ CF$; maar $sin.\ EF = cos.\ ED = cos.\ A$, $sin.\ ECF = sin.\ ACB$ en $sin.\ CF = cos.\ BC$; dus verkrijgt men $cos.\ A = cos.\ BC \times sin.\ C$.

C. In den regthoekigen driehoek CEF, is, volgens het tweede gedeelte, $tang.\ CE = tang.\ F \times sin.\ EF$; maar nu is $tang.\ CE = cot.\ AC$, $tang.\ F = tang.\ BD = cot.\ AB$ en $sin.\ EF = cos.\ DE = cos.\ A$; derhalve is $cot.\ AC = cot.\ AB \times cos.\ A$. Voor deze vergelijking kan men schrijven:

$$\frac{1}{tang.\ AC} = \frac{1}{tang.\ AB} \times cos.\ A$$

en, wanneer men deze vergelijking met $tang.\ AC \times tang.\ AB$ vermenigvuldigt; dan verkrijgt men $tang.\ AB = tang.\ AC \times cos.\ A$.

D. Nog is in denzelfden driehoek, volgens het tweede gedeelte, $tang.\ EF = tang.\ C \times sin.\ CE$; maar nu is $tang.\ EF = cot.\ DE = cot.\ A$ en $sin.\ CE = cos.\ AC$; derhalve wordt $cot.\ A = tang.\ C \times cos.\ AC$. Vermenigvuldigt men deze laatste eindelijk met $tang.\ A = tang.\ A$; dan verkrijgt men, $tang.\ A \times tang.\ C \times cos.\ AC = 1$.

§. 1153. AANMERKINGEN. 1°. *Niettegenstaande de zes vergelijkingen op de zijden en hoeken van den regthoekigen bolvormigen driehoek betoogd zijn, in de onderstelling, dat al deszelfs zijden minder dan 90° zijn; zijn zij echter, voor alle soorten van regthoe-*

hoekige bolvormige driehoeken, die bij mogelijkheid bestaan kunnen, algemeen.

Dit zal, wannner men *figuur* 86, in welke *ABC* een regthoekige bolvormige driehoek is, welks zijden alle minder dan 90° zijn, en in welke alle mogelijke verscheidenheid van regthoekige bolvormige driehoeken voorkomen, ten klaarste blijken. Nemen wij, bij voorbeeld, den tegenoverstaanden regthoekigen driehoek *DCE*, welke regthoekig is in *E*; en zien wij, wat de vergelijking *cos. AC* = *cos. AB* × *cos. BC*, op dien driehoek overgebragt zijnde, worden zal? Men heeft *AC* = 180° — *CD*, *BC* = 180° — *CE* en *AB* = *DE*; daarom is, volgens de bekende beginselen, *cos. AC* = — *cos. CD*, *cos. BC* = — *cos. CE*, en *cos. AB* = *cos. DE*; de vergelijking *cos. AC* = *cos. AB* × *cos. BC* wordt dus — *cos. CD* = + *cos. DE* × — *cos. CE*, of *cos. CD* = *cos. DE* × *cos. CE*.

Men toetse al de andere formulen, uit den driehoek *ABC* afgeleid, men zal dan vinden, dat zij alle niet slechts in den regthoekigen *CDE* bestaan; maar ook te gelijk voor de twee andere regthoekige driehoeken *DCB* en *ACE* plaats hebben.

2°. *Men kan, uit de betoogde vergelijkingen, met behulp van de theorie van de positieve en negatieve toestanden der goniometrische lijnen, eene menigte eigenschappen der regthoekige bolvormige driehoeken afleiden, welke andere schrijvers, dikwijls met zeer veel omslags, synthetisch bewezen hebben.*

a. Nemen wij, bij voorbeeld, de vergelijking, *tang. BC* = *tang. A* × *sin. AB*. Het zij de regthoekszijde *AB* kleiner, gelijk of grooter dan 180° is, *sin. AB* is altijd positief. Stellen wij nu *BC* eerst kleiner, dan gelijk, en dan grooter dan 90°; dan zal, in het eerste geval, *tang. BC* positief zijn, in het tweede geval oneindig groot, en in het derde geval negatief; gevolgelijk zal ook *tang. A* in het eerste geval positief zijn, in het tweede geval oneindig groot, en in het derde negatief; derhalve is hoek *A* in het eerste geval kleiner dan 90°, in het tweede gelijk 90°, en in het derde grooter dan 90°. *In elken regthoekigen bolvormigen driehoek, is dus elke scheven hoek minder, gelijk of grooter dan 90°, naar dat de overstaande regthoekszijde kleiner, gelijk of grooter dan een quadrant is.*

Neemt men nog de regthoekszijde *AB* = 90°; dan is *sin. AB* = 1, en de vergelijking *tang. BC* = *tang. A* × *sin. AB*, verandert dan in *tang BC* = *tang. A*, of *BC* = *A*; waaruit blijkt: *dat, wanneer ééne der regthoekszijden van een regthoekigen bolvormigen driehoek een quadrant is, de andere regthoekszijde gelijk is, of de maat is van den scheven hoek, die over dezelve staat.*

b. Nemen wij de vergelijking *sin. BC* = *sin. A* × *sin. AC*. Laat *AC* eerst kleiner, dan gelijk, en dan grooter dan een quadrant gesteld worden; dan zal, in het eerste en laatste geval, *sin. AC* kleiner dan één

zijn,

zijn, en *sin.* BC kleiner dan *sin.* A; maar, in het laatste, *sin.* $BC =$ *sin.* A of $BC = A$. Nemen wij BC kleiner en dan grooter dan $90°$; dan blijkt het: *dat zoo lang eene regthoekszijde kleiner dan* $90°$ *is, en de hypothenusa minder of meer dan* $90°$ *bedraagt, de scheven hoek, over die regthoekszijde, altijd grooter dan die regthoekszijde zal zijn; maar is die regthoekszijde grooter dan een quadrant; dan zal het tegengestelde plaats hebben;* hetgeen bovendien ook, uit *fig.* 86, duidelijk blijkt; want in dezelve is

$$\text{hoek } BAC + \text{hoek } CAE = \text{boog } BC + \text{boog } CE = 180°$$

indien nu BC kleiner of grooter dan $90°$ is; dan is *hoek* BAC grooter dan *boog* BC; gevolgelijk *hoek* CAE kleiner dan *boog* CE.

c. Men overwege nog de vergelijking *cos.* $AC =$ *cos.* $AB \times$ *cos.* BC. Men stelle drie gevallen: vooreerst, dat de regthoekszijden AB en BC beide kleiner; ten anderen, dat zij beide grooter dan een quadrant zijn; en eindelijk, dat ééne dezer regthoekszijden grooter en de andere kleiner dan een quadrant is. In het eerste geval, zijn *cos.* AB en *cos.* BC beide positief, in het tweede geval, beide negatief; in de twee eerste gevallen, is derhalve *cos.* AC positief en AC kleiner dan $90°$. In het tweede geval, is *cos.* AC negatief, en daarom AC grooter dan $90°$; waaruit volgt: *dat, in elken regthoekigen bolvormigen driehoek, de hypothenusa kleiner of grooter dan een quadrant zal zijn, naar dat de twee regthoekszijden van dezelfde soort (dat is, beide minder of beide meer dan een quadrant,) of van verschillende soort zijn.*

d. Nemen wij nog eens de vergelijking *cos.* $AC = 1 :$ *tang.* $A \times$ *tang.* C. Indien de scheve hoeken A en C, of beide minder of beide meer dan $90°$ zijn; dan zal, in beide gevallen, *cos.* AC positief, en dus AC kleiner dan een quadrant zijn; maar is één der scheve hoeken minder, en de andere meer dan $90°$; dan zal *cos.* AC negatief, en AC grooter dan een quadrant zijn. *Het blijkt dus: dat de hypothenusa van een regthoekigen bolvormigen driehoek kleiner dan een quadrant zal zijn, indien de scheve hoeken beide scherp of beide stomp zijn; doch grooter dan een quadrant, indien één dezer hoeken scherp en de andere stomp is.*

e. Uit de vergelijking *tang.* $AB =$ *tang.* $AC \times$ *cos.* A is ligtelijk, met behulp der teekens, op maken: *dat de hypothenusa van een regthoekigen bolvormigen driehoek grooter of kleiner dan ééne zijner regthoekszijden zal zijn, naar dat de scheve hoek, tusschen de hypothenusa en die regthoekszijde scherp of stomp is.*

3°. *Er bestaat eene merkwaardige overeenstemming tusschen de platte en bolvormige driehoeken, die, om verschillende redenen, alle onze opmerking waardig is.*

Om hetgene wij dienaangaande zullen doen opmerken, te verstaan, moeten wij eerst voor oogen houden, dat, aangezien de som der zijden een bolvormigen driehoek tusschen 0° en 360° valt, de zijden van een bolvormigen driehoek zeer klein kunnen genomen worden, zoodat zij slechts eenige graden, of eenige minuten, of eenige secunden bedra-

dragen; en, is dit zoo; dan verschillen de zijden van zulke bolvormige driehoeken, indien zij, in deelen van den straal of de éénheid, zijn uitgedrukt, bijna niet van hunne sinussen of tangenten; terwijl de cosinussen van de zijden nagenoeg gelijk aan de éénheid worden.

Stellen wij nu, dat de zijden van den regthoekigen bolvormigen driehoek *ABC*, *fig.* 91, zeer klein zijn; dan zal

a. Vooreerst, in de formule $sin. BC = sin. A \times sin. AC$, $sin. BC = BC$ en $sin. AC = AC$ kunnen worden genomen; en zij verandert dan in de bekende vergelijking $BC = AC \times sin. A$.

b. De vergelijking $tang. AB = tang. AC \times cos. A$, zal, daar, in die onderstelling, $tang. AB = AB$ en $tang. AC = AC$ wordt, in de bekende vergelijking $AB = AC \times cos. A$ veranderen.

c. De vergelijking $tang. BC = tang. A \times sin. AB$, zal, daar, in diezelfde onderstelling, $tang. BC = BC$ en $sin. AB = AB$ wordt, de bekende vergelijking $BC = AB \times tang. A$ geven.

d. In diezelfde onderstelling, is de vergelijking $cos. AC = cos. AB \times cos. BC$ *van het theorema van* PYTHAGORAS *niet onderscheiden.*

Want, indien de zijden klein zijn, ja zelfs eenige graden bedragen; dan zal men, zonder merkelijk van de waarheid af te wijken, kunnen stellen: $cos. AC = 1 - \frac{1}{2} AC^2$, $cos. AB = 1 - \frac{1}{2} AB^2$ en $cos. BC = 1 - \frac{1}{2} BC^2$; de vergelijking $cos. AC = cos. AB \times cos. BC$ wordt dan:

$$1 - \tfrac{1}{2} AC^2 = (1 - \tfrac{1}{2} AB^2) \times (1 - \tfrac{1}{2} BC^2);$$

dat is, bij nadere ontwikkeling,

$$1 - \tfrac{1}{2} AC^2 = 1 - \tfrac{1}{2} AB^2 - \tfrac{1}{2} BC^2 + \tfrac{1}{4} AB^2 \times BC^2$$

maar, omdat de zijden *AB* en *AC* en *BC*, in onze onderstelling, wanneer zij, in deelen van den straal, worden voorgesteld, zeer kleine breuken zijn, zoo zal men $AB^2 \times BC^2$, in vergelijking van AC^2, AB^2 en BC^2, kunnen verwaarloozen; en dan zal de ontwikkelde vergelijking worden:

$$1 - \tfrac{1}{2} AC^2 = 1 - \tfrac{1}{2} AB^2 - \tfrac{1}{2} AC^2$$

welke, indien men van dezelve $1 = 1$ aftrekt, de teekens omkeert, en alles met twee vermenigvuldigt, worden zal: $AC^2 = AB^2 + BC^2$; zijnde deze de bekende formule van PYTHAGORAS.

e. In dezelfde onderstelling, zal de vergelijking

$$tang. A \times tang. C \times cos. AC = 1$$

worden $tang. A \times tang. C \times (1 - \frac{1}{2} AC^2) = 1$

en $tang. A \times tang. C = 1 + \frac{1}{2} AC^2$

zijnde in deze $\frac{1}{2} AC^2$ een zeer kleine breuk, zoodat $tang. A \times tang. C$ wel iets grooter dan één is; doch des te nader bij *één* komt, naar dat *AC* kleiner is; maar, indien $tang. A \times tang. C = 1$; dan is *C* het complement van *A*; *de som der scheve hoeken van een regthoekigen bolvolmigen driehoek komt derhalve zoo veel nader bij 90°; naarmate de hypothenusa kleiner is.*

4°. *De overweging van al die bijzonderheden kan dienen, om*

de

de betoogde formulen dieper in het geheugen te prenten; om hetwelk beter te bereiken, men zich bij de twee eerste, N°. 1 en N°. 2, houden moet, en, van tijd tot tijd, de vier laatste uit *fig* 91, afleiden. *Men moet de figuren* 86 *en* 91, *van tijd tot tijd teekenen, op nieuw bestuderen, tot dat men het onderlinge verband der betoogde formulen zich, zonder hulp eener figuur, duidelijk voor den geest kan brengen.*

5°. *De betoogde formulen kunnen, zoo als in het vervolg blijken zal, dienen, om alle gevallen der regthoekige bolvormige driehoeken, door berekening, op te lossen.*

§. 1154. V. Bepaling. *Fig.* 92. Een bolvormige driehoek $A'B'C$, wiens zijde $A'C'$ gelijk is aan een quadrant, wordt een *regtzijdige bolvormige driehoek* genoemd. De twee andere zijden $B'C'$ en $A'B'$ noemt men de *scheve zijden.*

Zulk een regtzijdige driehoek wordt, door constructie, aldus verkregen. Zij ABC een regthoekige bolvormige driehoek. Beschrijf, uit de hoekpunten A, B en C van dien driehoek, met de koorde van een quadrant, als straal, op het oppervlak van den bol, den bolvormigen driehoek $A'B'C'$, dan is, volgens de *III Stell. hoek* B + *boog* $A'C' = 180°$; daar nu *hoek* $B = 90°$ is, zoo is *boog* $A'C' = 90°$, en de driehoek $A'B'C'$ heeft alzoo de regte zijde $A'C'$, en is regtzijdig.

IX. Stelling. *Fig.* 92.

§. 1155. *Elke regtzijdige driehoek, heeft de volgende eigenschappen:* 1°. *de sinus van elken hoek aan de regte zijde, is gelijk aan de sinus van de tegenoverstaande scheve zijde, vermenigvuldigd met de sinus van den hoek over de regte zijde;* 2°. *De tangens van elken hoek aan de regte zijde is gelijk aan de tangens van den tegenoverstaande scheve zijde, vermenigvuldigd met de sinus van den anderen hoek, aan de regte zijde;* 3°. *de cosinus van den hoek, over de regte zijde, is gelijk aan het product van de cosinussen der hoeken, aan de regte zijde, negatief genomen;* 4°. *de cosinus van ééne der scheve zijden, is gelijk aan de cosinus van den tegenoverstaanden hoek, vermenigvuldigd met de sinus van den hoek, over de andere scheve zijde staande;* 5°. *de tangens van éénen der hoeken aan de regte zijde, is gelijk aan de tangens van den hoek, over de regte zijde, vermenigvuldigd met de cosinus van de zijde, welke tusschen die twee hoeken gelegen is;* 6° *het product van de tangenten der scheve zijden, vermenigvuldigd met de cosinus van den*

den hoek, over de regte zijde, is gelijk aan de éénheid negatief genomen; dat is:

$sin.\,A' = sin.\,a' \times sin.\,B'$, en $sin.\,C' = sin.\,c' \times sin.\,B'$ . . . . (7)

$tang.\,A' = tang.\,a' \times sin.\,C'$, en $tang.\,C' = tang.\,c' \times sin.\,A'$. (8)

$cos.\,B' = -\,cos.\,A \times cos.\,C$ . . . . (9)

$cos.\,a' = cos.\,A' \times sin.\,C'$, en $cos.\,c' = cos.\,C' \times sin.\,a'$ . . . . (10)

$tang.\,A' = -\,tang.\,B' \times cos.\,c'$, en $tang.\,C = -\,tang.\,B' \times cos.\,a'$ (11)

$tang.\,a' \times tang.\,c' \times cos.\,B = -\,1$ . . . . . (12)

Betoog. Deze formulen worden, met behulp van den aspunts-driehoek *A B C*, welke ontstaat, wanneer men uit de hoekpunten *A'*, *B'* en *C'*, met stralen, die gelijk zijn aan de koorde van een quadrant, op het oppervlak van den bol, eenen driehoek beschrijft, aldus gevonden.

Volgens de *III. Stell.* is *boog* $A'C'$ + *hoek* $B = 180°$; aangezien nu *boog* $AC = 90°$ is, zoo is *hoek* $B = 90°$, en de bolvormige driehoek *A B C* is alzoo regthoekig in *B*. Nu hebben wij, volgens de voorgaande *Stelling*.

1°. In den regthoekigen bolvormigen driehoek *A B C*, $sin.\,BC = sin.\,A \times sin.\,AC$; nu is $BC = 180° - A'$, $A = 180° - a$ en $AC = 180° - B'$; derhalve is $sin.\,BC = sin.\,A'$, en $sin.\,A = sin.\,a'$ en $sin.\,AC = sin.\,B'$; men verkrijgt derhalve $sin.\,A' = sin.\,a' \times sin.\,B'$. — Om dezelfde reden, is $sin.\,C = sin.\,c' \times sin.\,B'$.

2°. Nog is, in denzelfden driehoek *A B C*, $tang.\,BC = tang.\,A \times sin.\,AB$; dat is $tang.\,(180° - A') = tang.\,(180° - a') \times sin.\,(180° - C')$ of $-\,tang.\,A' = -\,tang.\,a' \times sin.\,C'$; of, de teekens omkeerende, $tang.\,A' = tang.\,a' \times sin.\,C'$. — Op dezelfde wijze, vindt men, $tang.\,C = tang.\,c' \times sin.\,A'$.

3°. Nog is, in den driehoek *A B C*, volgens de voorgaande *Stelling*, $cos.\,AC = cos.\,AB \times cos.\,BC$; dat is $cos.\,(180° - B') = cos.\,(180° - A') \times cos.\,(180° - C')$; of $-\,cos.\,B' = -\,cos.\,A' \times cos. - C'$; of, de teekens omkeerende, $cos.\,B' = -\,cos.\,A' \times cos.\,C'$.

4°. Nog is, in den driehoek *A B C*, $cos.\,A = cos.\,BC \times sin.\,C$; dat is, $cos.\,(180° - a') = cos.\,(180° - A') \times sin.\,(180° - c')$; of $-\,cos.\,a' = -\,cos.\,A' \times sin.\,c'$; of, de teekens omkeerende, $cos.\,a' = cos.\,A' \times sin.\,c'$. — Om dezelfde reden, is $cos.\,c' = cos.\,C \times sin.\,a'$.

5°. Verder is, $tang.\,AB = tang.\,AC \times cos.\,A$; dat is, $tang.\,(180° - C') = tang.\,(180° - B') \times cos.\,(180° - a')$; of $-\,tang.\,C' = -\,tang.\,B' \times -\,cos.\,a'$; en, zoo men de teekens omkeert, $tang.\,C' = -\,tang.\,B' \times cos.\,a'$. Om dezelfde reden, is $tang.\,A' = -\,tang.\,B' \times cos.\,c'$.

6°. Eindelijk is, in den driehoek *A B C*, volgens de voorgaande *Stelling*, $tang.\,A \times tang.\,C \times cos.\,AC = 1$; dat is, $tang.\,(180° - a') \times tang.\,(180° - c') \times cos.\,(180° - B') = 1$, of wel $-\,tang.\,a' \times -\,tang.\,c' \times -\,cos.\,B' = 1$; of, wanneer men de teekens omkeert, $tang.\,a' \times tang.\,C' \times cos.\,B' = -\,1$.

§. 1156. De eigenschappen der regthoekige bolvormige driehoeken

ken bevatten in zich de gronden, uit welke die der fcheefhoekige, tot welker befchouwing wij thans overgaan, kunnen worden afgeleid.

§. 1157. VI. Bepaling. *Fig.* 93 en 94. Tot dat einde, late men, door den tophoek *C* van eenige fcheefhoekigen bolvormigen driehoek *ABC*, een grooten cirkel *DCE* gaan, welke regthoekig op het vlak van de bafis *AB* ftaat; hetgeen altijd gefchieden kan, wanneer men dien grooten cirkel, behalve door het toppunt, ook laat gaan door de projectie, welke de ftraal, die het toppunt van den driehoek met het middelpunt van den bol vereenigt, op de bafis maakt. Die cirkel teekent op het oppervlak van den bol twee bogen *CD* en *CE*, van welke de één het fupplement van den anderen is; en welke, omdat zij loodregt op de bafis of derzelver verlengde ftaan, *de loodregte bogen*, welke, uit het toppunt, op de bafis vallen, genoemd worden.

§. 1158. Aanmerkingen. 1°. Wanneer één dezer bogen zie *fig.* 93, binnen den driehoek valt; dan verdeelt hij denzelven in twee regthoekige bolvormige driehoeken *ACD* en *BCD*; en, in dit geval, worden de bogen *AD* en *BD*, *de ftukken of deelen van de bafis*, en de hoeken *ACD* en *BCD*, *de deelen van den tophoek* genoemd. Aangezien nu, in een regthoekigen bolvormigen driehoek, de fcheve hoeken van dezelfde foort zijn, als de tegenoverftaande regthoekszijden, zoo zullen de hoeken *BAC* en *ABC*, beide van dezelfde foort zijn als de loodregte boog *CD*; waaruit dan blijkt: *dat*, *wanneer één der loodregte bogen binnen den driehoek valt*, *de hoeken aan de bafis of beide fcherp of beide ftomp moeten zijn; en dat*, omgekeerd, *wanneer de hoeken aan de bafis van dezelfde foort zijn*, *één der loodregte bogen binnen den driehoek zal moeten vallen.*

2°. Men bemerkt hieruit: *dat*, *wanneer*, *zie* fig. 94, *de hoeken BAC en ABC aan de bafis van verfchillende foort zijn*, *de één ftomp en de de ander fcherp*, *geen der loodregte bogen CD en CE*, *binnen den driehoek ABC vallen kan: zij zullen dan*, *in dit geval*, *buiten den driehoek vallen.* Welke dezer twee loodregte bogen nu ook genomen worde, ontftaan er altijd twee regthoekige driehoeken *ACD* en *BCD*, of *BCE* en *ACE*, welke deze loodregte bogen tot eene gemeenfchappelijke regthoekszijde hebben.

3°. In de volgende befchouwingen, onderftellen wij: *dat de bolvormige driehoek ABC*, fig. 93, *zoodanig gefteld zij*, *dat ééne der loodregte bogen CD binnen den driehoek valle*, *en alsdan worden zoowel de bogen AD en BD*, *die deelen van de bafis zijn*, *als de hoe-*

hoeken ACD en BCD, die deelen van den tophoek zijn, voor positieve bogen en hoeken aangenomen, welke, de eerste, van de punten A en B, naar D, en de laatste, van de bogen AC en BC, naar CD geteld worden. Hieruit volgt dan: *dat, wanneer, onder zekere omstandigheden, de boog BD negatief wordt, het punt D aan de regterhand van B zal vallen, en dat de loodregte boog, welke, in de oorspronkelijke figuur 93, door CD is afgebeeld, onder die omstandigheid, buiten den hoek B zal vallen; maar buiten den hoek A, indien, ten gevolge van andere omstandigheden, de boog AD negatief wordt.* Want, *het is,* zoo als op zijn tijd blijken zal, *eene misvatting, te meenen: dat de loodregte boog, welke, uit den tophoek van eenen stomphoekigen driehoek, op de basis valt, altijd buiten den stompen hoek zal vallen.* Dezelfde omstandigheden moeten, ten aanzien van de deelen van den tophoek, in acht genomen worden.

4°. Nog moet men, in de volgende beschouwingen, niet uit het oog verliezen: *dat de zijden en de hoeken van een bolvormigen driehoek altijd kleiner dan* 180° *moeten zijn.*

X. STELLING. *Fig.* 93 *en* 94.

§. 1159. *In elken bolvormigen driehoek, staan de sinussen der zijden tot elkander, in dezelfde reden, als de sinussen der tegenoverstaande hoeken. Dat is:*

$$(\sin. AB,\ \sin. AC,\ \sin. BC) :: (\sin. C,\ \sin B,\ \sin. A) \ . \ (13)$$

BETOOG. Deze eigenschap van den bolvormigen driehoek, die zoo merkbaar met de eigenschap van den platten driehoek (zie *IV. St. XII. B.*) overeenkomt, en welke reeds, in het *VIII. Boek*, uit de constructie van het *II. Vraagst.* is afgeleid, kan aldus betoogd worden.

Stel, *fig.* 93, dat, de hoeken aan de basis van dezelfde soort zijnde, de loodregte boog, welke, uit het hoekpunt C, op de tegenoverstaande zijde AB getrokken is, binnen den driehoek valt; dan is, volgens de *VIII Stell.* in den regthoekigen driehoek ACD, $\sin. CD = \sin. A \times \sin. AC$; en, in den regthoekigen driehoek BCD, is $\sin. CD = \sin. B \times \sin. BC$. Uit deze twee waarden van sin. CD volgt onmiddellijk, $\sin. A \times \sin. AC = \sin. B \times \sin. BC$; en uit deze de evenredigheid, $\sin. AC : \sin. BC = \sin. B : \sin. A$.

Zijn, zoo als in *fig* 94, de hoeken aan de basis van verschillende soort, en vallen dus de loodregte bogen CD en CE buiten den driehoek ABC; dan zal men, het zij uit de regthoekige driehoeken ACD en BCD, het zij uit de regthoekige driehoeken ACE en BCE, dezelfde vergelijkingen en dezelfde evenredigheid verkrijgen.

Laat men, uit de hoekpunten A of B, loodregte bogen, op de over-

staande zijden BC en AC vallen; dan zal men, op dezelfde wijze, de evenredigheden, $sin. AB : sin. AC = sin. C : sin. B$ en $sin. AB : sin. BC = sin. C : sin. A$ verkrijgen.

§. 1160. I. Gevolg. *Fig.* 93. *In elken bolvormigen driehoek, staat de tangens van de halve som van twee zijner zijden tot de tangens van het halve verschil dezer zijden, gelijk de tangens van de halve som der overstaande hoeken tot de tangens van het halve verschil van dezelve; dat is:*

$$tang. \tfrac{1}{2}(AC + BC) : tang. \tfrac{1}{2}(AC - BC) = tang. \tfrac{1}{2}(B + A) : tang. \tfrac{1}{2}(B - A) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Want, uit de betoogde evenredigheid,

$$sin. AC : sin. BC = sin. B : sin. A$$

volgt, al ten eersten:

$$sin. AC + sin. BC : sin. AC - sin. BC = sin. B + sin. A : sin. B - sin. A$$

omdat nu, in het algemeen genomen,

$$sin. p + sin. q : sin. p - sin. q = tang. \tfrac{1}{2}(p + q) : tang. \tfrac{1}{2}(p - q)$$

is, zoo verandert de laatste evenredigheid, in deze:

$$tang\ \tfrac{1}{2}(AC + BC) : tang. \tfrac{1}{2}(AC - BC) = tang. \tfrac{1}{2}(B + A) : tang. \tfrac{1}{2}(B - A)$$

§. 1161. II. Gevolg. *Fig.* 93. Uit deze laatste evenredigheid kan gemakkelijk bewezen worden: *dat, in elken bolvormigen driehoek, de som van twee zijner hoeken minder, gelijk of grooter dan twee regte hoeken zal zijn, naarmate de som der zijden, die over die hoeken staan, minder, gelijk of grooter dan twee quadranten of een halven omtrek is.*

Deze fraaije en merkwaardige eigenschap van de bolvormigen driehoek, wordt uit de laatste evenredigheid ligtelijk opgemaakt. Uit dezelve volgt onmiddellijk:

$$tang. \tfrac{1}{2}(B + A) = tang. \tfrac{1}{2}(AC + BC) \times \frac{tang. \tfrac{1}{2}(B - A)}{tang. \tfrac{1}{2}(AC - BC)} \quad (15)$$

Omdat elke hoek en elke zijde van een bolvormigen driehoek minder dan 180^0 is, zoo is natuurlijk het verschil van twee zijden of twee hoeken insgelijks minder dan 180^0; gevolgelijk zijn $\tfrac{1}{2}(B - A)$ en $\tfrac{1}{2}(AC - BC)$ beide minder dan 90^0, en zijn daarom $tang. \tfrac{1}{2}(B - A)$ en $tang. \tfrac{1}{2}(AC - BC)$ beide positief, en het gebroken $\frac{tang. \tfrac{1}{2}(B - A)}{tang. \tfrac{1}{2}(AC - BC)}$ insgelijks positief.

Zij nu, 1°. $AC + BC < 180^0$; dan is $\tfrac{1}{2}(AC + BC) < 90^0$ en $tang. \tfrac{1}{2}(AC - BC)$ is dan positief; in dit geval, is $tang. \tfrac{1}{2}(B + A)$ gelijk aan een positief getal, met een positief getal vermenigvuldigd, en dus positief; gevolgelijk $\tfrac{1}{2}(B + A) < 90^0$ en $B + A < 180^0$.

2°. Stel $AC + BC = 180^0$; dan is $\tfrac{1}{2}(AC + BC) = 90^0$, en is tang.

$\tfrac{1}{2}(A$

$\frac{1}{2}(AC+BC)$ oneindig groot; oneindig groot is dan ook *tang.* $\frac{1}{2}(B+A)$; gevolgelijk $\frac{1}{2}(B+A)=90^\circ$ en $A+B=180^\circ$.

3°. Is eindelijk $AC+BC>180^\circ$ en $\frac{1}{2}(AC+BC)>90^\circ$; dan zijn *tang.* $\frac{1}{2}(AC+BC)$ en *tang* $\frac{1}{2}(B+A)$ beide negatief; en, om die reden, is $\frac{1}{2}(B+A)>90^\circ$, en $A+B>180^\circ$.

Men kan, door bolvormige driehoeken uit karton-papier uit te snijden, verschillende proeven nemen, om die merkwaardige eigenschap van den bolvormigen driehoek te bevestigen.

§. 1162. AANMERKING. Wanneer men onderstelt, dat de zijden van een bolvormigen driehoek ABC zeer klein zijn; dan zijn de sinusfen zijner zijden van de zijden zelve niet merkelijk onderscheiden; en dan is er ook geen merkelijk onderscheid tusschen de tangenten van de halve som en het halve verschil van twee zijden, en de halve som en het halve verschil van die zijden zelve: *de betoogde evenredigheden* (13) *en* (14), *zijn dan van de eigenschappen der platte driehoeken, in de* III *en* IV. Stellingen *van het* XII. Boek *betoogd, niet onderscheiden; zijnde deze laatste, als een bijzonder geval, in de eerste begrepen.*

XI. STELLING. *Fig.* 95.

§. 1163. *Wanneer men, uit den tophoek* (C) *van een bolvormigen driehoek* (ABC), *een loodregten boog* (CD) *op de overstaande zijde* (AB) *laat vallen; dan zijn:* 1°. *de tangenten van de hoeken, aan de basis, in de omgekeerde reden van de sinusfen van de stukken van de basis, welke aan die hoeken zamenkomen;* 2°. *zijn de cosinusfen van de hoeken, aan de basis, evenredig aan de sinusfen van de deelen van den tophoek;* 3°. *zijn de cosinusfen van de opstaande zijden evenredig aan de cosinusfen van de stukken van de basis;* 4°. *zijn de tangenten van de opstaande zijden, in de omgekeerde reden van de cosinusfen van de deelen van den tophoek;* 5°. *en, eindelijk, zijn de tangenten van de deelen van de basis, in dezelfde reden, als de tangenten van de deelen van den tophoek; dat is:*

$$tang.\,A : tang.\,B = sin.\,BD : sin.\,AD \quad \ldots \quad (16)$$
$$cos.\,A : cos.\,B = sin.\,ACD : sin\,BCD \quad \ldots \quad (17)$$
$$cos.\,AC : cos.\,BC = cos.\,AD : cos.\,BD \quad \ldots \quad (18)$$
$$tang.\,AC : tang\,BC = cos.\,BCD : cos.\,ACD \quad \ldots \quad (19)$$
$$tang.\,AD : tang.\,BD = tang\,ACD : tang\,BCD \quad (20)$$

BETOOG. Onderstellende, dat de loodregte boog CD binnen den driehoek valt; dan verdeelt hij denzelven in twee regthoekige bolvormige driehoeken ACD en BCD; uit welke, met behulp van hetgeen in de *VIII. Stelling* betoogd is, de gestelde evenredigheden, met weinig moeite, kunnen worden afgeleid.

 1°. Want,

1°. Want, in gemelde regthoekige driehoeken, is *tang.CD* = *tang.A* × *sin.AD*, en *tang.CD* = *tang.B* × *sin.BD*; derhalve is:

$$tang.\,A \times sin.\,AD = tang.\,B \times sin.\,BD$$

$$\text{en}\quad tang.\,A : tang.\,B = sin.\,BD : sin.\,AD$$

2°. In dezelfde regthoekige driehoeken, is *cos.A* = *cos.CD* × *sin.ACD*, en *cos.B* = *cos.CD* × *sin.BCD*; en, uit deze twee vergelijkingen, volgt dan onmiddellijk:

$$cos.\,CD = \frac{cos.\,A}{sin.\,ACD} = \frac{cos.\,B}{sin.\,BCD}$$

$$\text{of}\quad cos.\,A : cos.\,B = sin.\,ACD : sin.\,BCD$$

3°. Nog is, in diezelfde regthoekige driehoeken, *cos.AC* = *cos.BD* × *cos.AD*, en *cos.BC* = *cos.BD* × *cos.CD*; uit welke vergelijkingen dan volgt:

$$cos.\,CD = \frac{cos.\,AC}{cos.\,AD} = \frac{cos.\,BC}{cos\,BD}$$

$$\text{of}\quad cos.\,AC : cos.\,BC = cos.\,AD : cos.\,BD$$

4°. Uit diezelfde driehoeken, volgt nog *tang.CD* = *tang.AC* × *cos.ACD*, en *tang.CD* = *tang.BC* × *cos.BCD*; derhalve is:

$$tang.\,AC \times cos.\,ACD = tang.\,BC \times cos.\,BCD$$

$$\text{of}\quad tang.\,AC : tang.\,BC = cos.\,BCD : cos.\,ACD$$

5°. Eindelijk is nog, in diezelfde driehoeken, *tang.AD* = *tang.ACD* × *sin.CD*, en *tang.BD* = *tang.BCD* × *sin.CD*; waaruit dus volgt:

$$sin.\,CD = \frac{tang.\,AD}{tang.\,ACD} = \frac{tang.\,BD}{tang.\,BCD}$$

$$\text{of}\quad tang.\,AD : tang.\,BD = tang.\,ACD : tang.\,BCD$$

§. 1164. AANMERKINGEN. *Fig.* 94. 1°. *Indien de loodregte boog buiten den driehoek valt; dan zal men, uit de regthoekige driehoeken ACD en BCD, dezelfde evenredigheden, als uit* fig. 95, *vinden.* Die evenredigheden zijn dus, in den volstrekten zin, algemeen.

Nemen wij, bij voorbeeld, in *fig.* 94, eens de vergelijkingen *tang.CD* = *tang A* × *sin.AD*, en *tang.CD* = *tang.CBD* × *sin.BD*; dan is *tang.A* × *sin.AD* = *tang.CBD* × *sin.BD*, en

$$tang.\,A : tang.\,CBD = sin.\,BD : sin.\,AD$$

omdat nu *ABC* + *CBD* = 180°, zoo is *tang.CBD* = − *tang.ABC*, en, omdat *BD*, ten opzigte van de oorspronkelijke *figuur* 95, negatief is, zoo moet hier *sin.BD* negatief genomen worden; de evenredigheid wordt dus:

$$tang.\,A : -tang.\,ABC = -sin.\,BD : sin.\,AD$$

welke, indien men de teekens van de redens omkeert, wederom den vorm van de evenredigheid (16) zal aannemen. *Men zal niet kunnen dwalen, wanneer men, in al die evenredigheden, de teekens der goniometrische lijnen, naar den regel, overeenkomstig de waarde der bogen*

en

en hoeken neemt; en voorts, wanneer de loodregte boog CD buiten den driehoek valt, den boog BD en den hoek BCD, zoo als het naar de algemeene regels behoort, als negatief aanneemt.

2°. *Dezelfde evenredigheden gelden ook, in* fig. 94, *voor de bogen AE, BE, en de hoeken ACE en BCE.*

De Lezer zal wel doen, om al de deelen van het betoog op de regthoekige bolvormige driehoeken *ACE* en *BCE* uit te werken. Hij zal dan nog duidelijker de algemeenheid der gestelde evenredigheden inzien.

XII. STELLING. *Fig.* 95.

§. 1165. *Wanneer men, uit den tophoek (C) van eenen scheefhoekigen bolvormigen driehoek (ABC), een loodregten boog (CD) op de overstaande zijde (AB) laat vallen; dan zal de overeenstemming, welke er tusschen de twee andere zijden en hoeken, en tusschen de deelen van de basis en den tophoek bestaat, door de volgende merkwaardige vergelijkingen worden uitgedrukt:*

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AD-BD)=\text{cot.}\tfrac{1}{2}AB\times\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC+BC)\times\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC-BC)\quad\ldots\quad(21)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(ACD-BCD)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}C\times\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+A)\times\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B-A)\quad\ldots\quad(22)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(ACD-BCD)=\text{cot.}\tfrac{1}{2}C\times\frac{\text{sin.}(AC-BC)}{\text{sin.}(AC+BC)}\quad\ldots\quad(23)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AD-BD)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}AB\times\frac{\text{sin}\ (B-A)}{\text{sin.}(A+B)}\quad\ldots\quad(24)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B-A)=\text{cot.}\tfrac{1}{2}C\times\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(AC+BC)}\quad\ldots\quad(25)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+A)=\text{cot.}\tfrac{1}{2}C\times\frac{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(AC+BC)}\quad\ldots\quad(26)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC-BC)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}AB\times\frac{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{sin.}\tfrac{1}{2}(A+B)}\quad\ldots\quad(27)$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(AC+BC)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}AB\times\frac{\text{cos}\ \tfrac{1}{2}(B-A)}{\text{cos.}\tfrac{1}{2}(A+B)}\quad\ldots\quad(28)$$

BETOOG. Deze formulen, welke, naar derzelver uitvinder, de Baron NEPER, de *Neperiaansche analogien* of *evenredigheden* (de *Neperiaansche formulen* liever) genoemd worden, worden uit de evenredigheden, die, in de voorgaande *Stelling*, betoogd zijn, gevonden, als volgt:

1°. Uit de evenredigheid,

$$\text{cos.}AC:\text{cos.}BC=\text{cos.}AD:\text{cos.}BD$$

volgt onmiddellijk:

$$cos.\,AC + cos.\,BC : cos.\,AC - cos.\,BC = cos.\,AD + cos.\,BD :$$
$$cos.\,AD - cos.\,BD$$

Nu is, zie *VIII. Stell. XI. B.*, in het algemeen:

$$cos.\,p + cos.\,q : cos.\,p - cos.\,q = cot.\,\tfrac{1}{2}(p+q) : tang.\,\tfrac{1}{2}(q-p)$$

De afgeleide evenredigheid wordt derhalve:

$$cot.\,\tfrac{1}{2}(AC + BC) : tang.\,\tfrac{1}{2}(BC - AC) = cot.\,\tfrac{1}{2}AB :$$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}(BD - AD)$$

en zoo men nu, uit deze laatste, den vierden term oplost; dan verkrijgt men:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(BD - AD) = cot\,\tfrac{1}{2}AB \times tang.\,\tfrac{1}{2}AC + BC) \times$$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}(BC - AC)$$

of, indien men stelt, dat $cos.\,BC > cos.\,AC$ is, als, wanneer ook $cos.\,BD > cos.\,AD$ wordt,

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(AD - BD) = cot.\,\tfrac{1}{2}AB \times tang.\,\tfrac{1}{2}(AC + BC) \times$$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}(AC - BC)$$

2°. Om de tweede vergelijking (22) te betoogen, bediene men zich van de evenredigheid:

$$cos\,A : cos.\,B = sin.\,ACD : sin.\,BCD$$

uit welke dan wederom onmiddellijk volgt:

$$cos.\,A + cos.\,B : cos.\,A - cos.\,B = sin.\,ACD + sin.\,BCD :$$
$$sin.\,ACD - sin\,BCD$$

Nu heeft men, volgens de *VIII* en *VII. Stell. XI. B.*,

$$cos.\,A + cos.\,B : cos\,A - cos.\,B = cot\,\tfrac{1}{2}(A+B) : tang.\,\tfrac{1}{2}(B-A)$$

en $sin.\,ACD + sin.\,BCD : sin.\,ACD - sin.\,BCD = tang.\,\tfrac{1}{2}C :$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}(ACD - BCD)$$

De voorgaande evenredigheid wordt dan:

$$cot.\,\tfrac{1}{2}(A+B) : tang.\,\tfrac{1}{2}(B-A) = tang.\,\tfrac{1}{2}C : tang.\,\tfrac{1}{2}(ACD - BCD)$$

Lost men uit deze den vierden term op; dan verkrijgt men:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(ACD - BCD) = tang.\,\tfrac{1}{2}C \times tang.\,\tfrac{1}{2}(A+B) \times$$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}(B-A)$$

3°. De vergelijking (23) wordt, uit de evenredigheid,

$$tang.\,AC : tang.\,BC = cos.\,BCD : cos.\,ACD$$

aldus gevonden:

$$tang.\,AC + tang.\,BC : tang.\,AC - tang.\,BC = cos.\,BCD +$$
$$cos.\,ACD : cos.\,BCD - cos.\,ACD$$

Nu is, zie *XI* en *VIII. Stell. XI. B.*,

$$tang.\,AC + tang.\,BC : tang.\,AC - tang.\,BC = sin.\,(AC+BC) :$$
$$sin.\,(AC - BC)$$

$$cos.\,BCD + cos.\,ACD : cos.\,BCD - cos\,ACD = cot.\,\tfrac{1}{2}C :$$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}(ACD - BCD)$$

de laatste evenredigheid wordt derhalve:

sin.

$$sin.(AC+BC):sin.(AC-BC)=cot.\tfrac{1}{2}C:tang.\tfrac{1}{2}(ACD-BCD)$$

uit welke dan onmiddellijk zal volgen:

$$tang.\tfrac{1}{2}(ACD-BCD)=cot.\tfrac{1}{2}C\times\frac{sin.(AC-BC)}{sin.(AC+BC)}$$

4°. De vergelijking (24) wordt, uit de evenredigheid,

$$tang.A:tang.B=sin.BD:sin.AD$$

op dezelfde wijze, aldus gevonden:

$$tang.A+tang.B:tang.B-tang.A=sin.AD+sin.BD:$$
$$sin.AD-sin\ BD$$

maar nu is, zie *XI* en *VIII. Stell. XI. B.*

$$tang.A+tang.B:tang.B-tang.A=sin.(B+A):sin.(B-A)$$
$$sin.AD+sin.BD:sin.AD-sin.BD=tang.\tfrac{1}{2}AB:tang.(AD-BD)$$

en, om die reden, verkrijgt men:

$$sin.(B+A):sin.(B-A)=tang.\tfrac{1}{2}A:tang.\tfrac{1}{2}(AD-BD)$$

uit welke evenredigheid dan eindelijk volgen zal:

$$tang.\tfrac{1}{2}(AD-BD)=tang.\tfrac{1}{2}A\times\frac{sin.(B-A)}{sin.(B+A)}$$

5°. De vergelijkingen (25) en (26), die eigenlijk bij elkander behooren, worden, uit de vergelijkingen (22) en (23), aldus afgeleid.

Gemelde vergelijkingen, (22) en (23), stellen twee onderscheidene waarden voor van *tang.* $\tfrac{1}{2}(ACD-BCD)$, en geven bijgevolg de nieuwe vergelijking:

$$tang.\tfrac{1}{2}C\times tang.\tfrac{1}{2}(B+A)\times tang.\tfrac{1}{2}(B-A)=\ldots$$
$$cot.\tfrac{1}{2}C\times\frac{sin(AC-BC)}{sin.(AC+BC)}$$

of, indien men beide leden dezer vergelijking door *tang.* $\tfrac{1}{2}C$ deelt,

$$tang.\tfrac{1}{2}(B+A)\times tang.\tfrac{1}{2}(B-A)=cot^2.\tfrac{1}{2}C\times\frac{sin(AC-BC)}{sin.(AC+BC)}$$

Daar nu, in het algemeen, $sin.p=2\,sin.\tfrac{1}{2}p\times cos.\tfrac{1}{2}p$ is, zoo kan men, in plaats van deze laatste vergelijking, schrijven:

$$tang.\tfrac{1}{2}(B+A)\times tang.\tfrac{1}{2}(B-A)=\ldots\ldots$$
$$cot^2.\tfrac{1}{2}C\times\frac{sin.\tfrac{1}{2}(AC-BC)\ cos.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{sin.\tfrac{1}{2}(AC+BC)\ cos.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}\ \ldots\ldots(p)$$

Men vermenigvuldige deze vergelijking (p) met deze andere vergelijking,

$$\frac{tang\ \tfrac{1}{2}(B-A)}{tang.\tfrac{1}{2}(B+A)}=\frac{tang.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{tang.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}=\frac{sin.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{cos.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}$$
$$\times\frac{cos.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}{sin.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}$$

welke, uit het *I. Gevolg* van de *X. Stelling*, onmiddellijk volgt; dan zal men verkrijgen:

$$tang^2.\tfrac{1}{2}(B-A)=cot^2.\tfrac{1}{2}C\times\frac{sin^2.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{sin^2.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}$$

en, uit deze laatste den vierkants wortel trekkende:

$$tang.\tfrac{1}{2}(B-A)=cot.\tfrac{1}{2}C\times\frac{sin.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{sin.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}$$

En deelt men nu eindelijk de vergelijking (p) door deze laatste; dan verkrijgt men:

$$tang.\tfrac{1}{2}(B+A)=cot.\tfrac{1}{2}C\times\frac{cos.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{cos.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}$$

6°. Ook behooren de vergelijkingen (27) en (28) bij elkander. Zij volgen uit de vergelijkingen (21) en (24), welke, elke op zich zelve, de waarde van $tang.\tfrac{1}{2}(AB-BD)$ voorstellen, op deze wijze. Men heeft namelijk:

$$cot.\tfrac{1}{2}AB\times tang.\tfrac{1}{2}(AC+BC)\times tang.\tfrac{1}{2}(AC-BC)=\ldots$$

$$tang.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{sin.(B-A)}{sin.(B+A)}$$

dat is, wanneer men beide leden der vergelijking door $cot.\tfrac{1}{2}AB$ deelt, en, in plaats van $sin.p$, schrijft $2\,sin.\tfrac{1}{2}p\times cos.\tfrac{1}{2}q$

$$tang.\tfrac{1}{2}(AC+BC)\times tang.\tfrac{1}{2}(AC-BC)=\ldots$$

$$tang^2.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\,cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{sin.\tfrac{1}{2}(B+A)\,cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}\quad\ldots\ldots(q)$$

Nu is, zie *I. Gevolg X. Stell.*

$$\frac{tang.\tfrac{1}{2}(AC-BC)}{tang.\tfrac{1}{2}(AC+BC)}=\frac{tang.\tfrac{1}{2}(B-A)}{tang.\tfrac{1}{2}(B+A)}=\frac{sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}\times\frac{cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}{sin.\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

vermenigvuldigt men nu de vergelijking (q) met deze laatste; dan zal men verkrijgen:

$$tang^2.\tfrac{1}{2}(AC-BC)=tang^2.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A)}{sin^2.\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

of, uit deze laatste den vierkants-wortel trekkende,

$$tang.\tfrac{1}{2}(AC-BC)=tang.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{sin.\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

en, deelt men de vergelijking (q) door deze laatste; dan verkrijgt men:

$$tang.\tfrac{1}{2}(AB+BC)=tang.\tfrac{1}{2}AB\times\frac{cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}$$

§. 1166. Berigt. *Fig.* 95 Wij zullen, ten einde, in het vervolg, de symetrie der uitdrukkingen zooveel te duidelijker voor oogen te stellen, de zijden van een bolvormigen driehoek, door dezelfde letters, als de overstaande hoeken, uitdrukken; namelijk $BC=a$, $AC=b$ en $AB=c$; de deelen van de basis $AD=p$ en $BD=q$; de deelen van den tophoek $ACD=P$ en $BCD=Q$; en dan worden de grondformulen, welke wij tot hiertoe betoogd hebben, en die

die nog verder betoogd zullen worden, in de tafel, op de volgende *Bladz.* beknopter aldus voorgesteld, en zullen wij ons van deze wijze van schrijven, in het vervolg, meestal bedienen.

XIII. Stelling. *Fig.* 95.

§. 1167. *Elke bolvormige driehoek heeft de vier volgende merkwaardige eigenschappen:* 1°. *is de cosinus van de halve som van twee zijden tot de cosinus van de halve som der overstaande hoeken, als de cosinus van de helft van de derde zijde tot de sinus van de helft van den derden hoek;* 2°. *de sinus van het halve verschil van twee zijden staat tot de sinus van het halve verschil der overstaande hoeken, gelijk de sinus van de helft van de derde zijde tot de cosinus van de helft van den derden hoek;* 3°. *de sinus van de halve som van twee zijden staat tot de cosinus van het halve verschil der overstaande hoeken, als de sinus van de helft van de derde zijde tot de sinus van de helft van den derden hoek;* 4°. *de cosinus van het halve verschil van twee zijden staat tot de sinus van de halve som der overstaande hoeken, in dezelfde reden, als de cosinus van de helft van de derde zijde tot de cosinus van de helft van den derden hoek; dat is:*

$$cos. \tfrac{1}{2}(a+b) : cos. \tfrac{1}{2}(A+B) = cos. \tfrac{1}{2}c : sin. \tfrac{1}{2}C \quad . . . (29)$$

$$sin \tfrac{1}{2}(b-a) : sin. \tfrac{1}{2}(B-A) = sin. \tfrac{1}{2}c : cos. \tfrac{1}{2}C \quad . . . (30)$$

$$sin. \tfrac{1}{2}(a+b) : cos. \tfrac{1}{2}(B-A) = sin. \tfrac{1}{2}c : sin. \tfrac{1}{2}C \quad . . . (31)$$

$$cos. \tfrac{1}{2}(b-a) : sin. \tfrac{1}{2}(A+B) = cos. \tfrac{1}{2}c : cos. \tfrac{1}{2}C \quad . . . (32)$$

Betoog. Om, deze merkwaardige formulen te betoogen, zoo zullen wij eerst doen opmerken, dat, uit de gedurige evenredigheid:

$$(sin\ a,\ sin.b,\ sin.c) :: (sin.A,\ sin.B,\ sin.C)$$

de twee volgende evenredigheden kunnen worden opgesteld:

$$sin.b + sin\ a : sin.B + sin.A = sin.c : sin.C$$

$$sin.b - sin.a : sin.B - sin.A = sin.c : sin.C$$

Omdat nu, in het algemeen,

$$sin.b + sin.a = 2\,sin\ \tfrac{1}{2}(b+a) \times cos.\tfrac{1}{2}(b-a)$$

$$sin\ b - sin.a = 2\,sin\ \tfrac{1}{2}(b-a) \times cos.\tfrac{1}{2}(b+a)$$

en $sin.p = 2\,sin.\tfrac{1}{2}p \times cos.\tfrac{1}{2}p$ is; zoo zal men, in plaats van deze evenredigheden kunnen schrijven:

$$sin.\tfrac{1}{2}(b+a)\,cos.\tfrac{1}{2}(b-a) : sin.\tfrac{1}{2}(B+A)\,cos.\tfrac{1}{2}(B-A)$$
$$= sin.\tfrac{1}{2}c \times cos.\tfrac{1}{2}c : sin.\tfrac{1}{2}C \times cos.\tfrac{1}{2}C$$

$$sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\,sin.\tfrac{1}{2}(b+a) : sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\,cos.\tfrac{1}{2}(B+A)$$
$$= sin.\tfrac{1}{2}c \times cos.\tfrac{1}{2}c : sin.\tfrac{1}{2}C \times cos.\tfrac{1}{2}C$$

Zie het vervolg, op Bladz. 252.

Verzameling *van de algemeene grondformulen voor de regthoekige en scheefhoekige bolvormige driehoeken.*

A. Voor de regthoekige driehoeken ABC, in welke B de regte hoek is, $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$.

$$\sin. a = \sin. A \times \sin. b;\ \sin. c = \sin. C \times \sin. b \quad (1)$$

$$\tang. a = \tang. A \times \sin. c;\ \tang. c = \tang. C \times \sin. a \quad (2)$$

$$\cos b = \cos. a \times \cos. c \quad (3)$$

$$\cos. A = \cos. a \times \sin. C;\ \cos. C = \cos. c \times \sin A \quad (4)$$

$$\tang. c = \tang. b \times \cos. A;\ \tang. a = \tang. b \times \cos. C \quad (5)$$

$$\tang. A \times \tang. C \times \cos. b = 1 \quad (6)$$

B. Voor de regtzijdige driehoeken $A'B'C'$ (*fig.* 92), die eene zijde $A'C' = 90°$ hebben.

$$\sin A' = \sin. a' \times \sin. B';\ \sin. C' = \sin. c' \times \sin. B' \quad (7)$$

$$\tang. A' = \tang. a' \times \sin. C';\ \tang. C' = \tang. c' \times \sin. A' \quad (8)$$

$$\cos. B' = -\cos. A' \times \cos. C' \quad (9)$$

$$\cos. a' = \cos. A' \times \sin. c';\ \cos. c' = \cos. C' \times \sin. a' \quad (10)$$

$$\tang. C' = -\tang. B' \times \cos. a';\ \tang. A' = -\tang. B' \times \cos. c' \quad (11)$$

$$\tang. a' \times \tang. c' \times \cos B' = -1 \quad (12)$$

C. Voor de scheefhoekige driehoeken, in het algemeen. *Fig.* 95.

$$(\sin. a,\ \sin. b,\ \sin. c) :: (\sin. A,\ \sin. B,\ \sin. C) \quad (13)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(b+a) : \tang. \tfrac{1}{2}(b-a) = \tang. \tfrac{1}{2}(B+A) : \tang. \tfrac{1}{2}(B-A) \quad (14)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(B+A) = \tang. \tfrac{1}{2}(b+a) \times \frac{\tang. \tfrac{1}{2}(B-A)}{\tang. \tfrac{1}{2}(b-a)} \quad (15)$$

$$\tang. A : \tang. B = \sin. q : \sin p \quad (16)$$

$$\cos. A : \cos. B = \sin. P : \sin. Q \quad (17)$$

$$\cos. a : \cos. b = \cos. p : \cos. q \quad (18)$$

$$\tang. a : \tang. b = \cos. Q : \cos. P \quad (19)$$

$$\tang. p : \tang. q = \tang. P : \tang. Q \quad (20)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(p-q) = \cot. \tfrac{1}{2}c \times \tang. \tfrac{1}{2}(b+a) \times \tang. \tfrac{1}{2}(b-a) \quad (21)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(P-Q) = \tang. \tfrac{1}{2}C \times \tang. \tfrac{1}{2}(B+A) \times \tang. \tfrac{1}{2}(B-A) \quad (22)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(P-Q) = \cot. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\sin. (b-a)}{\sin. (b-a)} \quad (23)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(p-q) = \tang \tfrac{1}{2}c \times \frac{\sin. (B-A)}{\sin (B+A)} \quad (24)$$

$$\tang. (B-A) = \cot. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin. \tfrac{1}{2}(b+a)} \quad (25)$$

$$\tang. (B+A) = \cot. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos. \tfrac{1}{2}(b+a)} \quad (26)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(b-a) = \tang. \tfrac{1}{2}c \times \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin. \tfrac{1}{2}(B+A)} \quad (27)$$

$$\tang. \tfrac{1}{2}(b+a) = \tang. \tfrac{1}{2}c \times \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos. \tfrac{1}{2}(B+A)} \quad (28)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a+b):\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos.\tfrac{1}{2}c:\sin.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots (29)$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(b-a):\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)=\sin.\tfrac{1}{2}c:\cos.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots (30)$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(b+a):\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)=\sin.\tfrac{1}{2}c:\sin.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots (31)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(b-a):\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos.\tfrac{1}{2}c:\cos.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots (32)$$

$$\cos.a=\cos.A\times\sin.b\times\sin.c+\cos.b\times\cos.c \quad \ldots (33)$$

$$\cos.A=\frac{\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\sin.b\times\cos.c} \quad \ldots (34)$$

$$\text{tang}.p=\frac{\cos.a-\cos.b\times\cos.c}{\sin.c\times\cos.b}\ (35) \text{ en } \text{tang}.q=\frac{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}{\sin.c\times\cos.a} \quad (36)$$

$$\cos.A=\cos.a\times\sin.B\times\sin.C-\cos.B\times\cos.C \quad \ldots (37)$$

$$\cos.a=\frac{\cos.A+\cos.B\times\cos.C}{\sin.B\times\sin.C} \quad \ldots (38)$$

$$\cot.P=\frac{\cos.B+\cos.A\times\cos.C}{\cos.A\times\sin.C}\ (39) \text{ en } \cot.Q=\frac{\cos.A+\cos.B\times\cos.C}{\cos.B\times\sin.C} \quad (40)$$

$$\text{tang}.a=\frac{\sin.b}{\sin.C\times\cot.A+\cos.C\times\cos.b} \quad \ldots (41)$$

$$\text{tang}.c=\frac{\sin.b}{\sin.A\times\cos.C+\cos.A\times\cos.b} \quad \ldots (42)$$

$$\cos.b\times\cos.C=\sin.b\times\cot.a-\sin.C\times\cot.A \quad \ldots (43)$$

$$\cos.b\times\cos.A=\sin.b\times\cot.c-\sin.A\times\cot.C \quad \ldots (44)$$

$$\text{tang}.p=\frac{\sin.c}{\cos.c+\text{tang}.A\times\cot.B}\ (45)\ \text{tang}.q=\frac{\sin.c}{\cos.c+\text{tang}.B\times\cot.A} \quad (46)$$

$$\cot.p=\cot.c+\frac{\text{tang}.A\times\cot.B}{\sin.c}\ (47)\quad \cot.q=\cot.c+\frac{\text{tang}.B\times\cot.A}{\sin.c} \quad (48)$$

$$\text{tang}.A=\frac{\sin.B}{\sin.c\times\cot.a-\cos.c\times\cos.B} \quad \ldots (49)$$

$$\text{tang}.C=\frac{\sin.B}{\sin.a\times\cot.c-\cos.a\times\cos.B} \quad \ldots (50)$$

$$\cos.B\times\cos.c=\sin.B\times\cot.A-\sin.c\times\cot.a \quad \ldots (51)$$

$$\cos.B\times\cos.c=\sin.B\times\cot.C-\sin.a\times\cot.c \quad \ldots (52)$$

$$\text{tang}.P=\frac{\text{tang}.b\times\cot.a}{\sin.C}-\cot.C\ (53)\ \text{tang}.Q=\frac{\text{tang}.a\times\cot.b}{\sin.C}-\cot.C \quad (54)$$

$$\cot.P=\frac{\sin.C}{\text{tang}.b\times\cot.a-\cos.C}\ (55)\quad \cot.Q=\frac{\sin.C}{\text{tang}.a\times\cot.b-\cos.C} \quad (56)$$

$$\sin.A\times\sin.B-\cos.A\times\cos.B\times\cos.c=\sin.a\times\sin.b+\cos.a\times\cos.b\times\cos.C \quad (57)$$

$$\frac{\cos.A\times\text{tang}.B+\sin.A\times\cos.c}{\sin.c}=\frac{\sin.C}{\cos.b\times\text{tang}.a-\sin.b\times\cos.C} \quad (58)$$

NB. In het vervolg, zullen wij, om te bekorten, de formulen met derzelver nommers, uit deze lijst, aanhalen.

Wanneer men, nu in deze evenredigheden, het product der uiterste termen aan het product der middelsten gelijk stelt; dan verkrijgen wij de twee volgende hulpvergelijkingen; namelijk:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin.\tfrac{1}{2}c\times\cos.\tfrac{1}{2}c=\ldots$$
$$\sin.(b+a)\times\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\sin.\tfrac{1}{2}C\times\cos.\tfrac{1}{2}C\quad..\quad(a)$$

en verder,

$$\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)\times\sin.\tfrac{1}{2}c\times\cos.\tfrac{1}{2}c=\ldots$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)\times\sin.\tfrac{1}{2}C\times\cos.\tfrac{1}{2}C\quad..\quad(b)$$

Men stelle de vergelijkingen (25) en (27) aldus onder elkander:

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$
$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+A)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}c}=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}$$

en dan zal het product dezer vergelijkingen geven de vergelijking:

$$\frac{\sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+A)\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}c}=\ldots$$
$$\frac{\sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}$$

Men vermenigvuldige deze laatste vergelijking met de vergelijking (a); dan verkrijgt men:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin^2.\tfrac{1}{2}c=\sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos^2.\tfrac{1}{2}C$$

en $\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin.\tfrac{1}{2}c=\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos.\tfrac{1}{2}C\;....\;(c).$

eindelijk deele men de vergelijking (b), door de vergelijking (c); dan verkrijgt men:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)\times\cos.\tfrac{1}{2}c=\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)\times\sin.\tfrac{1}{2}C\;...\;(d)$$

Uit deze vergelijkingen (d) en (c), volgen dan eindelijk de evenredigheden,

$$\cos.\tfrac{1}{2}(b+a):\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)=\cos.\tfrac{1}{2}c:\sin.\tfrac{1}{2}C$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(b-a):\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)=\sin.\tfrac{1}{2}c:\cos.\tfrac{1}{2}C$$

Men stelle verder de vergelijkingen (25) en (28) aldus onder elkander,

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}=\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$
$$\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}c}=\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

en deele de eerste van dezelve door de tweede; dan zal men vinden:

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}{\cos.^2.\tfrac{1}{2}(B-A)}\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}c}{\sin.\tfrac{1}{2}c}=\ldots$$
$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}{\sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)}\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}$$

of wel, wanneer men deze vergelijking omkeert,

$\cos^2.\tfrac{1}{2}$

$$\frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}c}=\ldots$$

$$\frac{\sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin\tfrac{1}{2}(b-a)\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}C}$$

Men vermenigvuldige nu deze laatste vergelijking met de vergelijking (*b*); dan zal men verkrijgen:

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin^2.\tfrac{1}{2}c=\sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)\times\sin.\tfrac{1}{2}C$$

en $\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin.\tfrac{1}{2}c=\sin.\tfrac{1}{2}(a+)\times\sin.\tfrac{1}{2}C\ .\ .\ .\ .\ .\ (e)$

Deelt men eindelijk de vergelijking (*a*), door de vergelijking (*e*); dan zal men vinden:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)\times\cos.\tfrac{1}{2}c=\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos.\tfrac{1}{2}C\ .\ .\ .\ (f)$$

en, uit deze twee vergelijkingen (*e*) en (*f*), verkrijgt men dan eindelijk:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(a+b):\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)=\sin.\tfrac{1}{2}c:\sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(b-a):\sin.\tfrac{1}{2}(B+A)=\cos.\tfrac{1}{2}c:\cos.\tfrac{1}{2}C$$

§. 1168. AANMERKINGEN. De fraaije eigenschappen der bolvormige driehoeken, in de twee laatste Stellingen, bewezen, geven gelegenheid tot het maken van de volgende aanmerkingen.

1°. *Wanneer de drie zijden van een bolvormigen driehoek gegeven zijn; dan zal men door formule* (21) *de hoeken kunnen vinden.*

Want, door formule (21), zal men het halve verschil van de deelen van de basis vinden; daar nu ook de halve som van die deelen bekend is, zoo zal men, in de regthoekige bolvormige driehoeken *ACD* en *ACD*, de hoeken *A* en *B*, door de formulen $\cos.A=\tang.AD:\tang.AC$ en $\cos.B=\tang.BD:\tang.BC$ verkrijgen.

2°. *Zijn al de hoeken van eenen bolvormigen driehoek gegeven; dan zal men deszelfs zijden, met behulp van formule* (22), *kunnen berekenen.*

Want, door deze formule, zal men de deelen van den tophoek verkrijgen; en dus zullen, in de regthoekige bolvormige driehoeken *ACD* en *BCD*, de onbekende zijden *AC* en *BC*, door de formulen $\cos.AC=\cot.A\times\cot.P$ en $\cos.BC=\cot.B\times\cot.Q$, bekend worden.

3°. *Zijn twee zijden a en b met den ingesloten C gegeven; dan zal men de onbekende hoeken A en B, door formule* (23), *verkrijgen.*

Want, door die formule, zal men de deelen van den tophoek, namelijk de hoeken *P* en *Q* verkrijgen; en, deze berekend hebbende; dan zal, uit de regthoekige driehoeken *ACD* en *ABC*, volgen: $\tang.A=\cot.P:\cos.b$ en $\tang.B=\cot.Q:\cos.a$.

4°. *Eene zijde AB met de hoeken A en B, aan die zijde liggende, gegeven zijnde; dan zal men de onbekende zijden, door middel van formule* (24), *kunnen berekenen.*

Want,

Want, door dezelve, zal men $AD = p$ en $BD = q$ verkrijgen, en, uit de regthoekige driehoeken ACD en BCD, zal volgen: $cot.\ b = cos.\ A \times tang\ p$, en $cot.\ a = cos.\ B \times tang.\ q$

5°. *Zijn twee zijden a en b, met den ingeslooten hoek C, gegeven; dan zal men, door de twee formulen* (25) *en* (26) *te berekenen, de onbekende hoeken A en B verkrijgen; en de derde zijde zal door ééne der vier evenredigheden* (29), (30), (31) *en* (32), *gevonden worden.*

6°. *Zijn eindelijk ééne zijde met de hoeken aan die zijde gegeven; dan zullen beide de onbekende zijden, door de formulen* (27) *en* (28); *en den onbekenden hoek, door ééne der evenredigheden* (29)—(32) *berekend worden.*

7°. *De Neperiaansche analogien* (in de XII. *Stelling* betoogd) *kunnen, met behulp van den aspunts-driehoek,* (*zie* fig. 85.) *de ééne uit de andere worden afgeleid.*

Nemen wij, bij voorbeeld, de formule (21). In den aspunts-driehoek abc, is,

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(aL - bL) = cot.\ \tfrac{1}{2}ab \times tang.\ \tfrac{1}{2}(ac + bc) \times tang.\ \tfrac{1}{2}(ac - bc) \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Nu is, volgens de eigenschappen van den aspunts-driehoek, *hoek* $BCK = 90° - aL$ en *hoek* $ACK = 90° - bL$; derhalve is:

$$hoek\ ACK - hoek\ BCK = aL - bL$$

$$\tfrac{1}{2}(ACK - BCK) = \tfrac{1}{2}(aL - bL)$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(aL - bL) = tang.\ (ACK - BCK)$$

Verder is, in denzelfden aspunts-driehoek abc,

$$ab = 180° - C$$

$$\tfrac{1}{2}ab = 90° - \tfrac{1}{2}C, \quad \text{en} \quad cot.\ \tfrac{1}{2}ab = tang.\ \tfrac{1}{2}C$$

Voorts is nog, in denzelfden aspunts-driehoek abc,

$$ac = 180° - B, \quad \tfrac{1}{2}ac = 90° - \tfrac{1}{2}B$$

$$bc = 180° - A, \quad \tfrac{1}{2}bc = 90° - \tfrac{1}{2}A$$

$$\tfrac{1}{2}(ac + bc) = 180° - \tfrac{1}{2}(A + B), \quad \tfrac{1}{2}(ac - bc) = \tfrac{1}{2}(A - B)$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(ac + bc) = -\ tang.\ \tfrac{1}{2}(A + B)$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(ac - bc) = -\ tang.\ \tfrac{1}{2}(B - A)$$

De vergelijking (a), wordt nu, door de substitutie van al die waarden:

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(ACK - BCK) = +\ tang.\ \tfrac{1}{2}C \times -\ tang.\ \tfrac{1}{2}(B + A) \times -\ tang\ \tfrac{1}{2}(B - A)$$

dat is, volgens de theorie van de teekens:

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(ACK - BCK) = tang.\ \tfrac{1}{2}C \times tang.\ \tfrac{1}{2}(B + A) \times tang.\ \tfrac{1}{2}(B - A)$$

Op dezelfde wijze, wordt formule (24) uit formule (23), en de formulen (27) en (28), uit de formulen (25) en (26), afgeleid. Men ziet dus,

dus, dat de acht Neperiaansche formulen, twee aan twee, van elkander afhangen. Wij zullen, in het vervolg zulke van elkander afhankelijke formulen *overeenstemmende formulen* noemen.

8°. *Vermits de evenredigheden, waaruit de Neperiaansche analogien volgen, algemeen zijn, en ook gelden, wanneer de loodregte bogen* (zie fig. 94,) *buiten den driehoek vallen, zoo zijn ook deze analogien voor alle gevallen algemeen. Om die reden, behoeft men zich, bij het begin der berekening, niet te bekommeren, of de loodregte boog binnen of buiten den driehoek zal vallen? noch ook niet, welke der twee loodregte bogen, bij het tweede geval, in de berening zullen te pas komen? Want de teekens, welke de goniometrische lijnen verkrijgen, beslissen, bij de uitkomst der berekening, deze omstandigheid.*

Nemen wij, bij voorbeeld, de eerste vergelijking,

$$tang.\,\tfrac{1}{2}(AD - BD) = cot.\,\tfrac{1}{2}AB \times tang.\,\tfrac{1}{2}(AC + BC) \times tang.\,\tfrac{1}{2}(AC - BC)$$

door welke, wanneer de drie zijden gegeven zijn, het verschil van de deelen van de basis, en eindelijk de deelen van de basis zelve gevonden worden. Want, stellen wij $\frac{1}{2}(AD - BD) = P$; dan is:

$$AD = \tfrac{1}{2}AB + P; \quad \text{en } BD = \tfrac{1}{2}AB - P.$$

Omdat nu de zijden van een bolvormigen driehoek, alle, zonder onderscheid, minder dan 180° zijn, zijn $cot.\,\frac{1}{2}AB$ en $tang.\,\frac{1}{2}(AC - BC)$ altijd positief. Wanneer dan $AC + BC < 180°$ is; dan zal $tang.\,\frac{1}{2}(AC + BC)$ positief zijn, en $tang.\,\frac{1}{2}(AD - BD)$ kan dan ook geene andere dan eene positieve waarde hebben. Hieruit volgt dan: dat, wanneer $AC > BC$ is, ook $AD > BD$ zal zijn. Maar is $AC + BC > 180°$; dan zal $tang.\,\frac{1}{2}(AD - BD)$ negatief zijn: nu kan deze tangens om geene andere reden negatief zijn, dan, omdat $AD - BD > 180°$; of, omdat $AD - BD$ negatief is. Het eerste is onmogelijk; omdat AD alsdan grooter dan 180° zou zijn. Het verschil $AD - BD$ moet dan negatief zijn, of $BD > AD$. Hieruit volgt dus: *dat, zoo lang de som van de opstaande zijden minder dan twee regte hoeken is, het grootste stuk van de basis aan de grootste der opstaande zijden zal gelegen zijn; doch, dat het tegendeel zal plaats hebben, wanneer de som der opstaande zijden grooter dan 180° is.* CAGNOLI (zie *Trig.* §. 1074, *Ed. de* 1808.) vergist zich, wanneer hij zegt: „*Dans tous les cas on trouvera pour le plus grand segment celui qui est adjacent au plus grand des deux côtés.*"

Nemen wij nu: dat P positief is; dan is (*zie boven*,) $AB = \frac{1}{2}AB + P$ en $BD = \frac{1}{2}AB - P$: zoo lang dan $P < \frac{1}{2}AB$ is, blijven de waarden van AD en BD positief; maar, is $P > \frac{1}{2}AB$; dan zal AD positief en BD negatief worden, en de loodregte boog CD, zal buiten den hoek B (welke, omdat $AC > BC$ is, stomp is,) vallen. Neemt men P negatief; dan worden de bovenstaande vergelijkingen $AD = \frac{1}{2}AB - P$ en

en $BD = \frac{1}{2}AB + P$, en de loodregte boog zal binnen of buiten den driehoek, en wel, buiten den scherpen hoek A vallen, naar dat P kleiner of grooter dan $\frac{1}{2}AB$ is. Men verkeert derhalve in een verkeerd begrip, wanneer men meent: *dat de loodregte boog altijd buiten den stompen hoek valt. Hij valt* (ten minste, wanneer men de Neperiaansche Analogien berekent,) *buiten den stompen hoek, wanneer de som der opstaande zijden minder dan* 180° *is; en, buiten den scherpen hoek, wanneer die som grooter dan* 180° *is.* Wanneer $AC + BC = 180°$ en AC niet gelijk BC is; dan is de driehoek altijd stomphoekig. En, omdat een boog, welks tangens onbepaald groot is, zoowel gelijk aan $-90°$ als aan $+90°$ kan zijn; wordt, in dit geval, $AD = \frac{1}{2}AB + 90°$, en $BD = \frac{1}{2}AB - 90°$, en dan zal, zie *fig.* 94, $AE = BD$ en $BE = AD$ zijn, hetgeen ook nog, door andere beginselen, kan gestaafd worden.

9°. Dezelfde aanmerking geldt ten aanzien van de tweede, derde en vierde analogien; en, wat de vijfde en zesde dezer analogien aanbelangt, het oppervlakkig inzien dezer vergelijkingen is genoeg, om te ontwaren, dat de teekens van $tang.\frac{1}{2}(B-A)$ en $tang.\frac{1}{2}(AC-BC)$ altijd positief, en die van $tang.\frac{1}{2}(AC+BC)$ en $tang.\frac{1}{2}(AC+BC)$, altijd van dezelfde soort moeten zijn.

10°. *De formulen, in de twee voorgaande Stellingen betoogd, kunnen wederom dienen, om de naauwe overeenstemming tusschen de platte en bolvormige driehoeken te doen opmerken.*

a. Nemen wij, bij voorbeeld, de formule (25), namelijk

$$tang.\tfrac{1}{2}(B-A) = cot.\tfrac{1}{2}C \times \frac{sin.\frac{1}{2}(b-a)}{sin.\frac{1}{2}(b+a)}$$

uit welke deze evenredigheid volgt:

$$sin.\tfrac{1}{2}(b+a) : sin.\tfrac{1}{2}(b-a) = cot.\tfrac{1}{2}C : tang.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

Indien wij nu aannemen: dat de zijden a en b zeer klein zijn; dan zal, zonder merkelijk van de waarheid af te wijken, $sin.\frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(b+a)$ en $sin.\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)$ zijn;

$$sin.\tfrac{1}{2}(b+a) : sin.\tfrac{1}{2}(b-a) = cot.\tfrac{1}{2}C : tang.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$\text{of} \quad b+a : b-a = cot.\tfrac{1}{2}C : tang.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

welke in de *IV. Stell.* van het *XII. Boek* betoogd is.

b. Nemen wij nog de evenredigheden (31) en (30), namelijk:

$$sin.\tfrac{1}{2}c : sin.\tfrac{1}{2}(b+a) = sin.\tfrac{1}{2}C : cos.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$sin.\tfrac{1}{2}c : sin.\tfrac{1}{2}(b-a) = cos.\tfrac{1}{2}C : sin.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

en stellen wij, dat de zijden des driehoeks zeer klein zijn; dan wordt $sin.\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c$, $sin.\frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(b+a)$ en $sin.\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)$ en de voornoemde evenredigheden worden dan, indien men de termen van de eerste redens met twee vermenigvuldigt:

$$c : b+a = sin.\tfrac{1}{2}C : cos.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

$$c : b-a = cos.\tfrac{1}{2}C : sin.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

wel-

welke evenredigheden dezelfde zijn, als die, welke in de oplossing van *Vraagst. XXIV. XII. B. Bladz.* 212, voorkomen.

11°. Alhoewel de eigenschappen der bolvormige driehoeken, welke tot hier zijn voorgedragen, genoegzaam zouden zijn, om alle gevallen te berekenen; behooren nog de merkwaardige eigenschappen van den bolvormigen driehoek, die in de vier volgende leerstellingen worden voorgedragen, eene bijzondere opmerkzaamheid; daar zij geen minder nuttig gebruik hebben, en om die reden, door vele voorname schrijvers, als de eerste grondformulen der bolvormige driehoeksmeting worden aangemerkt.

XIV. STELLING. *Fig.* 95.

§. 1169. *De cosinus van elke zijde van een bolvormigen driehoek wordt gevonden, wanneer men de cosinus van den overstaanden hoek met het product van de sinussen der twee andere zijden vermenigvuldigt, en bij dit product het product van de cosinussen van die twee andere zijden optelt; dat is:*

$$cos. a = cos. A \times sin. b \times sin. c + cos. b \times cos. c \quad . \quad . \quad (33)$$

BETOOG. Behalve het betoog van deze gewigtige eigenschap, die wij reeds, in het *VIII. Boek, II. Vraagstuk*, uit de meetkunstige constructie, hebben afgeleid, kan dezelve nog, op de volgende manieren, betoogd worden.

EERSTE BETOOG. *Fig.* 95. Men late, uit het hoekpunt *C*, den loodregten boog *CD* op de overstaande zijde *AB* vallen; dan is, volgens de *XI. Stelling:*

$$cos. AC : cos. BC = cos. AD : cos. BD$$

$$\text{of} \quad cos. b : cos. a = cos. p : cos. (c - p)$$

$$\text{en} \quad cos. a \times cos. p = cos. b \times cos. (c - p)$$

Men schrijve nu, in plaats van $cos. (c - p)$, derzelver waarde $cos. c \times cos. p + sin. c \times sin. p$; dan wordt

$$cos. a \times cos. p = cos. b \times cos. c \times cos. p + cos. b \times sin. c \times sin\ p$$

en, deelt men nu beide leden dezer vergelijking door $cos. p$; dan verkrijgt men:

$$cos. a = cos. b \times sin. c \times tang. p + cos. b \times cos. c$$

Nu is, in den regthoekigen driehoek *ACD*, volgens de *VIII. Stelling*, $tang. p = tang. b \times cos. A = \frac{sin. b}{cos. b} \times cos. A$. Stelt men dan deze waarde van $tang. p$, in de voorgaande vergelijking; dan zal men verkrijgen:

$$cos. a = cos. a \times \frac{sin. b}{cos. b} \times cos. b \times sin. c + cos. b \times cos. c$$

 of

Verzameling *van de algemeene grondformulen voor de regthoekige en scheefhoekige bolvormige driehoeken.*

A. Voor de regthoekige driehoeken ABC, in welke B de regte hoek is, $AB = c$, $BC = a$ en $AC = b$.

$$sin.\, a = sin.\, A \times sin.\, b;\quad sin.\, c = sin.\, C \times sin.\, b \quad \ldots \quad (1)$$
$$tang.\, a = tang.\, A \times sin.\, c;\quad tang.\, c = tang.\, C \times sin.\, a \quad (2)$$
$$cos\, b = cos.\, a \times cos.\, c \quad \ldots \quad (3)$$
$$cos.\, A = cos.\, a \times sin.\, C;\quad cos.\, C = cos.\, c \times sin.\, A \quad \ldots \quad (4)$$
$$tang.\, c = tang.\, b \times cos.\, A;\quad tang.\, a = tang.\, b \times cos.\, C \quad \ldots \quad (5)$$
$$tang.\, A \times tang.\, C \times cos.\, b = 1 \quad \ldots \quad (6)$$

B. Voor de regtzijdige driehoeken $A'B'C'$ (*fig.* 92), die eene zijde $A'C' = 90^\circ$ hebben.

$$sin\, A' = sin.\, a' \times sin.\, B';\quad sin.\, C' = sin.\, c' \times sin.\, B' \quad \ldots \quad (7)$$
$$tang.\, A' = tang.\, a' \times sin.\, C';\quad tang.\, C' = tang.\, c' \times sin.\, A' \quad (8)$$
$$cos.\, B' = -\, cos.\, A' \times cos.\, C' \quad \ldots \quad (9)$$
$$cos.\, a' = cos.\, A' \times sin.\, c';\quad cos.\, c' = cos.\, C' \times sin.\, a' \quad \ldots \quad (10)$$
$$tang.\, C' = -\, tang.\, B' \times cos.\, a';\quad tang.\, A' = -\, tang.\, B' \times cos.\, c' \quad (11)$$
$$tang.\, a' \times tang.\, c' \times cos\, B' = -\, 1 \quad \ldots \quad (12)$$

C. Voor de scheefhoekige driehoeken, in het algemeen. *Fig.* 95.

$$(sin.\, a,\ sin.\, b,\ sin.\, c) :: (sin.\, A,\ sin.\, B,\ sin.\, C) \quad \ldots \quad (13)$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2}(b+a) : tang.\, \tfrac{1}{2}(b-a) = tang.\, \tfrac{1}{2}(B+A) : tang.\, \tfrac{1}{2}(B-A) \quad (14)$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2}(B+A) = tang.\, \tfrac{1}{2}(b+a) \times \frac{tang.\, \tfrac{1}{2}(B-A)}{tang.\, \tfrac{1}{2}(b-a)} \quad \ldots \quad (15)$$
$$tang.\, A : tang.\, B = sin.\, q : sin\, p \quad \ldots \quad (16)$$
$$cos.\, A : cos.\, B = sin.\, P : sin.\, Q \quad \ldots \quad (17)$$
$$cos.\, a : cos.\, b = cos.\, p : cos.\, q \quad \ldots \quad (18)$$
$$tang.\, a : tang.\, b = cos.\, Q : cos.\, P \quad \ldots \quad (19)$$
$$tang.\, p : tang.\, q = tang.\, P : tang.\, Q \quad \ldots \quad (20)$$

$$tang.\, \tfrac{1}{2}(p-q) = cot.\, \tfrac{1}{2}c \times tang.\, \tfrac{1}{2}(b+a) \times tang.\, \tfrac{1}{2}(b-a) \quad (21)$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2}(P-Q) = tang.\, \tfrac{1}{2}C \times tang.\, \tfrac{1}{2}(B+A) \times tang.\, \tfrac{1}{2}(B-A) \quad (22)$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2}(P-Q) = cot.\, \tfrac{1}{2}C \times \frac{sin.\,(b-a)}{sin.\,(b-a)} \quad \ldots \quad (23)$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2}(p-q) = tang\, \tfrac{1}{2}c \times \frac{sin.\,(B-A)}{sin.\,(B+A)} \quad \ldots \quad (24)$$
$$tang.\,(B-A) = cot.\, \tfrac{1}{2}C \times \frac{sin.\, \tfrac{1}{2}(b-a)}{sin.\, \tfrac{1}{2}(b+a)} \quad \ldots \quad (25)$$
$$tang.\,(B+A) = cot.\, \tfrac{1}{2}C \times \frac{cos.\, \tfrac{1}{2}(b-a)}{cos.\, \tfrac{1}{2}(b+a)} \quad \ldots \quad (26)$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2}(b-a) = tang.\, \tfrac{1}{2}c \times \frac{sin.\, \tfrac{1}{2}(B-A)}{sin.\, \tfrac{1}{2}(B+A)} \quad \ldots \quad (27)$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2}(b+a) = tang.\, \tfrac{1}{2}c \times \frac{cos.\, \tfrac{1}{2}(B-A)}{cos.\, \tfrac{1}{2}(B+A)} \quad \ldots \quad (28)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a+b):\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos.\tfrac{1}{2}c:\sin.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots \quad (29)$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(b-a):\sin\tfrac{1}{2}(B-A)=\sin.\tfrac{1}{2}c:\cos.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots \quad (30)$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(b+a):\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)=\sin.\tfrac{1}{2}c:\sin.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots \quad (31)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}(b-a):\sin.\tfrac{1}{2}(A+B)=\cos.\tfrac{1}{2}c:\cos.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots \quad (32)$$

$$\cos.a=\cos.A\times\sin.b\times\sin.c+\cos.b\times\cos.c \quad \ldots \quad (33)$$

sin c

$$\cos.A=\frac{\cos\ a-\cos.b\times\cos.c}{\sin.b\times\cos.c} \quad \ldots \quad (34)$$

$$\tang.p=\frac{\cos.a-\cos b\times\cos c}{\sin.c\times\cos.b}\ (35)\ \text{en}\ \tang.q=\frac{\cos.b-\cos.a\times\cos.c}{\sin.c\times\cos.a} \quad (36)$$

$$\cos.A=\cos.a\times\sin.B\times\sin.C-\cos.B\times\cos.C \quad \ldots \quad (37)$$

$$\cos.a=\frac{\cos.A+\cos\ B\times\cos.C}{\sin.B\times\sin.C} \quad \ldots \quad (38)$$

$$\cot.P=\frac{\cos.B+\cos A\times\cos.C}{\cos.A\times\sin.C}\ (39)\ \text{en}\ \cot.Q=\frac{\cos.A+\cos.B\times\cos.C}{\cos.B\times\sin.C} \quad (40)$$

$$\tang.a=\frac{\sin.b}{\sin.C\times\cot\ A+\cos.C\times\cos.b} \quad \ldots \quad (41)$$

$$\tang.c=\frac{\sin.b}{\sin.A\times\cos.C+\cos.A\times\cos.b} \quad \ldots \quad (42)$$

$$\cos.b\times\cos.C=\sin.b\times\cot.a-\sin.C\times\cot.A \quad \ldots \quad (43)$$

$$\cos.b\times\cos.A=\sin.b\times\cot.c-\sin.A\times\cot.C \quad \ldots \quad (44)$$

$$\tang.p=\frac{\sin.c}{\cos.c+\tang.A\times\cot.B}\ (45)\ \tang.q=\frac{\sin.c}{\cos.c+\tang.B\times\cot.A} \quad (46)$$

$$\cot.p=\cot.c+\frac{\tang\ A\times\cot.B}{\sin.c}\ (47)\quad \cot.q=\cot.c+\frac{\tang.B\times\cot.A}{\sin.c} \quad (48)$$

$$\tang.A=\frac{\sin\ B}{\sin.c\times\cot.a-\cos.c\times\cos.B} \quad \ldots \quad (49)$$

$$\tang.C=\frac{\sin.B}{\sin.a\times\cot.c-\cos.a\times\cos.B} \quad \ldots \quad (50)$$

$$\cos.B\times\cos.c=\sin.B\times\cot.A-\sin.c\times\cot.a \quad \ldots \quad (51)$$

$$\cos.B\times\cos.c=\sin.B\times\cot.C-\sin.a\times\cot.c \quad \ldots \quad (52)$$

$$\tang.P=\frac{\tang.b\times\cot.a}{\sin.C}-\cot.C\ (53)\ \tang.Q=\frac{\tang.a\times\cot.b}{\sin.C}-\cot.C \quad (54)$$

$$\cos.P=\frac{\sin.C}{\tang.b\times\cot.a-\cos.C}\ (55)\quad \cot\ Q=\frac{\sin.C}{\tang.a\times\cot.b-\cos.C} \quad (56)$$

$$\sin.A\times\sin\ B-\cos.A\times\cos.B\times\cos\ c=\sin.a\times\sin.b+\cos.a\times\cos.b\times\cos.C \quad (57)$$

$$\frac{\cos.A\times\tang.B+\sin.A\times\cos.c}{\sin.c}=\frac{\sin.C}{\cos.b\times\tang.a-\sin.b\times\cos.C} \quad (58)$$

NB. In het vervolg, zullen wij, om te bekorten, de formulen met derzelver nommers, uit deze lijst, aanhalen.

Wanneer men, nu in deze evenredigheden, het product der uiterste termen aan het product der middelsten gelijk stelt; dan verkrijgen wij de twee volgende hulpvergelijkingen; namelijk:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(A-B)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin.\tfrac{1}{2}c\times\cos.\tfrac{1}{2}c = \ldots$$
$$\sin.(b+a)\times\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\sin.\tfrac{1}{2}C\times\cos.\tfrac{1}{2}C \quad .\ .\ (a)$$

en verder,

$$\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)\times\sin.\tfrac{1}{2}c\times\cos.\tfrac{1}{2}c = \ldots$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)\times\sin.\tfrac{1}{2}C\times\cos.\tfrac{1}{2}C \quad .\ .\ (b)$$

Men stelle de vergelijkingen (25) en (27) aldus onder elkander:

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)} = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$
$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+A)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}c} = \frac{\sin\ \tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}$$

en dan zal het product dezer vergelijkingen geven de vergelijking:

$$\frac{\sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\sin.\tfrac{1}{2}(B+A)\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}c} = \ldots$$
$$\frac{\sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}$$

Men vermenigvuldige deze laatste vergelijking met de vergelijking (a); dan verkrijgt men:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin^2.\tfrac{1}{2}c = \sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos^2.\tfrac{1}{2}C$$

en $\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\times\sin.\tfrac{1}{2}c = \sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos.\tfrac{1}{2}C \quad .\ .\ .\ .\ (c)$.

eindelijk deele men de vergelijking (b), door de vergelijking (c); dan verkrijgt men:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)\times\cos.\tfrac{1}{2}c = \cos.\tfrac{1}{2}(b+a)\times\sin.\tfrac{1}{2}C \quad .\ .\ .\ (d)$$

Uit deze vergelijkingen (d) en (c), volgen dan eindelijk de evenredigheden:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(b+a):\cos.\tfrac{1}{2}(B+A) = \cos.\tfrac{1}{2}c:\sin.\tfrac{1}{2}C$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}(b-a):\sin.\tfrac{1}{2}(B-A) = \sin.\tfrac{1}{2}c:\cos.\tfrac{1}{2}C$$

Men stelle verder de vergelijkingen (25) en (28) aldus onder elkander,

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)} = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$
$$\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B-A)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}\times\frac{\sin.\tfrac{1}{2}c}{\cos.\tfrac{1}{2}c} = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b+a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}$$

en deele de eerste van dezelve door de tweede; dan zal men vinden:

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}{\cos.^2.\tfrac{1}{2}(B-A)}\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}c}{\sin.\tfrac{1}{2}c} = \ldots$$
$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}{\sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)}\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}C}$$

of wel, wanneer men deze vergelijking omkeert,

$\cos^2.\tfrac{1}{2}$

$$\frac{cos^2.\tfrac{1}{2}(B-A)}{sin.\tfrac{1}{2}(B-A)\,cos.\tfrac{1}{2}(B+A)}\times\frac{sin.\tfrac{1}{2}c}{cos.\tfrac{1}{2}c}=\ldots$$

$$\frac{sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)}{sin\ \tfrac{1}{2}(b-a)\,cos.\tfrac{1}{2}(b+a)}\times\frac{sin.\tfrac{1}{2}C}{cos.\tfrac{1}{2}C}$$

Men vermenigvuldige nu deze laatste vergelijking met de vergelijking (*b*); dan zal men verkrijgen:

$$cos^2.\tfrac{1}{2}(B-A)\times sin^2.\tfrac{1}{2}c = sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)\times sin.\tfrac{1}{2}C$$

en $cos.\tfrac{1}{2}(B-A)\times sin.\tfrac{1}{2}c = sin.\tfrac{1}{2}(a+)\times sin.\tfrac{1}{2}C \ldots\ldots (e)$

Deelt men eindelijk de vergelijking (*a*), door de vergelijking (*e*); dan zal men vinden:

$$sin.\tfrac{1}{2}(A+B)\times cos.\tfrac{1}{2}c = cos.\tfrac{1}{2}(b-a)\times cos.\tfrac{1}{2}C \ldots (f)$$

en, uit deze twee vergelijkingen (*e*) en (*f*), verkrijgt men dan eindelijk:

$$sin.\tfrac{1}{2}(a+b) : cos.\tfrac{1}{2}(B-A) = sin.\tfrac{1}{2}c : sin.\tfrac{1}{2}C$$

$$cos\ \tfrac{1}{2}(b-a) : sin.\tfrac{1}{2}(B+A) = cos.\tfrac{1}{2}c : cos.\tfrac{1}{2}C$$

§. 1168. AANMERKINGEN. De fraaije eigenschappen der bolvormige driehoeken, in de twee laatste Stellingen, bewezen, geven gelegenheid tot het maken van de volgende aanmerkingen.

1°. *Wanneer de drie zijden van een bolvormigen driehoek gegeven zijn; dan zal men door formule* (21) *de hoeken kunnen vinden.*

Want, door formule (21), zal men het halve verschil van de deelen van de basis vinden; daar nu ook de halve som van die deelen bekend is, zoo zal men, in de regthoekige bolvormige driehoeken *ACD* en *ACD*, de hoeken *A* en *B*, door de formulen *cos.A* = *tang.AD* : *tang. AC* en *cos. B* = *tang. BD* : *tang. BC* verkrijgen.

2°. *Zijn al de hoeken van eenen bolvormigen driehoek gegeven; dan zal men deszelfs zijden, met behulp van formule* (22), *kunnen berekenen.*

Want, door deze formule, zal men de deelen van den tophoek verkrijgen; en dus zullen, in de regthoekige bolvormige driehoeken *ACD* en *BCD*, de onbekende zijden *AC* en *BC*, door de formulen *cos. AC* = *cot. A* × *cot. P* en *cos. BC* = *cot. B* × *cot. Q*, bekend worden.

3°. *Zijn twee zijden a en b met den ingesloten C gegeven; dan zal men de onbekende hoeken A en B, door formule* (23), *verkrijgen.*

Want, door die formule, zal men de deelen van den tophoek, namelijk de hoeken *P* en *Q* verkrijgen; en, deze berekend hebbende; dan zal, uit de regthoekige driehoeken *ACD* en *ABC*, volgen: *tang. A* = *cot. P* : *cos. b* en *tang. B* = *cot. Q* : *cos. a*.

4°. *Eene zijde AB met de hoeken A en B, aan die zijde liggende, gegeven zijnde; dan zal men de onbekende zijden, door middel van formule* (24), *kunnen berekenen.*

Want,

Want, door dezelve, zal men $AD = p$ en $BD = q$ verkrijgen, en, uit de regthoekige driehoeken ACD en BCD, zal volgen: $\cos. b = \cos. A \times \text{tang } p$, en $\cos. a = \cos. B \times \text{tang. } q$

5°. *Zijn twee zijden a en b, met den ingeslooten hoek C, gegeven; dan zal men, door de twee formulen* (25) *en* (26) *te berekenen, de onbekende hoeken A en B verkrijgen; en de derde zijde zal door ééne der vier evenredigheden* (29), (30), (31) *en* (32), *gevonden worden.*

6°. *Zijn eindelijk ééne zijde met de hoeken aan die zijde gegeven; dan zullen beide de onbekende zijden, door de formulen* (27) *en* (28); *en den onbekenden hoek, door ééne der evenredigheden* (29)–(32) *berekend worden.*

7°. *De Neperiaansche analogien* (in de XII. *Stelling* betoogd) *kunnen, met behulp van den aspunts-driehoek,* (*zie fig.* 85.) *de ééne uit de andere worden afgeleid.*

Nemen wij, bij voorbeeld, de formule (21). In den aspunts-driehoek abc, is,

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(aL - bL) = \cot. \tfrac{1}{2} ab \times \text{tang. } \tfrac{1}{2}(ac + bc) \times \text{tang. } \tfrac{1}{2}(ac - bc) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Nu is, volgens de eigenschappen van den aspunts-driehoek, *hoek* $BCK = 90° - aL$ en *hoek* $ACK = 90° - bL$; derhalve is:

$$\text{hoek } ACK - \text{hoek } BCK = aL - bL$$
$$\tfrac{1}{2}(ACK - BCK) = \tfrac{1}{2}(aL - bL)$$
$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(aL - bL) = \text{tang. } (ACK - BCK)$$

Verder is, in denzelfden aspunts-driehoek abc,

$$ab = 180° - C$$
$$\tfrac{1}{2} ab = 90° - \tfrac{1}{2} C, \quad \text{en } \cot. \tfrac{1}{2} ab = \text{tang. } \tfrac{1}{2} C$$

Voorts is nog, in denzelfden aspunts-driehoek abc,

$$ac = 180° - B, \quad \tfrac{1}{2} ac = 90° - \tfrac{1}{2} B$$
$$bc = 180° - A, \quad \tfrac{1}{2} bc = 90° - \tfrac{1}{2} A$$
$$\tfrac{1}{2}(ac + bc) = 180° - \tfrac{1}{2}(A + B), \quad \tfrac{1}{2}(ac - bc) = \tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(ac + bc) = -\text{tang. } \tfrac{1}{2}(A + B)$$
$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(ac - bc) = -\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B - A)$$

De vergelijking (a), wordt nu, door de substitutie van al die waarden:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(ACK - BCK) = +\text{tang. } \tfrac{1}{2} C \times -\text{tang. } \tfrac{1}{2}(B + A) \times -\text{tang } \tfrac{1}{2}(B - A)$$

dat is, volgens de theorie van de teekens:

$$\text{tang. } \tfrac{1}{2}(ACK - BCK) = \text{tang. } \tfrac{1}{2} C \times \text{tang. } \tfrac{1}{2}(B + A) \times \text{tang. } \tfrac{1}{2}(B - A)$$

Op dezelfde wijze, wordt formule (24) uit formule (23), en de formulen (27) en (28), uit de formulen (25) en (26), afgeleid. Men ziet dus,

dus, dat de acht Neperiaansche formulen, twee aan twee, van elkander afhangen. Wij zullen, in het vervolg zulke van elkander afhankelijke formulen *overeenstemmende formulen* noemen.

8°. *Vermits de evenredigheden, waaruit de Neperiaansche analogien volgen, algemeen zijn, en ook gelden, wanneer de loodregte bogen (zie fig. 94,) buiten den driehoek vallen, zoo zijn ook deze analogien voor alle gevallen algemeen. Om die reden, behoeft men zich, bij het begin der berekening, niet te bekommeren, of de loodregte boog binnen of buiten den driehoek zal vallen? noch ook niet, welke der twee loodregte bogen, bij het tweede geval, in de berekening zullen te pas komen? Want de teekens, welke de goniometrische lijnen verkrijgen, beslissen, bij de uitkomst der berekening, deze omstandigheid.*

Nemen wij, bij voorbeeld, de eerste vergelijking,

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(AD-BD)=cot.\ \tfrac{1}{2}AB\times tang.\ \tfrac{1}{2}(AC+BC)\times tang.\ \tfrac{1}{2}(AC-BC)$$

door welke, wanneer de drie zijden gegeven zijn, het verschil van de deelen van de basis, en eindelijk de deelen van de basis zelve gevonden worden. Want, stellen wij $\tfrac{1}{2}(AD-BD)=P$; dan is:

$$AD=\tfrac{1}{2}AB+P;\quad \text{en } BD=\tfrac{1}{2}AB-P.$$

Omdat nu de zijden van een bolvormigen driehoek, alle, zonder onderscheid, minder dan 180° zijn, zijn $cot.\ \tfrac{1}{2}AB$ en $tang.\ \tfrac{1}{2}(AC-BC)$ altijd positief. Wanneer dan $AC+BC<180°$ is; dan zal $tang.\ \tfrac{1}{2}(AC+BC)$ positief zijn, en $tang.\ \tfrac{1}{2}(AD-BD)$ kan dan ook geene andere dan eene positieve waarde hebben. Hieruit volgt dan: dat, wanneer $AC>BC$ is, ook $AD>BD$ zal zijn. Maar is $AC+BC>180°$; dan zal $tang.\ \tfrac{1}{2}(AD-BD)$ negatief zijn: nu kan deze tangens om geene andere reden negatief zijn, dan, omdat $AD-BD>180°$; of, omdat $AD-BD$ negatief is. Het eerste is onmogelijk; omdat AD alsdan grooter dan 180° zou zijn. Het verschil $AD-BD$ moet dan negatief zijn, of $BD>AD$. Hieruit volgt dus: *dat, zoo lang de som van de opstaande zijden minder dan twee regte hoeken is, het grootste stuk van de basis aan de grootste der opstaande zijden zal gelegen zijn; doch, dat het tegendeel zal plaats hebben, wanneer de som der opstaande zijden grooter dan 180° is.* Cagnoli (zie *Trig.* §. 1074, *Ed. de* 1808.) vergist zich, wanneer hij zegt: „ *Dans tous les cas on trouvera pour le plus grand segment celui qui est adjacent au plus grand des deux côtés.*"

Nemen wij nu: dat P positief is; dan is (*zie boven*,) $AD=\tfrac{1}{2}AB+P$ en $BD=\tfrac{1}{2}AB-P$: zoo lang dan $P<\tfrac{1}{2}AB$ is, blijven de waarden van AD en BD positief; maar, is $P>\tfrac{1}{2}AB$; dan zal AD positief en BD negatief worden, en de loodregte boog CD, zal buiten den hoek B (welke, omdat $AC>BC$ is, stomp is,) vallen. Neemt men P negatief; dan worden de bovenstaande vergelijkingen $AD=\tfrac{1}{2}AB-P$

en

en $BD = \frac{1}{2}AB + P$, en de loodregte boog zal binnen of buiten den driehoek, en wel, buiten den scherpen hoek A vallen, naar dat P kleiner of grooter dan $\frac{1}{2}AB$ is. Men verkeert derhalve in een verkeerd begrip, wanneer men meent: *dat de loodregte boog altijd buiten den stompen hoek valt. Hij valt* (ten minste, wanneer men de Neperiaansche Analogien berekent,) *buiten den stompen hoek, wanneer de som der opstaande zijden minder dan* 180° *is; en, buiten den scherpen hoek, wanneer die som grooter dan* 180° *is.* Wanneer $AC + BC = 180°$ en AC niet gelijk BC is; dan is de driehoek altijd stomphoekig. En, omdat een boog, welks tangens onbepaald groot is, zoowel gelijk aan $-90°$ als aan $+90°$ kan zijn; wordt, in dit geval, $AD = \frac{1}{2}AB + 90°$, en $BD = \frac{1}{2}AB - 90°$, en dan zal, zie *fig.* 94, $AE = BD$ en $BE = AD$ zijn, hetgeen ook nog, door andere beginselen, kan gestaafd worden.

9°. Dezelfde aanmerking geldt ten aanzien van de tweede, derde en vierde analogien; en, wat de vijfde en zesde dezer analogien aanbelangt, het oppervlakkig inzien dezer vergelijkingen is genoeg, om te ontwaren, dat de teekens van $tang.\frac{1}{2}(B-A)$ en $tang.\frac{1}{2}(AC-BC)$ altijd positief, en die van $tang.\frac{1}{2}(AC+BC)$ en $tang.\frac{1}{2}(AC+BC)$, altijd van dezelfde soort moeten zijn.

10°. *De formulen, in de twee voorgaande Stellingen betoogd, kunnen wederom dienen, om de naauwe overeenstemming tusschen de platte en bolvormige driehoeken te doen opmerken.*

a. Nemen wij, bij voorbeeld, de formule (25), namelijk

$$tang.\tfrac{1}{2}(B-A) = cot.\tfrac{1}{2}C \times \frac{sin.\frac{1}{2}(b-a)}{sin.\frac{1}{2}(b+a)}$$

uit welke deze evenredigheid volgt:

$$sin.\tfrac{1}{2}(b+a) : sin.\tfrac{1}{2}(b-a) = cot.\tfrac{1}{2}C : tang.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

Indien wij nu aannemen: dat de zijden a en b zeer klein zijn; dan zal, zonder merkelijk van de waarheid af te wijken, $sin.\frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(b+a)$ en $sin.\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)$ zijn;

$$sin\tfrac{1}{2}(b+a) : sin.\tfrac{1}{2}(b-a) = cot.\tfrac{1}{2}C : tang.\tfrac{1}{2}(B-A)$$
$$\text{of } b+a : b-a = cot.\tfrac{1}{2}C : tang.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

welke in de *IV. Stell.* van het *XII. Boek* betoogd is.

b. Nemen wij nog de evenredigheden (31) en (30), namelijk:

$$sin.\tfrac{1}{2}c : sin.\tfrac{1}{2}(b+a) = sin.\tfrac{1}{2}C : cos.\tfrac{1}{2}(B-A)$$
$$sin.\tfrac{1}{2}c : sin.\tfrac{1}{2}(b-a) = cos.\tfrac{1}{2}C : sin.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

en stellen wij, dat de zijden des driehoeks zeer klein zijn; dan wordt $sin.\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c$, $sin.\frac{1}{2}(b+a) = \frac{1}{2}(b+a)$ en $sin.\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)$ en de voornoemde evenredigheden worden dan, indien men de termen van de eerste redens met twee vermenigvuldigt:

$$c : b+a = sin.\tfrac{1}{2}C : cos.\tfrac{1}{2}(B-A)$$
$$c : b-a = cos.\tfrac{1}{2}C : sin.\tfrac{1}{2}(B-A)$$

wel-

welke evenredigheden dezelfde zijn, als die, welke in de oplossing van *Vraagst. XXIV. XII. B. Bladz.* 212, voorkomen.

11°. Alhoewel de eigenschappen der bolvormige driehoeken, welke tot hier zijn voorgedragen, genoegzaam zouden zijn, om alle gevallen te berekenen; behooren nog de merkwaardige eigenschappen van den bolvormigen driehoek, die in de vier volgende leerstellingen worden voorgedragen, eene bijzondere opmerkzaamheid; daar zij geen minder nuttig gebruik hebben, en om die reden, door vele voorname schrijvers, als de eerste grondformulen der bolvormige driehoeksmeting worden aangemerkt.

XIV. STELLING. *Fig.* 95.

§. 1169. *De cosinus van elke zijde van een bolvormigen driehoek wordt gevonden, wanneer men de cosinus van den overstaanden hoek met het product van de sinussen der twee andere zijden vermenigvuldigt, en bij dit product het product van de cosinussen van die twee andere zijden optelt; dat is:*

$$\cos. a = \cos. A \times \sin. b \times \sin. c + \cos. b \times \cos. c \quad . \quad . \quad (33)$$

BETOOG. Behalve het betoog van deze gewigtige eigenschap, die wij reeds, in het *VIII. Boek, II. Vraagstuk*, uit de meetkunstige constructie, hebben afgeleid, kan dezelve nog, op de volgende manieren, betoogd worden.

EERSTE BETOOG. *Fig.* 95. Men late, uit het hoekpunt C, den loodregten boog CD op de overstaande zijde AB vallen; dan is, volgens de *XI. Stelling:*

$$\cos. AC : \cos. BC = \cos. AD : \cos. BD$$

$$\text{of} \quad \cos. b : \cos. a = \cos. p : \cos. (c - p)$$

$$\text{en} \quad \cos. a \times \cos. p = \cos. b \times \cos. (c - p)$$

Men schrijve nu, in plaats van $\cos. (c - p)$, derzelver waarde $\cos. c \times \cos. p + \sin. c \times \sin. p$; dan wordt

$$\cos. a \times \cos. p = \cos. b \times \cos. c \times \cos. p + \cos. b \times \sin. c \times \sin p$$

en, deelt men nu beide leden dezer vergelijking door $\cos. p$; dan verkrijgt men:

$$\cos. a = \cos. b \times \sin. c \times \tang. p + \cos. b \times \cos. c$$

Nu is, in den regthoekigen driehoek ACD, volgens de *VIII. Stelling*, $\tang. p = \tang. b \times \cos. A = \frac{\sin. b}{\cos. b} \times \cos. A$. Stelt men dan deze waarde van $\tang. p$, in de voorgaande vergelijking; dan zal men verkrijgen:

$$\cos. a = \cos. a \times \frac{\sin. b}{\cos. b} \times \cos. b \times \sin. c + \cos. b \times \cos. c$$

 of

of, eindelijk:

$$\cos. a = \cos. A \times \sin. b \times \sin. c + \cos. b \times \cos. c$$

TWEEDE BETOOG. Laat, *fig.* 96, *ABC* een scheefhoekigen bolvormigen driehoek zijn; *M* het middelpunt van den bol, tot welken hij behoort. Trek de stralen *AM*, *BM* en *CM*; verleng de bogen *AB* en *AC*, tot in *D* en *E*; zoodanig dat $AD = AE = 90^\circ$ zij; trek nog de stralen *MD* en *ME*; dan snijdt het vlak, door deze stralen gaande, het oppervlak van den bol, volgens den boog *DE*, welke, zie *I. Stell.* de maat van den bolvormigen hoek *A* of van den hoek *DME* is, (zijnde $DME = A$).

Laten de lijnen *BF* en *CG*, loodregt op *DM* en *BM* vallen; dan is $BF = \cos. AB$ en $FM = \sin. AB$; zoo is ook $CG = \cos. AC$ en $MG = \sin. AC$.

Trek de lijn *BC*; dan is deze de koorde van de zijde *BC*, en deze koorde is gelijk aan de dubbele sinus van den halven boog *BC*; of $BC = 2 \sin. \tfrac{1}{2} BC$. Trek verder de lijn *CH*, evenwijdig aan *FG*; dan is $FG = CH$ en de driehoek *BCH* is regthoekig in *H*; diensvolgens is $CH^2 = BC^2 - BH^2 = BC^2 - (BF - CG)^2 = BC^2 - BF^2 - CG^2 + 2 BF \times CG$; dat is $4 \sin^2. \tfrac{1}{2} BC - \cos^2. AB - \cos^2. AC + 2 \cos. AB \times \cos. AC$. Of eindelijk; omdat $4 \sin^2. \tfrac{1}{2} BC = 2 - 2 \cos. BC$ is; $CH^2 = FG^2 = 2 - 2 \cos. BC - \cos^2. AB - \cos^2. AC + 2 \cos. AB \times \cos. AC$.

Nu is (*VII. Stell. XII. B.*) in den driehoek *FGM*, omdat $FMG = A$ is, $FG^2 = FM^2 + MG^2 - 2 FM \times MG \times \cos. A$; dat is (zie boven.)

$$FG^2 = \sin^2. AB + \sin^2. AC - 2 \sin. AB \times \sin. AC \times \cos. A$$

Vergelijkt men deze waarde met dezelfde waarde van FG^2, zoo even gevonden; dan zal men vinden:

$$\cos. BC = \cos. A \times \sin. AC \times \sin. AB + \cos. AC \times \cos. AB$$

DERDE BETOOG. Laat, *fig.* 97, wederom *ABC* de bolvormige driehoek zijn; *M* het middelpunt van den bol. Trek de stralen *AM*, *BM* en *CM*, en de raaklijnen *AD* en *AE*, en eindelijk de lijn *DE*; dan is hoek *DAE* de bolvormige hoek *A*; $AD = \tang. AB$ en $MD = \sec. AB$; $AE = \tang. AC$; $ME = \sec. AC$.

De regtlijnige driehoek *ADE* geeft (*VII. Stell. XII. B.*) $DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 AD \times AE \times \cos. A$

of $DE^2 = \tang^2. AB + \tang^2. AC - 2 \tang. AB \times \tang. AC \times \cos. A$.

De regtlijnige driehoek *MDE*, in welken de hoek *M* gelijk is aan den boog *BC*, geeft insgelijks:

$$DE^2 = MD^2 + ME^2 - 2 MD \times ME \times \cos. BC$$

of $DE^2 = \sec^2. AB + \sec^2. AC - 2 \sec. AB \times \sec. AC \times \cos. BC = \tang^2. AB + \tang^2. AC + 2 - 2 \sec. AB \times \sec. AC \times \cos. BC$.

Deze waarde van DE^2 met de voorgaande vergelijkende, en aan beide zijden $\tang^2. AB + \tang^2. AC$ aftrekkende, zoo zal men verkrijgen, na door twee gedeeld en de teekens omgekeerd te hebben:

$$\sec. AB \times \sec. AC \times \cos. BC = \tang. AB \times \tang. AC \times \cos. A + 1$$

en

en vermenigvuldigt men deze met $\cos. AB \times \cos. AC$; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$\cos. BC = \cos. A \times \sin. AB \times \sin. AC + \cos. AB \times \cos. AC$$

§. 1170. I. GEVOLG. *De cosinus van elken hoek van een bolvormigen driehoek wordt verkregen, wanneer men de cosinus van de zijde, die over dien hoek staat, met het product van de cosinusfen der twee andere zijden vermindert; en het verschil door het product van de sinusfen dezer zijden deelt; namelijk:*

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \times \cos. c}{\sin. b \times \sin. c} \quad \ldots\ldots \quad (34)$$

Eene vergelijking, welke ontstaat, wanneer men, in de vergelijking (33), $\cos. A$ in het voorste lid der vergelijking overbrengt.

§. 1171. II. GEVOLG. *Fig.* 95. *De stukken, in welke eenige zijde van een bolvormigen driehoek, door den loodregten boog, die, uit het hoekpunt van dien hoek, op die zijde valt, verdeeld wordt, worden door de twee volgende formulen bepaald,*

$$\tan g. p = \frac{\cos. a - \cos. b \times \cos. c}{\sin. c \times \cos. b} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

$$\tan g. q = \frac{\cos. b - \cos. a \times \cos. c}{\sin. c \times \cos. a} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Want, in den regthoekigen driehoek ADC, is $\tan g. p = \tan g. b \times \cos. A$. Men stelle, in deze vergelijking, in plaats van $\cos. A$, de waarde van dezelve, in formule (34) voorkomende; dan zal men formule (35) vinden. De formule (36) wordt, uit den driehoek BCD, op dezelfde wijze, gevonden.

§. 1172. III. GEVOLG. *Wanneer de bolvormige driehoek gelijkzijdig, en gevolgelijk $a = b = c$ is; dan heeft men:*

$$\cos. A = \cot. a \times \tan g. \tfrac{1}{2} a$$

Want, omdat $a = b = c$ is, zoo wordt formule (34),

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos^2. a}{\sin^2. a} = \frac{\cos. a}{\sin. a} \times \frac{1 - \cos. a}{\sin. a}$$

Nu is $1 - \cos. a = 2 \sin^2. \tfrac{1}{2} a$, en $\sin. a = 2 \sin. \tfrac{1}{2} a \times \cos. a$; gevolgelijk

$$\cos. A = \frac{\cos. a}{\sin. a} \times \frac{2 \sin^2. \tfrac{1}{2} a}{2 \sin. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} a} = \cot. a \times \tan g. \tfrac{1}{2} a$$

§. 1173. AANMERKINGEN. 1°. *De betoogde vergelijking*

$$\cos. a = \cos. A \times \sin. b \times \sin. c + \cos. b \times \cos. c \quad \ldots \quad (33)$$

stemt overeen met de bekende vergelijking $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab \cos. A$, door welke (zie VII. Stell. XI. B.) *de overeenstemming tusschen de zijden en één der hoeken van een platten driehoek wordt voorgesteld, en die in gezegde vergelijking* (33) *begrepen is.*

Want,

Want, stellen wij, dat de zijden van den bolvormigen driehoek *ABC* zeer klein worden; dan zal men, zonder merkelijk van de waarheid af te wijken, kunnen schrijven, $cos.\,a = 1 - \frac{1}{2}a^2$, $cos.\,b = 1 - \frac{1}{2}b^2$, $cos.\,c = 1 - \frac{1}{2}c^2$, $sin.\,b = b - \frac{1}{6}b^3$, en $sin.\,c = c - \frac{1}{6}c^3$; en de vergelijking (33) verandert dan in deze:

$$1 - \tfrac{1}{2}a^2 = (b - \tfrac{1}{6}b^3)(c - \tfrac{1}{6}c^3) \times cos.\,A + (1 - \tfrac{1}{2}b^2)(1 - \tfrac{1}{2}c^2)$$

welke, verder ontwikkeld zijnde, geven zal:

$$1 - \tfrac{1}{2}a^2 = (bc - \tfrac{1}{6}bc^3 - \tfrac{1}{6}b^3c + \tfrac{1}{36}b^3c^3)\,cos.\,A + \ldots$$
$$1 - \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{4}b^2c^2$$

Indien nu de zijden a, b en c zeer klein zijn; dan zijn $\frac{1}{6}bc^3$, $\frac{1}{6}b^3c$, $\frac{1}{36}b^3c^3$ en $\frac{1}{4}b^2c^2$ gebrokens, die ten opzigte van de breuken $\frac{1}{2}a^2$, $\frac{1}{2}b^2$, $\frac{1}{2}c^2$, kunnen verwaarloosd worden, en, met zooveel minder afwijking van de waarheid, naarmate de zijden kleiner zijn; wij verkrijgen dan, in die onderstelling:

$$1 - \tfrac{1}{2}a^2 = bc \times cos.\,A + 1 - \tfrac{1}{2}b^2 - \tfrac{1}{2}c^2$$

uit welke de algemeen bekende vergelijking

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \times cos.\,A$$

onmiddellijk volgt.

2°. *De vergelijkingen* (33) *en* (34) *gelden voor alle bolvormige driehoeken, in het algemeen, en voor alle zijden en hoeken van denzelfden driehoek.* Door de eerste (33) dezer vergelijkingen, zal men twee zijden met den ingesloten hoek gegeven zijnde, de derde zijde berekenen; door de tweede (34) één der hoeken, wanneer de drie zijden gegeven zijn; en door de formulen (35) en (36) eindelijk de deelen van de basis. *Bij het gebruik dezer formulen, moet men oplettend zijn, dat de teekens van cos. a, cos. A, tang. p en tang. q afhangen van de teekens, welke de goniometrische lijnen der gegevene hoeken en bogen, overeenkomstig de regels, verkrijgen.*

3°. Wanneer men, in de vergelijking (33), *hoek* $A = 90°$ stelt; dan is $cos.\,A = 0$; en de vergelijking verandert dus in de reeds bekende formule, $cos.\,a = cos.\,b \times cos.\,c$.

4°. Vele voorname schrijvers houden de formule (33) voor de algemeene grond-formule der bolvormige driehoeksmeting; en, inderdaad kan dezelve, zonder eenige eigenschap van den bolvormigen driehoek te kennen, onmiddellijk worden betoogd, zoo als in het *II. Vraagstuk* van het *VIII. Boek*, en uit het tweede en derde betoog gebleken is; *doch al die verscheidenheid in de betoogen bewijst slechts het onverbreekbare en noodzakelijke verband, dat er tusschen de meetkunstige waarheden bestaat.*

XV. STELLING. *Fig.* 95.

§. 1174. *De cosinus van elken hoek eens bolvormigen driehoeks is gelijk aan het verschil, dat ontstaat, wanneer men de cosinus van de*

de overstaande zijde, vermenigvuldigt met het product van de sinussen der twee andere hoeken, en van dit product het product van de cosinussen van diezelfde hoeken aftrekt; dat is:

$$cos. A = cos. a \times sin. B \times sin. C - cos. B \times cos. C \quad . \; . \; . \quad (37)$$

EERSTE BETOOG. Volgens de *VIII. Stelling*, is

$$cos. A : cos. B = sin. P : sin. Q$$

dat is, volgens de figuur,

$$cos. A : cos. B = sin. (C - Q) : sin. Q$$

volgens de bekende formule, is dan

$$cos. A : cos. B = (sin. C \times cos. Q - sin. Q \times cos. C) : sin. Q$$

Zoo men nu de termen van de laatste reden dezer evenredigheid door *sin. Q* deelt; dan verkrijgt men:

$$cos. A : cos. B = (sin. C \times cot. Q - cos. C) : 1$$

of, stelt men het product der uiterste termen gelijk aan het product der middelsten; dan is

$$cos. A = cos. B \times sin. C \times cot. Q - cos. B \times cos. C$$

Nu is, in den regthoekigen bolvormigen driehoek *BCD*, volgens de *VIII. Stell.* $cos. a \times tang. B \times tang. Q = 1$; en $cot. Q = cos. a \times tang. B$. Stelt men deze waarde van *cot. Q* in de voorgaande vergelijking; dan verkrijgt men eindelijk:

$$cos. A = cos. a \times sin. B \times sin. C - cos. B \times cos. C$$

TWEEDE BETOOG. *Fig.* 85. In den aspunts-driehoek *abc*, is, volgens de voorgaande *Stelling*,

$$cos. bc = cos. a \times sin. ab \times sin. ac + cos. ab \times cos. ac \qquad (a)$$

Nu is, volgens de *III. Stelling*, $bc = 180^\circ - A$, $ac = 180^\circ - B$, $ab = 180^\circ - C$, en $a = 180^\circ - BC$; derhalve is $cos. bc = - cos. A$; $sin. ac = sin. B$, $sin. ab = sin. C$, $cos. ac = - cos. B$ en $cos. ab = - cos. C$; de vergelijking (*a*) wordt derhalve:

$$- cos. A = - cos. BC \times sin. B \times sin. C + (- cos. B \times - cos. C)$$

of, wanneer men de teekens omkeert:

$$cos. A = cos. BC \times sin. C \times sin. C - cos. B \times cos. C$$

§. 1175. I. GEVOLG. *De cosinus van elke zijde van een bolvormigen driehoek wordt gevonden, wanneer men bij de cosinus van den overstaanden hoek optelt het product van de cosinussen der twee andere hoeken en de som door het product van de sinussen van diezelfde hoeken deelt; dat is:*

$$cos. a = \frac{cos. A + cos. B \times cos. C}{siu. B \times sin. C} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Deze vergelijking volgt onmiddellijk uit de betoogde; wanneer men namelijk *cos. a*, in het voorste lid der vergelijking afzondert.

§. 1176. II. GEVOLG. *Fig.* 95. *De deelen, in welke eenigen hoek van een bolvormigen driehoek, door den loodregten boog, die,*

uit het hoekpunt van dien hoek, op de tegenoverstaande zijde van, verdeelt wordt, worden door de formulen:

$$cot. P = \frac{cos. B + cos. A \times cos. C}{cos. A \times sin. C} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

$$cot. Q = \frac{cos. A + cos. B \times cos. C}{cos. B \times sin. C} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

bepaald.

Want, in den regthoekigen bolvormigen driehoek *BCD*, is, volgens de *VII. Stelling*, $cos. a = cot. Q \times cot. B$; derhalve wordt vergelijking (38)

$$cot. Q \times cot. B = \frac{cos. A + cos. B \times cos. C}{sin. B \times sin. C}$$

deelt men deze vergelijking door $cot. B$, of vermenigvuldigt men dezelve met $tang. B = \frac{sin. B}{cos. B}$; dan verkrijgt men:

$$cot. Q = \frac{cos. A + cos. B \times cos. C}{cos. B \times sin. C}$$

§. 1177. Aanmerkingen. 1°. *De vergelijkingen* (37), (38), (39) *en* (40), *stemmen met de vergelijkingen* (33), (34), (35) *en* (36) *overeen; omdat de vier eerste uit de vier laatste, en wederkeerig de vier laatste uit de vier eerste, door middel van den aspunts-driehoek, kunnen worden afgeleid.*

2°. Men zal, door formule (37), wanneer ééne zijde *a*, met de hoeken *B* en *C*, aan die zijde gelegen, gegeven zijn, den derden hoek vinden; en door formule (38) ééne der zijden, wanneer de driehoeken gegeven zijn.

3°. Wanneer men, in formule (37), de zijde $BC = a = 90°$ stelt; dan wordt $cos. A = - cos. B \times cos. C$; hetwelk met het betoogde in de *IX. Stelling* overeenkomt. Stelt men, in diezelfde formule, $B = 90°$; dan wordt $sin. A = cos. A \times sin B$; en deze is dezelfde formule, welke in de *VIII. Stell.* betoogd is.

XVI. Stelling. *Fig.* 95.

§. 1178. *Wanneer men ééne zijde AC, met de twee hoeken A en C, aan die zijde gelegen, als bekend aanneemt; dan verkrijgt men de tangens van ééne der onbekende zijden, wanneer men de sinus van de bekende zijde deelt door de som van de producten, die ontstaan, wanneer men de cotangens van den hoek, over de onbekende zijde, met de sinus van den bekenden hoek, aan die onbekende zijde gelegen, vermenigvuldigt, en voorts de cosinus van dien laatsten hoek, met de cosinus van de bekende zijde; dat is:*

$$tang. a = \frac{sin. b}{sin. C \times cot. A + cos. C \times cos. b} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

tang. c

$$tang.\,c = \frac{sin.\,b}{sin.\,A \times cot.\,C + cos.\,A \times cos.\,b} \quad \ldots\ (42)$$

Behalve het betoog van deze eigenschap des driehoeks, dat, in het *III. Vraagstuk VIII. B.* uit eene meetkunstige constructie, is afgeleid, bestaan er, onder anderen, nog de volgende betoogen.

EERSTE BETOOG. Volgens de VIII. *Stelling*, is

$$cos.\,Q : cos.\,P = tang.\,b : tang.\,a$$

of, indien men $Q = ACD - P = C - P$ stelt,

$$cos.\,(C - P) : cos.\,P = tang.\,b : tang.\,a$$

en, in plaats van $cos.\,(C - P)$ hare waarde stellende,

$$(cos.\,C \times cos.\,P + sin.\,C \times sin.\,P) : cos.\,P = tang.\,b : tang.\,a$$

Men deele de termen van de eerste reden dezer evenredigheid door $cos.\,P$; dan verkrijgt men:

$$(cos.\,C + sin.\,C \times tang.\,P) : 1 = tang.\,b : tang.\,a$$

Nu is, in den regthoekigen driehoek ADC, volgens de VIII. *Stelling*, $cos.\,b \times tang.\,P \times tang.\,A = 1$; derhalve $tang.\,P = cot.\,A : cos.\,b$; de voorgaande evenredigheid wordt derhalve:

$$\left\{cos.\,C + sin.\,C \times \frac{cot.\,A}{cos\,b}\right\} : 1 = \frac{sin.\,b}{cos.\,b} : tang.\,a$$

of, zoo men de voorgaande termen van dezelve met $cos.\,b$ vermenigvuldigt,

$$(cos.\,C \times cos.\,b + sin.\,C \times cot.\,A) : 1 = sin.\,b : tang.\,a$$

uit welke dan onmiddellijk volgt:

$$tang\,a = \frac{sin.\,b}{sin.\,C \times cot.\,A + cos.\,C \times cos.\,b}$$

TWEEDE BETOOG. De gestelde formule kan, zonder van den loodregten boog gebruik te maken, uit de formule, die in de XIV. *Stelling* betoogd is, aldus worden afgeleid. Aldaar is bewezen

$$cos.\,A \times sin.\,b \times sin.\,c + cos.\,b \times cos.\,c = cos.\,a \quad \ldots\ (a)$$

Nu is, volgens de X. *Stelling*, $sin.\,A : sin.\,C = sin.\,a : sin.\,c$; derhalve $sin.\,c = \frac{sin.\,C \times sin.\,a}{sin.\,A}$. Men stelle deze waarde van $sin.\,c$ en $cos.\,c = cos.\,C \times sin.\,a \times sin.\,b + cos.\,a \times cos.\,b$, in de vergelijking (a); dan verkrijgt men:

$$\frac{cos.\,A \times sin.\,C \times sin.\,b \times sin.\,a}{sin.\,A} + cos.\,C \times sin.\,b \times cos.\,b \times sin.\,a$$
$$+ cos^2.\,b \times cos.\,a = cos.\,a$$

Men deele deze vergelijking door $cos.\,a$; dan wordt

$$cot.\,A \times sin.\,C \times sin.\,b \times tang.\,a + cos.\,C \times sin.\,b \times cos.\,b$$
$$\times cot.\,a + cos^2.\,b = 1$$

of, $cos^2.\,b$, in het achterste lid der vergelijking, brengende,

$$cot. A \times sin. C \times sin. b \times tang. a + cos\ C \times sin. b \times cos. b \times tang. a = sin^2. b$$

en, deze door $sin. b$ deelende,

$$cot. A \times sin. C \times tang. a + cos. C \times cos. b \times tang. a = sin. b$$

uit welke dan eindelijk volgen zal:

$$tang. a = \frac{sin. b}{sin. C \times cot. A + cos. C \times cos. b}$$

Men kan, behalve deze betoogen, nog verscheidene anderen vinden.

§. 1179. I. Gevolg. *De vergelijkingen* (41) *en* (42) *kunnen, door dezelve om te keeren, onder dezen anderen vorm worden voorgesteld:*

$$cot. a = \frac{sin\ C \times cot. A}{sin. b} + cos. C \times cot. b \quad . \ . \ . \quad (43)$$

$$cot. c = \frac{sin. A \times cot. C}{sin. b} + cos. A \times cot. b \quad . \ . \ . \quad (44)$$

Deze vergelijkingen kunnen ook nog onder dezen anderen vorm worden voorgesteld:

$$cos. b \times cos. C = sin. b \times cot. a - sin. C \times cot. A \quad . \ . \ . \quad (43)$$

$$cos. b \times cos. A = sin. b \times cot. c - sin. A \times cot. C \quad . \ . \ . \quad (44)$$

onder welken vorm zij misschien gemakkelijker zullen kunnen onthouden worden.

§. 1180. II. Gevolg. *Fig.* 95. *Stelt men, dat de zijde C met de hoeken A en B, aan die zijde gelegen, gegeven zijn; dan zal men de stukken AD en BD, in welke die zijde c, door den loodregten boog, uit het hoekpunt van den overstaanden hoek op dezelve vallende, verdeeld wordt, door de formulen*

$$tang. p = \frac{sin. c}{cos. c + tang. A \times cot. B} \quad . \ . \ . \ . \quad (45)$$

$$tang. q = \frac{sin. c}{cos. c + tang. B \times cot. A} \quad . \ . \ . \ . \quad (46)$$

of, dezelve omkeerende, door de formulen

$$cot. p = cot. c + \frac{tang. A \times cot. B}{sin. c} \quad . \ . \ . \ . \quad (47)$$

$$cot. q = cot. c + \frac{tang. B \times cot. A}{sin. c} \quad . \ . \ . \ . \quad (48)$$

kunnen berekenen.

Want, men stelle, in de vergelijking (42); namelijk in

$$tang. b = \frac{sin. b}{sin. \times cot. A + cos. C \times cos. b}$$

in de plaats van $tang. b$ de waarde $tang. p : cos. A$, welke (zie VIII. *Stell.*)

Stell.) uit den regthoekigen driehoek *ACD* volgt; dan zal men, na eene ligte herleiding, formule (45) vinden.

§. 1181. AANMERKINGEN. 1°. Met behulp der vergelijkingen, welke in deze Stelling betoogd zijn, zal men, wanneer van eenen bolvormigen driehoek ééne zijde met de aangelegene hoeken gegeven zijn, elke der twee onbekende zijden kunnen berekenen; doch, men zal wederom in de berekening oplettend moeten nagaan, welk teeken de tangenten der onbekende zijden verkrijgen; want deze zijden zullen kleiner of grooter dan een quadrant zijn, naar dat de tangenten, in den loop der berekening, het positieve of negatieve teeken verkrijgen, en deze teekens hangen af van de positieve of negatieve waarde, welke aan de termen van de noemers der breuken, de waarde dezer tangenten uitdrukkende, ingevolge de omstandigheden, moeten gegeven worden.

2°. Stellen wij in de vergelijking (24), de noemer van den breuk gelijk nul; dan is:

$$\sin. C \times \cot. A = -\cos. C \times \cos. AC$$

maar dan is *tang. BC* onbepaald groot en $BC = 90°$; de driehoek *ABC* is dan regtzijdig. Deelen wij nu deze vergelijking door *sin. C*; dan verkrijgt men: $\cot. A = -\cot. C \times \cos. AC$; eene vergelijking, welke van die, in de VIII. *Stelling* gevonden, niet onderscheiden is.

XVII. STELLING. *Fig.* 95.

§. 1182. ***Wanneer men twee zijden, AB en BC, van eenen bolvormigen driehoek ABC, met den ingesloten hoek (B), als bekend aanneemt; dan zal men de tangens van éénen der onbekende hoeken verkrijgen; wanneer men de sinus van den bekenden hoek deelt door het verschil, dat men verkrijgt, indien men van het product van de sinus der bekende zijde, welke aan den onbekenden hoek ligt, vermenigvuldigd met de cotangens der andere bekende zijde, aftrekt het product van de cosinus der bekende zijde, aan den onbekenden hoek, met de cosinus van den bekenden hoek; dat is:***

$$\tan g. A = \frac{\sin. B}{\sin. c \times \cot. a - \cos. c \times \cos. B} \quad . \quad . \quad (49)$$

$$\tan g. C = \frac{\sin. B}{\sin. a \times \cot. c - \cos. a \times \cos. B} \quad . \quad . \quad (50)$$

EERSTE BETOOG. Volgens de XI. *Stelling*, is, indien men den boog *CD* loodregt op *AB* laat vallen,

$$\sin. p : \sin. q = \tan g. B : \tan g. A$$

dat is, omdat $p = c - q$ is,

$$\sin. (c - q) : \sin. q = \tan g. B : \tan g. A$$

$$(\sin. c \times \cos. q - \cos. c \times \sin. q) : \sin. q = \tan g. B : \tan g. A$$

 en,

en, zoo men de termen van de eerste reden dezer evenredigheid door $sin.\,q$ deelt,

$$(sin.\,c \times cot.\,q - cos.\,c) : 1 = tang.\,B : tang.\,A$$

Nu is, volgens de VIII. *Stell.* in den regthoekigen bolvormigen driehoek BCD, $tang.\,q = cos.\,B \times tang.\,a$, en daarom $cot.\,q = \frac{cot.\,a}{cos.\,B}$; de laatste evenredigheid wordt dus:

$$\left\{\frac{sin.\,c \times cot.\,a}{cos.\,B} - cos.\,c\right\} : 1 = tang.\,B : tang.\,A$$

en, vermenigvuldigt men de voorgaande termen met $cos.\,B$; dan wordt

$$(sin.\,c \times cot.\,a - cos.\,B \times cos.\,c) : 1 = sin.\,B : tang.\,A$$

uit welke dan, de vierde evenredige opgelost zijnde, onmiddellijk volgt:

$$tang.\,A = \frac{sin.\,B}{sin.\,c \times cot.\,a - cos.\,c \times cos.\,B}$$

ANDER BETOOG. *Fig.* 85. Laat abc de aspunts-driehoek zijn, die uit den driehoek ABC ontstaan is; dan is in denzelven, volgens de voorgaande *Stelling*,

$$tang.\,bc = \frac{sin.\,ac}{sin.\,c \times cot.\,a + cos.\,c \times cos.\,ac}$$

Uit deze vergelijking kan nu de gestelde formule, door middel van den aspunts-driehoek ABC, worden afgeleid; want, volgens de III. *Stell.* is $bc = 180° - A$; $ac = 180° - B$; $a = 180° - BC$ en $c = 180° - AB$; derhalve is, volgens de bekende beginselen, $tang.\,bc = -tang.\,A$, $sin.\,ac = sin.\,B$, $cos.\,ac = -cos.\,B$, $cot.\,a = -cot.\,BC$, $sin.\,c = sin.\,AB$, $cos.\,c = -cos.\,AB$; de voorgaande vergelijking wordt derhalve:

$$-tang.\,A = \frac{sin.\,B}{+sin.\,AB \times -cot.\,BC + [-cos.\,AB \times -cos.\,B]}$$

$$-tang.\,A = \frac{sin.\,B}{-sin.\,AB \times cot.\,BC + cos.\,AB \times cos.\,B}$$

of, eindelijk, wanneer men, naar den regel, de teekens omkeert, en, overeenkomstig de notatie, $AB = c$ en $BC = a$ stelt,

$$tang.\,A = \frac{sin.\,B}{sin.\,c \times cot.\,a - cos.\,c \times cos.\,B}$$

§. 1183. I. GEVOLG. *Indien men de betoogde formulen omkeert; dan verkrijgt men:*

$$cot.\,A = \frac{sin.\,c \times cot.\,a}{sin.\,B} - cos.\,c \times cot.\,B \quad \ldots \quad (51)$$

$$cot.\,B = \frac{sin.\,a \times cot.\,c}{sin.\,B} - cos.\,a \times cot\,B \quad \ldots \quad (52)$$

welke vergelijkingen men ook aldus kan voorstellen:

$$cos.\,B \times cos.\,c = sin.\,B \times cot.\,A - sin.\,c \times cot.\,a \quad \ldots \quad (51)$$

$$cos.\,B \times cos.\,a = sin.\,B \times cot.\,C - sin.\,a \times cot.\,c \quad \ldots \quad (52)$$

§. 1184.

§. 1184. II. GEVOLG. *Fig. 95. Neemt men de zijden a en b en den ingesloten hoek als bekend aan; dan zullen de deelen, in welke de bekende hoek C, door den loodregten boog, die, uit deszelfs hoekpunt, op de overstaande zijde valt, verdeeld wordt, door de volgende formulen*

$$tang.\,P = \frac{tang.\,b \times cot.\,a}{sin.\,C} - cot.\,C \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

$$tang.\,Q = \frac{tang.\,a \times cot.\,b}{sin.\,C} - cot.\,C \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

of wel (indien men deze vergelijkingen omkeert) door deze andere formulen:

$$cot.\,P = \frac{sin.\,C}{tang.\,b \times cot.\,a - cos.\,C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

$$cos.\,Q = \frac{sin.\,C}{tang.\,a \times cot.\,b - cos.\,C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

kunnen worden berekend.

Want, indien men de zijden *a* en *b* met den ingesloten hoek *C*, als bekend aanneemt; dan is, volgens formule (51),

$$cot.\,A = \frac{sin.\,b \times cot.\,a}{sin.\,C} - cos.\,b \times cot.\,C$$

In den regthoekigen bolvormigen driehoek *ACD*, is, volgens de VIII. *Stelling*, $tang.\,A \times tang.\,P \times cos.\,b = 1$; derhalve $cot.\,A = tang.\,P \times cos.\,b$; de voorgaande vergelijking wordt dus:

$$tang.\,P \times cos.\,b = \frac{sin.\,b \times cot.\,a}{sin.\,C} - cos.\,b \times cot.\,C$$

deelt men deze vergelijking door $cos.\,b$; dan verkrijgt men eindelijk:

$$tang.\,P = \frac{tang.\,b \times cot.\,a}{sin.\,C} - cot.\,C$$

De formulen (55) en (56) worden, uit de twee voorgaanden, door omkeering gevonden.

§. 1185. AANMERKINGEN. 1°. De formulen (49), (50), (51) en (52), zullen kunnen dienen, om, wanneer twee zijden, met den ingesloten hoek, gegeven zijn, de onbekende hoeken onmiddellijk te vinden; mits men behoorlijk op de teekens der termen acht geven.

2°. *Wanneer men aanneemt, dat de zijden van den bolvormigen driehoek ABC zeer klein zijn; dan zal men, uit de betoogde formule,*

$$tang.\,A = \frac{sin.\,B}{sin.\,c \times cot.\,a - cos.\,c \times cos.\,B}$$

de formule, welke in de V. Stell. *van het* XII. B. *voor den platten driehoek betoogd is, zeer gemakkelijk vinden.*

Want, volgens de bekende beginselen, is, indien de zijden *a* en *c*

zeer

zeer klein zijn, $\sin. c = c - \frac{1}{6} c^3$, $\cot. a = \frac{1}{a} - \frac{1}{3} a$ en $\cos. c = 1 - \frac{1}{2} c^2$; de waarde van *tang. A* wordt derhalve:

$$tang. A = \frac{\sin. B}{(c - \frac{1}{6} c^3) \times \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3} a\right) - (1 - \frac{1}{2} c^2) \cos. B}$$

of, indien men teller en noemer met a vermenigvuldigt:

$$tang. A = \frac{a \sin. B}{(c - \frac{1}{6} c^3)(1 - \frac{1}{3} a^2) - a(1 - \frac{1}{2} c^2) \cos. B}$$

en, bij nadere ontwikkeling,

$$tang. A = \frac{a \sin. B}{\left(c - \frac{1}{6} c^3 - \frac{1}{3} a^2 c + \frac{1}{b} a^2 c^2\right) - (a - \frac{1}{2} a c^2) \cos. B}$$

Neemt men nu aan, dat slechts de termen van de derde orde verwaarloosd worden; dan verkrijgt men:

$$tang. A = \frac{a \sin. B}{c - a \cos. b}$$

de formule namelijk, welke op de aangehaalde plaats betoogd is.

II. *Bijvoegsel op de voorgaande Grondstellingen.*

§. 1186. Al de eigenschappen der bolvormige driehoeken, welke in de voorstaande Stellingen en derzelver gevolgen voorgedragen en betoogd zijn, moeten als de voornaamste eigenschappen van dezelve worden aangemerkt; vooreerst, omdat zij alle, zonder onderscheid, dienen kunnen, om, in elken bolvormigen driehoek, die door een genoegzaam aantal gegevens bepaald is, de onbekende zijden en hoeken te berekenen; en, ten anderen, omdat alle verdere eigenschappen van dezelve, zoo als nader blijken zal, uit die algemeene gronden kunnen worden afgeleid.

Behalve dat wij de verschillende wegen, die tot het betoog van dezelfde eigenschap geleiden, hebben doen opmerken, en, dien weg volgende, getracht hebben, om den Lezer niet slechts met die eigenschappen bekend te maken, maar ook, om hem door eene gestadige oefening in de meetkunstige figuren te leeren lezen; hetwelk gemakkelijk en vaardig te kunnen doen, het hoofdvereischte van eenen Meetkunstenaar uitmaakt, zoo is het bovendien den opmerkzamen beoefenaar niet kunnen ontsnappen, hoe naauw de eigenschappen der bolvormige driehoeken, met die der regtlijnige verknocht zijn; zijnde de laatste, als een bijzonder meer eenvoudig geval, in de

eer-

eerste begrepen. Zoo, is, in de Leer der uitgebreidheden en getallen, alles éénheid en noodzakelijken zamenhang van waarheden, welke elke op zich zelve, in het gebruik, dat men er in andere wetenschappen van maakt, een erkend nut hebben; doch welker verband opzettelijk en aanhoudend na te gaan den weg moet banen tot het verbeteren en vereenvoudigen der werkdadige handgrepen.

§. 1187. Om dien zamenhang nog meer doen opmerken, zoo zullen wij, in dit Bijvoegsel, nog kortelijk aantoonen: *hoe de aspunts-driehoek, van elken bolvormigen driehoek, dienen kan, niet slechts, om, langs andere wegen, de reeds bekende eigenschappen uit te vinden; maar ook, om nog andere uit denzelven af te leiden.*

Laat (*fig.* 98), uit de hoekpunten A, B en C van den bolvormigen driehoek ABC, den aspunts-driehoek PQR, zijn beschreven, en de zijden dezes driehoeks ABC tot aan de punten D, E, F, G, H en I verlengd zijn, en nog door de punten C en R een grooten cirkel gaan; dan zal deze cirkel (zie III. *Stell.*) de bogen AB en PQ, in K en L regthoekig doorsnijden.

Uit deze figuur kan men nu het volgende afleiden.

A. In de regthoekige bolvormige driehoeken CHR en CGR, is, volgens de VIII. *Stelling*, $\cos. CR = \cos. CH \times \cos. RH = \cos. CG \times \cos. RG$; dat is, aangezien $CH = 90° - BC$, $HR = 90° - IH = 90° - ABC$, $CG = 90° - AC$ en $RG = 90° - GF = 90° - BAC$, is, $\cos. CR = \sin. BC \times \sin. B = \sin. AC \times \sin. A$, of $\sin. AC : \sin. BC = \sin. B : \sin. A$; hetgeen met het betoogde in de X. *Stelling* overeenkomt.

B. Men zal ook, uit diezelfde regthoekige bolvormige driehoeken CGR en CHR, al de evenredigheden kunnen afleiden, welke in de XI. *Stelling* betoogd zijn.

C. Men late, door de punten G en H en het middelpunt van den bol, een vlak gaan; dan ontstaat de boog GH; en, in de tegenoverstaande bolvormige driehoeken RGH en CGH, is dan, zie XIV. *Stelling*,

$$1°. \cos. GH = \cos. R \times \sin. GR \times \sin. HR + \cos. GR \times \cos. HR$$

$$2°. \cos. GH = \cos. C \times \sin. CH \times \sin. CG + \cos. CH \times \cos. CG$$

Nu is, volgens de eigenschappen van den aspunts-driehoek, $R + AB = 180°$, of $R = 180° - c$, $GR = 90° - GF = 90° - A$, $HR = 90° - HI = 90° - B$; derhalve is $\cos. R = -\cos. c$, $\sin. GR = \cos. A$, $\cos. GR = \sin. A$, $\sin. HR = \cos. B$ en $\cos. HR = \sin. B$; de eerste vergelijking wordt derhalve:

$$\cos. GH = -\cos. c \times \cos. A \times \cos. B. + \sin. A \times \sin. B \quad . \; . \; (a)$$

Voorts is, in den driehoek CHG, hoek GCH = hoek ACB, $CH = 90° - BC = 90° - a$ en $CG = 90° - AC = 90° - b$, en daarom wordt de tweede vergelijking:

$$\cos. GH = \cos. C \times \cos. a \times \cos. b + \sin. a \times \sin. b \quad . \; . \; . \; (b)$$

Uit

Uit deze vergelijkingen (a) en (b), volgt nu onmiddellijk de vergelijking:

$$\sin. A \times \sin. B - \cos. A \times \cos. B \times \cos. c = \sin. a \times \sin b$$
$$+ \cos. a \times \cos. b \times \cos. C \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57)$$

eene vergelijking, in welke al de zijden en hoeken van eén bolvormigen driehoek voorkomen; en die eene merkwaardige overeenstemming tusschen de zijden en de overstaande hoeken voorstelt.

D. Volgens het I. *Gevolg* van de voorgaande *Stelling*, heeft men, in den bolvormigen driehoek HGR,

$$\cot. HGR = \frac{\sin. GR \times \cot. HR}{\sin. R} - \cos. GR \times \cos. R$$

of wel, het tweede lid onder den vorm eener breuk brengende,

$$\cot. HGR = \frac{\sin. GR \times \cot. HR - \cos. GR \times \cos. R}{\sin. R} \quad . \; . \; (c)$$

In den driehoek CGH is, om dezelfde reden,

$$\cot. CGH = \frac{\sin. CG \times \cot. CH - \cos. CG \times \cos C}{\sin. C} \quad . \; . \; (d)$$

Indien men de elementen dezer twee vergelijkingen op den driehoek ABC, overeenkomstig de eigenschappen van de figuur overbrengt; dan verkrijgt men:

$$\cot. HGR = \frac{\cos. A \times \tang. B + \sin. A \times \cos. c}{\sin. c}$$

$$\cot. HGC = \frac{\cos. b \times \tang. a - \sin. b \times \cos. C}{\sin. C}$$

Nu is, uit den aard der figuur, de hoek CGR een regte hoek, en daarom is hoek HGC het complement van den hoek HGR, en $\cot. HGR = \tang. HCG$; aangezien nu $\tang. x = 1 : \cot. x$ is, zoo volgt uit de laatste vergelijkingen:

$$\frac{\cos. A \times \tang. B + \sin. A \times c}{\sin. c} = \frac{\sin. C.}{\cos. b \times \tang. a - \sin. b \times \cos. C} \quad (58)$$

eene vergelijking, in welke wederom al de hoeken en zijden van den bolvormigen driehoek voorkomen.

E. Men late nog, in dezelfde figuur, door het middelpunt van den bol en de punten C en I, den boog CI gaan; dan hebben wij, als volgt:

In den regthoekigen bolvormigen driehoek ICH, is, volgens de VII. *Stelling*,

$$\cos. IC = \cos. IH \times \cos. CH = \cos. B \times \sin. a$$

en in den bolvormigen driehoek ACI is, volgens de XIV. *Stelling*,

$$\cos. IC = \cos. CAI \times \sin. AC \times \sin. AI + \cos. AC \times \cos. AI$$

dat is, volgens de bekende eigenschappen van den aspunts-driehoek,

$$\cos. IC = -\cos. A \times \sin. b \times \cos. c + b \times \sin. c$$

Uit

Uit deze en de voorgaande vergelijking, verkrijgt men dan:

$$\cos. b \times \sin. c = \sin. b \times \cos. c \times \cos. A + \sin. a \times \cos. B \quad (59)$$

in welke vergelijking de drie zijden met twee hoeken van den bolvormigen driehoek voorkomen.

F. In diezelfde bolvormige driehoeken CHI en IAC is nog, in den eersten; namelijk in CHI, volgens de VIII. *Stelling*,

$$\tang. HIC = \frac{\tang. CH}{\sin. HI} = \frac{\cot. a}{\sin. B}$$

$$\cot. HIC = \sin. B \times \tang. a$$

en in den driehoek AIC, is, volgens de XVII. *Stelling*,

$$\tang. CIA = \cot. CIH = \frac{\sin. CAI}{\sin. AI \times \cot. AC - \cos. AI \times \cos. CAI}$$

dat is, volgens de bekende eigenschappen,

$$\cot. HIC = \frac{\sin. A}{\cos. c \times \cot. b + \sin. c \times \cos. A}$$

deze waarden van $\cot. HIC$ met elkander vergeleken hebbende, zal men verkrijgen:

$$\sin. A \times \sin. B = \cot. a \times \cot. b \times \cos. c + \cot. a \times \sin. c \times \cos. A \quad (60)$$

eene vergelijking, in welke wederom al de zijden met twee hoeken voorkomen.

III. *Toepassing der gelegde gronden, op het berekenen van de eenvoudige gevallen der regthoekige en scheefhoekige Bolvormige Driehoeken.*

§. 1188. Wij zullen hier wederom, even als in het voorgaande Boek, eerst de gevallen der regthoekige driehoeken, en daarna die der scheefhoekigen voordragen.

A. *Over het berekenen der regthoekige bolvormige driehoeken.*

§. 1189. Er zijn, in het berekenen der regthoekige bolvormige driehoeken, zes gevallen te onderscheiden. 1°. *Wanneer de schuinsche zijde, met één der scheve hoeken, gegeven zijn.* 2°. *Wanneer gegeven is ééne regthoekszijde, met den scheven hoek, aan die regthoekszijde.* 3°. *Wanneer eene regthoekszijde, met den scheven hoek, over dezelve staande, gegeven is.* 4°. *Indien gegeven zijn de twee regthoekszijden.* 5°. *Indien gegeven zijn de twee scheve hoeken.* 6°. *En eindelijk, indien gegeven zijn ééne der regthoekszijden, met de schuinsche.* Het zal blijken: dat, in elk dezer zes gevallen, de twee gegevens voldoende zijn, om den regthoekigen bolvormigen drie-

driehoek, het zij door conſtructie, het zij door berekening, daar te ſtellen. De zes formulen, in de *VIII. Stelling* betoogd, zijn voldoende, om, in al die gevallen, de onbekende zijden en hoeken te vinden.

I. Vraagstuk. I. Geval. *Fig.* 99.

§. 1190. *Van een regthoekigen bolvormigen driehoek ABC gegeven zijnde, de hypothenuſa $AC = b$, en één der ſcheve hoeken A; de regthoekszijden $BC = a$, $AB = c$, en den anderen ſcheven hoek C, door conſtructie of berekening, te bepalen?*

Oplossing *door conſtructie*. *Fig.* 100. Laat, uit een punt M, als middelpunt, met eenen ſtraal $MA = 1$, een cirkel worden beſchreven. Neem, met eenen transporteur, $AC = b$, gelijk aan de gegevene hypothenuſa. Laat CD loodregt op AM vallen. Maak hoek EDF gelijk aan den gegeven bolvormigen hoek A, $DE = CD$, en trek EF, loodregt op CD (of evenwijdig aan AM). Trek den ſtraal BM, en FC, loodregt op MB; dan zijn AB en BC de twee onbekende regthoekszijden.

Om den anderen ſcheven hoek C te vinden, zoo make men $AG' = AG$ en trekke GHA', loodregt op MC; indien men dan GI loodregt op GH ſtelt, en $HI = A'H$ maakt; dan zal hoek GHI gelijk aan den bolvormigen ſcheven hoek C zijn.

De grond van deze conſtructie, zal uit het betoog van de VIII. *Stelling* ligtelijk kunnen opgemaakt worden.

Oplossing *door berekening*. *Fig.* 99. Hier zijn gegeven b en A; de onbekenden zijn a, c en C. Zoo wel, in dit geval, als in al de volgende gevallen, moet men, uit de zes grond formulen, welke in de VIII. *Stelling* betoogd zijn, zulk eene formule opzoeken, in welke de twee gegevens en ééne der onbekende, en bijgevolg drie termen voorkomen; uit welke formule dan de onbekende, indien zij niet afzonderlijk in één van de leden der vergelijking voorkomt, door de eenvoudige ſtelkunſtige regels, voor het oploſſen der vergelijkingen vastgeſteld, wordt opgelost.

1°. Om de onbekende regthoekszijde a te vinden, heeft men, volgens formule (1):

$$\sin a = \sin. A \times \sin. b \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$Log. \sin. a = Log. \sin. A \times Log. \sin. b$$

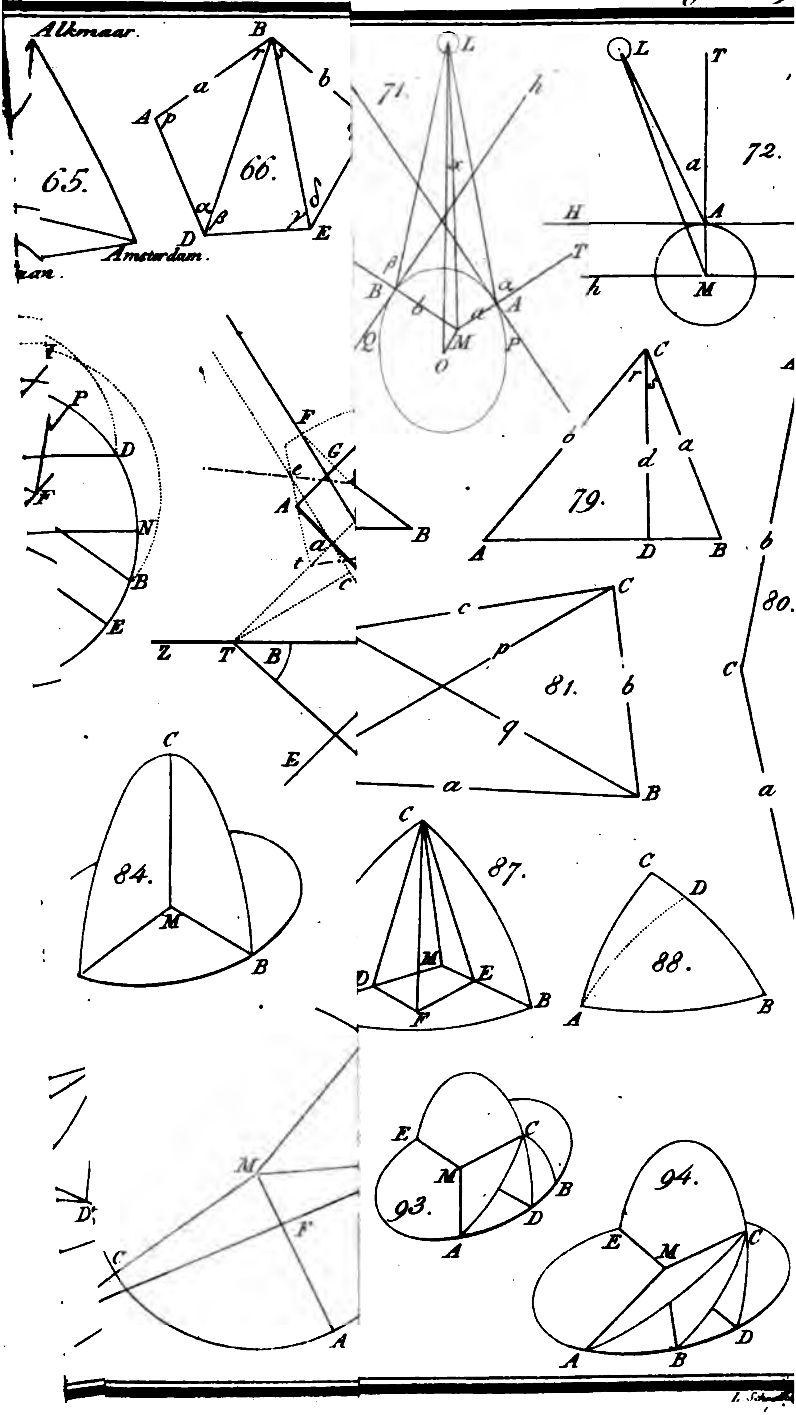
2°. Om de regthoekszijde b te vinden, bediene men zich van de formule (5), namelijk van

$$tang. c = tang. b \times \cos. A \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$Log. tang\ c = Log. tang. b + Log. \cos. A$$

3°. Om den onbekenden ſcheven hoek C te vinden, moet men de for-

...len der Meetkunst No. III. Fig. 63–9...



formule (6), namelijk $tang. A \times tang. C \times cos. b = 1$ gebruiken; uit dezelve volgt onmiddellijk:

$$cot. C = tang. A \times cos. b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$Log. cot. C = Log. tang. A + Log. cos. b$$

door welke drie formulen al de onbekenden zullen worden gevonden. — Het spreekt van zelf: dat men, bij het gebruik dezer formulen, den positieven of negatieven toestand der goniometrische lijnen in acht moet nemen, om te beoordeelen, of de onbekende hoeken of zijden, kleiner of grooter dan een quadrant zijn.

§. 1191. Aanmerkingen. 1°. De uitgebragte eenvoudige en oorspronkelijke formulen, zijn dikwijls voor herleidingen vatbaar, die dezelve onder vormen voorstellen, die, of voor de berekening gemakkelijker zijn, of (indien men de gewone tafels gebruikt,) eene meerdere naauwkeurigheid te weeg brengen.

A. Alzoo kan, met behulp van de V. *Stell.* XI. *B.* de formule (1) onder dezen vorm

$$sin. a = \tfrac{1}{2} cos. (b - A) - \tfrac{1}{2} cos. (b + A) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

worden voorgesteld; zijnde deze formule, daarin merkwaardig, dat men, met behulp der natuurlijke sinus-tafel, door eene enkele aftrekking, de onbekende zijde verkrijgt.

B. Ingevalle de hoek A slechts eenige weinige graden groot is; dan zal men, zonder van de strikte naauwkeurigheid af te wijken, de vierde en volgende magten van A, in deelen van den straal uitgedrukt zijnde, kunnen verwaarloozen; en dan zullen de formulen (1), (2) en (3), worden

$$sin. a = sin. b \times (A - \tfrac{1}{6} A^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$tang. c = tang. b \times (1 - \tfrac{1}{2} A^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$cot. C = cos. b \times (A + \tfrac{1}{3} A^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

C. Inzonderheid is de formule (2) vatbaar, om, indien de hoek A niet boven de 30° gaat, in eene regelmatig voortloopende en sterk convergerende reeks, ontwikkeld te worden. Het is namelijk, uit het XVII. *Vraagst.* XI. *B.* gebleken: hoe, uit de vergelijking $tang. x = \frac{a}{b} \times tang. y$, de reeks

$$x - y = \left(\frac{b-a}{b+a}\right) \times sin. 2y + \tfrac{1}{2}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 \times sin. 4y + enz.$$

wordt afgeleid. Stellen wij dus, in $tang. c = tang. b \times cos. A$, het gebroken $\frac{a}{b} = A$; dan is $a = b \times cos. A$; $b - a = b - b\ cos. A = b \times (1 - cos. A)$; $b + a = b + b \times cos. A = b \times (1 + cos. A)$; en daarom is.

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{b(1 - cos. A)}{b(1 + cos. A)} = \frac{1 - cos\ A}{1 + cos. A} = \frac{2\ sin^2. \tfrac{1}{2} A}{2\ cos. \tfrac{1}{2} A} = tang^2. \tfrac{1}{2} C$$

Men verkrijgt dus:

$$b - c = \frac{tang^2.\tfrac{1}{2}A \times sin.\,2\,b}{sin.\,1''} - \frac{tang^4.\tfrac{1}{2}A \times sin.\,4\,b}{sin.\,2''} \;\ldots\; + \frac{tang^6.\tfrac{1}{2}A \times sin.\,6\,b}{sin.\,3''} - enz. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

eene reeks, door welker berekening, in fecunden, het verfchil tusfchen de hypothenufa b, en de regthoekszijde c zal gevonden worden.

2°. Men bedient zich van de formulen (1), (2) en (8), om, uit de lengte van de Zon, en de fchuinschheid van de ecliptica, de declinatie en regte klimming van dezelve te berekenen; en van de formule (3), om den hoek te vinden, welke de zons-declinatie-cirkel met het vlak van de ecliptica maakt. — Dit geval, is ook in de Meetkunst der ligchamen van een uitgeftrekt gebruik.

II. Vraagstuk. II. Geval. *Fig.* 99.

§. 1192. *Gegeven zijnde ééne der regthoekszijden $AB = c$, met den fcheven hoek A, aan die regthoekszijde gelegen zijnde, de andere regthoekszijde $BC = a$, de hypothenufa $AC = b$, met den fcheven hoek C, te vinden?*

Oplossing *door conftructie. Fig.* 101. Na, met eenen ftraal $MA = 1$, eenen cirkel befchreven te hebben, neme men boog AB gelijk aan de gegevene regthoekszijde c; en, na den ftraal MB getrokken te hebben, late men de loodlijn BD op MA vallen, die men verder onbepaaldelijk verlengt.

Men make verder den hoek BDE gelijk aan den gegevenen bolvormigen hoek A, en trekke BE, loodregt op DB.

Na BF loodregt op MB getrokken te hebben, make men $BF = BE$; en men trekke de lijn MF; dan zal BC de begeerde regthoekszijde zijn.

Men befchrijve uit M, met MF, als ftraal, eenen cirkel, die het verlengde van ED in F ontmoet. Indien men dan MF trekt; dan zal AC de begeerde hypothenufa zijn.

Om eindelijk den fcheven hoek C te vinden, make men *boog* $A'C =$ *boog* AC, trekke $A'GH$ loodregt op MCF, HI loodregt op GH en $GI = A'G$; dan zal de *hoek* IGH gelijk aan den fcheven hoek C zijn.

De grond van deze conftructie, is uit het voorgaande blijkbaar.

Oplossing *door berekening. Fig.* 99. In dit geval zijn gegeven c en A; de onbekenden zijn a, b en C.

1°. Om de onbekende regthoekszijde a te vinden, heeft men, volgens de VIII. *Stelling*,

$$tang.\,a = tang.\,A \times sin.\,c \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$Log.\,tang.\,a = Log.\,tang.\,A + Log.\,sin.\,c$$

2°. Om de fchuinfche zijde b te berekenen, bediene men zich van de

ver-

vergelijking (5), zie VIII. *Stell.*, namelijk van $tang. c = tang. b \times cos. A$; uit deze volgt dan onmiddellijk:

$$tang. b = tang. c : cos. A \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$Log. tang. b = Log. tang. c - Log. cos. A.$$

3°. En, om den anderen scheven hoek C te berekenen, heeft men, volgens formule (4), zie VIII. *Stelling:*

$$cos. C = cos. c \times sin. A \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$Log. cos. C = Log. cos. c + Log. sin. A$$

door welke drie formulen de onbekende zijden en de onbekende hoek zullen worden gevonden.

§. 1193. Aanmerkingen. 1°. Met behulp van het XVII. *Vraagstuk* XI. *B.* zal de formule (2) onder dezen vorm kunnen worden voorgesteld.

$$b - c = \frac{tang^2. \tfrac{1}{2} A \times sin. 2c}{sin. 1'} + \frac{tang^4. \tfrac{1}{2} A \times sin. 4c}{sin. 2''} \ldots$$

$$+ \frac{tang^6. A \times sin. 6c}{sin. 3'''} + enz. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

door welke reeks, indien de hoek A niet zeer groot is, het verschil tusschen de hypothenusa en de regthoekszijde c zal kunnen benaderd worden.

2°. De vergelijking (3) zal, met behulp van het betoogde in de VI. *Stelling* XI. *B.* onder den vorm

$$cos. C = \tfrac{1}{2} sin. (A + c) + \tfrac{1}{2} sin. (A - c) \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

gebragt worden.

3°. Dit tweede geval der regthoekige bolvormige driehoeken zal kunnen dienen, om, uit de regte klimming van de Zon en de schuinsheid van de ecliptica, de lengte van de Zon, hare declinatie en den standhoek van den declinatie-cirkel met de ecliptica te berekenen.

III. Vraagstuk. III. Geval. *Fig.* 90.

§. 1194. *Gegeven zijnde ééne regthoekszijde $BC = a$, met den tegenoverstaanden scheven hoek A, de andere regthoekszijde $AB = c$, de hypothenusa $AC = b$, en den anderen scheven hoek C te berekenen?*

Oplossing *door constructie. Fig.* 102. Uit het middelpunt M, met $MB = 1$, eenen cirkel beschreven hebbende, zoo make men BC gelijk aan de gegevene regthoekszijde a, en na de stralen MB en MC getrokken te hebben, late men CE loodregt op den straal MB vallen, en men make, met eenen transporteur, hoek ECG gelijk aan het complement van den gegeven hoek A; dan is *hoek* GCE gelijk aan den bolvormigen hoek A.

Men beschrijve verder, uit het punt E, als middelpunt, met EG als

 straal,

ſtraal, eenen cirkel; en trekke, uit het punt M, eene lijn MHA, dien cirkel in H aanrakende.

Uit het punt E, late men EH, loodregt op AM vallen; en men verlenge die loodlijn, tot dat zij den omtrek des cirkels, uit M beſchreven zijnde, in C ontmoet; dan is AB de begeerde regthoekszijde en AC de hypothenuſa.

Om eindelijk de nog onbekenden ſcheven hoek te vinden, make men, aan den anderen kant van BC, $CA' = CA$, en men late uit A' de loodlijn $A'I$, loodregt op MC vallen; men verlenge dezelve tot in K, en ſtelle KL loodregt op $A'K$. Indien men dan, uit I, met IA' als ſtraal, eenen cirkelboog beſchrijft, die KL in L ſnijdt, en de lijn IL trekt; dan zal hoek KIL gelijk zijn aan den ſcheven bolvormigen hoek C.

Er zijn hier twee regthoekige bolvormige driehoeken, die aan de gegevens voldoen, en men noemt daarom dit geval van de regthoekige bolvormige driehoek het *twijfelachtige geval.*

Men verlenge AM tot in D, en men late den ſector BMC, om den ſtraal BM, draaijen, tot dat het vlak van denzelven loodregt op het vlak AMB ſtaat; voorts het vlak van den halven cirkel ACD, om de middellijn, draaijen, tot dat CM langs CM valt, en den regthoekigen driehoek CEG, die nu loodregt op het vlak AMB ſtaat, om de regthoekszijde EC, tot dat EG langs EH valt; dan zal men, in dien ſtand der figuur, twee regthoekige driehoeken ABC en BCD verkrijgen, in welke de bolvormige hoeken, bij A en D, gelijk aan den hoek CEG zijn, en die de gegevene regthoekszijde BC gemeen hebben; zijnde één dezer driehoeken zie III. *Stell.* de ſupplements-driehoek van den anderen.

Oplossing *door berekening. Fig.* 90. Hier zijn gegeven de regthoekszijde $BC = a$ en de overſtaande ſcheve hoek A.

1°. Om de hypothenuſa $AC = b$ te vinden, bediene men zich van de formule (1), zie VIII. *Stelling*, namelijk van $\sin. a = \sin. A \times \sin. b$; uit dezelve volgt onmiddellijk:

$$\sin. b = \sin. a : \sin. A \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$Log. \sin. b = Log. \sin. a - Log. \sin. A$$

2°. De regthoekszijde $AB = c$, wordt uit formule (2), zie VIII. *Stelling*; dat is, uit $tang\ a = tang. A \times \sin. c$ afgeleid; men heeft namelijk:

$$\sin. c = tang. a : tang. A \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$Log. \sin. c = Log. tang. a - Log. tang. A$$

3°. De onbekende ſcheve hoek C wordt aldus gevonden. Volgens formule (4), VIII. *Stelling*, is $\cos. A = \cos. a \times \sin. C$; derhalve is:

$$\sin. C = \cos. A : \cos. a \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$Log. \sin. C = Log. \cos. A - Log. \cos. a$$

§. 1195. Aanmerkingen. 1°. Aangezien de onbekende zijden en den onbekenden hoek alle door eene ſinus bepaald worden, kunnen b, c en C,

C, zoo wel in het eerste, als in het tweede quadrant genomen worden; waardoor dan de twee driehoeken ABC en BCD ontstaan.

2°. Uit de formule (1), volgt de evenredigheid:

$$1 : sin. = sin. A : sin. a$$

en, uit deze wederom:

$$1 - sin. b : 1 + sin. b = sin. A - sin. a : sin. A + sin. A$$

$$\text{of } \frac{1 - sin. b}{1 + sin. b} = \frac{sin. A - sin. a}{sin. A + sin. a}$$

dat is, volgens VIII. *Gev.* III. *Stell.* en VII. *Stell.* XI. *B.*

$$tang^2. (45^\circ - \tfrac{1}{2} b) = \frac{tang. \tfrac{1}{2}(A - a)}{tang. \tfrac{1}{2}(A + a)}$$

$$\text{en } tang. (45^\circ - \tfrac{1}{2} b) = \pm \sqrt{\frac{tang. \tfrac{1}{2}(A - a)}{tang. \tfrac{1}{2}(A + a)}} \quad . \quad . \quad (4)$$

3°. Uit de formule (2), volgt de evenredigheid:

$$1 : sin. c = tang. A \; tang. a$$

uit welke dan onmiddellijk volgt:

$$1 - sin. c : 1 + sin. c = tang. A - tang. a : tang. A + tang. a$$

$$\text{of } \frac{1 - sin. c}{1 + sin. c} = \frac{tang. A - tang. a}{tang. A + tang. a}$$

Volgens het VIII. *Gev.* III. *Stell.* en I. *Gev.* XI. *Stell.* XI. *B.* is dan:

$$tang^2. (45^\circ - \tfrac{1}{2} c) = \frac{sin. (A - a)}{sin. (A + a)}$$

$$tang. (45^\circ - \tfrac{1}{2} c) = \pm \sqrt{\frac{sin. (A - a)}{sin. (A + a)}} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

4°. Uit de formule (3), volgt de evenredigheid:

$$1 : sin. C = cos. a : cos. A$$

$$1 + sin. C : 1 - sin. C = cos. a + cos. A : cos. a - cos. A$$

$$\frac{1 + sin. C}{1 - sin. C} = \frac{cos. a + cos. A}{cos. a - cos. A}$$

dat is, zie VIII. *Gev.* III. *Stell.* en VIII. *Stell.* XI. *B.*

$$cot^2. (45^\circ - \tfrac{1}{2} C) = \frac{cot. \tfrac{1}{2}(A + a)}{tang. \tfrac{1}{2}(A - a)}$$

of, wanneer men deze vergelijking omkeert:

$$tang^2. (45^\circ - \tfrac{1}{2} C) = tang. \tfrac{1}{2}(A + a) \times tang. \tfrac{1}{2}(A - a)$$

$$tang. (45^\circ - \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{tang. \tfrac{1}{2}(A + a) \times tang. \tfrac{1}{2}(A - a)} \quad (6)$$

Ten aanzien dezer drie afgeleide vergelijkingen, welke alle tot het twijfelachtige geval behooren, moet worden aangemerkt: dat het dubbele teeken, waarmede de wortel-uitdrukkingen zijn aangedaan, de twee driehoeken geeft, op welke de gegevens passen. Want stellen wij, in (13), den hoek, welke tot $tang. (45^\circ - \tfrac{1}{2} b)$ behoort, gelijk φ; dan is $45^\circ - \tfrac{1}{2} b = \pm \varphi$, en hieruit volgt $b = 90^\circ + 2\varphi$, waaruit dan blijkt: dat van de

twee waarden, welke men voor b verkrijgt, de eene het supplement is van de andere.

IV. Vraagstuk. IV. Geval. *Fig.* 90.

§. 1196. *Gegeven zijnde de twee regthoekszijden $AB = c$ en $BC = a$; de hypothenusa $AC = b$, benevens de scheve hoeken A en C te vinden?*

Oplossing *door constructie. Fig.* 103. Zij wederom, uit M, met de éénheid als straal, eenen cirkel beschreven. Neem, op deszelfs omtrek, AB en BC gelijk aan de twee gegevene regthoekszijden; en, na de stralen MA, MB en MC getrokken te hebben, zoo laat CD loodregt op BM vallen, en GE loodregt op AM. Verleng deze laatste loodlijn, tot dat zij den omtrek des cirkels in C ontmoet; dan is AC de begeerde hypothenusa.

Om de scheve hoeken te vinden, trekke men vooreerst DF loodregt op DE, en beschrijve, uit E, met EC als straal, eenen cirkel, die DF ontmoet; men trekke de lijn EF; dan is hoek DEF gelijk aan den scheven bolvormigen hoek A.

Voorts late men AG loodregt op MB, en GH loodregt op CM vallen, welker verlengde den omtrek des cirkels in A' snijdt (zijnde nu $CA' = CA$). Men trekke GI, loodregt op GH, en beschrijve, uit H, met $A'H$ als straal, eenen cirkel, die GI in I snijdt; dan zal, de lijn HI getrokken hebbende, hoek GHI gelijk aan den scheven bolvormigen hoek C zijn.

Het betoog dezer constructie is uit het voorgaande blijkbaar.

Oplossing *door berekening. Fig.* 90. Hier zijn gegeven de regthoekszijden $AB = c$ en $BC = a$.

1°. De hypothenusa $AC = b$ wordt, volgens de VIII. *Stell.* gevonden, door de formule:

$$\cos. b = \cos. a \times \cos. c \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$Log. \cos. b = Log. \cos. a + Log. \cos. c$$

2°. Volgens de VIII. *Stelling*, is $\tang. a = \tang. A \times \sin. c$, en uit deze vergelijking volgt dan terstond:

$$\tang. A = \tang. a : \sin. c \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$Log. \tang. A = Log. \tang. a - Log. \sin. c$$

3°. Om dezelfde reden, is

$$\tang. C = \tang. c : \sin a \quad \ldots\ldots \quad (3)$$
$$Log. \tang. C = Log. \tang. c - Log. \sin. a$$

door welke drie formulen alles ligtelijk zal berekend worden.

§. 1197. Aanmerking. De formule (1), door welke de hypothenusa, uit de twee gegevene regthoekszijden gevonden wordt, kan, volgens de V. *Stell.* XI. *B.* aldus worden voorgesteld:

$$\cos. b = \tfrac{1}{2} \cos. (a + b) + \tfrac{1}{2} \cos. (a - b) \quad . \quad (4)$$

zoodat men, de natuurlijke finus-tafel gebruikende, door het optellen van twee cofinusfen, de hypothenufa zal verkrijgen — Voor de twee andere formulen (3) en (4), zijn geene bruikbare herleidingen te vinden.

V. VRAAGSTUK. V. GEVAL. *Fig.* 90.

§. 1198. *Van een regthoekigen bolvormigen driehoek de fcheve hoeken A en C gegeven zijnde, al de zijden AB = c, BC = a en AC = b te vinden?*

OPLOSSING *door conftructie. Fig.* 104. Zoo men, de hoeken van den bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de zijden door conftuctie kan vinden, zal ook dit geval der regthoekige bolvormige driehoeken teekenkunftig zijn opgelost.

Men make, in *figuur* 104, (die men met *fig.* 98, moet vergelijken, in welke laatfte, figuur ABC' de driehoek is, wiens hoeken gegeven zijn,) na, uit het middelpunt M, met de éénheid, als ftraal, eenen cirkel befchreven te hebben, *boog* $PQ = 180° -$ *hoek* C, *boog*. $QR = 180° -$ *hoek* A en *boog* $PR = 180° -$ *hoek* B; dan is BQR de aspuntsdriehoek ABC, wiens hoeken gegeven zijn.

Men late, uit de punten R en R, de loodlijnen RD en RE, op het verlengde van de ribben MQ en MP vallen. Deze loodlijnen fnijden elkander in het punt F, welke de projectie van het hoekpunt R op het vlak PQM is.

Verder trekke men, uit het punt F, de lijnen FG en FH, evenwijdig aan MQ en MP: en, uit de punten D en E, als middelpunten, befchrijve men, met DR en ER als ftralen, twee cirkelbogen, die deze loodlijnen FG en FH, in de punten G en H, fnijden; indien men dan de lijnen DG en EH trekt; dan zijn de fupplementen der hoeken FDG en FEH gelijk aan de bolvormige hoeken P en Q.

Men zie het betoog dezer conftructie, in het II. *Vraagftuk* VIII. *Boek*.

Aangezien nu, zie *fig.* 98, de fupplementen van de hoeken P en Q, de zijden $BC = a$ en $AC = b$ van den gezochten driehoek zijn, zoo zijn die zijden bekend. De derde zijde wordt op dezelfde wijze gevonden.

OPLOSSING *door berekening*. Hier zijn de fcheve hoeken A en C gegeven.

1°. Volgens de VIII. *Stelling*, is $\cos. A = \cos. a \times \sin. C$, uit welke vergelijking dan onmiddellijk volgt:

$$\cos. a = \cos. A : \sin. C \quad \ldots\ldots \quad (1)$$
$$Log. \cos. a = Log. \cos. A - Log. \sin. C$$

2°. Om dezelfde reden, is

$$\cos. c = \cos. C : \sin. A \quad \ldots\ldots \quad (2)$$
$$Log. \cos. c = Log. \cos. C - Log. \sin. A$$

3°. Uit de vergelijking $tang.\ A \times tang.\ C \times cos.\ c = 1$, volgt onmiddellijk:

$$cos.\ c = cot.\ A \times cot.\ C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$Log.\ cos.\ c = Log.\ cot.\ A + Log.\ cot.\ C$$

§. 1199. Aanmerking. Men kan uit de vergelijking (3) terstond stellen: $\frac{1 + cos.\ b}{1 - cos.\ b} = \frac{1 + cot.\ A \times cot.\ C}{1 - cot.\ A \times cot.\ C}$; wanneer men nu den teller en den noemer der laatste breuk door $cot.\ A$ deelt, en voor $tang.\ A$ en $cot.\ C$ schrijft, $sin.\ A : cos.\ A$, en $cos.\ C : sin.\ C$, dan zal men, met behulp van de III. *Stell.* en IV. *Gev.* IX. *Stell.* VIII. *B.* verkrijgen:

$$tang.\ \tfrac{1}{2} b = \sqrt{-\frac{cos.\ (A + C)}{cos.\ (A - C)}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

omtrent welke vergelijking, moet aangemerkt worden, dat de grootheid, onder het wortelteeken, wegens de algemeenheid der goniometrische formulen, het negatieve teeken verkrijgt, en dit teeken ook hebben moet; omdat, aangezien $A + C > 90°$ is, de eigenlijke waarde negatief, en de wortel-uitdrukking onbestaanbaar zou worden. Voorts ziet men, dat $tang.\ \tfrac{1}{2} b$ nooit anders dan positief kan zijn.

VI. Vraagstuk. VI. Geval. *Fig.* 90.

§. 1200. *Van een regthoekigen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de schuinsche zijde $AC = b$, met ééne der regthoekszijden $AB = c$, de andere regthoekszijde met de scheve hoeken te vinden?*

Oplossing *door constructie. Fig.* 105. Men neme, op den omtrek van eenen cirkel, die met de éénheid als straal, uit het middelpunt *M*, beschreven is, *AC* en *AB* gelijk aan de gegevene hypothenusa *b* en regthoekszijde *c*; en, na de stralen *MC*, *MA* en *MB*, getrokken te hebben, trekke men *CDE*, loodregt op *MA*, en *EC* loodregt op *MB*; dan zal *CC* de onbekende regthoekszijde zijn.

Om de scheve hoeken *A* en *C* te vinden, trekke men: 1°. om hoek *A* te vinden, *EF* loodregt op *CE*, en men beschrijve, uit *D*, met *DC* als straal, eenen boog die *EF* in *H* snijdt; dan zal, de lijn *DF* getrokken hebbende, *hoek EDF* gelijk aan den bolvormigen hoek *A* zijn.

De *hoek HGI* is gelijk aan den bolvormigen hoek *C*. Al hetwelk uit het voorgaande blijkbaar is.

Oplossing *door berekening. Fig.* 99. Hier zijn gegeven $AC = b$ en $AB = c$. Er moet gevonden worden $BC = a$, en de scheve hoeken *A* en *C*.

1°. De regthoekszijde *a* wordt, uit de vergelijking $cos.\ b = cos.\ c \times cos.\ a$, zie VIII. *Stelling*, aldus gevonden:

$$cos.\ a = cos.\ b : cos.\ c \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$
$$Log.\ cos.\ a = Log.\ cos.\ b - Log.\ cos.\ c$$

2°. Vol-

2°. Volgens de VIII. *Stelling*, is $tang.\ c = tang.\ b \times cos.\ A$; derhalve is:

$$cos.\ A = tang.\ c : tang.\ b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$
$$Log.\ cos.\ A = Log.\ tang.\ c - Log.\ tang.\ c$$

3°. In dezelfde ſtelling is bewezen, dat $sin.\ c = sin.\ C \times sin.\ b$ is, en uit deze vergelijking volgt dan onmiddellijk:

$$sin.\ C = sin.\ c : sin.\ b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$
$$Log.\ sin.\ C = Log.\ sin.\ c - Log.\ sin.\ b$$

§. 1201. AANMERKINGEN. 1°. De vergelijking (1) geeft, met behulp van de VII en VIII. *Stell.* II. *B.*; IV. *Gev.* IX. *Stell.* en XI. *Stell.* XI. *B.*

$$tang.\ \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{sin.\ (b-c)}{sin.\ (b+c)}} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

2°. Uit de vergelijking (2) volgt, op dezelfde wijze, als in §. 1195 gebleken is,

$$tang.\ (45° - \tfrac{1}{2} C) = \pm \sqrt{\frac{tang.\ \tfrac{1}{2}(b+c)}{tang.\ \tfrac{1}{2}(b-c)}} \quad \ldots \quad (5)$$

Men onderſcheidt in deze vergelijking gemakkelijk, welk teeken gebezigd moet worden; want C en c moeten (II. *Aanmerk.* IX. *Stell.*) van dezelfde ſoort zijn.

3°. Uit de vergelijking (1) volgt:

$$tang.\ \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{[tang.\ \tfrac{1}{2}(b-c) \times tang.\ \tfrac{1}{2}(b+c)} \quad \ldots \quad (6)$$

en in deze geldt alleen het poſitieve teeken voor de waarde van $tang.\ \tfrac{1}{2} a$.

§. 1202. BERIGT. Wij hebben onnoodig geoordeeld, om, zoo als in het voorgaande Boek, bij elk dezer gevallen, uitgerekende voorbeelden te voegen; omdat men moet onderſtellen, dat de Lezer, op deze hoogte gekomen zijnde, en de voorbeelden uit het voorgaande Boek nagewerkt hebbende, in ſtaat zal zijn, om alle formulen, die wij reeds verkregen hebben, en nog verder zullen verkrijgen, door de Logarithmen te berekenen. Wij zullen ons vergenoegen, met de hoeken en zijden van drie regthoekige bolvormige driehoeken, in het ondergevoegde tafeltje, op te geven; ten einde de Lezer zich in het berekenen der formulen, welke in de zes voorgaande Vraagſtukken voorkomen, vlijtig zou kunnen oefenen.

1. VOORBEELD.	2. VOORBEELD.	3. VOORBEELD.
$AB = c = 56°\ 18'27''$	$AB = c = 113°\ 22'50''$	$AB = c = 118°\ 17'20''$
$BC = a = 73°\ 23'43''$	$BC = a = 63°\ 36'40''$	$BC = a = 99°\ 18,40''$
$AC = b = 80°\ 52'43'',2$	$AC = b = 100°\ 9'32''$	$AC = b = 85°\ 48'\ 2'',4$
$A = 76°\ 4'00'',4$	$A = 65°\ 30'51'',9$	$A = 98°\ 18'31'',4$
$C = 57°\ 25'28'',2$	$C = 111°\ 10'14'',5$	$C = 118°\ 00'03'',5$

Deze voorbeelden kunnen tevens dienen, om andere formulen, die men uit de voorgaande zou kunnen afleiden, in getallen te beproeven.

B. *Over het berekenen der scheefhoekige Bolvormige Driehoeken.*

§. 1203. Er bestaan, voor de scheefhoekige, even zoo als voor de regthoekige, bolvormige driehoeken, zes eenvoudige gevallen, onder welken elken bolvormige driehoek geheel bepaald is, te weten: 1°. *wanneer de drie zijden*; 2°. *wanneer al de hoeken*; 3°. *wanneer twee zijden met den ingesloten hoek*; 4°. *wanneer twee hoeken, met de zijde, tusschen die hoeken*; 5°. *wanneer twee zijden, met eenen hoek, over ééne dezer zijden*; 6°. *en, wanneer twee hoeken, met eene zijde over éénen dezer hoeken gegeven zijn.* Wij zullen, de constructiën dezer gevallen, welke reeds in het VIII. *Boek* voorkomen, achterwege latende, de oplossing dezer gevallen, in de zes volgende Vraagstukken behandelen.

VII. Vraagstuk. I. Geval. *Fig.* 106.

§. 1204. *De drie zijden van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de formulen of voorschriften, ter berekening van al deszelfs hoeken, te vinden?*

Wij zullen ons, in de oplossing van dit en de vijf volgende Vraagstukken, van *fig.* 106, bedienen, in welke figuur de loodregte bogen, die, uit de hoekpunten op de overstaande zijden vallen, ondersteld worden binnen den driehoek te liggen. In dezen driehoek, is de zijde $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; de stukken van de zijden en overstaande hoeken worden aldus aangeduid: $AD = p$, $BD = q$, $ACD = P$, $BCD = Q$; en zoo als verder de figuur aanwijst.

I. Oplossing. In het *Gevolg* van de *XIV. Stelling* is gevonden:

$$\cos. A = \frac{\cos. a - \cos. b \times \cos. c}{\sin. b \times \sin. c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Deze formule, zoo als zij daar staat, zou reeds kunnen dienen, om den hoek A, uit de drie zijden a, b en c, te vinden; maar men kan dezelve, op meer dan ééne wijze, voor de berekening onder eene geschiktere gedaante brengen.

Men trekke deze vergelijking van de identische vergelijking $1 = 1$ af; dan verkrijgt men:

$$1 - \cos. A = \frac{\cos. b \times \cos. c + \sin. b \times \sin. c - \cos. a}{\sin. b \times \sin. c}$$

Maar nu is (zie *III. Gev*, *III. Stell.* en *III. Stell. XI. B.*) $1 - \cos. A = 2 \sin^2. \frac{1}{2} A$ en $\cos. b \times \cos. c + \sin. b \times \sin. c = \cos. (b - c)$ of $= \cos. (c - b)$; men heeft dus:

$$2 \sin^2. \tfrac{1}{2} A = \frac{\cos. (b - c) - \cos. a}{\sin. b \times \sin. c}$$

Vol-

Volgens de *VI. Stell. XI. B.*, is $cos.\, p - cos.\, q = 2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(p+q)\, sin.\, \tfrac{1}{2}(q-p)$; de laatste vergelijking wordt derhalve:

$$2\, sin^2.\, \tfrac{1}{2} A\, \tfrac{1}{2} = \frac{2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(a+b-c) \times sin.\, \tfrac{1}{2}(a-b+c)}{sin.\, b \times sin.}$$

Men stelle nu, om te bekorten, $2s = a+b+c$, of $s = \tfrac{1}{2}(a+b+c)$; dan is $2s - 2c = 2(s-c) = a+b-c$ en $2s - 2b = 2(s-b) = a+b-c$; gevolgelijk wordt $\tfrac{1}{2}(a-b+c) = s-b$ en $\tfrac{1}{2}(a+b-c) = s-c$, en wij verkrijgen dan, na alles door twee gedeeld en uit beide leden der vergelijking den vierkants-wortel getrokken te hebben:

$$sin.\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{sin.\,(s-b) \times sin.\,(s-c)}{sin.\, b \times sin.\, c}} \quad \ldots \quad (1)$$

eene vergelijking, welke in alles overeenstemt met de vergelijking, welke wij, in de *VIII. Stell.* van het *XII. B.* gevonden hebben, om uit de drie zijden van een platten driehoek de hoeken te berekenen.

Om dezelfde reden, zal men kunnen stellen:

$$sin.\, \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{sin.\,(s-a) \times sin.\,(s-c)}{sin.\, a \times sin.\, c}}\,; \ldots$$

$$sin.\, \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{sin.\,(s-a) \times sin.\,(s-b)}{sin.\, a \times sin.\, b}}$$

Het is deze herleide formule, welke bij de meeste schrijvers doorgaans en bij voorkeur gebruikt wordt, om de hoeken van een bolvormigen driehoek, uit de drie gegevene zijden, te berekenen.

II. OPLOSSING. Telt men de leden van de vergelijking (a), bij die van identische vergelijking $1 = 1$; dan wordt

$$1 + cos.\, A = \frac{cos.\, a - cos.\, b \times cos.\, c + sin.\, b \times siu\, c}{sin.\, b \times sin.\, c}$$

eene vergelijking, welke men ook aldus schrijven kan:

$$1 + cos.\, A = \frac{cos.\, a - (cos.\, b \times cos.\, c - sin.\, b \times cin\, c)}{sin.\, b \times sin.\, c}$$

welke vergelijking nu, naar de bekende beginselen, aldus kan worden voorgesteld.

$$2\, cos^2.\, \tfrac{1}{2} A = \frac{cos.\, a - cos.\,(b+c)}{sin.\, b \times sin.\, c}$$

Maar, volgens de *VI. Stell. XI. B.*, is $cos.\, a - cos.\,(b+c) = 2\, sin.\, \tfrac{1}{2}(a+b+c) \times sin.\, \tfrac{1}{2}(a+b-c)$; derhalve wordt, na alles door twee gedeeld te hebben:

$$cos^2.\, \tfrac{1}{2} A = \frac{sin.\, \tfrac{1}{2}(a+b+c) \times sin.\, \tfrac{1}{2}(-a+b+c)}{sin.\, b \times sin.\, c}$$

Stelt men nu wederom, even zoo als in de voorgaande oplossing, $2s = a+b+c$ en $2s - 2a = 2(s-a) = -a+b+c$; als wanneer $\tfrac{1}{2}(a+b+c) = s$ en $\tfrac{1}{2}(-a+b+c) = s-a$ wordt; dan verkrijgt men, na den vierkants-wortel uit beide leden van de vergelijking getrokken te hebben:

cos. ½

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.s \times \sin.(s-a)}{\sin.b \times \sin.c}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Om dezelfde reden, is

$$\cos.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.s \times \sin.(s-b)}{\sin.a \times \sin.c}} \text{ en } \cos.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin.s \times \sin.(s-c)}{\sin.a \times \sin.b}}$$

III. Oplossing. Indien men de formule (1) door de formule (2) deelt; dan zal men verkrijgen:

$$\mathit{tang}.\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.(s-b) \times \sin.(s-c)}{\sin.s \times \sin.(s-a)}} \quad \ldots \quad (3)$$

en, om dezelfde reden, is dan ook

$$\mathit{tang}.\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin.(s-a) \times \sin.(s-c)}{\sin.s \times \sin.(s-a)}}; \ldots$$

$$\mathit{tang}.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin.(s-a) \times \sin.(s-b)}{\sin.s \times \sin.(s-c)}}$$

Wil men echter deze formulen voor de berekening gefchikter maken; dan ftelle men:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sin.(s-a) \times \sin.(s-b) \times \sin.(s-c)}{\sin.s}}$$

en dan heeft men, als volgt:

$$\mathit{tang}.\tfrac{1}{2}A = \frac{\Omega}{\sin.(s-a)};\ \mathit{tang}.\tfrac{1}{2}B = \frac{\Omega}{\sin.(s-b)}$$

$$\text{en } \mathit{tang}.\tfrac{1}{2}C = \frac{\Omega}{\sin.(s-c)} \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

welke vorm voor de berekening het gefchiktfte is.

IV. Oplossing. Vermenigvuldigt men de formulen (1) en (2) met elkander; dan zal men, aangezien $\sin.p \times \cos.p = \tfrac{1}{2}\sin.2p$ is, verkrijgen:

$$\sin.A = \frac{2\sqrt{[\sin.s \times \sin.(s-a) \times \sin.(s-b) \times \sin(s-c)]}}{\sin.b \times \sin.c} \quad (5)$$

eene formule, welke, alhoewel zij in de berekening te omflachtig is, dienen kan, om in elken bolvormigen driehoek de betrekking, die er tusfchen de finus van eenen hoek en die van zijne overftaande zijde beftaat, leert kennen; want, indien men deze vergelijking door $\sin.a$ deelt; dan verkrijgt men:

$$\frac{\sin.A}{\sin.a} = \frac{2\sqrt{[\sin.s \times \sin.(s-a) \times \sin.(s-b) \times \sin.(s-c)]}}{\sin.a \times \sin.b \times \sin.c} \quad (A)$$

V. Oplossing. *Fig.* 106. Uit de Neperiaanfche Analogien en de evenredigheden, die in de *XIII. Stelling* betoogd zijn, kan dit eerfte geval nog aldus worden opgelost.

Indien men van den loodregten boog CD gebruik maakt; dan is, zie formulen (21) van de tafel, *Bladz.* 250,

$$\mathit{tang}.\tfrac{1}{2}(p-q) = \mathit{tang}.\tfrac{1}{2}(a+b) \times \mathit{tang}.\tfrac{1}{2}(b-a) \times \cot.\tfrac{1}{2}c$$

Men

Men stelle dan $\frac{1}{2}(p-q)=\phi$; dan hebben wij:

$$p=\tfrac{1}{2}c+\phi \quad \text{en} \quad q=\tfrac{1}{2}c-\phi$$

De regthoekige bolvormige driehoeken ADC en BDC, geven voorts, naar de bekende gronden:

$$\cos. A=\text{tang}.p\times\cot.b=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}c+\phi)\times\cot.b$$
$$\cos. B=\text{tang}.q\times\cot.a=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}c-\phi)\times\cot.a$$

Indien dus de twee hoeken A en B berekend zijn; dan zal men den derden hoek C vinden door de formule:

$$\sin.\tfrac{1}{2}C=\cos.\tfrac{1}{2}c\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

die uit de evenredigheid (29) onmiddellijk volgt.

Wij hebben dus het volgende stelsel van formulen, om uit de drie gegevene zijden de hoeken te berekenen.

1°. $\text{tang}.\phi=\text{tang}.\tfrac{1}{2}(a+b)\times\text{tang}.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cot.\tfrac{1}{2}c$. (6)

$$\cos. A=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}c+\phi)\times\cot.b$$
$$\cos. B=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}c-\phi)\times\cot.a$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}C=\cos.\tfrac{1}{2}c\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

2°. $\text{tang}.\phi'=\text{tang}.\tfrac{1}{2}(b+c)\times\text{tang}.\tfrac{1}{2}(c-b)\times\cot.\tfrac{1}{2}a$. (6)

$$\cos. B=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}a+\phi')\times\cot.c$$
$$\cos. C=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}a-\phi')\times\cot.b$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}A=\cos.\tfrac{1}{2}a\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)}$$

3°. $\text{tang}.\phi''=\text{tang}.\tfrac{1}{2}(c+a)\times\text{tang}.\tfrac{1}{2}(a-c)\times\cot.\tfrac{1}{2}b$. (6)

$$\cos. C=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}b+\phi'')\times\cot.a$$
$$\cos. A=\text{tang}.(\tfrac{1}{2}b-\phi'')\times\cot.c$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}B=\cos.\tfrac{1}{2}b\times\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(a+c)}$$

VI. Oplossing. Nemen wij nog eens de vergelijking $\cos.a=(\cos.a-\cos.b\times\cos.c):\sin.b\times\sin.c$, en stellen wij $\cos.b\times\cos.c=\cos.m$, (hetgeen altijd bestaanbaar is,) dan hebben wij (*VI. Stell. VIII. B.*)

$$\cos. A=\frac{2\sin.\tfrac{1}{2}(a+m)\times\sin.\tfrac{1}{2}(m-a)}{\sin.b\times\sin.c} \quad \ldots . (7)$$

zullende het teeken van m van de teekens van $\cos.b$ en $\cos.c$ afhangen. Indien $\cos.m$ negatief is, is $m>90°$.

VII. Oplossing. Men kan de vergelijking $\cos.A=(\cos.a-\cos.b\times\cos.c):\sin.b\times\sin.c$, nog onder dezen vorm stellen:

$$\cos. A=\frac{\sin.a}{\sin.b\times\sin.c}\times\left\{\frac{\cos.a}{\sin.a}-\frac{\cos.b\times\cos.c}{\sin.a}\right\}$$

Men neme nu $\cos.b\times\cos.c:\sin.a=\sin.\chi:\cos.\chi=\text{tang}.\chi$; dan heeft men: (zie *III. Stell. VIII. B.*)

cos. A

$$cos.\,A = \frac{sin.\,a}{sin.\,b \times sin.\,c} \times \left\{ \frac{cos.\,a}{sin.\,a} - \frac{sin\,\chi}{cos.\,\chi} \right\} = (III.\,St.\,VIII.\,B.)$$
$$\frac{sin.\,a \times cos.\,(a+\chi)}{sin.\,a \times sin.\,b \times sin.\,c \times cos\,\chi}$$

Men zal derhalve $cos.\,A$ door het ftelfel der twee onderftaande vergelijkingen:

$$tang.\,\chi = \frac{cos.\,b \times cos.\,c}{sin.\,a} \text{ en } cos.\,A = \frac{cos.\,(a+\chi)}{sin.\,b \times sin.\,c \times cos.\,\chi} \quad . \quad (8)$$

kunnen vinden. De boog χ is negatief, indien $tang.\,\chi$ negatief is.

§. 1205. Aanmerking. Bij de drie laatfte oplosfings-manieren, moet men bijzonderlijk acht geven op de teekens der goniometrifche lijnen; om welke reden dan ook de drie eerfte oplosfingen doorgaans het meest gebruikt worden; aangezien in geene van dezelve de teekens der goniometrifche lijnen, die tot de oplosfing moeten dienen, negatief worden.

VIII. Vraagstuk. II. Geval. *Fig.* 106.

§. 1206. *Al de hoeken van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, deszelfs zijden door berekening te vinden?*

I. Oplossing. Uit het *I. Gevolg* der *XIV. Stelling*, is gebleken, dat

$$cos.\,a = \frac{cos.\,A + cos.\,B \times cos.\,C}{sin.\,B \times sin.\,C} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

is; door welke formule, uit de gegevene hoeken, indien men de natuurlijke finus-tafel gebruikt, de cofinus van de zijde a kan gevonden worden.

Om nu die formule (a) onder eene gedaante te brengen, die voor de berekening in Logarithmen gefchikter is, trekke men dezelve van de identifche vergelijking $1 = 1$ af; dan zal men verkrijgen:

$$1 - cos.\,a = \frac{sin.\,B \times sin. - cos\,B \times cos.\,C - cos.\,A}{sin.\,B \times sin.\,C}$$

Nu is, gelijk men weet, $1 - cos.\,a = 2\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,a$ en $sin.\,B \times sin.\,C - cos.\,B \times cos.\,B = - cos.\,(B+C)$, en daarom wordt de laatfte vergelijking:

$$2\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,a = \frac{- cos.\,(B+C) - cos.\,A}{sin.\,B \times sin.\,C} = - \frac{cos.\,(B+C) + cos.\,A}{sin.\,B \times sin.\,C}$$

Omdat, in het algemeen, $cos.\,p + cos.\,q = 2\,cos.\,\tfrac{1}{2}(p+q) \times cos.\,\tfrac{1}{2}(p-q)$ is; zoo wordt de laatfte vergelijking wederom

$$2\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,a = - \frac{2\,cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) \times cos.\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)}{sin.\,B \times sin.\,C}$$

Men ftelle nu $2\,S = A + B + C$; dan is $2(S - A) = B + C - A$; gevolgelijk is $S = \tfrac{1}{2}(A+B+C)$ en $S - A = \tfrac{1}{2}(B+C-A)$; de laatfte vergelijking wordt dan, na dezelve door twee gedeeld te hebben:

$sin^2.\,\tfrac{1}{2}\,a$

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{-\frac{\cos.S \times \cos.(S-A)}{\sin.B \times \sin.C}} \quad \ldots \quad (1)$$

Om dezelfde reden is:

$$\sin.\tfrac{1}{2}b = \sqrt{-\frac{\cos.S \times \cos.(S-B)}{\sin.A \times \sin.C}}$$

$$\text{en } \sin.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{\cos.S \times \cos.(S-C)}{\sin.A \times \sin.B}}$$

De breuk, onder het wortel-teeken, komt wel onder een negatieven vorm voor; doch, daar de som van de hoeken eens bolvormigen driehoeks altijd grooter dan 180° en kleiner dan 540° is. Zoo is $S > 90^\circ$ en $S < 270^\circ$, en daarom is $\cos.S$ negatief; terwijl de cosinussen van $S-A$, $S-B$ en $S-C$ (indien de waarden van A, B en C met een driehoek wezenlijk bestaanbaar zijn,) altijd positief zijn: die negatieve waarde van $\cos.S$ maakt nu, dat de grootheid onder het wortel-teeken, alhoewel zij onder een negatieven vorm voorkomt, inderdaad positief wordt, en, onder eene schijnbare onbestaanbaarheid, wezenlijk bestaanbaar is.

II. Oplossing. Men telle de vergelijking (a) bij de identische vergelijking $1 = 1$ op; dan verkrijgt men:

$$1 + \cos.a = \frac{\cos.B \times \cos.C + \sin.B \times \sin.C + \cos.A}{\sin. \times \sin.C}$$

Nu is $1 + \cos.a = 2\cos^2.\tfrac{1}{2}a$ en $\cos.B \times \cos.C + \sin.B \times \sin.C = \cos.(B-C)$, of, zoo men wil, $= \cos.(C-B)$; want, welke dezer twee uitdrukkingen men gebruikt, zoo zal toch de laatste uitkomst der herleiding dezelfde zijn. De laatste vergelijking verandert dan in deze meer eenvoudige:

$$2\cos^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos.(B-C) + \cos.A}{\sin.B \times \sin.C}$$

In deze laatste is nu ook $\cos.(B-C) + \cos.A = 2\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C) \times \cos.\tfrac{1}{2}(A-B+C)$, en wij hebben derhalve, na beide leden der vergelijking door twee gedeeld te hebben:

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+B-C) \times \cos.\tfrac{1}{2}(A-B+C)}{\sin.B \times \sin.C}$$

Stelt men nu wederom, als boven, $2S = A+B-C$; dan wordt $2(S-B) = A-B+C$ en $2(S-C) = A+B-C$; $\tfrac{1}{2}(A-B+C) = S-B$ en $\tfrac{1}{2}(A+B-C) = S-C$; de laatste vergelijking wordt dan, na uit dezelve den vierkants-wortel getrokken te hebben:

$$\cos.\tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.(S-B)\cos.(S-C)}{\sin.B \times \sin.C}} \quad \ldots \quad (2)$$

Om dezelfde reden, zal men hebben:

$$\cos.\tfrac{1}{2}b = \sqrt{\frac{\cos.(S-A)\cos.(S-C)}{\sin.A \times \sin.C}} \quad \ldots$$

$$\text{en } \cos.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\cos.(S-A)\cos.(S-B)}{\sin.A \times \sin.B}}$$

II. Op-

III. OPLOSSING. Men deele de vergelijking (1) door de vergelijking (2); dan verkrijgt men:

$$tang. \tfrac{1}{2} a = \sqrt{- \frac{cos. S \times cos. (S - A)}{cos. (S - B)\ cos. (S - C)}} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

zijnde, om dezelfde redenen:

$$tang. \tfrac{1}{2} b = \sqrt{- \frac{cos. S \times cos. (S - B)}{cos. (S - A)\ cos. (S - C)}}$$

$$\text{en } tang. \tfrac{1}{2} c = \sqrt{- \frac{cos\ S \times cos\ (S - C)}{cos. (S - A)\ cos. (S - B)}}$$

Of beter aldus: men stelle

$$\omega = \sqrt{- \frac{cos. (S - A) \times cos. (S - B) \times cos. (S - C)}{cos. S}}$$

dan verkrijgt, voor de tangenten der halve zijden:

$$tang. \tfrac{1}{2} a = \frac{cos. (S - A)}{\omega}, \quad tang. \tfrac{1}{2} b = \frac{cos. (S - B)}{\omega}$$

$$\text{en } tang. \tfrac{1}{2} c = \frac{cos. (S - C)}{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

IV. OPLOSSING. Vermenigvuldigt men de vergelijkingen (1) en (2) met elkander; dan zal men, aangezien $sin.\ a = 2\ sin. \tfrac{1}{2} a \times cos. \tfrac{1}{2} a$ is, verkrijgen:

$$sin. a = \frac{2 \sqrt{[- cos. S \times cos. (S - A) \times (S - B) \times cos. (S - C)]}}{sin. B \times sin. C} \quad (5)$$

door welke formule men de finusfen der zijden zal verkrijgen.

V. OPLOSSING. *Fig.* 106. Uit de Neperiaanfche analogien, en de evenredigheden, welke in de *XIII. Stelling* betoogd zijn, kunnen de zijden, uit de drie gegevene hoeken, aldus worden gevonden.

Volgens formule (22) van de tafel, *Bladz.* 250, is

$$tang. \tfrac{1}{2} (P - Q) = tang. \tfrac{1}{2} \times tang. \tfrac{1}{2} (B + A) \times tang. \tfrac{1}{2} (B - A)$$

Men ftelle $\tfrac{1}{2} P - \tfrac{1}{2} Q = \psi$; omdat dan $\tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} Q = \tfrac{1}{2} C$ is, zoo hebben wij $P = \tfrac{1}{2} C + \psi$ en $Q = \tfrac{1}{2} C - \psi$. Nu is, in de regthoekige bolvormige driehoeken ACD en BCD,

$$cos. b = cot. A \times cot. P = cot. A \times cot. (\tfrac{1}{2} C + \psi)$$

$$cos. a = cot. B \times cot. Q = cot. B \times cot. (\tfrac{1}{2} C - \psi)$$

en, volgens de *XIV. Stelling*, is

$$cos. \tfrac{1}{2} c = sin. \tfrac{1}{2} C \times \frac{cos\ \tfrac{1}{2} (a + b)}{cos. \tfrac{1}{2} (A + B)}$$

Wij hebben dan, dit alles te zamen nemende, het volgende ftelfel van vergelijkingen:

$$1^\circ.\ tang. \psi = tang. \tfrac{1}{2} (B + A) \times tang. \tfrac{1}{2} (B - A) \times tang. \tfrac{1}{2} C \quad (6)$$

$$cos. b = cot\ A \times cot. (\tfrac{1}{2} C + \psi)$$

$$cos. a = cot. B \times cot. (\tfrac{1}{2} C - \psi)$$

$$sin. \tfrac{1}{2} c = sin. \tfrac{1}{2} C \times \frac{cos. \tfrac{1}{2} (a + b)}{cos. \tfrac{1}{2} (A + B)}$$

2°. *tang.*

2°. $\tang.\psi' = \tang.\tfrac{1}{2}(C+B) \times \tang.\tfrac{1}{2}(C-B) \times \tang.\tfrac{1}{2}A$ (6)

$$\cos.c = \cot.B \times \cot.\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}A + \psi')$$
$$\cos.b = \cot.C \times \cot.\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}A - \psi')$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \sin.\tfrac{1}{2}A \times \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b+c)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B+C)}$$

3°. $\tang.\psi'' = \tang.\tfrac{1}{2}(A+C) \times \tang.\tfrac{1}{2}(A-C) \times \tang.\tfrac{1}{2}B$ (6)

$$\cos.a = \cot.C \times \cot.(\tfrac{1}{2}B + \psi'')$$
$$\cos.c = \cot.A \times \cot.(\tfrac{1}{2}B - \psi'')$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}b = \sin.\tfrac{1}{2}B \times \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a+c)}{\cos.\tfrac{1}{2}(A+C)}$$

VI. OPLOSSING. Men ſtelle, in de vergelijking,

$$\cos.a = \frac{\cos.A + \cos.B \times \cos.C}{\sin.B \times \sin.C},$$

het product $\cos.B \times \cos.C$, dat altijd kleiner dan de éénheid is, gelijk aan $\cos.M$; dan wordt de teller van de breuk $\cos.A + \cos.M = 2\cos.\tfrac{1}{2}(A+M) \times \cos.\tfrac{1}{2}(A-M)$; en wij verkrijgen derhalve, om de $\cos.a$ te vinden, de volgende vergelijkingen:

$$\cos.B \times \cos.C = \cos.M \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$
$$\cos.a = \frac{2\cos.\tfrac{1}{2}(A+M) \times \cos.\tfrac{1}{2}(A-M)}{\sin.B \times \sin.C}$$

VII. OPLOSSING. Men deele nog de vergelijking, die de waarde van $\cos.a$ voorſtelt, eerst door het gebroken $\frac{\sin.A}{\sin.B \times \sin.C}$, en vermenigvuldige het quotient daarna wederom met deze breuk; dan wordt

$$\cos.a = \frac{\sin.A}{\sin.B \times \sin.C} \times \left\{\frac{\cos.A}{\sin.A} + \frac{\cos.B \times \cos.C}{\sin.A}\right\}$$

Nu ſtelle men (hetgeen in alle gevallen beſtaanbaar is) $\frac{\cos.B \times \cos.C}{\sin.A} = \tang.P = \frac{\sin.R}{\cos.R}$; dan wordt

$$\cos.a = \frac{\sin.A}{\sin.B \times \sin.C} \times \left\{\frac{\cos.A}{\sin.A} + \frac{\sin.R}{\cos.R}\right\}$$
$$\cos.a = \frac{\sin.A}{\sin.B \times \sin.C} \times \frac{\cos.A \times \cos.R + \sin.A \times \sin.R}{\sin.A \times \cos.R}$$
$$\text{of} \quad \cos.a = \frac{\cos.(A-R)}{\sin.B \times \sin.C \times \cos.R}$$

Wij hebben dan het volgende ſtelſel van vergelijkingen:

$$\frac{\cos.B \times \cos.C}{\sin.A} = \tang.P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$
$$\cos.a = \frac{\cos.(A-R)}{\sin.B \times \sin.C \times \cos.R}$$

§. 1207. GEVOLGEN. Uit de formulen, in de twee voorgaande Vraagstukken verkregen, kan men de volgende, voor de ligchaams-Meetkunst, merkwaardige gevolgen afleiden.

1°. *In elken gelijkzijdigen bolvormigen driehoek, wiens zijden gelijk a gesteld worden, is de sinus van de helft van éénen der gelijke hoeken gelijk aan de éénheid, gedeeld door tweemaal de cosinus van ééne der gelijke zijden; namelijk, sin.* $\frac{1}{2}A = 1 : 2 \cos. \frac{1}{2}a$.

Want, wanneer men, in de vergelijking $\sin. \frac{1}{2}A = \ldots\ldots$ $\sqrt{\frac{\sin.(s-b) \times \sin.(s-c)}{\sin. b \times \sin. c}}$, $a = b = c$ stelt; dan is $2s = a + b + c = 3a$ en $s = 1\frac{1}{2}a$; gevolgelijk is $s - b = \frac{1}{2}a$ en $s - c = \frac{1}{2}a$; derhalve

$$\sin. \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin^2. \frac{1}{2}a}{\sin^2. a}} = \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{\sin. a} = \frac{\sin. \frac{1}{2}a}{2 \sin. \frac{1}{2}a \times \cos. \frac{1}{2}a} = \frac{1}{2 \cos. \frac{1}{2}a}$$

eene vergelijking, in plaats van welke ook kan geschreven worden $\sin. \frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \sec. \frac{1}{2}a$.

2°. *Zij*, fig. 107, *ABC een gelijkbeenigen bolvormigen driehoek (zijnde AC = BC of a = b); dan wordt de hoek ACB = C, tusschen de gelijke zijden, bepaald door de formule sin.* $\frac{1}{2}C = \sin. \frac{1}{2}c : \sin. a$; *en de gelijke hoeken A en B, over de gelijke zijden, door de formule* $\sin. A = \sin. B = \cos. \frac{1}{2}C : \cos. \frac{1}{2}c$.

Want; omdat $a = b$ is, zoo wordt de vergelijking, die de waarde van $\sin. \frac{1}{2}c$ voorstelt, (omdat $2s = 2a + c$ en $s = a + \frac{1}{2}c$ is, waardoor $s - a = s - b = \frac{1}{2}c$ wordt)

$$\sin. \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin.(s-a)\sin.(s-b)}{\sin. a \times \sin. b}} = \sqrt{\frac{\sin^2. \frac{1}{2}c}{\sin^2. a}} = \frac{\sin. \frac{1}{2}c}{\sin. a}$$

En, in den regthoekigen bolvormigen driehoek ACD, in welken $AD = BD = \frac{1}{2}c$ en hoek $ACD =$ hoek $BCD = \frac{1}{2}C$ is, is $\cos. = \frac{1}{2}C = \cos. \frac{1}{2}c \times \sin. A$; gevolgelijk wordt $\sin. A = \cos. \frac{1}{2}C : \cos. \frac{1}{2}c$.

3°. *Wanneer al de hoeken van een bolvormigen driehoek gelijk (A = B = C) en derhalve ook de zijden (AB = BC = AC = a), gelijk zijn; dan is de cosinus van de helft van ééne der gelijke zijden gelijk aan de éénheid, gedeeld door tweemaal de sinus van de helft van éénen der gelijke hoeken; te weten,* $\cos. \frac{1}{2}a = 1 : \sin. \frac{1}{2}A$.

Want, wanneer men, in de algemeene vergelijking,

$$\cos. \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos.(S-B) \times \cos.(S-C)}{\sin. B \times \sin. C}}$$

$A = B = C$ stelt, dan is $2S = A + B + C = 3A$, derhalve $S = 1\frac{1}{2}A$, $S - B = S - C = 1\frac{1}{2}A - A = \frac{1}{2}A$. Men verkrijgt dan, in die onderstelling:

$$\cos. \tfrac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\cos^2. \frac{1}{2}A}{\sin^2. A}} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A}{\sin. A} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A}{2 \sin. \frac{1}{2}A \times \cos. \frac{1}{2}A} = \frac{1}{2 \sin. \frac{1}{2}A}$$

wel-

welke vergelijking ook uit de vergelijking $sin. \frac{1}{2} A = 1 : 2 cos. \frac{1}{2} a$, die wij in het I. *Gevolg* verkregen hebben, onmiddellijk volgt.

4°. *In den gelijkbeenigen bolvormigen driehoek ABC*, fig. 107, *in welke A en B de twee gelijke hoeken zijn, wordt de zijde c, tusschen de gelijke hoeken A en B, bepaald door de formule,* $cos. \frac{1}{2} c = cos. \frac{1}{2} C : sin. A$, *en de gelijke zijden AC en BC of a, tegen over de gelijke hoeken, door de formule,* $sin. a = sin. \frac{1}{2} c : sin. \frac{1}{2} C$.

Men ſtelle, in de formule,

$$cos. \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{cos. (S - A) \times cos. (S - B)}{sin. A \times sin. B}}$$

zoo als onderſteld wordt, $A = B$; dan is $2S = 2A + C$ en $S = A + \frac{1}{2} C$; derhalve $S - A = \frac{1}{2} C$ en $S - B = \frac{1}{2} C$; gevolgelijk:

$$cos. \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{cos^2. \frac{1}{2} C}{sin^2 A}} = \frac{cos. \frac{1}{2} C}{sin. A}$$

Eindelijk is in den regthoekigen bolvormigen driehoek ACD, volgens de bekende formulen, $sin. AD = sin. ACD \times sin. AC$, of $sin. \frac{1}{2} c = sin. \frac{1}{2} C \times sin. a$; gevolgelijk is $sin. a = sin. \frac{1}{2} c : sin. \frac{1}{2} C$.

5°. Indien men $M = sin. a : sin. A = sin. b : sin. B = sin. c : sin. C$ ſtelt; dan zal men, uit de waarden van $sin. a$ en $sin. A$, die in de twee voorgaande Vraagſtukken gevonden zijn, verkrijgen:

$$M^2 = -\frac{sin. s \times sin. (s - a) \times sin. (s - b) \times sin. (s - c)}{cos. S \times cos. (S - A) \times cos. (S - B) \times cos. (S - C)} = \frac{sin^2. a}{sin^2. A}$$

IX. Vraagstuk. III. Geval. *Fig.* 106.

§. 1208. *Van eenen bolvormigen driehoek twee zijden, met den ingeſloten hoek, gegeven zijnde, de formulen te vinden, door welke de onbekende hoeken, benevens de onbekende zijde, zullen kunnen berekend worden?*

Wij zullen eerst de onbekende hoeken en daarna de onbekende zijde afzonderlijk leeren berekenen.

A. Om de onbekende hoeken eerst te berekenen, kunnen de volgende oploſſingen dienen.

I. Oplossing. Indien a en b de bekende zijden, en C de bekende hoek is, late men, uit het hoekpunt van den bekenden hoek ACD, den loodregten boog CD op de tegenoverſtaande zijde AB vallen, welke dien hoek in twee hoeken P en Q verdeelt; dan is volgens de *XII. Stelling, formule* (23):

$$tang. \tfrac{1}{2} (P - Q) = cot. \tfrac{1}{2} C \times \frac{sin. (b - a)}{sin. (b + a)}$$

wanneer nu het halve verſchil van de deelen van den tophoek door

deze vergelijking gevonden is; dan zullen die deelen P en Q zelve bekend, zijn; namelijk

$$P = \tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}(P-Q), \text{ en } Q = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(P-Q)$$

In den regthoekige bolvormige driehoeken ACD en BCD, is dan eindelijk:

$$\cot. A = \cos. b \times \tang. P, \text{ en } \cot. B = \cos. a \times \tang. Q$$

en de derde zijde $AB = c$ zal gevonden worden, zie XIII. *Stell.* door de evenredigheid,

$$\cos. \tfrac{1}{2}(A+B) : \cos. \tfrac{1}{2}(a+b) = \sin. \tfrac{1}{2}C : \cos. \tfrac{1}{2}c$$

Men kan dan dit zamenstel van formulen aldus voorstellen:

$$\tang. r = \cot. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\sin.(b-a)}{\sin.(b+a)} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

$$\cot. A = \cos. b \times \tang.(\tfrac{1}{2}C + r); \quad \cot. B = \cos. a \times \tang.(\tfrac{1}{2}C - r)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}c = \sin. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos. \tfrac{1}{2}(A+B)}$$

Deze formulen zijn ontworpen, in de onderstelling, dat $b > a$ is; in het tegengestelde geval, worden $b-a$ en $\sin.(b-a)$ negatief. Voorts zal $\tang. r$ en r positief of negatief zijn, naar dat de teekens van $\sin.(b-a)$ en $\sin.(b+a)$ gelijk zijn, of van elkander verschillen.

II. Oplossing. Nog fraaijer stelsel van vergelijkingen verkrijgt men, indien men van de formulen (25) en (26), zie *XII. Stelling*, gebruik maakt. Men stelle namelijk

$$\tang. m = \cot. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(b-a)}{\sin. \tfrac{1}{2}(b+a)}; \quad \tang. n = \cot. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos. \tfrac{1}{2}(b+a)} \quad (2)$$

$$\text{dan is } A = n - m \text{ en } B = n + m$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}c = \sin. \tfrac{1}{2}C \times \frac{\cos. \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos. \tfrac{1}{2}(A+B)}$$

Wanneer, in dit stelsel van vergelijkingen, $b < a$ is; dan wordt m negatief; maar n is negatief, indien $b + a > 180^\circ$ is.

III. Oplossing. Men heeft, in de gevolgen op de *XVII. Stelling*, voor de twee onbekende hoeken A en B, gevonden:

$$\cot. A = \frac{\cot. a \times \sin. b}{\sin. C} - \cos. b \times \cot. C \quad . \; . \; . \quad (a)$$

$$\cot. B = \frac{\cot. b \times \sin. a}{\sin. C} - \cos. a \times \cot. C \quad . \; . \; . \quad (b)$$

door welke de onbekende hoeken elk afzonderlijk worden voorgesteld.

De eerste (a) dezer formulen kan aldus worden uitgedrukt:

$$\cot. A = \frac{\cot. a \times \sin. b - \cos. b \times \cos. C}{\sin. C}$$

Wanneer men nu teller en noemer van het gebroken, uit welk het tweede lid der vergelijking bestaat, met $\tang. a$ vermenigvuldigt; dan zal men, omdat $\tang. a \times \cot. a = 1$ is, verkrijgen:

$$cot. A = \frac{1}{sin. C \times tang. a} \times [sin\ b - tang. a \times cos. b \times cos. C]$$

Nu kan het product $tang. a \times cos. C$, altijd de tangens van een zekeren boog voorstellen. Stellen wij dus:

$$tang. a \times cos. C = tang. k = \frac{sin. k}{cos. k}$$

dan verkrijgt men, door die substitutie:

$$cot. A = \frac{1}{sin. C \times tang. a} \times \frac{sin. b \times cos. k - cos. b \times sin. k}{cos. k}$$

voor welke vergelijking ook kan gesteld worden:

$$cot. A = \frac{sin. (b - k)}{sin. C \times tang. a \times cos. k}$$

Vermenigvuldigt men eindelijk teller en noemer van deze breuk met $cos. C$; dan zal men hebben:

$$cot. A = \frac{sin. (b - k) \times cos. C}{sin. C \times cos. C \times tang. a \times cos. k}$$

maar nu is $tang. a \times cos. C = tang. k$ en $tang. k \times cos. k = sin. k$; gevolgelijk is:

$$cot. A = \frac{sin. (b - k) \times cos. C}{sin. C \times sin. k} = \frac{sin. (b - k)}{tang. C \times sin. k}$$

en deze vergelijking omkeerende, zoo heeft men:

$$tang. A = \frac{tang. C \times sin. k}{sin. (b - k)}$$

Het blijkt hieruit: dat de onbekende hoek A, door het stelsel van dezer twee vergelijkingen:

$$tang. k = cos. C \times tang. a;\ tang. A = \frac{tang. C \times sin. k}{sin. (b - k)} \quad . . (3)$$

zal kunnen berekend worden.

Om dezelfde reden, zal de onbekende hoek B, door de vergelijkingen:

$$tang. l = cos. C \times tang. b;\ tang. B = \frac{tang. C \times sin. l}{sin. (a - l)} \quad . . (4)$$

geheel afzonderlijk worden berekend. De teekens van de hulphoeken k en l zullen van de teekens van $cos. C$, $tang. a$ en $tang. b$ afhangen.

B. Om de onbekende zijde $AB = c$ eerst en afzonderlijk te berekenen; kan men aldus te werk gaan.

IV. Oplossing. Volgens de *XIV. Stelling*, is

$$cos. c = cos. C \times sin\ a \times sin. b + cos. a \times cos. b$$

Deze vergelijking kan aldus worden voorgesteld:

$$cos. c = cos. a \times [cos\ C \times tang. a \times sin. b + cos. b]$$

Men stelle, in deze vergelijking, $cos. C \times tang. a = tang. k = sin. k : cos. k$; dan verandert zij in deze:

$$cos.\ c = cos.\ a \times \left\{ \frac{sin.\ k \times sin.\ b + cos.\ b \times cos.\ k}{cos.\ k} \right\}.$$

dat is, zie *III. Stelling XI. B.* in de vergelijking

$$cos\ c = \frac{cos.\ a \times cos.\ (b - k)}{cos.\ k}$$

Men heeft dan, om de derde zijde c te vinden, dit stelsel van vergelijkingen:

$$tang.\ k = cos.\ C \times tang.\ a, \text{ en } cos.\ c = \frac{cos.\ a \times cos.\ (b - k)}{cos.\ k}. \quad (5)$$

omtrent welke formulen is op te merken, dat het teeken van k van de teekens van $cos.\ C$ en $tang.\ a$ afhangt, en, in plaats van $b - k$, moet genomen worden $b + k$, indien k negatief wordt.

V. Oplossing. Men deele dezelfde vergelijking

$$cos.\ c = cos.\ C \times sin.\ a \times sin.\ b + cos.\ a \times cos.\ b.$$

door $cos.\ b$; dan zal men verkrijgen:

$$cos.\ c = cos.\ b \times [cos.\ C \times tang.\ b \times sin.\ a + cos.\ a]$$

Stelt men nu $tang.\ l = cos.\ C \times tang.\ b = sin.\ l : cos.\ l$; dan zal men verkrijgen:

$$cos.\ c = \frac{cos.\ b \times cos.\ (a - l)}{cos.\ l}$$

Wij hebben dan, om de derde zijde c te vinden, nog deze twee andere vergelijkingen:

$$tang.\ l = cos.\ C \times tang.\ b, \text{ en } cos.\ c = \frac{cos.\ b \times cos.\ (a - l)}{cos.\ l}. \quad (6)$$

VI. Oplossing. Men kan de grond-formule

$$cos.\ c = cos.\ C \times sin.\ a \times sin.\ b + cos.\ a \times cos.\ b$$

door eerst $sin.\ a \times sin.\ b$ van het tweede lid af te trekken, en daarna bij hetzelve op te tellen, onder dezen vorm

$$cos.\ c = (1 + cos.\ C) \times sin.\ a \times sin.\ b + cos.\ a \times cos.\ b - sin.\ a \times sin.\ b$$

of, omdat $1 + cos.\ C = 2\ cos^2.\ \tfrac{1}{2} C$ is, onder dezen anderen vorm,

$$cos.\ c = cos.\ (a + b) + 2\ cos^2.\ \tfrac{1}{2} C \times sin.\ a \times sin.\ b \ \ldots \ (a)$$

voorstellen.

Trekt men nu deze vergelijking (a) van de identische vergelijking $1 = 1$ af; dan verkrijgt men:

$$1 - cos.\ c = 1 - cos.\ (a + b) - 2\ cos^2.\ \tfrac{1}{2} C \times sin.\ a \times sin.\ b$$

dat is, omdat, in het algemeen, $1 - sin.\ p = 2\ sin^2.\ \tfrac{1}{2} p$ is,

$$2\ sin^2.\ \tfrac{1}{2} p = 2\ sin^2.\ \tfrac{1}{2}(a + b) - 2\ cos^2.\ \tfrac{1}{2} C \times sin.\ a \times sin.\ b.$$

$$sin^2.\ \tfrac{1}{2} p = sin^2.\ \tfrac{1}{2}(a + b) - cos^2.\ \tfrac{1}{2} C \times sin.\ a \times sin.\ b$$

en, dan kan men deze laatste vergelijking aldus voorstellen:

$$sin^2.\ \tfrac{1}{2} p = sin^2.\ \tfrac{1}{2}(a + b) \times \left\{ 1 - \frac{cos^2.\ \tfrac{1}{2} C \times sin.\ a \times sin.\ b}{sin^2.\ \tfrac{1}{2}(a + b)} \right\}. \quad (b)$$

Het is nu ligtelijk te bewijzen: *dat het gebroken*

$$\frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}c \times \sin.a \times \sin.b}{\sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)}$$

altijd minder dan de éénheid is; want, omdat $\sin.a \times \sin.b = \tfrac{1}{2}\cos.(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos.(a+b)$ is, zoo is

$$\frac{\cos.\tfrac{1}{2}C \times \sin.a \times \sin.b}{\sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)} = \tfrac{1}{2}\cos^2.\tfrac{1}{2}C \times \frac{\cos.(a+b) - \cos.(a+b)}{1-\cos.(a+b)}$$

Nu is $\cos.(a-b) < 1$; derhalve $\cos.(a-b) - \cos.(a+b) < 1 - \cos.(a+b)$; het gebroken $[\cos.(a-b) - \cos.(a+b)] : [1 - \cos.(a+b)]$ is derhalve altijd kleiner dan de éénheid.

Men zal dan veilig kunnen stellen:

$$\sin^2.\phi = \frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}C \times \sin.a \times \sin.b}{\sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)} \quad ..$$

De vergelijking (b) wordt dan, door deze substitutie;

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}c = \sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b) \times (1-\sin^2.\phi) = \sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b) \times \cos^2.\phi$$

of $\sin.\tfrac{1}{2}c = \sin.\tfrac{1}{2}(a+b)\cos.\phi$

Men heeft dan, om de derde zijde c afzonderlijk te berekenen, deze twee vergelijkingen:

$$\sin.\phi = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}c \times \sqrt{\sin.a \times \sin.b}}{\sin.\tfrac{1}{2}(a+b)}, \text{ en } \sin.\tfrac{1}{2}c = \sin.\tfrac{1}{2}(a+b)\cos.\phi \ (7)$$

VII. Oplossing. Telt men de leden van de vergelijking (a), bij die der identische vergelijking $1 = 1$; dan verkrijgt men:

$$1 + \cos.c = 1 + \cos.(a+b) + \cos^2.\tfrac{1}{2}C \times \sin.a \times \sin.b$$

dat is, omdat $1 + \cos.r = 2\cos^2.\tfrac{1}{2}r$ is,

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b) + 2\cos^2.\tfrac{1}{2}C \times \sin.a \times \sin.b$$

eene vergelijking, welke onder dezen vorm kan gebragt worden:

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b) \times \left\{1 + \frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}C \times \sin.a \times \sin.b}{\cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b)}\right\} \quad . (c)$$

Men stelle, om deze laatste vergelijking verder te herleiden:

$$\tan g^2.k = \frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}C \times \sin.a \times \sin.b}{\cos^2.\tfrac{1}{2}(a-b)}$$

dan wordt de vergelijking (c):

$$\cos^2\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b) \times (1 + \tan g^2.k) = \frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos^2.k}$$

Wij hebben dan, om de derde zijde c afzonderlijk te berekenen, deze twee vergelijkingen:

$$\tan g.\chi = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}C\sqrt{\sin.a \sin b}}{\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)}, \text{ en } \cos.\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos.\chi} \quad . (8)$$

VIII. Oplossing. De grond-formule

$$\cos.c = \cos.C \times \sin.a \times \sin.b + \cos.a \times \cos.b$$

kan nog onder dezen vorm

$$\cos.c = \cos.a\cos.b + \sin.a\sin.b - (1-\cos.C)\sin.a\sin.b$$

worden voorgesteld; dat is, na verdere herleiding, onder den vorm:

$$cos.\, c = cos.\, (b - a) - 2\, sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b \ \ldots \ (d)$$

Men telle deze vergelijking bij de identifche vergelijking $1 = 1$; dan wordt

$$1 + cos.\, c = 1 + cos.\, (b - a) - 2\, sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b$$

of, na verdere herleiding,

$$cos^2.\, \tfrac{1}{2} c = cos^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a) - sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b$$

Men brenge verder deze vergelijking onder den vorm

$$cos^2.\, \tfrac{1}{2} c = cos^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a) \times \left\{ 1 - \frac{sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b}{cos^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a)} \right\}$$

Men kan gemakkelijk, zoo als in de *VI. Oplosfing*, bewijzen: dat het gebroken, in deze laatfte vergelijking voorkomende, minder dan één is. Stel derhalve:

$$sin^2.\, \psi = \frac{sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b}{cos^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a)}$$

dan verkrijgt men eindelijk:

$$cos^2.\, \tfrac{1}{2} c = cos^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a) (1 - sin^2.\, \psi) = cos^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a) \times cos^2.\, \psi$$

Men heeft gevolgelijk nog dit andere ftelfel van vergelijkingen,

$$sin.\, \psi = \frac{sin.\, \tfrac{1}{2} C \sqrt{sin.\, a\, sin.\, b}}{cos.\, \tfrac{1}{2} (b - a)}, \text{ en } cos.\, \tfrac{1}{2} c = cos.\, \tfrac{1}{2} (b - a)\, cos.\, \psi \ . \ (9)$$

IX. Oplossing. Indien men de leden der vergelijking (d) van de identifche vergelijking $1 = 1$ aftrekt; dan verkrijgt men:

$$1 - cos.\, c = 1 - cos.\, (b - a) + 2\, sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b$$

$$sin^2.\, \tfrac{1}{2} c = sin^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a) + sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b$$

$$sin^2.\, \tfrac{1}{2} c = sin^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a) \times \left\{ 1 + \frac{sin^2.\, \tfrac{1}{2} C\, sin.\, a\, sin.\, b}{sin^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a)} \right\}$$

Men ftelle dan, om deze verder te herleiden,

$$tang^2.\, \omega = \frac{sin^2.\, C \times sin\ a \times sin\ b}{sin^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a)}$$

dan wordt eindelijk:

$$sin^2.\, \tfrac{1}{2} c = sin^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a) \times (1 + tang^2.\, \omega) = \frac{sin^2.\, \tfrac{1}{2} (b - a)}{cos^2.\, \omega}$$

Uit deze herleiding volgen dan, om de onbekende zijde te berekenen, deze formulen:

$$tang.\, \omega = \frac{sin.\, \tfrac{1}{2} C \sqrt{sin.\, a \times sin.\, b}}{sin.\, \tfrac{1}{2} (b - a)}, \text{ en } sin.\, c = \frac{sin.\, \tfrac{1}{2} (b - a)}{cos\ \omega} \quad (10)$$

X. Oplossing. Wij hebben, in de *VIII. Oplosfing*, gevonden:

$$cos\ c = cos.\, (b - a) - 2\, sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times sin.\, a \times sin.\, b$$

Nu is $cos.\, (b-a) = cos.\, (b-a) \times 1 = cos.\, \tfrac{1}{2} (b-a) \times (sin^2.\, \tfrac{1}{2} C + cos^2.\, \tfrac{1}{2} C)$

$$2\, sin.\, a \times sin.\, b = cos.\, (b - a) - cos.\, (b + a)$$

de geftelde vergelijking kan dan den vorm

$$cos.\, c = cos.\, (b - a) \times (sin^2.\, \tfrac{1}{2} C + cos^2.\, \tfrac{1}{2} C) - sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times cos.\, (b - a) + sin^2.\, \tfrac{1}{2} C \times cos.\, (a + b)$$

aannemen, welke, bij nadere ontwikkeling, zal worden,

$$cos.\,c = cos.\,(a+b) \times sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + cos.\,(b-a) \times cos^2.\,C \;.\; (e)$$

Deze vergelijking, welke eene fraaije eigenschap der bolvormige driehoeken voorstelt, is nog verder herleidbaar.

Men trekke de vergelijking (e) af van

$$1 = sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + cos^2.\,\tfrac{1}{2}C$$

dan verkrijgt men:

$$1 - cos.\,c = [1 - cos.\,(a+b)] \times sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + [1 - cos.\,(b-a)] \times cos^3.\,\tfrac{1}{2}C$$

eene vergelijking, waarvoor men klaarblijkelijk schrijven kan:

$$sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)\, sin^2.\,\tfrac{1}{2}C + sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)\, cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \;.\; (f)$$

welke vergelijking wederom eene nieuwe eigenschap der bolvormige driehoeken voorstelt.

Men kan deze laatste vergelijking (f), onder de volgende gedaante, voorstellen:

$$sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)\, sin^2.\,\tfrac{1}{2}C \;\ldots\; \times \left\{1 + \frac{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)}{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b+a)} \times cot^2.\,\tfrac{1}{2}C\right\} \;\ldots\; (\alpha)$$

en ook nog, onder deze andere gedaante,

$$sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = sin^2.\,(b-a)\, cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \;\ldots\; \times \left\{1 + \frac{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)}{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)} \times tang^2.\,\tfrac{1}{2}C\right\} \;\ldots\; (\beta)$$

Men stelle, in deze twee vergelijkingen (α) en (β),

$$tang^2.\,m = \frac{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)}{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b+a)} \times cot^2.\,\tfrac{1}{2}C$$

dan wordt van zelf

$$cot^2.\,m = \frac{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b+a)}{sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)} \times tang^2.\,\tfrac{1}{2}C$$

en de twee vergelijkingen (α) en (β) veranderen dan in de twee volgende:

$$sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = sin^2.\,\tfrac{1}{2}(a+b)\, sin^2.\,\tfrac{1}{2}C \times (1 + tang^2.\,m)$$

$$sin^2.\,\tfrac{1}{2}c = sin^2.\,\tfrac{1}{2}(b-a)\, cos^2.\,\tfrac{1}{2}C \times (1 + cot^2.\,m)$$

Stelt men nu $1 + tang^2.\,m = sec^2.\,m$ en $1 + cot^2.\,m = cosec^2.\,m$; dan worden zij, na er den vierkants-wortel uit getrokken te hebben:

$$sin.\,\tfrac{1}{2}c = sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b)\, sin.\,\tfrac{1}{2}C \times sec.\,m$$

$$sin.\,\tfrac{1}{2}c = sin.\,\tfrac{1}{2}(b-a)\, cos.\,\tfrac{1}{2}C \times cosec.\,m$$

Wij hebben dan, om de onbekende zijde c te vinden, dit stelsel van vergelijkingen:

$$tang.\,m = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(b-a)}{sin.\,\tfrac{1}{2}(b+a)} \times cot.\,\tfrac{1}{2}C \;\ldots\; (11)$$

$$sin.\,\tfrac{1}{2}c = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(a+b)\, sin.\,\tfrac{1}{2}C}{cos.\,n} = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(b-a) \times cos.\,\tfrac{1}{2}C}{sin.\,m}$$

XI. Oplossing. Wanneer men de leden van vergelijking (e) optelt, bij de vergelijking

1 =

$$1 = \sin^2.\tfrac{1}{2}C + \cos^2.\tfrac{1}{2}C$$

dan verkrijgt men:

$$1+\cos.c = [1+\cos.(a+b)] \times \sin^2.\tfrac{1}{2}C + [1+\cos.(b-a)] \times \cos^2\tfrac{1}{2}C$$

voor welke vergelijking kan gefchreven worden:

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b) \times \sin^2.\tfrac{1}{2}C + \cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a) \times \cos^2.\tfrac{1}{2}C \quad (g)$$

Men kan aan deze vergelijking (g) wederom deze twee vormen geven:

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b)\sin^2.\tfrac{1}{2}C \;\ldots\ldots$$
$$\times \left\{1 + \frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos^2.\tfrac{1}{2}(b+a)} \times \cot^2.\tfrac{1}{2}C\right\} \;\ldots\ldots\; (\gamma)$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a)\cos^2.C \;\ldots\ldots$$
$$\times \left\{1 + \frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}(b+a)}{\cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a)} \times \text{tang}^2.\tfrac{1}{2}C\right\} \;\ldots\; (\delta)$$

Stel men nu, om deze te vereenvoudigen:

$$\text{tang}.n = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)} \times \cot.\tfrac{1}{2}C$$

dan worden de vergelijkingen (γ) en (δ),

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b)\sin^2.\tfrac{1}{2}C \times (1+\text{tang}^2.n)$$
$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a)\cos^2.\tfrac{1}{2}C \times (1+\cot^2.n)$$

waaruit dan ligtelijk te zien is, dat de onbekende zijde door deze twee vergelijkingen:

$$\text{tang}.n = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)}{\cos.\tfrac{1}{2}(b+a)} \times \cot.\tfrac{1}{2}C \;\ldots\; (12)$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(a+b) \times \sin.\tfrac{1}{2}C}{\cos.n} = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b-a) \times \cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.n}$$

zal kunnen berekend worden.

Wanneer men, door ééne dezer laatste oplossingen, de onbekende zijde c gevonden heeft; dan zal men de onbekende hoeken A en B, zie *XIII. Stelling*, door de twee onderstaande formulen:

$$\sin.\tfrac{1}{2}(B+A) = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(b-a) \times \cos.\tfrac{1}{2}C}{\cos.\tfrac{1}{2}c} \;\ldots\; (13)$$

$$\sin.\tfrac{1}{2}(B-A) = \frac{\sin.\tfrac{1}{2}(b-a) \times \cos.\tfrac{1}{2}C}{\sin.\tfrac{1}{2}c}$$

kunnen vinden.

§. 1209. AANMERKING. Wanneer men de oplossing van dit geval der bolvormige driehoeken vergelijkt met het *III. Geval* der regtlijnige, in het *VII. Vraagstuk* van het *XII. B.* behandeld; dat loopt wederom de overeenstemming tusschen de bolvormige en de regtlijnige driehoeken, merkelijk in het oog.

Beschouwen wij de vergelijking (f); namelijk

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}c = \sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)\sin^2.\tfrac{1}{2}C + \sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a)\cos^2.\tfrac{1}{2}C$$

Stellen wij, dat de zijden van den bolvormigen driehoek zeer klein zijn; dan is $sin.\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}c$, $sin.\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}(a+b)$, $sin.\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{2}(b-a)$; gevolgelijk is $sin^2.\frac{1}{2}c = \frac{1}{4}c^2$; $sin^2.\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{4}(a+b)^2$ en $sin^2.\frac{1}{2}(b-a) = \frac{1}{4}(b-a)^2$; de voorgestelde vergelijking wordt dan, in die onderstelling, na dat men al de termen met vier vermenigvuldigd heeft,

$$c^2 = (a+b)^2 \times sin^2.\tfrac{1}{2}C + (b-a) \times cos^2.\tfrac{1}{2}C$$

en deze is de vergelijking (a), welke wij, op *Bladz.* 138, gevonden hebben.

X. Vraagstuk. IV. Geval. *Fig.* 106.

§. 1210. *Eéne zijde, met de aangelegene hoeken, van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de formulen te vinden, waardoor de twee onbekende zijden en de onbekende hoeken kunnen berekend worden?*

Wij stellen de zijde c, met de aanliggende hoeken A en B, gegeven te zijn, en zullen eerst de onbekende zijden a en b, en daarna den onbekenden hoek C afzonderlijk leeren zoeken.

A. Om de onbekende zijden te zoeken, kan men zich van ééne der volgende manieren van oplossen bedienen; welke wij, alzoo in dezelve dezelfde volgorde bestaat, en zij uit overeenstemmende formulen worden afgeleid, slechts zullen opgeven; de geheele omstandige ontwikkeling van dezelve aan den Lezer overlatende.

I. Oplossing. Men vindt, uit de vergelijking (24) der algemeene tafel, *Bladz.* 250, en uit de regthoekige driehoeken ACD en BCD, de volgende vergelijkingen:

$$tang.R = tang.\tfrac{1}{2}c \times \frac{sin.(B-A)}{sin.(B+A)} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$cot.b = cos.A \times cot.(\tfrac{1}{2}c + R), \text{ en } cot.a = cos.B \times cot.(\tfrac{1}{2}c - R)$$

II. Oplossing. Men zal, uit de Neperiaansche analogiën, of vergelijkingen (27) en (28), vinden:

$$tang.M = tang.\tfrac{1}{2}c \times \frac{sin.\frac{1}{2}(B-A)}{sin.\frac{1}{2}(B+A)}$$

$$tang.N = tang.\tfrac{1}{2}c \times \frac{cos.\frac{1}{2}(B-A)}{cos.\frac{1}{2}(B+A)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$b = N + M \text{ en } a = N - M$$

III. Oplossing. Uit de vergelijking

$$cot.a = \frac{cot.A \times sin.B}{sin.c} + cos.B \times cot.c$$

welke in de *XVI. Stelling* betoogd is, zal men, even als in de *III. Oplossing* van het voorgaande *Vraagstuk*, vinden:

cot. K

$$\cot.K = \tang.A \times \cos.c,\ \text{en}\ \tang.a = \frac{\tang.c \times \cos.K}{\cos.(B-K)} \quad \ldots (3)$$

en, om dezelfde reden, zal men kunnen stellen:

$$\cot.L = \tang.B \times \cos.c,\ \text{en}\ \tang.b = \frac{\tang.c \times \cos.L}{\cos.(A-L)} \quad \ldots (4)$$

B. Om de onbekenden hoek C afzonderlijk te vinden, kan men aldus te werk gaan:

IV. Oplossing. Uit de algemeene grond-formule

$$\cos.C = \cos.c \times \sin.A \times \sin.B - \cos.A \times \cos.B$$

zal volgen:

$$\cot.K = \tang.A \times \cos.c,\ \text{en}\ \cos.C = \frac{\cos.A \times \sin.(B-K)}{\sin.K} \quad . (5)$$

V. Oplossing. Een dergelijke herleiding zal geven;

$$\cot.L = \tang.B \times \cos.c,\ \text{en}\ \cos.C = \frac{\cos.B \times \sin.(A-L)}{\sin L} \quad . (6)$$

Men zal, de handelwijze van het voorgaande *Vraagstuk* volgende, de vergelijking $\cos.C = \cos.c \times \sin.A \times \sin.B - \cos.A \times \cos.B$, onder de volgende vormen, kunnen brengen:

$$\cos.C = -\cos.(A+B) - 2\sin^2.\tfrac{1}{2}c \times \sin.A \times \sin.B \quad . . (a)$$

$$\cos.C = -\cos.(B-A) + 2\cos^2.\tfrac{1}{2}c \times \sin.A \times \sin.B \quad . . (b)$$

uit welke twee vergelijkingen, de volgende oplossingen worden afgeleid.

VI. Oplossing. Uit de vergelijking (a) volgt:

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}C = \sin^2.\tfrac{1}{2}(A+B) - \sin^2.\tfrac{1}{2}c \times \sin.A \times \sin.B$$

en deze geeft dan de oplossing:

$$\sin.\varphi = \frac{\sin.\frac{1}{2}c\sqrt{\sin.A \times \sin.B}}{\sin.\frac{1}{2}(A+B)};\ \cos.\tfrac{1}{2}C = \sin.\tfrac{1}{2}(A+B) \times \cos.\varphi \quad (7)$$

VII. Oplossing. Dezelfde vergelijking (a) geeft nog,

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}C = \cos^2.\tfrac{1}{2}(A+B) + \sin^2.\tfrac{1}{2}c \times \sin.A \times \sin.B$$

en uit deze volgt de oplossing:

$$\tang.\chi = \frac{\sin.\frac{1}{2}c\sqrt{\sin.A \times \sin.B}}{\cos.\frac{1}{2}(A+B)};\ \sin.\tfrac{1}{2}C = \frac{\cos.\frac{1}{2}(A+B)}{\cos.\chi} \quad (8)$$

VIII. Oplossing. Uit de vergelijking (b) volgt:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}C = \cos^2.(B-A) - \cos^2.\tfrac{1}{2}c \times \sin.A \times \sin.B$$

waaruit dan verder volgt:

$$\sin.\psi = \frac{\cos.\frac{1}{2}c\sqrt{\sin.A \times \sin.B}}{\cos.\frac{1}{2}(B-A)};\ \sin.\tfrac{1}{2}C = \cos.\tfrac{1}{2}(B-A) \times \cos.\psi \quad (9)$$

IX. Oplossing. Dezelfde vergelijking (b) geeft nog,

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}C = \sin^2.\tfrac{1}{2}(B-A) + \cos^2.\tfrac{1}{2}c \times \sin.A \times \sin.B$$

en deze vergelijking geeft dan:

$$\tang.\omega = \frac{\cos.\frac{1}{2}c\sqrt{\sin.A \times \sin B}}{\sin.\frac{1}{2}(B-A)};\ \cos.\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin.\frac{1}{2}(B-A)}{\cos.\omega} \quad . (10)$$

Uit

Uit ééne der twee vergelijkingen (p) en (q), zal men, op dezelfde wijze, als in het voorgaande Vraagstuk, vinden:

$$cos.\,C = -cos.\,(A+B) \times cos^2.\,\tfrac{1}{2}c - cos.\,(B-A) \times sin.\,\tfrac{1}{2}c \;.\;.\; (c)$$

Uit welke dan wederom de twee volgende algemeene formulen

$$sin^2.\,\tfrac{1}{2}C = cos^2.\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}c + cos^2.\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}c \quad (d)$$

$$cos^2.\,\tfrac{1}{2}C = sin^2.\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,cos^2.\,\tfrac{1}{2}c + sin^2.\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}c \quad (e)$$

zullen volgen.

X. OPLOSSING. Uit de vergelijking (d) zal volgen:

$$tang.\,N = tang.\,\tfrac{1}{2}c \times \frac{cos.\,\tfrac{1}{2}(B-A)}{cos.\,\tfrac{1}{2}(B+A)} \;.\;.\;.\; (11)$$

$$sin.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,cos.\,\tfrac{1}{2}c}{cos.\,N} = \frac{cos.\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,sin.\,c}{sin.\,N}$$

XI. OPLOSSING. En, uit de vergelijking (e), zal men vinden:

$$tang.\,M = tang.\,\tfrac{1}{2}c \times \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(B-A)}{sin.\,\tfrac{1}{2}(B+A)} \;.\;.\;.\; (12)$$

$$cos.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(A+B)\,cos.\,\tfrac{1}{2}c}{cos.\,M} = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(B-A)\,sin.\,\tfrac{1}{2}c}{sin.\,M}$$

Wanneer men den onbekenden hoek berekend heeft; dan zal men de onbekende zijden, zie XIII. *Stelling*, door de formulen

$$cos.\,\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B) \times cos.\,\tfrac{1}{2}c}{sin.\,C}$$

$$cos.\,\tfrac{1}{2}(b-a) = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(A+B) \times cos.\,\tfrac{1}{2}c}{cos.\,\tfrac{1}{2}}$$

verkrijgen.

XI. VRAAGSTUK. V. GEVAL. *Fig.* 106.

§. 1211. *Van eenen bolvormigen driehoek twee zijden, met éénen hoek, over ééne dezer bekende zijden staande, gegeven zijnde, de formulen te vinden, waardoor de onbekende zijde, benevens de twee onbekende hoeken, berekend kunnen worden?*

Dit vijfde en het volgende zesde geval, bij de Schrijvers gewoonlijk de *twijfelachtige gevallen* genoemd, verdienen, alvorens wij derzelver onderscheidene oplossingen voordragen, eene meer bijzondere overweging.

Laten de zijden a en b, benevens de hoek A, welke, tegen over de zijde A staat, gegeven zijn. Het valt terstond in het oog: dat (*X. Stell.*) $sin.\,a : sin.\,b = sin.\,A : sin.\,B$ is, en dat derhalve de onbekende hoek B, door de vergelijking

$$sin.\,B = \frac{sin.\,b \times sin.\,A}{sin.\,a}$$

kan gevonden worden. Daar nu eenige sinus tot twee bogen, eenen scherpen, die in de tafel gevonden wordt, en eenen stompen boog, die

die het fuppement des eerften is, behoort, fchijnt dit geval altijd twee oplosfingen te hebben; dat is, het fchijnt, dat twee driehoeken kunnen zamengefteld worden, welke elk de gegevene zijden en den gegevenen hoek hebben. Dat zulks nu niet altijd plaats heeft, zal uit de volgende befchouwingen blijken.

Laten, *fig.* 108, *ABD* en *ACD*, twee groote cirkels zijn, die elkander, volgens de middellijn, *AD*, fnijden, en eenen hoek *BAC* maken, die gelijk is aan den gegevenen hoek van den gevraagden driehoek. Indien men dan $AC = b$ neemt, en uit *C*, als aspunt, met de koorde van de gegevene zijde, *a*, op het oppervlak van den bol, eenen cirkel befchrijft; dan zal men de volgende omftandigheden, als zoo vele mogelijke gevallen, kunnen opmerken.

1°. Zal de boog *a* zoo klein kunnen gegeven zijn: dat die kleine cirkel geheel boven den grooten cirkel *ABD* gelegen is, en denzelven niet fnijden kan: in dit geval, beftaat er geen driehoek, welke de gegevene zijden en den gegeven hoek heeft.

2°. Zal de boog *a* ook zoo groot kunnen gegeven zijn, dat de kleine cirkel, uit *C* befchreven, geheel beneden den grooten cirkel *ABD* valt, in welk geval, er ook geen driehoek, onder de gegevens, kan zamengefteld worden.

Beide deze omftandigheden worden kenbaar door de berekening der vergelijking $sin.\ B = sin\ A \times sin.\ b : sin.\ a$; wanneer namelijk, $sin.\ A \times sin.\ b > sin.\ a$ zijnde, $sin.\ B$ grooter dan de éénheid wordt; hoedanig eene finus onmogelijk is. Wanneer derhalve $sin.\ A \times sin.\ b > sin.\ a$ is, blijkt daaruit: dat de cirkel, die uit *C*, met den boog *a*, befchreven wordt, of boven of beneden den grooten cirkel *ABD* ligt, en dat de gegevens met eenigen bolvormigen driehoek geheel onbeftaanbaar zijn.

3°. De cirkel, die, uit *C*, met de koorde van den boog *a*, befchreven wordt, kan den cirkel *ABD*, in deszelfs eerfte helft, in een punt *B* aanraken: maar dan ftaat de boog *CB* of *a* loodregt op *ABD*, en de driehoek *ABC* is regthoekig in *B*; $sin.\ B$ is dan $= 1$, en $sin.\ A \times sin.\ b = sin.\ a$; hetgeen met de bekende eigenfchap van den regthoekigen bolvormigen driehoek overeenkomt. Er is, in dit geval, flechts ééne oplosfing, welke de berekening en de conftructie beide geven.

4°. Maar dezelfde kleine cirkel kan den grooten cirkel *ABD*, in deszelfs tweede helft *AFGD*, in een punt *G* aanraken: en, in dit geval, zal $sin.\ B = 1$ en $sin.\ A \times sin.\ b = sin.\ a$ zijn. De berekening fchijnt hier, in den eerften opflag, een regthoekigen bolvormigen driehoek te geven: doch, de conftructie geeft dien niet: deze geeft wel een regthoekigen bolvormigen driehoek, welke de gegevene zijden heeft; doch, de hoek *CAF* is het fupplement van den gegeven hoek *A*. De reden nu, waarom de berekening deze omftandigheid niet leert kennen, is eenvoudig hierin gelegen: dat de $sin.\ B$, welke, in de berekening van de vergelijking gebruikt wordt, ook tevens de finus van het fupplement van dien hoek zijnde, het onderfcheid tusfchen den hoek *BAC* en zijn fupplement niet uitdrukt.

5°. In-

5°. Indien $a = 90°$ is; dan zal de cirkel, welke, uit C, als aspunt, met de koorde van a beschreven wordt, een groote cirkel zijn, welke den grooten cirkel ABD, in twee middellijnig tegen over elkander staande punten, snijden zal. In dit geval, heeft de driehoek ABC de regte zijde $BC = 90°$; en, omdat $sin.\ a = 1$ is, zal $sin.\ B = sin.\ A \times sin.\ b$ zijn, en er is dan slechts ééne oplossing.

6°. Nemen wij dat de hoek BAC scherp is; indien dan de cirkel, die met de koorde van den boog a, uit het aspunt C, beschreven wordt, de eerste helft van den grooten cirkel ABD in twee punten B en E snijdt; dan zullen er twee driehoeken ABC en AEC op de gegevens passen, welke ook, door de berekening van de vergelijking voor $sin.\ B$, zullen gevonden worden, wanneer men voor den hoek, welke tot die sinus behoort, zoowel dien hoek als zijn supplement neemt. Nu blijkt het, uit de beschouwing der figuur, dat de boog a grooter moet zijn dan de kleinste der loodregte bogen, welke uit C op het vlak van den cirkel ABD vallen, en kleiner dan de grootste dezer bogen, en dat bijgevolg het kleinste gedeelte van den kleinen cirkel beneden, en deszelfs grootste deel boven het vlak van den cirkel ABD valt; zoodat de kleine cirkel de bogen AC en CD snijden zal; waaruit dan volgt: dat de boog a kleiner dan b, en tevens kleiner dan zijn supplement $180° - b$ zal zijn.

7°. Blijft nog BAC scherp; dan zal a zoodanig kunnen gegeven zijn: dat gezegde kleine cirkel de tweede helft $AFGD$ van den grooten cirkel ABD, in twee punten F en G, snijdt: in dit geval, ligt de grootste helft van den kleinen cirkel beneden den grooten cirkel ABD, en snijdt de bogen AC en CD in derzelver verlengde. Er bestaan, in dit geval, geen driehoeken, op welke de gegevens passen. De vergelijking op $sin.\ B$, schijnt nogtans in dit geval (als analytisch bestaanbaar zijnde,) twee oplossingen te geven: doch de omstandigheid, bij welke a grooter is dan b, en tevens grooter dan $180° - b$, bewijst: dat, hoezeer de vergelijking in zich zelve bestaanbaar is, er nogtans geene driehoeken bestaan, op welke de gegevens passen.

8°. Onder dezelfde omstandigheid, dat $BAC < 90°$ is, zal a nog zoodanig kunnen gegeven zijn: dat de kleine cirkel, uit C beschreven, den grooten cirkel ABD in twee punten B en F snijdt. In dit geval, bestaat er slechts één driehoek ABC, op welke de gegevens passen: doch de kleine cirkel zal, in dit geval, het verlengde van AC beneden A en CD boven D snijden, en a zal alzoo $> b$ en $< 180° - b$ zijn. Ook zal B van dezelfde soort als b zijn.

9°. Het geval, waarin hoek $BAC = 90°$ is, behoort tot de regthoekige driehoeken.

10°. Wanneer de hoek BAC stomp en a zoodanig gegeven is: dat de kleine cirkel, die, uit C, beschreven wordt, den grooten cirkel ABD, in de eerste helft, in twee punten B en E, snijdt; dan ligt de kleinste helft van den kleinen cirkel boven, en de grootste helft beneden het vlak

vlak van den cirkel $ABED$, en snijdt het verlengde van de bogen AC en CD, beneden het vlak van dien grooten cirkel. In dit geval, bestaan er twee driehoeken, die aan de gegevens voldoen: maar nu is de zijde a grooter dan de zijde b, en grooter dan zijn supplement $180^\circ - b$.

11°. In dezelfde onderstelling, dat hoek $BAC > 90^\circ$ is, zal a zoodanig kunnen gegeven zijn: dat de kleine cirkel, uit C beschreven, de tweede helft van den grooten cirkel ABD in de punten F en G snijdt. In dit geval, ligt de grootste helft van den kleinen cirkel boven het vlak van den grooten cirkel ABD, en snijdt de bogen AC en CD boven hetzelfde vlak. Er zijn, hoezeer de vergelijking voor $sin. B$ analytisch bestaanbaar is, geene driehoeken, welke op de gegevens passen: maar de omstandigheid, bij welke a kleiner is dan b en teveus kleiner dan $180^\circ - b$, doet de onbestaanbaarheid der gegevens kenbaar worden.

12°. Eindelijk kan, terwijl de hoek $BAC > 90^\circ$ is, de kleine cirkel, die uit C beschreven wordt, den grooten cirkel ABD, in twee punten B en F, snijden. In dit geval, zal slechts één driehoek bestaanbaar zijn: en nu zal de kleine cirkel den boog AC, beneden A en CD boven D, snijden, en a zal $> b$ en $< 190^\circ - b$ zijn. Ook zullen wederom B en b van dezelfde soort zijn.

13°. In het 8°. en 12°. geval, is stilzwijgend ondersteld, dat $AC = b$ kleiner dan 90° is; en, in deze gevallen, is $a > b$ en $< 180^\circ - b$: maar indien $AC > 90^\circ$ genomen wordt; dan zal, in die gevallen $a < b$ en $> 180^\circ - b$ zijn.

Trekken wij dit alles te zamen: dan kan men, in de berekening van dit vijfde geval, het volgende tot eenen vasten regel aannemen.

1°. *Indien de vergelijking* $sin. B = sin. A \times sin\ b : sin. a$ *analytisch onbestaanbaar is; dan zal er ook geen driehoek bestaan, op welken de gegevens passen.*

2°. *Is de vergelijking* $sin. B = sin. A \times sin. b : sin. a$ *bestaanbaar; dan zal,*

a) $A < 90^\circ$ *en* $a > b$, *benevens* $a > 180^\circ - b$

b) $A > 90^\circ$ *en* $a < b$, *benevens* $a < 180^\circ - b$

zijnde, geen driehoek op de gegevens passen.

3°. *Maar is*

a) $A > 90^\circ$ *en* $a > b$, *benevens* $a > 180^\circ - b$

b) $A < 90^\circ$ *en* $a < b$, *benevens* $a < 180^\circ - b$

dan bestaan er twee driehoeken, waarop de gegevens toepasselijk zijn.

4°. *Is eindelijk* $a >$ *of* $< b$ *en* $a <$ *of* $> 180^\circ - b$; *dan bestaat er slechts één driehoek, die aan de gegevens voldoet. In dit geval, is de oplossing niet meer twijfelachtig, en de hoek B is dan altijd van dezelfde soort, als de zijde b.*

5°. *In*

5°. *In alle gevallen, beslist nog bovendien de regel, waar bij de som der overstaande hoeken altijd van dezelfde soort moet zijn, als de som der zijden, tegen over welke zij staan,* (*zie II. Gev. X. St.*) *alle de bovengenoemde omstandigheden.*

Na deze ophelderingen, tot de oplossing van het geval zelve overgaande, zullen wij a en b, benevens den hoek A, als bekend aannemen; en de formulen voor de berekening der hoeken B en C en de zijde c elk afzonderlijk leeren vinden.

A. Om den hoek B, welke tegen over de zijde b staat, te vinden, heeft men de volgende oplossingen.

I. OPLOSSING. Volgens de *X. Stell.*, wordt de hoek B door de formule

$$\sin. B = \sin. A \times \sin. b : \sin. a \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

gevonden.

II. OPLOSSING. Stellen wij, in de zoo even bijgebragte vergelijking, $\sin. A \times \sin. b = \sin. \phi$; dan wordt $\sin. B = \sin. \phi : \sin. a$, waaruit onmiddellijk volgt:

$$\frac{1 - \sin. B}{1 + \sin. B} = \frac{\sin. a - \sin. \phi}{\sin. a + \sin. \phi} = \frac{\tang. \frac{1}{2}(a - \phi)}{\tang. \frac{1}{2}(a + \phi)}$$

dat is, zie *II. Gev. X. Stell. XI. B.*,

$$\tang. (45^\circ - \tfrac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{\tang. \frac{1}{2}(a - \phi)}{\tang. \frac{1}{2}(a + \phi)}}$$

Wanneer men nu $45^\circ - \frac{1}{2}B = \psi$ stelt; dan zal $B = 90^\circ \pm 2\psi$ zijn; en men heeft dan, om den hoek B te vinden, de volgende formulen:

$$\sin. \phi = \sin. A \times \sin. b; \ \tang. \psi = \pm \sqrt{\frac{\tang. \frac{1}{2}(a - \phi)}{\tang. \frac{1}{2}(a + \phi)}}$$

$$\text{en} \ \ldots \ B = 90^\circ \mp 2\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Dit stelsel van vergelijkingen, zal den hoek B, indien hij niet veel van 90° verschilt, met grootere naauwkeurigheid doen bekend worden.

III. OPLOSSING. Men stelle, in dezelfde vergelijking, $\sin. A \times \sin. b = \tang. m$, en $\sin. a = \tang. n$; dan zal $\sin. B = \tang. m : \tang. n$ zijn, waaruit dadelijk volgen zal,

$$\frac{1 - \sin. B}{1 + \sin. B} = \frac{\tang. n - \tang. m}{\tang. n + \tang. m} = \frac{\sin. (n - m)}{\sin. (n + m)}$$

en verder, zie *II. Gev. X. Stell. XI. B.*,

$$\tang. (45^\circ - \tfrac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{\sin. (n - m)}{\sin. (n + m)}}$$

zoodat men ook den hoek B, door het volgende stelsel van vergelijkingen, zal kunnen vinden:

$$\tang. n = \sin. a; \ \tang. m = \sin. A \times \sin. b; \ \tang. \omega = \pm \sqrt{\frac{\sin. (n - m)}{\sin. (n + m)}}$$

$$\text{en} \ \ldots\ldots \ B = 90^\circ \mp 2\omega \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

 Wel-

Welke oplossing, ingevalle de waarde van den hulphoek ϕ, in de tweede oplossing, weinig van 90° verschillen mogt, eene meerdere naauwkeurigheid voor de waarde van B verzekert.

IV. Oplossing. Men vindt, uit de vergelijking van de eerste oplossing,

$$1 - sin. B = 1 - cos.(90^\circ - B) = \frac{sin. a - sin. A \times sin. b}{sin. a}$$

dat is, (*II. Gev. III. Stell. XI. B.*) $sin. A \times sin. b = sin. \phi$ stellende,

$$sin.(45^\circ - \tfrac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{sin. a - sin. \Phi}{2\, sin. a}}$$

of eindelijk, zie *VI. Stell. XI. B.*,

$$sin.(45^\circ - \tfrac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{sin. \tfrac{1}{2}(a - \Phi) \times cos. \tfrac{1}{2}(a + \Phi)}{sin. a}}$$

Zoodat men, stellende, $45^\circ - \tfrac{1}{2} B = \pm \chi$, hebben zal:

$$sin. \Phi = sin. A \times sin. b;\; sin. \chi = \sqrt{\frac{sin. \tfrac{1}{2}(a - \Phi) \times cos. \tfrac{1}{2}(a + \Phi)}{sin. a}}$$

$$\text{en} \quad \dots \quad B = 90^\circ \mp 2\chi \quad \dots\dots \quad (4)$$

V. Oplossing. Bij dezelfde vergelijking, in de eerste oplossing gevonden, de éénheid optellende, zoo zal men vinden:

$$sin. \Phi = sin. A \times sin. b;\; cos. \chi = \pm \sqrt{\frac{sin. \tfrac{1}{2}(a + \Phi) \times cos. \tfrac{1}{2}(a - \Phi)}{sin. a}}$$

$$\text{en} \quad \dots \quad B = 90^\circ \mp 2\chi \quad \dots\dots \quad (5)$$

Wanneer, door ééne der voorgaande oplossingen, de hoek B gevonden is, zal men den anderen onbekenden hoek, benevens de onbekende zijde, welke tegen over denzelven staat, door de Neperiaansche Analogien (25), (26), (27) en (28), zie *XII. Stell.* kunnen vinden; want uit dezelve volgt:

$$tang. \tfrac{1}{2} C = cot. \tfrac{1}{2}(B - A) \times \frac{sin. \tfrac{1}{2}(b - a)}{sin. \tfrac{1}{2}(b + a)}$$

$$tang. \tfrac{1}{2} C = cot. \tfrac{1}{2}(B + A) \times \frac{cos. \tfrac{1}{2}(b - a)}{cos. \tfrac{1}{2}(b + a)}$$

$$tang. \tfrac{1}{2} c = tang. \tfrac{1}{2}(b - a) \times \frac{sin. \tfrac{1}{2}(B + A)}{sin. \tfrac{1}{2}(B - A)}$$

$$tang. \tfrac{1}{2} c = tang. \tfrac{1}{2}(b + a) \times \frac{cos. \tfrac{1}{2}(B + A)}{cos. \tfrac{1}{2}(B - A)}$$

In het werkdadige, zullen deze formulen tot eene bevestiging van de gevondene waarde van B verstrekken; welke waarde van B nogtans ten scherpste zal moeten berekend worden, om eene voldoende overeenstemming tusschen de eerste en tweede, en tusschen de derde en vierde formulen te verkrijgen. Wanneer de gegevens twee oplossingen medebrengen; dan zullen de twee waarden van C en c, naar elke bijzondere waarde van B, afzonderlijk moeten berekend worden.

I. Voor-

I. VOORBEELD. *Gegeven zijnde*, $A = 63^\circ\ 18'\ 20''$, $a = 65^\circ\ 33'\ 40''$, $b = 78^\circ\ 20'\ 30''$; *de hoeken B en C, benevens de zijde c, te vinden?*

Is dit voorbeeld, is de hoek A fcherp, en de zijde a kleiner dan b, en tevens kleiner dan $180^\circ - b$: er zijn derhalve twee oplosfingen. Men zal namelijk vinden:

$$B = 73^\circ\ 57'\ 55'',2 \qquad B = 106^\circ\ 2'\ 4'',7$$
$$C = 102^\circ\ 53'\ 32'',4 \qquad C = 33^\circ\ 19'\ 10''.4$$
$$c = 96^\circ\ 37'\ 24'',2 \qquad c = 34^\circ\ 2'\ 17'',2$$

Dat nu op deze gegevens twee oplosfingen pasfen, blijkt, zoodra men de hoeken B gevonden heeft; want elke waarde van B geeft de fom der hoeken A en B kleiner dan 180°; vermits nu de fom der overftaande zijden a en b insgelijks kleiner dan 180° is, wordt er, in geene dezer twee oplosfingen, eene tegenftrijdigheid gevonden.

II. VOORBEELD. *Gegeven zijnde* $a = 76^\circ\ 36'$, $b = 50^\circ\ 61'$, *en* $A = 121^\circ\ 52'$; *de hoeken B en C, benevens de zijde c, te vinden?*

In dit voorbeeld, is $a > b$ en $< 180^\circ - b$; er zal gevolgelijk flechts één driehoek op de gegevens pasfen. Men zal vinden $B = 42^\circ\ 10'30''$; $C = 33^\circ\ 56'30'',1$; en $c = 39^\circ\ 54'26'',6$.

III. VOORBEELD. *Gegeven zijnde* $a = 93^\circ\ 17'$, $b = 123^\circ\ 43'$, *en* $A = 72^\circ\ 15'$; *de hoeken B en C, benevens de zijde c, te vinden?*

Hier is $a < b$ en $> 180^\circ - b$; er zal gevolgelijk flechts één driehoek op de gegevens pasfen. Men zal vinden: $B = 127^\circ\ 29'\ 10'',87$; $C = 55^\circ\ 45'\ 29'',8$; en $c = 60^\circ\ 3'\ 43',9$.

B. Wanneer men den hoek C, welke over de onbekende zijde ftaat, uit de gegevens wil afleiden; dan zal men zich van de volgende oplosfingen kunnen bedienen.

VI. OPLOSSING. *Fig.* 109. Laten ABC en $AB'C$ de twee driehoeken verbeelden, welke, in fommige gevallen, op de gegevens kunnen pasfen; dan zal de loodregte boog CD den tophoek en de basis van den gelijkbeenigen driehoek BCB' in twee gelijke deelen verdeelen. Wanneer men dan de hoeken ACD en BCD vinden kan; dan zal derzelver fom of verfchil de hoeken ACB en ACB' bekend doen worden. Stel $ACD = p$ en $BCD = q$; dan is, volgens de bekende eigenfchappen der regthoekige driehoeken:

$$tang.\,p = Cot.\,A : cos.\,b \ (1) \quad \text{en} \quad cos.\,q = tang.\,CD : tang.\,a \ (2)$$

Men moet nu $tang.\,CD$ uit de tweede vergelijking wegmaken. Men heeft $sin.\,CD = sin.\,A \times sin.\,b$; $cos.\,CD = cos.\,b : cos.\,AD$, en wederom $cos.\,AD = cos.\,p : sin.\,A$; en daarom $cos.\,CD = cos.\,b \times sin\,A : cos\,p$. Eindelijk $tang.\,CD = sin.\,CD : cos\,CD = tang.\,b \times cos.\,p$. Stellende deze waarde van $tang\,CD$ in de tweede vergelijking; dan verkrijgt men: $cos.\,q = tang.\,b \times cot.\,a \times cos.\,p$. Men heeft derhalve het volgende ftelfel van vergelijkingen:

$$tang.\,p = cot.\,A : cos.\,b;\ cos.\,q = tang.\,b \times cot.\,a \times cos.\,p$$
$$\text{en} \quad C = p \pm q$$

Omtrent welke vergelijkingen moet aangemerkt worden: 1°. dat, wanneer

neer $cos.\,q > \pm 1$ bevonden wordt, de gegevens onbestaanbaar zijn. 2°. Dat, wanneer $tang.\,p$ en $cos.\,q$ negatief zijn, de bogen p en q insgelijks negatief moeten genomen worden. 3°. Dat de waarde van $C = p \pm q$, naar de waarden van p en q, opgemaakt wordende, de negatieve waarden van C, en de positieve waarden, die grooter dan 180° zijn, als onbestaanbaar, moeten worden verworpen.

VII. Oplossing. Men stelle, in de tweede vergelijking der voorgaande oplossing, $tang.\,b \times cos.\,p = tang.\,\phi$; dan wordt $cos.\,q = cot.\,a \times tang.\,\phi$; waaruit $(1 - cos.\,q) : (1 + cos\,q) = (1 - cot.\,a \times tang.\,\phi) : (1 + cot.\,a \times tang.\,\phi)$ wordt afgeleid; en eindelijk:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}q = \pm \sqrt{[sin.\,(a - \Phi) : sin.\,(a + \Phi)]}$$

Men heeft dan het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$tang\,p = cot.\,A : cos.\,b;\; tang.\,\Phi = tang.\,b \times cos.\,p$$

$$tang.\,\tfrac{1}{2}q = \pm \sqrt{[sin.\,(a - \Phi) : sin.\,(a + \Phi)]},\text{ en } C = p \pm q.$$

Deze oplossing zal, wanneer q weinig van 90° mogt verschillen, eene grootere naauwkeurigheid dan de eerste geven.

VIII. Oplossing. Volgens de *XVI. Stelling*, heeft men:

$$tang.\,a = \frac{sin.\,b}{sin.\,C \times cot.\,A + cos.\,C \times cos.\,b}$$

waaruit onmiddellijk volgt:

$$cot.\,A \times sin.\,C = sin.\,b \times cot.\,a - cos.\,b \times cos.\,C \;\ldots\; (M)$$

In deze vergelijking, is alleenlijk de hoek C onbekend. Men brenge de leden dezer vergelijking in het vierkant, en schrijve voor $sin^2.\,C$ hare waarde $1 - cos^2.\,C$; dan zal men eene vierkants-vergelijking verkrijgen, welke, behoorlijk opgelost zijnde, geven zal:

$$cos.\,C = \frac{sin.\,b \times cos.\,b \times cot.\,a \times sin^2.\,A}{1 - sin^2.\,A \times sin^2.\,b} \;\ldots\; \pm \frac{cos.\,A \times \sqrt{[1 - sin^2.\,b \times sin^2.\,A : sin^2.\,a]}}{1 - sin^2.\,A \times sin^2.\,b}$$

IX. Oplossing. Stelt men de vergelijking (M) onder deze gedaante:

$$cos.\,b \times cos.\,C = sin.\,b \times cot.\,a - cot.\,A \times sin.\,C$$

verheft men derzelver leden tot het vierkant, en schrijft men, in plaats van $cos^2.\,C$, hare waarde $1 - sin^2.\,C$; dan zal men eene vierkants-vergelijking verkrijgen, welker oplossing geven zal:

$$sin.\,C = \frac{sin.\,b \times cot\,a \times cos.\,A \times sin.\,A}{1 - sin^2.\,A \times sin^2.\,b} \;\ldots\; \pm \frac{cos.\,b \times sin.\,A \times \sqrt{[1 - sin^2.\,b \times sin^2.\,A : sin^2\,a]}}{1 - sin^2.\,A \times sin^2.\,b}$$

De breuk, welke onder het wortelteeken voorkomt, is gelijk aan $sin^2.\,B$; de waarde van $cos.\,C$ en $sin.\,C$ kunnen derhalve, volgens deze formulen, niet berekend worden, zonder de sinus van den hoek B, in den loop der berekening, te bepalen: deze berekening maakt dan de grootheid, onder het wortelteeken, gelijk aan $cos^2.\,B$; men verkrijgt derhalve:

$$sin.\,B = sin.\,A \times sin.\,b : sin.\,a$$
$$sin.\,\mu = sin.\,A \times sin.\,b$$

stellende, door eene behoorlijke substitutie,

$$cos.\,C = \frac{\frac{1}{2}\,sin.\,2\,b \times cot.\,a \times sin^2.\,A \pm cos.\,A \times cos.\,B}{cos^2.\,\mu}$$

$$sin.\,C = \frac{\frac{1}{2}\,sin.\,2\,A \times cot.\,a \times sin.\,b \pm cos.\,b \times sin.\,A \times cos.\,B}{cos^2.\,\mu}$$

Dan, aangezien deze analytische waardijen vrij zamengesteld en, voor de dadelijke berekening, niet zeer geschikt zijn; zoo zullen wij, uit de vergelijking (M), nog twee andere vergelijkingen afleiden, welke fraaijer en minder zamengesteld zijn.

X. Oplossing. Men kan de vergelijking (M), zie de *III. Oplossing*, onder den vorm:

$$cot.\,A \times sin.\,C = sin.\,b \times cot.\,a + cos.\,b - cos.\,b\,(1 + cos.\,C)$$

voorstellen, welke, na al de termen door $1 + cos.\,C$ gedeeld te hebben, geven zal:

$$cot.\,A \times \frac{sin.\,C}{1 + cos.\,C} = \frac{sin.\,b \times cot.\,a + cos.\,b}{1 + cos.\,C} - cos.\,b$$

Nu is (*I. Gev. IX. Stell. XI. B.*) $sin.\,C : (1 + cos.\,C) = tang.\,\frac{1}{2}\,C$ en (*II. Gev. III. Stell. XI. B.*) $1 + cos.\,C = 2\,cos^2.\,\frac{1}{2}\,C = 2 : sec^2.\,\frac{1}{2}\,C = 2\,(1 + tang^2.\,\frac{1}{2}\,C)$. De laatste vergelijking wordt derhalve:

$$2\,cot.\,A \times tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = (sin.\,b \times cot.\,a + cos.\,b) \times tang^2.\,\tfrac{1}{2}\,C$$
$$+ sin.\,b \times cot.\,a - cos.\,b$$

maar, $sin.\,b \times cot.\,a + cos.\,b = sin.\,(a + b) : sin.\,a$, en $sin.\,b \times cot.\,a - cos.\,b = sin.\,(b - a) : sin.\,a$ zijnde, zoo zal men hebben:

$$2\,cot.\,A \times tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{sin.\,(a+b)}{sin.\,a} \times tang^2.\,\tfrac{1}{2}\,C + \frac{sin.\,(b-a)}{sin.\,a}$$

welke, na behoorlijke herleiding, de vierkants-vergelijking:

$$tang^2.\,\tfrac{1}{2}\,C - \frac{2\,cot.\,A \times sin.\,a}{sin.\,(a+b)} \times tang.\,\tfrac{1}{2}\,C + \frac{sin.\,(b-a)}{sin.\,(a+b)} = 0$$

geven zal. Lost men nu deze vergelijking op; dan zal men vinden:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{cot.\,A \times sin\,a}{sin.\,(a+b)} \times \ldots\ldots$$

$$\left\{1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) \times tang^2.\,A}{sin^2.\,a}\right]}\right\}$$

Men moet, in deze vergelijking, twee gevallen onderscheiden. 1°. Wanneer $a - b$ positief is; 2°. wanneer $a - b$ negatief is.

In het eerste geval, stelle men $tang.\,\mu = \frac{tang.\,A}{sin.\,a} \times \sqrt{[sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b)]}$; dan verkrijgt men, voor den onbekenden hoek C, deze twee waarden:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}\,C = \frac{cot.\,A \times sin.\,a}{sin.\,(a+b)} \times (1 \pm sec.\,\mu) \quad \ldots \quad (N)$$

 Nu

Nu is (zie *I. Gev. IX. Stell. XI. B.,*) $1 + sec.\,\mu = 1 + \frac{1}{cos.\,\mu} = \frac{1 + cos.\,\mu}{cos\,\mu} = \frac{1 + cos.\,\mu}{sin.\,\mu} \times \frac{sin.\,\mu}{cos.\,\mu} = cot.\,\tfrac{1}{2}\mu \times tang.\,\mu$; en $1 - sec.\,\mu = 1 - \frac{1}{cos\,\mu} = \frac{cos.\,\mu - 1}{cos.\,\mu} = -\frac{1 - cos.\,\mu}{sin.\,\mu} \times \frac{sin.\,\mu}{cos.\,\mu} = -tang.\,\tfrac{1}{2}\mu \times tang\,\mu$.
Stelt men nu deze waarden van $1 + sec.\,\mu$ en $1 - sec.\,\mu$ in de vergelijking (*N*); dan verkrijgt men, voor $a > b$, de volgende vergelijkingen:

$$tang.\,\mu = [tang.\,A \times \sqrt{sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b)}] : sin.\,a$$
$$\Omega = cot.\,A \times sin.\,a \times tang.\,\mu : sin.\,(a+b)$$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}C = +\,\Omega \times cot.\,\tfrac{1}{2}\mu;\ \text{of}\ tang.\,\tfrac{1}{2}C = -\,\Omega \times tang.\,\tfrac{1}{2}\mu.$$

Is, in de vergelijking (*N*), voor $tang.\,\tfrac{1}{2}C$, $a < b$; dan wordt $sin.\,(a-b)$ negatief, en dan kan de vergelijking niet bestaanbaar zijn, indien niet $sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) \times tang^2.\,A < sin^2.\,a$ is. Men stelle dan $sin.\,\nu = (tang.\,A : sin.\,a) \times \sqrt{(sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b)}$: dan verandert gezegde vergelijking in de volgende:

$$tang.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{cot.\,A \times sin.\,a}{sin.\,(a+b)} \times (1 \pm cos.\,\nu)$$

Maar nu is (*II. Gev. III. Stell. XI. B.*) $1 + cos.\,\nu = 2\,cos^2.\,\tfrac{1}{2}\nu$, en $1 - cos.\,\nu = 2\,sin^2.\,\tfrac{1}{2}\nu$; en wij hebben bijgevolg, wanneer $a < b$ is, de vergelijkingen:

$$sin.\,\nu = [tang.\,A \times \sqrt{sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b)}] : sin.\,a$$
$$\omega = 2\,cot\,A \times sin.\,a : sin.\,(a+b)$$
$$tang.\,\tfrac{1}{2}C = \omega \times sin^2.\,\tfrac{1}{2}\nu;\ \text{of}\ tang.\,\tfrac{1}{2}C = \omega \times cos^2.\,\tfrac{1}{2}\nu$$

XI. Oplossing. Men kan de vergelijking (*M*) ook nog onder de volgende gedaante

$$cot.\,A \times sin.\,C = sin.\,b \times cot.\,a - cos.\,b + cos.\,b \times (1 - cos.\,C)$$

stellen, en hieruit zal men (gelijk in de voorgaande oplossing) vinden:

$$cot.\,\tfrac{1}{2}C = -\frac{cot.\,A \times sin.\,a}{sin.\,(a-b)} \times \ldots\ldots$$
$$\left\{1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b) \times tang^2.\,A}{sin^2.\,a}\right]}\right\}$$

Hieruit zal men nu, 1°. wanneer $a > b$ is, vinden:

$$tang.\,\mu = [tang.\,A \times sin.\,(a+b) \times sin.\,(a-b)] : sin.\,a$$
$$\Omega = -\,cot.\,A \times sin.\,a \times tang.\,\mu : sin.\,(a-b)$$
$$cot.\,\tfrac{1}{2}C = +\,\Omega \times cot.\,\tfrac{1}{2}\mu;\ \text{of}\ cot.\,\tfrac{1}{2}C = -\,\Omega \times tang.\,\tfrac{1}{2}\mu.$$

2°. En, wanneer $a < b$ is,

$$sin.\,\nu = [tang.\,A \times \sqrt{(a+b) \times sin.\,(a-b)}] : sin.\,a$$
$$cot\,\tfrac{1}{2}C = \omega \times sin^2.\,\tfrac{1}{2}\nu;\ \text{of}\ cot.\,\tfrac{1}{2}C = \omega \times cos^2.\,\tfrac{1}{2}\nu.$$

Deze laatste oplossingen geven aanleiding tot verscheidene Aanmerkingen, welke wij, daar zij ons te lang zouden ophouden, aan de nasporing van den Lezer overlaten.

C. Wil men de onbekende zijde afzonderlijk berekenen; dan zal zulks, door de formulen, welke de volgende oplossingen geven zullen, kunnen geschieden

XII. OPLOSSING. *Fig.* 109. Men stelle $AD = r$ en $BD = s$; dan geven de regthoekige driehoeken, ADC en BDC, de vergelijkingen $tang.\, r = tang.\, b \times cos.\, A$; $cos.\, CD = cos.\, b : cos.\, r$, en $cos.\, s = cos.\, a : cos.\, CD = cos.\, a \times cos.\, r : cos.\, b$. Men heeft alzoo, om de waarde van c te vinden:

$$tang.\, r = tang.\, b \times cos.\, A;\ cos.\, s = cos.\, a \times cos.\, r : cos.\, b$$
$$\text{en}\quad c = r \pm s$$

De waarden van r en s zullen negatief zijn, wanneer $tang.\, r$ en $cos.\, s$ negatief zijn. De gegevens zijn met eenigen driehoek onbestaanbaar, wanneer $cos\, s > \pm 1$ is. Voorts moeten de negatievé waarden, welke men voor c verkrijgt, of die positieve waarden van c, welke grooter dan 180^o zijn, als onbestaanbaar, verworpen worden.

XIII. OPLOSSING. Men stelle, in de tweede vergelijking der voorgaande oplossing, $cos.\, a \times cos.\, r = cos.\, \psi$; dan heeft men het volgende stelsel van vergelijkingen:

$$tang.\, r = tang.\, b \times cos.\, A;\ cos.\, \psi = cos.\, a \times cos.\, r$$
$$tang.\, \tfrac{1}{2} s = \sqrt{[tang.\, \tfrac{1}{2}(\psi + b) \times tang.\, \tfrac{1}{2}(\psi - b)]}$$
$$\text{en}\quad c = r \pm s$$

De onbestaanbaarheid der gegevens blijkt, in den loop der berekening, wanneer $\tfrac{1}{2}(\psi + b)$ of $\tfrac{1}{2}(\psi - b)$ negatief bevonden wordt.

XV. OPLOSSING. Uit de *XIV. Stelling*, volgt:

$$cos.\, A \times sin.\, b \times sin\, c = cos.\, a - cos.\, b \times cos.\, c \quad \ldots \quad (Q)$$

Brengt men deze vergelijking in het vierkant, en schrijft men $sin^2.\, c = 1 - cos^2.\, c$; dan zal men eene vierkants-vergelijking verkrijgen, welker oplossing geven zal:

$$cos.\, c = \frac{cos.\, a \times cos.\, b \pm cos.\, A \times sin.\, a \times sin.\, b \sqrt{\left(1 - \frac{sin^2.\, A \times sin.^2\, b}{sin^2.\, a}\right)}}{1 - sin^2.\, A \times sin^2.\, b}$$

Omdat (*XIV. Stell.*) $cos.\, c = cos.\, C \times sin.\, a \times sin.\, b + cos.\, a \times cos.\, b$ is; zoo zal men de waarde van $cos.\, c$ gemakkelijker vinden kunnen, indien men de waarde van $cos.\, C$, welke boven gevonden is, met $sin.\, a \times sin.\, b$ vermenigvuldigt, en bij het product $cos.\, a \times cos.\, b$ optelt.

XVI. OPLOSSING. Uit dezelfde vergelijking (Q), zal men, door de oplossing eener vierkants-vergelijking, vinden:

$$sin.\, a = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{cos.\, A \times cos.\, a \times sin.\, b \pm sin.\, a \times cos.\, b \sqrt{(1 - sin^2.\, A \times sin^2.\, q : sin^2.\, a)}}{1 - sin^2.\, A \times sin^2.\, b}$$

Omdat nu (*X. Stell.*) $sin.\, c = sin.\, a \times sin.\, C : sin.\, A$ is, zal men de waarde van $sin.\, c$ vinden, door de waarde van $sin.\, C$, boven gevonden, met $sin.\, a$ te vermenigvuldigen, en het product door $sin.\, A$ te deelen.

Omdat (*X. Stell.*) de grootheid onder het wortelteeken gelijk aan $\cos^2. B$ is, zoo zal men, ftellende

$$\sin. A \times \sin. b : \sin. a = \sin. B, \text{ en } \sin. A \times \sin. b = \sin. \mu$$

hebben:

$$\cos. c = [\cos. a \times \cos. b \pm \sin. a \times \sin. b \times \cos. A \times \cos. B] : \cos^2. \mu$$
$$\sin. c = [\cos. A \times \cos. a \times \sin. b \pm \sin. a \times \cos. b \times \cos. B] : \cos^2. \mu$$

welke vergelijkingen nog voor verdere herleidingen vatbaar zijn.

XVII. Oplossing. Door de aanwending van de kunstgreep, waarvan wij boven gebruik gemaakt hebben, zal men, uit de vergelijking (*Q*), vinden:

$$\tang. \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos. A \times \sin. b \times \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{\sin. (a+b) \times \sin. (a-b)}{\cos^2. A \times \sin^2. b} \right]} \right\}}{2 \cos. \frac{1}{2}(a+b) \times \cos. \frac{1}{2}(a-b)}$$

Wanneer nu $a > b$ is; dan ftelle men:

$$\tang. \mu = \sqrt{[\sin. (a+b) \times \sin. (a-b)]} : \cos. A \times \sin. b$$
$$\Omega = \tfrac{1}{2} \cos. A \times \sin. b \times \tang. \mu : \cos. \tfrac{1}{2}(a+b) \times \cos. \tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$\tang. \tfrac{1}{2} c = + \Omega \times \cot. \tfrac{1}{2} \mu, \text{ of } \tang. \tfrac{1}{2} c = - \Omega \times \tang. \tfrac{1}{2} \mu$$

Maar, is $a < b$, dan ftelle men:

$$\sin. \nu = \sqrt{[\sin. (a+b) \times \sin. (a-b)]} : \cos. A \times \sin. b$$
$$\omega = \cos. A \times \sin. b : \cos. \tfrac{1}{2}(a+b) \times \cos. \tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$\tang. \tfrac{1}{2} c = \omega \times \sin^2. \tfrac{1}{2} \nu, \text{ of } \tang. \tfrac{1}{2} c = \omega \times \cos^2. \tfrac{1}{2} \nu$$

XVIII. Oplossing. Dezelfde vergelijking (*Q*), zal, dezelfde manier als boven volgende, geven:

$$\cot. \tfrac{1}{2} c = \frac{-\cos. A \times \sin. b \times \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[1 + \frac{\sin. (a+b) \times \sin. (a-b)}{\cos^2 A \times \sin^2. b} \right]} \right\}}{2 \sin. \frac{1}{2}(a+b) \times \sin. (a-b)}$$

Wanneer nu $a > b$ is; dan ftelle men:

$$\tang. \mu = \sqrt{[\sin. (a+b) \times \sin. (a-b)]} : \cos. A \times \sin. b$$
$$\Omega = - \tfrac{1}{2} \cos. A \times \sin. b \times \tang. \mu : \sin. \tfrac{1}{2}(a+b) \times \sin. \tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$\cot. \tfrac{1}{2} c = + \Omega \times \cot. \tfrac{1}{2} \mu, \text{ of } \cot. \tfrac{1}{2} c = - \Omega \times \tang. \tfrac{1}{2} \mu$$

Maar is $a < b$; dan ftelle men:

$$\sin. \nu = \sqrt{[\sin. (a+b) \times \sin. (a-b)]} : \cos. A \times \sin. b$$
$$\omega = - \cos. A \times \sin. b : \sin. \tfrac{1}{2}(a+b) \times \sin. \tfrac{1}{2}(a-b)$$

en dan is:

$$\cot. \tfrac{1}{2} c = \omega \times \sin^2. \tfrac{1}{2} \nu, \text{ of } \cot. \tfrac{1}{2} c = \omega \times \cos^2. \tfrac{1}{2} \nu.$$

XII. Vraag-

XII. VRAAGSTUK. VI. GEVAL. *Fig.* 106.

§. 1212. *Van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, twee hoeken, met ééne zijde, over éénen dezer bekende hoeken staande; de formulen te vinden, waardoor de twee onbekende zijden, benevens den onbekenden hoek, zullen kunnen berekend worden?*

Dit laatste geval van de oplossing der scheefhoekige bolvormige driehoeken is het tweede, hetwelk, onder sommige omstandigheden, twee oplossingen heeft; en daarom algemeen, doch ten onregte, het *tweede* der *twijfelachtige gevallen* genoemd wordt.

Laten *A* en *B* de bekende hoeken, en *a* de bekende zijden zijn; dan is (*X. Stell.*)

$$sin.\, b = sin.\, a \times sin.\, B : sin.\, A$$

Deze vergelijking is analytisch bestaanbaar, zoo lang $sin.\, A > sin.\, a \times sin.\, B$ is; en dan vindt men, voor de zijde *b*, steeds twee waarden, welke wel altijd aan de vergelijking; doch niet aan een bolvormigen driehoek, in den zin, waarin wij denzelven nemen, zullen voldoen.

Om deze bijzonderheid meer van nabij te leeren kennen, zoo laat, *fig.* 110, de cirkel *ABDPE* het vlak van de basis des gevraagden driehoeks zijn. Laat, volgens eene middellijn *AD*, op dezen cirkel een halven cirkel *AIFCD*, zoodanig geplaatst worden, dat de standhoek *CAB* gelijk zij aan den gegeven hoek *A* van den gevraagden bolvormigen driehoek *ABC*; en nog de halve cirkel *BFKE*, met eenen hoek *ABF* = *B*; zijnde *BC* = *a*. Men rigte, uit *M*, het middelpunt van den bol, in het vlak *AID*, de loodlijn *MI*, op *AD*; en, in het vlak *BFHE*, de loodlijn *MH*, op *BE*; dan zijn deze loodlijnen stralen van den bol, en de bogen, *AI*, *DI*, *BH* en *EH*, zijn dan quadranten. Eindelijk beschrijve men, uit *M*, met *MH* en *MI*, als stralen, de kleine cirkels *Hab* en *Icd*; dan zijn deze de projectien van de kleine cirkels van den bol, welke, uit het aspunt van den cirkel *ABD*, met de koorden van de complementen der hoeken *B* en *A*, beschreven zijnde, gezegde halve cirkels, op het oppervlak van den bol, in de punten *H* en *I* aanraken; en welke kleine cirkels, in het oppervlak van den bol, evenwijdig aan den cirkel *ABDPE*, moeten gedacht worden.

Er kunnen, ten opzigte van de gegevene hoeken, vier gevallen plaats hebben. *a*) De hoeken *A* en *B* kunnen beide scherp zijn. *b*) De hoek *A* stomp en de hoek *B* scherp. *c*) De hoek *A* scherp en de hoek *B* stomp. *d*) De hoeken *A* en *B* beide stomp.

A. Nemen wij, *fig.* 110, de hoeken *A* en *B* scherp, en hoek *A* < hoek *B*. Wanneer wij dan den halven cirkel *AID* in zijnen stand laten; maar den halven cirkel *BFE*, van het punt *D* door de punten *B*, *A*, *E*, *P*, *enz.*, om het punt *M*, over het vlak *DBA*, omschuiven; zoodanig, dat de hoek *ABC* altijd dezelfde blijft; dan zal het punt *H* den kleinen cirkel *Hab* beschrijven; en de punten *F* en *G* zul-

ken bestendig in den omtrek van den kleinen cirkel *Icd* blijven. Wanneer nu het punt *B*, van het punt *D* af te rekenen, de eerste helft van den cirkel *DBAP* doorloopt; dan zal elk punt van den boog *BF*, het éene na het andere; door het quadrant *DI* gaan, tot dat, het punt *F* in *I* gekomen zijnde, de punten van dienzelfden boog, maar in eene teruggaande orde, van *F* naar *B*, door hét quadrant *IA* zullen gaan. Is het punt *B* in *A* gekomen, en loopt het punt *B* door de tweede helft van den cirkel *DBAP*; dan zullen al de punten van den boog *FE*, het éene na het andere, door het quadrant *DI* gaan, en, wanneer *F* in *I* gekomen is, zullen diezelfde punten, doch nu in eene omgekeerde orde, door het quadrant *IA* loopen. Geene der punten van den boog *FE*, welke geheel buiten den kleinen cirkel *Icd* gelegen is, zal (de hoeken *A* en *B* dezelfde blijvende,) immer den omtrek van den halven cirkel *DIA* bereiken.

Dit verklaarde is genoeg, om te doen zien: dat, wanneer een bolvormige driehoek, onder twee gegevene hoeken *A* en *B*, en éene zijde $BC = a$, moet zamengesteld worden, hoek $B >$ hoek *A* is, en de hoeken *A* en *B* beide scherp zijn.

1°. Dat de zijde $BC = a$ tot zoodanig eene grootte moet gegeven zijn: dat het punt *C* door den omtrek van den halven cirkel *AID* moet kunnen gaan, en dat alzoo,

2°. Wanneer $BC = a$ kleiner is dan *BF*, het vraagstuk niet slechts mogelijk is; maar dat er ook, vermits het punt *C* (van *D* tot in *A* gaande,) den halven cirkel *AID* tweemaal moet ontmoeten, twee driehoeken aan de gegevens voldoen zullen.

3°. Dat, wanneer $a = BF$ is, slechts een driehoek, in welke $b = 90°$ is, zal plaats hebben, in welk geval $\sin. A = \sin. a \times \sin. B$ zal zijn.

4°. Dat, wanneer *BC* of $a > BF$ en $< BG$ genomen wordt, het punt *C* den omtrek *AID* niet zal kunnen snijden, en diensvolgens de gegevens met elkander onbestaanbaar zullen zijn; hetwelk ook, in dit geval, door de analytische onbestaanbaarheid der formule, kenbaar zal worden.

5°. Dat eindelijk, wanneer *BC* of $a > BF$ is, ja wel het punt *C* door den halven cirkel *AID* zal gaan, en de vergelijking $\sin. b = \sin. a \times \sin. B : \sin. A$ analytisch bestaanbaar zal zijn: doch, dat de driehoek, welke den gegeven hoek *B*, en de gegevene zijde heeft, eenen hoek zal hebben, welke, het supplement van den hoek *A* zijnde, niet meer de gegeven driehoek is; doch niet te min, aangezien de sinus van eenen hoek en van zijn supplement dezelfde waarde hebben, aan de vergelijking van $\sin. b$ zal voldoen. Uit al hetwelk dan volgt: *dat, wanneer de formule voor* $\sin. b$ *bestaanbaar is, de hoeken A en B scherp,* $B > A$, *en A en a van dezelfde soort zijn, het vraagstuk twee oplossingen zal hebben.*

B. Geheel anders is het met de zaak gelegen, wanneer (*fig.* 111.) de hoeken *A* en *B* wel beide scherp zijn, maar hoek $A >$ hoek *B* is. Want, wanneer men het punt *B* in *D* brengt, en den halven cirkel

DBA

DBA laat doorloopen; dan zullen al de punten van den halven omtrek *EKGCB*, van *E* naar *B* te rekenen, het ééne na het andere, door den omtrek van den halven cirkel *AGFD* gaan. Waaruit dan volgt:

1°. *Dat, in dit geval, de zijde a alle waarde van 0° tot 180° zal kunnen hebben.*

2°. *Maar dat, slechts één driehoek aan de gegevens zal voldoen*; want, wanneer het punt *B* in *A* gekomen is, en de tweede helft van den cirkel *ABDE* doorloopt, zal het punt *C* nog éénmaal door den omtrek van *AGFD* gaan: maar de driehoek, welke men dan verkrijgt, zal niet meer den scherpen hoek, maar deszelfs supplement tot ééne der gegevens hebben.

In dit geval, is het nogtans merkwaardig: dat, in de eerste helft van de omwenteling, de snijding der halve cirkels, in den boog *AC*, moet plaats hebben, en in de tweede helft, in den boog *FD*; *zoodat de boog b, even als zijn overstaande hoek, scherp zal zijn; en dat eindelijk dit geval van het voorgaande daar in onderscheiden is, dat $A > B$ en $< 180° - B$ is*; terwijl, in het voorgaande, *A* te gelijk kleiner dan *B* en kleiner dan $180° - B$ bevonden is.

Het zal gemakkelijk zijn, voor al de andere opgenoemde gevallen, figuren te ontwerpen, om de omstandigheden, waarin het vraagstuk mogelijk is, of slechts ééne, of twee oplossingen geeft, na te gaan. Den genen, die het bovenstaande begrepen heeft, zal zulks gemakkelijk vallen, en hem, die te zwak is, om het reeds verklaarde te hebben kunnen volgen, zou eene verdere verklaring zonder nuttigheid zijn. Alle deze beschouwingen dan vereenigende, zoo zal men tot eenen regel mogen stellen.

1°. *Indien de vergelijking $\sin. b = \sin. a \times \sin. B : \sin. A$, analytisch onbestaanbaar is; dan zal er ook geen driehoek bestaan, op welken de gegevens passen.*

2°. *Is de vergelijking $\sin. b = \sin. a \times \sin. B : \sin. A$, analytisch bestaanbaar; dan zal,*

a) $a > 90°$ *en* $A < B$, *benevens* $A < 180° - B$

b) $a < 90°$ *en* $A > B$, *benevens* $A > 180° - B$

zijnde; geen driehoek op de gegevens passen.

3°. *Maar is*

a) $a > 90°$ *en* $A > B$, *benevens* $A > 180° - B$

b) $a < 90°$ *en* $A < B$, *benevens* $A < 180° - B$

dan bestaan er twee driehoeken, op welke de gegevens toepasselijk zijn.

4°. *Is eindelijk $A >$ of $< B$ en tevens $A <$ of $> 180° - B$; dan bestaat er slechts één driehoek, die aan de gegevens voldoet. In dit geval, is de oplossing niet meer twijfelachtig, en de zijde b is van dezelfde soort, als de overstaande hoek B.*

5°. *In alle gevallen, beslist nog boven dien de regel, welke zegt:*

dat

dat de som van twee zijden van dezelfde soort moet zijn, als de som der hoeken, welke tegen over die zijden staan, (zie II. Gev. X. St.) al de boven opgenoemde omstandigheden.

Wij gaan, na deze ophelderingen, tot de oplossing zelve over; en zullen, daar wij de hoeken A en B, benevens de zijde a, als bekend aannemen, wegens de gelijkvormigheid van dit geval met het voorgaande, meestal de uitkomsten der oplossingen, met de aanwijzing van de gronden, waaruit zij zijn afgeleid, opgeven.

A. Om de onbekende zijde b, welke tegen over den bekenden hoek B staat, te vinden, heeft men de volgende oplossingen.

I. Oplossing. Volgens de *X. Stell.*, wordt de zijde b door de volgende formule,

$$\sin. b = \sin. a \times \sin. B : \sin. A$$

gevonden.

II. Oplossing. Men stelle

$$\sin. \phi = \sin. a \times \sin. B;\ \text{tang.}\, \psi = \sqrt{\frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(A-\phi)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(A+\phi)}}$$

$$\text{dan is: } b = 90^\circ \mp 2\psi.$$

III. Oplossing. Of men stelle

$$\text{tang.}\, \upsilon = \sin. A, \text{ en } \text{tang.}\, \mu = \sin. a \times \sin. B, \text{ en}$$

$$\text{tang.}\, \omega = \sqrt{\frac{\sin.(\upsilon-\mu)}{\sin.(\upsilon+\mu)}};\ \text{dan is: } b = 90^\circ \mp 2\omega.$$

IV. Oplossing. Men zal, verder, vinden:

$$\sin. \phi = \sin. a \times \sin. B;\ \sin. \chi = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(A-\phi) \times \cos.\frac{1}{2}(A+\phi)}{\sin. A}}$$

$$\text{en } b = 90^\circ \mp 2\chi.$$

V. Oplossing. Eindelijk zal men, vinden:

$$\sin. \phi = \sin. a \times \sin. B;\ \cos \chi = \sqrt{\frac{\sin.\frac{1}{2}(A+\phi) \times \cos.\frac{1}{2}(A-\phi)}{\sin. A}}$$

$$\text{en } b = 90^\circ \mp 2\chi.$$

Wanneer b weinig van 90° verschilt, zal men de tweede oplossing gebruiken; en de derde, wanneer ϕ weinig van 90° afwijkt.

Wanneer men de zijde b, door ééne der voorgaande oplossingen, gevonden heeft, zullen dezelfde Neperiaansche Analogien, welke in het vorige Vraagstuk gebruikt zijn, dienen kunnen, om C en c te vinden.

B. Om de onbekende zijde c te vinden, heeft men de volgende oplossingen.

VI. Oplossing. *Fig.* 112. Nemende, dat het geval twee oplossingen hebbe, en dat ABC en $AB'C'$ de twee bolvormige driehoeken zijn, welke, onder de gegevens A, B en a, bestaanbaar zijn. Wanneer men dan, uit C en C', de loodregte bogen, CD en $C'D'$, op de basis, laat vallen; dan zullen de regthoekige driehoeken BCD en $B'C'D'$ (omdat $BC = B'C' = a$ en $B = B'$ is,) in alles gelijk zijn. Stellen wij dan

BD

$BD = B'D' = p$ en AD of $AD' = q$; dan hebben wij (*form.* (2), *Bladz.* 305,) $tang.p = tang.a \times cos.B$, en, volgens de *XII. Stell.*, $tang.B \times sin.p = tang.A \times sin.q$; derhalve $sin.q = cot.A \times tang.B \times sin.p$; en AB, of c, is gelijk aan $p + q$. Men heeft derhalve het volgende ſtelſel van vergelijkingen:

$$tang.p = tang.a \times cos.B;\ sin.q = cot.A \times tang.B \times sin.p$$
$$\text{en}\quad c = p + q.$$

Wanneer $tang.p$ negatief wordt; dan kan men p negatief nemen: maar dan neemt men ſtilzwijgend den loodregten boog, welke, wanneer B ſtomp is, buiten den ſtompen hoek valt; of, wanneer B ſcherp is, den loodregten boog, welke men, op het verlengde van AB, het eerst ontmoet. En dan is, in die onderſtelling, $sin.p$ in de tweede vergelijking negatief. Wordt $sin.q > 1$; dan zijn de gegevens, in alle gevallen, onderling onbeſtaanbaar: maar is $sin.q < 1$ en negatief; dan moet q ook negatief genomen worden. Men kan ook, wanneer $tang.p$ negatief is, het ſupplement van p nemen; maar dan blijft $sin.q$ poſitief, enz. In alle gevallen kan men, welk ſtelſel men aanneme, nooit dwalen; want, daar de waarde van c niet negatief noch ook niet grooter dan 180° kan zijn, zal, bij de uitkomst, blijken: of er ééne, twee of geene oploſſingen, voor de bijzondere gegevens, plaats zullen hebben.

VII. Oplossing. Men ſtelle, in de tweede vergelijking der voorgaande oploſſing, $tang.\varphi = tang.B \times sin.p$ en $tang.\psi = \sqrt{[sin.(A - \varphi) : sin.(A + \varphi)]}$; dan zal $q = 90° \pm 2\psi$ zijn. Men heeft dan nog dit andere ſtelſel van vergelijkingen:

$$tang.p = tang.a \times cos\ B;\ tang.\varphi = tang.B \times sin.p$$
$$tang.\psi = \sqrt{[sin.(A - \varphi) : sin.(A + \varphi)]};\ q = 90° \pm 2\psi$$
$$\text{en}\quad c = p + 90° \pm 2\psi.$$

Wanneer de grootheid, onder het wortelteeken, negatief wordt; dan zijn de gegevens met geen driehoek beſtaanbaar.

VIII. Oplossing. Volgens het *I. Gev. XI. Stell.* is,

$$cot.A \times sin.B = sin.c \times cot.a - cos.c \times cos.B$$

Lost men deze vergelijking, met betrekking tot $cos.c$, op; dan zal men vinden:

$$cos.c = -\frac{cot.A \times sin.B \times cos.B \times sin^2.a}{1 - sin^2.a \times sin^2 B}$$
$$\pm \frac{cos.a \sqrt{[1 - sin^2.a \times sin^2.B : sin^2.a]}}{1 - sin^2.a \times sin^2.B}$$

IX. Oplossing. Dezelfde vergelijking, met betrekking tot $sin.c$, opgelost zijnde, zal geven:

$$sin.c = \frac{cot.A \times sin.a \times cos.a \times sin.B}{1 - sin^2.a \times sin^2.B}$$
$$\pm \frac{cos.B \times sin.a \sqrt{[1 - sin^2.a \times sin^2.B : sin^2.A]}}{1 - sin^2.a \times sin^2.B}$$

In

In de twee laatste oplossingen, wordt de grootheid, onder het wortelteeken, gelijk aan $cos^2. b$; zoodat men, om deze formulen te berekenen, noodwendig b zoeken moet: maar deze waarde van b gevonden hebbende, zoo zal men, ($sin. a \times sin. B = sin. \mu$ stellende,) verkrijgen:

$$cos. c = [- \tfrac{1}{2} cot. A \times sin. 2 B \times sin^2. a \pm cos. a \times cos. b] : cos^2. \mu$$

$$sin. c = [\tfrac{1}{2} cot. A \times sin. 2 a \times sin. B \pm cos. B \times sin. a \times cos. b] : cos^2. \mu$$

X. Oplossing. Uit de vergelijking, $cos. B \times cos. c = cot. a \times sin. c - cot. A \times sin. B$, (zie *III. Oplossing*) zal volgen:

$$tang. \tfrac{1}{2} c = \frac{cot. a \times sin. A}{sin. (B - A)} \times \left\{ 1 + \sqrt{\left[1 - \frac{sin. (B - A) \times sin. (A + B)}{cos^2. a \times sin^2. A} \right]} \right\}$$

De analytische waarde van $tang. \tfrac{1}{2} c$, wordt, op de volgende wijze, voor het gebruik der gewone Logarithmen-tafel, herleid.

1°. Indien $B > A$ is, en de tweede term der uitdrukking, onder het wortelteeken, negatief blijft; dan stelle men:

$$sin. \mu = \frac{\sqrt{sin. (B - A) \times sin. (B + A)}}{cot. A \times sin. A}; \quad \Omega = \frac{2 cot. a \times sin. A}{sin. (B - A)}$$

en dan heeft men voor $tang. \tfrac{1}{2} b$ deze twee waarden:

$$tang. \tfrac{1}{2} c = \Omega \times cos^2. \tfrac{1}{2} \mu, \text{ en } tang. \tfrac{1}{2} c = \Omega \times sin^2. \tfrac{1}{2} \mu$$

2°. Maar is $B < A$, en wordt de tweede term, onder het wortelteeken, positief; dan stelle men:

$$tang. \nu = \frac{\sqrt{sin. (B - A) \times sin. (B + A)}}{cot. a \times sin. A}; \quad \omega = \frac{cot. a \times sin. A}{sin. (B - A)}$$

en dan heeft men:

$$tang. \tfrac{1}{2} c = + \omega \times tang. \nu \times cot. \tfrac{1}{2} \nu, \text{ of } tang. \tfrac{1}{2} c = - \omega \times tang. \nu \times tang. \tfrac{1}{2} \nu.$$

XI. Oplossing. Uit dezelfde vergelijking, zal volgen:

$$cot. \tfrac{1}{2} c = \frac{cot. a \times sin. A}{sin. (A + B)} \times \left\{ 1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{sin (B - A) \times sin (A + B)}{cos^2. a \times sin^2. A} \right]} \right\}$$

Deze analytische uitdrukking voor $cot. \tfrac{1}{2} c$, geeft de volgende vergelijkingen:

1°. Indien $B > A$ is; dan stelle men:

$$sin. \mu = \frac{\sqrt{[sin. (B - A) \times sin. (A + B)]}}{cot. a \times sin. A}; \quad \Omega = \frac{2 cot. a \times sin A}{sin. (A + B)}$$

en dan heeft men:

$$cot. \tfrac{1}{2} c = \Omega \times cos^2. \tfrac{1}{2} \mu, \text{ of } cot. \tfrac{1}{2} c = \Omega \times sin^2. \tfrac{1}{2} \mu$$

2°. Maar is $B < A$; dan stelle men:

$$tang. \nu = \frac{\sqrt{[sin. (B - A) \times sin. (A + B)]}}{cot. a \times sin. A}; \quad \omega = \frac{cot. a \times sin. A}{sin. (A + B)}$$

en dan heeft men wederom:

$$cot. \tfrac{1}{2} c = \omega \times tang. \nu \times cot. \tfrac{1}{2} \nu, \text{ of } cos. \tfrac{1}{2} c = - \omega \times tang. \nu \times tang. \tfrac{1}{2} \nu.$$

C. Om

C. Om den onbekenden hoek C te vinden, heeft men de volgende oplossingen.

XII. Oplossing. *Fig.* 112. Men heeft, in den regthoekigen driehoek BCD, (zie *form.* 3, *Bladz.* 305,) wanneer men de hoeken BCD en ACD, of $B'C'D'$ en $AC'D'$ gelijk P en Q ftelt, 1° $cot.\ P = cos.\ a \times tang.\ B$, en, volgens de *XII. Stell.* $cos.\ B : cos.\ A = sin.\ P : sin.\ Q$; derhalve $sin.\ Q = sin.\ P \times cos.\ A : cos.\ B$. Men heeft dan dit ftelfel van vergelijkingen:

$$cot.\ P = cos.\ a \times tang.\ B;\ sin.\ Q = sin.\ P \times cos.\ A : cos.\ B$$
$$\text{en}\quad C = P + Q,$$

Hier gelden dezelfde aanmerkingen, als boven:

XIII. Oplossing. Uit de voorgaande oplosfing, zal men, gelijk boven, vinden:

$$cot.\ P = cos.\ a \times tang.\ B;\quad cos.\ \varphi = cos.\ A \times sin.\ P$$
$$tang.\ \psi = \sqrt{[tang.\ \tfrac{1}{2}(\varphi - B) \times tang.\ \tfrac{1}{2}(\varphi + B)]};\ Q = 90° \pm 2\psi$$
$$\text{en}\quad C = 90° + P \pm 2\psi.$$

XIV. Oplossing. Uit de vergelijking $cos.\ A = cos.\ a \times sin.\ B \times sin.\ C - cos.\ B \times cos.\ C$, volgt:

$$cos.\ C = -\frac{cos.\ A \times cos.\ B}{1 - sin^2.\ a \times sin^2.\ B} \cdots\cdots$$
$$\pm \frac{cos.\ a \times sin.\ B \times sin.\ A\sqrt{[1 - sin^2.\ a \times sin^2.\ B : sin^2.\ A]}}{1 - sin^2.\ a \times sin^2.\ B}$$

XV. Oplossing. Uit dezelfde vergelijking volgt nog:

$$sin.\ C = \frac{cos.\ a \times cos.\ A \times sin\ B}{1 - sin^2.\ a \times sin^2.\ B} \cdots\cdots$$
$$\pm \frac{cos.\ B \times sin.\ A\sqrt{[1 - sin^2.\ a \times sin^2.\ B : sin^2.\ A]}}{1 - sin^2.\ a \times sin^2.\ B}$$

Omdat $sin^2.\ a \times sin^2.\ B : sin^2.\ A = sin^2.\ b$ is, zal men (ftellende $sin^2.\ a \times sin^2.\ B = sin^2.\ \mu$,) hebben:

$$cos.\ C = [-cos.\ A \times cos.\ B \pm cos.\ a \times cos.\ b \times sin.\ A \times sin.\ B] : cos^2.\ \mu$$
$$sin.\ C = [cos.\ a \times cos.\ A \times sin.\ B \pm cos.\ b \times sin.\ A \times cos.\ B] : cos^2.\ \mu$$

vergelijkingen, welke, even als foortgelijken, boven gevonden, op verfcheidene andere wijzen, herleidbaar zijn.

XVI. Oplossing. Dezelfde vergelijking zal nog geven:

$$tang.\ \tfrac{1}{2} C = \cdots\cdots$$
$$\frac{cos.\ a \times sin.\ B \times \left\{1 \pm \sqrt{\left[1 - \frac{sin.\ (A+B) \times sin.\ (B-A)}{cos^2.\ a \times sin^2.\ B}\right]}\right\}}{2\ sin.\ \tfrac{1}{2}(A+B) \times sin.\ \tfrac{1}{2}(B-A)}$$

Welke vergelijking aldus herleid wordt:

1°. Indien $B > A$ is; dan ftelle men:

$$sin.\ \mu = [\sqrt{(sin.\ (A+B) \times sin.\ (B-A))}] : cos.\ a \times sin.\ B$$
$$\Omega = cos.\ a \times sin.\ B : sin.\ \tfrac{1}{2}(A+B) \times sin.\ \tfrac{1}{2}(B-A)$$

en

en $tang. \frac{1}{2} C = \Omega \times sin^2. \frac{1}{2} \mu$; of $tang. \frac{1}{2} C = \Omega \times cos^2. \frac{1}{2} \mu$

2°. Of, indien $B < A$ is; dan stelle men:

$$tang. \nu = [\surd(sin.(A + B) \times sin.(B - B))] : cos. a \times sin. B$$

$$\omega = cos. a \times sin. B : sin. \tfrac{1}{2}(A + B) \times sin. \tfrac{1}{2}(B - A)$$

en $tang. \frac{1}{2} C = \omega \times tang. \nu \times cot. \frac{1}{2} \nu$; of $= - \omega \times tang. \nu \times tang. \frac{1}{2} \nu$

Nog zal men, door dezelfde vergelijking, vinden:

$$cot. \tfrac{1}{2} C = \frac{cos. a \times sin. B \times \left\{ 1 \pm \surd\left[1 - \frac{sin.(A + B) \times sin.(B - A)}{cos^2. a \times sin^2. B} \right] \right\}}{2\, cos. \frac{1}{2}(A + B) \times cos. \frac{1}{2}(B - A)}$$

En deze vergelijking, wordt aldus herleid:

1° indien $B > A$ is; dan stelle men:

$$sin. \mu = [\surd sin.(A + B) \times sin.(B - A)] : cos. a \times sin. B$$

$$\Omega = cos. a \times sin. B : cos. \tfrac{1}{2}(A + B) \times cos. \tfrac{1}{2}(B - A)$$

en $cot. \frac{1}{2} C = \Omega \times sin^2. \frac{1}{2} \mu$; of $cot. \frac{1}{2} C = \Omega \times cos^2. \frac{1}{2} \mu$

2°. Is $B < A$; dan stelle men:

$$tang. \nu = [\surd(sin.(B - A) \times sin.(A + B))] : cos. a \times sin. B$$

$$\omega = cos. a \times sin\, B : 2\, cos. \tfrac{1}{2}(A + B) \times cos. \tfrac{1}{2}(B - A)$$

en dan is:

$$cot. \tfrac{1}{2} C = \omega \times tang. \nu \times cot. \tfrac{1}{2} \nu, \text{ of } cot. \tfrac{1}{2} C = - \omega \times tang. \nu \times tang. \tfrac{1}{2} \nu.$$

IV. *Eenige Aanmerkingen op de behandelde gevallen.*

§. 1218. 1°. De onderscheidene oplossingen, welke wij van elk geval gegeven hebben, hebben niet alle, met betrekking tot de werkdadige berekening, dezelfde voordeelen; offschoon, in zeer vele omstandigheden, (welke wij, om niet wijdloopig te worden, met stilzwijgen voorbij zijn gegaan, en welke wij in onze mondelinge lessen doen opmerken,) sommige oplossingen, die het ongeschikste schijnen, boven alle anderen eene meerdere naauwkeurigheid geven.

2°. Echter moet de Leerling, die wenscht, niet slechts oppervlakkig de Bolvormige Driehoeksmeting te leeren verstaan; maar dit waarlijk allergewigtigste gedeelte der Meetkunst te doorgronden: (en dit behoort hij, zal hij zich, met vrucht, de uitmuntendste meesterstukken der eerste Meesters van onzen tijd eigen maken, en zich op de Sterre- en Zeevaartkunde toe te leggen, te doen,) niet slechts al het verhandelde, met lust en verstand, nagaan; maar ook elke onzer uitgebragte formulen op hetzelfde voorbeeld in getallen toepassen; waartoe hij nemen kan één der voorbeelden, welke op de tafel van de volgende *Bladzijde* voorkomen. Uit deze oefening zal hij het dubbel voordeel trekken: 1°. *van bekend te worden met de voornaamste der analytische zetten,*

Zie het vervolg, op Bladz. 322.

waar-

Verzameling van Voorbeelden, dienende, om Bolvormige Driehoeken, in getallen, te berekenen. De letters *A*, *B* en *C* beteekenen de hoeken; *a*, *b* en *c* de overstaande zijden.

I.	*a* = 36° 32′ 00″	*A* = 51° 36′ 12″
	b = 152° 30′ 00″	*B* = 142° 33′ 40″
	c = 131° 37′ 00″	*C* = 79° 49′ 14″, 1
II.	*a* = 65° 33′ 40″	*A* = 63° 18′ 28″
	b = 78° 20′ 30″	*B* = 73° 57′ 55″, 2
	c = 96° 37′ 24″, 2	*C* = 102° 53′ 32″, 4
III.	*a* = 76° 17′ 23″	*A* = 135° 33′ 4″, 186
	b = 54° 23′ 48″	*B* = 35° 52′ 42″, 21
	c = 28° 19′ 45″	*C* = 20° 0′ 6″, 68
IV.	*a* = 112° 18′ 27″	*A* = 90° 56′ 43″, 17
	b = 125° 23′ 35″	*B* = 118° 41′ 2″, 38
	c = 50° 23′ 46″	*C* = 56° 22′ 31″, 25
V.	*a* = 17° 19′ 27″	*A* = 11° 43′ 23″, 8
	b = 109° 15′ 33″	*B* = 139° 53′ 52″, 08
	c = 96° 13′ 8″	*C* = 42° 42′ 45″, 96
VI.	*a* = 76° 36′ 00″	*A* = 121° 52′ 00″
	b = 51° 61′ 00″	*B* = 42° 10′ 30″
	c = 39° 54′ 26″, 6	*C* = 33° 56′ 30″, 1

Men kieze, uit deze voorbeelden, zulke uit, als men goedvindt. In elk neme men, uit de hoeken en de zijden, naar het geval, in hetwelk men zich oefenen wil, drie gegevens; en bereke, door de onderscheidene formulen-stelsels, niet slechts de onbekenden; maar ook de deelen, in welke de bogen, die, uit de hoekpunten, loodregt op de overstaande zijden vallen, de hoeken en zijden verdeelen.

waardoor men de voortbrengfels van de voorname Meesters, met vrucht lezen, en zelf nieuwe dingen zal leeren uitvinden; 2°. dat hij, in het dadelijk gebruik der teekens en tafels, die gemeenzaamheid verkrijgen zal, welke een noodzakelijk vereischte uitmaakt van dengenen, die gaarne op die hoogte komt, dat hij zich, met vertrouwen, op zijn eigen werk zal mogen verlaten.

3°. De tweede, vierde en zesde gevallen zijn met de eerste, derde en vijfde zoo naauw verknocht, dat de formulen van de eerste uit die van de laatste, met behulp van den aspunts-driehoek, kunnen worden afgeleid. Wij laten, daar wij van die wijze van afleiding reeds zoo vele voorbeelden bijgebragt hebben, zulks na te gaan aan de vlijt van den Lezer over.

4°. Wanneer men de gevondene formulen voor de onderscheidene gevallen, (welke alle zoo ingerigt zijn, dat men geene bijzondere figuur, om de berekening te maken, behoeft te teekenen,) op de berekening van eenen dadelijk gegevenen driehoek wil toepassen; dan behoeft men, wanneer het op geene zeer groote naauwkeurigheid aankomt, niet alle cijfers van de decimalen der Logarithmen te gebruiken; in dit geval, zijn de vijf eerste cijfers der breuk altijd voldoende.

V. *Merkwaardige eigenschappen der Bolvormige Driehoeken; meestal onder den vorm van Vraagstukken behandeld.*

XIII. VRAAGSTUK, *Fig.* 106.

§. 1214. *Al de zijden vau een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de loodregte bogen te vinden, welke, uit deszelfs hoekpunten, op de overstaande zijden vallen?*

OPLOSSING. Stellen wij ons voor, om den loodregten boog CD te vinden.

Uit de oplossing van het *VII. Vraagstuk*, is gebleken, dat de waarde van $sin.\,A$, door de formule

$$sin.\,A = \frac{2\sqrt{[sin.\,s \times sin.\,(s-a) \times sin.\,(s-b) \times sin.\,(s-c)]}}{sin.\,b \times sin.\,c}$$

bepaald wordt; zijnde in dezelve $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Nu is, in den regthoekigen bolvormigen driehoek ACD, $sin.\,CD = sin.\,A \times sin.\,AC = sin.\,A \times sin.\,b$; derhalve is:

$$sin.\,CD = \frac{2\sqrt{[sin.\,s \times sin.\,(s-a) \times sin.\,(s-b) \times sin.\,(s-c)]}}{sin.\,c} \quad (59)$$

Men stelle dus:

$$2\sqrt{[sin.\,s \times sin.\,(s-a) \times sin.\,(s-b) \times sin.\,(s-c)]} = M$$

dan heeft men, voor de sinussen der loodlijnen:

$$sin.\,CD = \frac{M}{sin.\,c},\ sin.\,AE = \frac{M}{sin.\,a} \text{ en } sin.\,BF = \frac{M}{sin.}$$

§. 1215.

§. 1215. GEVOLG. Uit deze vergelijkingen volgt onmiddellijk: *dat in een bolvormigen driehoek de sinus van elken loodregten boog, vermenigvuldigt met de sinus van de zijde, op welke hij valt, eene standvastige grootheid is.*

Want, uit de gevondene vergelijkingen volgt onmiddellijk:

$$A = \sin c \times \sin CD = \sin. a \times \sin. AE = \sin. b \times \sin. BF$$

en die eigenschap stemt met die van den platten driehoek overeen; in welke elke zijde, vermenigvuldigd met de loodlijn, die, uit het overstaande hoekpunt, op dezelve valt, eene standvastige grootheid (den dubbelen inhoud) is. De verkregene vergelijking verandert, ook inderdaad, wanneer de zijden van den bolvormigen driehoek zeer klein worden, in de bekende formule, door welke de inhoud van een platten driehoek, in eene functie zijner drie zijden, wordt voorgesteld.

§. 1216. AANMERKING. Men zal, door deze gevondene vergelijking, onder anderen de twee volgende Vraagstukken kunnen oplossen.

1°. *Zal men, wanneer,* (fig. 113) *in een hellend vlak QR, uit den voet van eene verticale lijn AP, twee lijnen AB en AC, naar welgevallen, in dit vlak getrokken zijn, uit de waargenomene hoeken PAB = a, PAC = c en BAC, den hoek, onder welke dit vlak het horizontale vlak snijdt, kunnen berekenen.*

2°. *Ook zal men, door dezelfde formule, den hoek* (fig 114.) *onder welken eenige lijn AP een vlak QR ontmoet, kunnen berekenen, wanneer men, uit het doorsnijdingspunt A, twee lijnen AB en AC, naar welgevallen, getrokken hebbende, de hoeken BAC, BAP en CAP, door dadelijke meting, bepaald heeft.*

XIV. VRAAGSTUK. *Fig.* 106.

§. 1217. *Al de hoeken van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, den loodregten boog te vinden, welke, uit het hoekpunt van éénen zijner hoeken, op de overstaande zijde valt?*

OPLOSSING. In het *VIII. Vraagstuk* is gevonden:

$$\sin. BC = \frac{2\sqrt{[-\cos. S \times \cos(S-A) \times \cos.(S-B) \times \cos.(S-C)]}}{\sin B \times \sin C}$$

Men vermenigvuldige deze vergelijking met $\sin. B$; dan zal men, aangezien in den regthoekigen bolvormigen driehoek BCD, $\sin. CD = \sin. B \times \sin. BC$ is, verkrijgen:

$$\sin. CD = \frac{2\sqrt{[-\cos S \times \cos(S-A) \times \cos.(S-B) \times \cos.(S-C)]}}{\sin. C} \quad (60)$$

Men stelle om te bekorten

$$N = 2\sqrt{[-\cos. S \times \cos.(S-A) \times \cos.(S-B) \times \cos.(S-C)]}$$

 dan

dan is

$$sin.\,CD = \frac{N}{sin.\,C},\ sin.\,BF = \frac{N}{sin\,B},\ sin.\,AE = \frac{N}{sin.\,A}$$

§. 1218. GEVOLG. *In alle bolvormige driehoeken, is de finus van elken hoek, vermenigvuldigd met de finus van den loodregten boog, welke uit het hoekpunt van dien hoek, op de overstaande zijde valt, eene standvastige grootheid; of zijn de finusfen van twee hoeken, in de omgekeerde reden van de finusfen der loodregte bogen, die, uit die hoekpunten, op de overstaande zijden vallen.*

Want, men heeft $N = sin.\,C \times sin.\,CD = sin.\,B \times sin.\,BF = sin.\,A \times sin.\,AE$ en $sin.\,C : sin.\,B = sin.\,BF : sin.\,CD$, enz.

XV. VRAAGSTUK. *Fig.* 106.

§. 1219. *Twee zijden a en b, met den ingesloten hoek C, van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, den loodregten boog CD te vinden, welke, uit het hoekpunt C van dien gegeven hoek, op de overstaande zijde valt?*

OPLOSSING. Volgens formule (53), uit de tafel, *Bladz.* 251, is, in den driehoek ABC, in welke hoek $ACD = P$ is,

$$tang.\,P = \frac{tang.\,b \times cot.\,a - cos.\,C}{sin.\,C}$$

Men verheffe deze vergelijking tot de tweede magt; dan wordt

$$tang^2.\,P = \frac{tang^2.\,b \times cot^2.\,a - 2\,tang.\,b \times cot.\,a \times cos.\,C + cos^2.\,C}{sin^2\,C}$$

Wanneer men nu bij deze de identifche vergelijking $1 = 1$ optelt; dan zal, omdat $1 + tang^2.\,P = sec^2.\,P = 1 : cos^2.\,P$ en $sin^2.\,C + cos^2.\,C = 1$ is,

$$\frac{1}{cos^2.\,P} = \frac{tang^2.\,b \times cot^2.\,a - 2\,cot.\,a \times tang\,b \times cos\,C + 1}{sin^2\,C}$$

worden. Men vermenigvuldige deze vergelijking met $cot^2.\,b$; dan wordt

$$\frac{cot^2.\,b}{cos^2.\,P} = \frac{cot^2.\,a - 2\,cot.\,a \times cot.\,b \times cos.\,C + cot^2.\,b}{sin^2.\,C}$$

Nu is, in den regthoekigen bolvormigen driehoek ACD, volgens de *VIII Stelling*, $tang.\,CD = tang\,b \times cos.\,P$; derhalve wordt, door omkeering dezer vergelijking, $cot.\,CD = 1 : tang.\,b \times cos.\,P = cot. : cos.\,P$ en $cot^2.\,CD = cot^2.\,b : cos^2.\,P$. De laatfte vergelijking wordt dan, indien men er den vierkants-wortel uit trekt:

$$cot\,CD = \frac{\sqrt{[cot^2.\,a - 2\,cot.\,a \times cot.\,b \times cos\,C + cot^2.\,b]}}{sin.\,C} \quad (61)$$

welke fymetrieke formule op onderfcheidene wijzen kan herleid worden.

XVI. VRAAG-

XVI. Vraagstuk. *Fig.* 106.

§. 1220. *Nog dienzelfden loodregten boog CD te vinden, wanneer de zijde $AB = c$, op welke hij valt, benevens de hoeken A en B, aan die zijde liggende, gegeven zijn?*

Oplossing. Wanneer men formule (47), *Bladz.* 251, namelijk,

$$\cot. AD = \cos. p = \frac{\text{tang.} A \times \cot. B + \cos. c}{\sin. c}$$

op dezelfde wijze, als, in de oplossing van het voorgaande *Vraagstuk*, behandelt; dan zal men vinden:

$$\cot. CD = \frac{\sqrt{[\cot^2. A + 2\cot. A \times \cot. B \times \cos. c + \cot^2. B]}}{\sin c} \quad (62)$$

welke vergelijking ook uit de vergelijking (61), met behulp van den aspunts-driehoek, kan gevonden worden.

XVIII. Stelling. *Fig.* 106.

§. 1221. *Indien men, uit twee hoekpunten A en C van een bolvormigen driehoek, loodregte bogen AE en CD, op de overstaande zijden BC en AB, laat vallen; die elkander binnen, of buiten den driehoek snijden; dan is vooreerst, de tangens van ééne dezer zijden AB, op welk de loodregte bogen vallen, vermenigvuldigd met de tangens van het afgesnedene deel BD, gelijk aan de tangens van de andere zijde BC, vermenigvuldigd met de tangens van het afgesnedene stuk BE; of*

$$\text{tang.} AB \times \text{tang} BD = \text{tang.} BC \times \text{tang.} BE \; . \; . \; . \; (63)$$

en, ten anderen, zijn de producten van de tangenten van de deelen, in welke die loodregte bogen elkander snijden, aan elkander gelijk

$$\text{tang.} AG \times \text{tang.} GE = \text{tang.} CG \times \text{tang.} DG \; . \; . \; . \; (64)$$

en, eindelijk, zullen de drie loodregte bogen, die uit de hoekpunten van al de hoeken, op de overstaande zijden vallen, elkander in hetzelfde punt G doorsnijden.

Betoog *van het eerste.* Volgens het *II. Gevolg* van de *XIV. Stelling*, is

$$\text{tang.} BD = \frac{\cos. AC - \cos. AB \times \cos. BC}{\sin. AB \times \cos BC}$$

en $$\text{tang.} BE = \frac{\cos. AC - \cos. AB \times \cos. BC}{\cos. BC \times \cos AB}$$

Uit deze vergelijkingen nu kan men de evenredigheid

 tang. BD

$$tang.\,BD : tang.\,BE = \frac{cos.\,AC - cos.\,AB \times cos.\,BC}{cos.\,AB \times sin.\,BC} : \frac{cos.\,AC - cos.\,AB \times cos.\,BC}{cos.\,AB \times sin.\,BC}$$

opstellen; welke evenredigheid, indien men de termen van de laatste reden door $cos.\,AC - cos.\,AB \times cos.\,BC$ deelt, en, daarna de redens omkeert, worden zal:

$$tang.\,BD : tang.\,BE = cos.\,AB \times sin.\,BC : sin.\,AB \times cos.\,BC$$

Deelt men nog de termen van de laatste reden door het product $cos.\,AB \times cos.\,BC$; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$tang.\,BD : tang.\,BE = tang.\,BC : tang.\,AB$$

uit welke laatste evenredigheid, dan onmiddellijk zal volgen:

$$tang.\,AB \times tang.\,BD = tang.\,BC \times tang.\,BE$$

Betoog *van het tweede*. Volgens de *VIII. Stelling*, is, in de regthoekige bolvormige driehoeken AGD en CGE,

$$tang.\,GD = tang.\,AG \times cos.\,AGD$$
$$tang.\,CG \times cos.\,CGE = tang.\,GE$$

Vermenigvuldigd men deze vergelijkingen met elkander; dan verkrijgt men:

$$tang.\,CG \times tang.\,GD \times cos.\,CGE = tang.\,AG \times tang.\,GE \times cos.\,AGD$$

Maar nu zijn de overstaande bolvormige hoeken AGD en CGE gelijk, en dus $cos.\,CGE = cos.\,AGD$; de laatste vergelijking wordt derhalve:

$$tang.\,CG \times tang.\,GD = tang.\,AG \times tang.\,GE$$

Betoog *van het derde gedeelte*. In den regthoekige bolvormige driehoeken BGD en BGE, is, volgens de *VIII. Stelling:*

$$tang.\,BD = tang.\,BG \times cos.\,U, \text{ en } tang\,BE = tang\,BG \times cos.\,T$$

Uit welke twee vergelijkingen, dadelijk de volgende evenredigheid,

$$tang.\,BD : tang.\,BE = cos.\,U : cos.\,T$$

kan worden opgesteld.

Men vermenigvuldige deze met de identische evenredigheid,

$$tang.\,AB : tang.\,BC = tang.\,AB : tang.\,BC$$

dan verkrijgt men:

$$tang.\,AB \times tang.\,BD : tang.\,BC \times tang.\,BE = tang.\,AB \times cos.\,U : tang.\,BC \times cos.\,T$$

Nu is, in het eerste gedeelte, betoogd, dat $tang.\,AB \times tang.\,BD = tang.\,BC \times tang.\,BE$; derhalve is

$$tang.\,AB \times cos.\,U = tang.\,BC \times cos.\,T$$
$$tang.\,AB : tang.\,BC = cos.\,T : cos.\,U \quad \ldots \quad (a)$$

Bijaldien nu de boog BGF niet loodregt staat op de zijde AC; dan zal het een andere boog BH zijn; en dan zal, volgens de *XI. Stelling*,

$$tang.\,AB : tang.\,BC = cos.\,CBH : cos.\,ABH$$

zijn;

zijn; uit welke evenredigheid en uit de evenredigheid (*a*) zal volgen;

$$\cos. CBH : \cos. ABH = \cos. T : \cos. U$$

en dus zal, volgens de *VIII. Stell. XI. B.*,

$$\cos. \tfrac{1}{2} AC : \tan g. \tfrac{1}{2}(ABH - CBH) = \cos. \tfrac{1}{2} ABC : \tan g. \tfrac{1}{2}(U - T)$$

waaruit dan onmiddellijk volgt:

$$\tan g. \tfrac{1}{2}(ABH - CBH) = \tan g. \tfrac{1}{2}(U - T)$$

$$ABH - CBH = U - T$$

of $ABH - CBH = ABF - CBF$

derhalve $ABH + CBF = CBH + ABF$

of $ABC - FBH = ABC + FBH$

Deze vergelijking eene tastbare ongerijmdheid zijnde, zoo volgt de waarheid van het gestelde uit dezelve onmiddellijk.

§. 1222. Gevolgen. 1°. *Uit het betoogde in het eerste gedeelte, volgen de vergelijkingen:*

$$\tan g. AB \times \tan g. BD = \tan g. BC \times \tan g. BE \quad . \; . \quad (63)$$

$$\tan g. AC \times \tan g. AF = \tan g. AB \times \tan g. AD$$

$$\tan g. BC \times \tan g. CE = \tan g. AC \times \tan g. CF$$

2°. *Uit het tweede gedeelte, volgt nog de dubbele vergelijking:*

$$\tan g. AG \times \tan g. GE = \tan g. BG \times \tan g. FG = \tan g. CG \times \tan g. DG \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (64)$$

3°. *In de figuur bestaat de merkwaardige vergelijking:*

$$\tan g. BD \times \tan g. CE \times \tan g. AF = \tan g. AD \times \tan g. CF \times \tan g. BE \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (65)$$

Want, indien men de drie vergelijkingen (64) in die orde, zoo als zij onder elkander geschreven staan, met elkander vermenigvuldigt, en het product door $\tan g. AB \times \tan g. AC \times \tan g. BC$ deelt; dan zal men de gestelde vergelijking verkrijgen.

4°. *Nog bestaat, in den bolvormigen driehoek, de vergelijking:*

$$\sin. R \times \sin. T \times \sin. P = \sin. U \times \sin. Q \times \sin. S \quad . \; . \; . \quad (66)$$

Want, volgens de *X. Stelling*, is, in de bolvormige driehoeken ABG, BCG en ACG, als volgt:

$$\sin. R : \sin. U = \sin. BG : \sin. AG \quad . \; . \; . \; . \quad (b)$$

$$\sin. T : \sin. Q = \sin. CG : \sin. BG$$

$$\sin. P : \sin. S = \sin. AG : \sin. CG$$

Indien men de overeenkomstige termen dezer evenredigheden met elkander vermenigvuldigt; dan verkrijgt men:

$$\sin. R \times \sin. T \times \sin. P : \sin. U \times \sin. Q \times \sin. S = \sin. AG \times \sin. BG \times \sin. CG : \sin. AG \times \sin. BG \times \sin. CG$$

daar nu de termen van de laatste reden gelijk zijn; zoo is ook

$$\sin. R \times \sin. T \times \sin. P = \sin. U \times \sin. Q \times \sin. S.$$

1223. Aanmerking. De betoogde Leerstelling geeft wederom

 ge-

gelegenheid, om de overeenstemming tusschen de platte en bolvormige driehoeken op te merken.

1°. *Vergelijking* (66) *bestaat, zonder eenige uitzondering, voor de bolvormige en platte driehoeken.*

Want, beschouwt men de bolvormige driehoek ABC als een platten driehoek; dan zal men, uit de evenredigheden (b), dezelfde vergelijking (66) verkrijgen.

2°. *Stelt men, dat de zijden van den bolvormigen driehoek* ABC *zeer klein worden; dan zullen de vergelijkingen* (63) *en* (64) *veranderen in de vergelijkingen, welke, in het* IV. Boek XX. Stelling, *voorkomen.*

XVII. Vraagstuk. *Fig.* 115 *en* 116.

§. 1224 *De zijvlakken van een drievlakkigen hoek* $ABCM$; *te weten, hoek* $AMC = c$, *hoek* $BMC = a$ *en hoek* $AMC = b$ *gegeven zijnde, te vinden; hoedanig uit het hoekpunt* M, *de lijn* MP *zal moeten getrokken worden, opdat zij, met elke der drie ribben, gelijke hoeken* AMP, BMP *en* CMP *make?*

Oplossing. Men denke, in het toppunt van den drievlakkigen hoek, het middelpunt van eenen bol; dan ontstaat de bolvormige driehoek ABC, om welks hoekpunten eenen kleinen cirkel van den bol kan gedacht worden, en door het middelpunt van welken kleinen cirkel de lijn MP, die het oppervlak van den bol in het aspunt P van dien kleinen cirkel snijdt, gaan moet; zijnde de bogen AP, BP en CP, aan elkander gelijk. Wanneer men zich nu dezen bolvormigen driehoek, in *fig.* 116, afzonderlijk voorstelt; dan heeft men drie gelijkbeenige bolvolmige driehoeken ABP, BCP en ACP, en laat men de loodregte bogen PD, PE en PF, op de zijden vallen; dan is $AD = BD = \frac{1}{2}c$; $BE = EC = \frac{1}{2}a$; $AF = CF = \frac{1}{2}b$; noemt men de hoeken; zoo als zij in de figuur geteekend zijn, en stelt men $AP = BP = CP = x$; dan is, vermits $s + t + u = 180°$ is;

$$\sin. u = \sin s \times \cos. t + \sin. t \times \cos. s \quad . \; . \; . \; . \; . \; (a)$$

Voorts is, uit de eigenschappen der regthoekige bolvormige driehoeken ADP, BDP en AFP, die in de figuur voorkomen, $\sin. s = \sin. \frac{1}{2}c : \sin. x$; $\text{tang.} \frac{1}{2}c = \text{tang.} x \times \cos. p$; uit welke twee vergelijkingen dan dadelijk volgt;

$$\sin. s = \frac{\cos. \frac{1}{2}c}{\cos. x} \times \cos. p; \text{ en } \sin. t = \frac{\cos. \frac{1}{2}a}{\cos. x} \times \cos. q$$

$$\cos. s = \cos. \frac{1}{2}c \times \sin p, \text{ en } \cos. t = \cos. \frac{1}{2}a \times \sin. q$$

$$\sin. u = \sin. \frac{1}{2}b : \sin. x$$

Stelt

Stelt men nu de waarde van *sin. s*, *sin. t*, *enz.* in de vergelijking (*a*); dan zal men vinden:

$$\frac{sin.\tfrac{1}{2}b}{sin.x} = \frac{cos.\tfrac{1}{2}a \times cos.\tfrac{1}{2}c}{cos.x} \times sin.(p+q) = \frac{cos.\tfrac{1}{2}a \times cos.\tfrac{1}{2}c}{cos.x} \times sin.B$$

waaruit, indien men ($s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$ zijnde,) voor *sin. B* de waarde in het *VII. Vraagstuk* gevonden, stelt, volgen zal:

$$tang.x = \frac{2\,sin.\tfrac{1}{2}a \times sin.\tfrac{1}{2}b \times sin.\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{[sin.s \times sin.(s-a) \times sin.(s-b) \times sin.(s-c)]}} \quad . (66)$$

§. 1225. AANMERKINGEN. 1°. *Door deze formule, wordt de hoek bepaald, door welks omwenteling, om één van deszelfs beenen, de regte cirkelvormige kegel ontstaat, welke om een gegeven drievlakkigen hoek kan beschreven worden*; of zoo men wil, *wordt door deze formule de kleine cirkel van den bol gevonden, wiens omtrek door de hoekpunten van den bolvormigen driehoek loopt.*

2°. Wanneer de bogen *a*, *b* en *c* zeer klein zijn; dan wordt, nagenoeg, $tang.x = x$, $sin.\tfrac{1}{2}a = \tfrac{1}{2}a$, $sin.\tfrac{1}{2}b = \tfrac{1}{2}b$, $sin.\tfrac{1}{2}c = \tfrac{1}{2}c$, $sin\,s = s$, $sin.(s-a)$, *enz.* en de vergelijking (66) verandert dan in de vergelijking, welke wij, in de *XXVII. Stell. V. Boek*, voor den straal van eenen cirkel gevonden hebben, welke om een platten driehoek beschreven is.

XVIII. VRAAGSTUK. *Fig.* 116.

§. 1226. *Wanneer niet de zijden; maar wel de standhoeken van de zijvlakken van den drievlakkigen hoek, gegeven zijn, hetzelfde, als in het voorgaande Vraagstuk, te vinden?*

OPLOSSING. Uit den regthoekigen bolvormigen driehoek *APD*, in welken $AP = x$ is, volgt:

$$tang.x = tang.\tfrac{1}{2}c : cos.p$$

Men stelle nu de halve som der hoeken $S = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C$; dan is, volgens de figuur, $S = p + q + r$; derhalve $p = S - (q + r) = S - C$ en $cos.p = cos.(S-C)$; de voorgaande vergelijking wordt derhalve:

$$tang.x = \frac{tang.\tfrac{1}{2}C}{cos.(S-C)}.$$

Nu is, zie *VII. Vraagstuk*,

$$tang.\tfrac{1}{2}c = \sqrt{-\frac{cos.S \times cos.(S-C)}{cos.(S-A) \times (S-B)}}.$$

Deelt men derhalve deze vergelijking door $cos.(S-C)$; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$tang.x = \frac{-cos.S}{cos.(S-A) \times cos.(S-B) \times cos.(S-C)} \quad . (67)$$

§. 1227. Gevolg. *Vergelijkt men de waarden van tang. a, welke in de formulen (66) en (67) voorkomen, met elkander; dan zal men, zie* Aanm. VIII. Vraagst. *verkrijgen.*

$$\frac{sin.\, a}{sin.\, A} = \frac{sin.\, b}{sin\, B} = \frac{sin.\, c}{sin.\, C} = \frac{2\, sin.\, \tfrac{1}{2} a \times sin.\, \tfrac{1}{2} b \times sin.\, \tfrac{1}{2} C}{-\, cos.\, S} \quad (68)$$

XIX. Vraagstuk. *Fig.* 117.

§. 1228. *De drie zijvlakken van een drievlakkigen hoek gegeven zijnde, uit deszelfs hoekpunt, binnen denzelven, eene lijn te trekken, die met elk der drie zijvlakken gelijke hoeken maakt?*

Oplossing. Deze vraag op te losfen, is hetzelfde als op het oppervlak van den bol, tot welken de bolvormige driehoek ABC, behoort een punt P te vinden; op die wijze binnen gezegden driehoek geplaatst zijnde, dat de loodregte bogen, welke uit dit punt P, op al de zijden vallen (namelijk $PD = PE = PF = y$) even groot zijn; en dit punt P derhalve de pool van eenen kleinen cirkel is, die de zijden van den bolvormigen driehoek in de punten D, E en F aanraakt.

Indien men, uit de hoekpunten A, B en C, tot het punt P, de groote cirkelbogen AP, BP en CP trekt; dan is het ligtelijk te zien: dat *hoek* $DAP =$ *hoek* $FAP = \tfrac{1}{2} A$, *hoek* $DBP =$ *hoek* $EBP = \tfrac{1}{2} B$, *hoek* $ECP =$ *hoek* FCP, $AD = AF$, $BD = BE$ en $CE = CF$ is. Nu is, volgens de figuur:

$$AD + BD + BE + CE + CF + AF = a + b + c = 2s$$

of, dat hetzelfde is:

$$AD + AF + BD + BE + CE + CF = 2s$$

$$\text{of}\quad 2AD + 2BE + 2CE = 2s$$

$$\text{en}\quad AD + BE + CE = s$$

$$AD = AF = s - (BE + CE) = s - a$$

Om dezelfde reden, is $BE = BD = s - b$ en $CF = CE = s - c$.

In den regthoekigen bolvormigen driehoek ADP, is, volgens de *VIII. Stelling*,

$$tang.\, y = tang.\, DAP \times sin.\, AD$$

$$\text{of}\quad tang.\, y = tang.\, \tfrac{1}{2} A \times sin.\, AD \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Nu is, volgens het *VII. Vraagstuk*,

$$tang.\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{sin.\,(s-b) \times sin.\,(s-c)}{sin.\, s \times sin.\,(s-a)}}$$

Men stelle deze waarde van *tang.* $\tfrac{1}{2} a$ in de vergelijking (a); dan verkrijgt men, aangezien $AD = s - a$ is:

$$tang.\, y = \sqrt{\frac{sin.\,(s-a) \times sin.\,(s-b) \times sin.\,(s-c)}{sin.\, s}} \quad . \quad (69)$$

§. 1229.

§. 1229 AANMERKINGEN. 1°. *Deze vergelijking is wederom daarin merkwaardig: dat zij, wanneer de zijden van den bolvormigen driehoek zeer klein worden, overgaat in de vergelijking, welke den straal van den cirkel bepaalt, die in eenen platten driehoek beschreven is.*

2° *Men zal dergelijke formulen vinden voor de bogen, welke van de zijden van de drie supplements-driehoeken even ver afstaan. Dit alles levert dan wederom een nieuw blijk op van de naauwe overeenstemming tusschen de platte en bolvormige driehoeken.*

XX. VRAAGSTUK. *Fig.* 117.

§. 1230. *Wanneer niet, zoo als in het voorgaande Vraagstuk, de zijvlakken van den drievlakkigen hoek, maar de standhoeken dezer zijvlakken gegeven zijn; de lijn te vinden, die, met elke dezer drie zijvlakken, gelijke hoeken maakt?*

OPLOSSING. Dit is hetzelfde, als uit de bolvormige hoeken A, B en C den boog $PD = PE = PF = y$ te vinden.

Uit de constructie der figuur, blijkt: dat *hoek* $APD =$ *hoek* APF, *hoek* $BPD =$ *hoek* BPE, *hoek* $ECP =$ *hoek* FCP is; zijnde deze gelijke hoeken door dezelfde letters p, q en r aangewezen. Nu is, volgens de figuur, $2p + 2q + 2r = 360°$, derhalve $p + q + r = 180°$, $q + r = 180° - p$ en $sin. (q + r) = sin. p$.

In den regthoekigen bolvormigen driehoek BPD, is volgens de *VIII. Stelling*, $sin. DP = sin. DBP \times sin. BP$ of $sin. y = sin. \tfrac{1}{2} B \times sin. DP$; derhalve is:

$$sin. BP = sin\ y : sin. \tfrac{1}{2} B \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Voorts is, in den driehoek BCP,

$$sin. BPC : sin. BCB = sin. BC : sin. PP$$

$$sin. (q + r) : sin. \tfrac{1}{2} C = sin. a : sin\ PB$$

dat is, omdat (zie boven) $sin. (q + r) = sin. p$ is,

$$sin. PB = sin. a \times \frac{sin. \tfrac{1}{2} C}{sin\ p}$$

uit deze, en uit de vergelijking (a), volgt dan eindelijk:

$$\frac{sin. y}{sin. \tfrac{1}{2} B} = sin\ a \times \frac{sin\ \tfrac{1}{2} C}{sin. p}$$

$$sin. y = sin. a \times \frac{sin\ \tfrac{1}{2} B \times sin. \tfrac{1}{2} C}{sin. p} \quad \ldots\ldots \quad (b)$$

Eindelijk is, in den regthoekigen driehoek APD, $cos. DAP = cos. DP \times sin. p$ of $cos. \tfrac{1}{2} A = cos. y \times sin. p$ en $sin. p = cos. \tfrac{1}{2} A : cos. y$. Stelt men nu deze waarde van $sin. p$ in de vergelijking (b); dan vindt men:

sin. y

$$sin.\,y = sin.\,a \times \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}B \times sin.\,\tfrac{1}{2}C \times cos.\,y}{cos.\,\tfrac{1}{2}A}$$

en, alles door *cos. y* deelende,

$$tang.\,y = sin.\,a \times \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}B \times sin.\,\tfrac{1}{2}C}{cos.\,\tfrac{1}{2}A} \quad \ldots\ldots \quad (c)$$

Nu is, zie *VIII. Vraagstuk*:

$$sin.\,a = \frac{2\sqrt{[-cos.\,S \times cos.\,(S-A) \times cos.\,(S-B) \times cos.\,(S-C)]}}{sin.\,B \times sin.\,C}$$

of, dat hetzelfde is,

$$sin.\,a = \frac{2\sqrt{[-cos.\,S \times cos.\,(S-A) \times cos.\,(S-B) \times cos.\,(S-C)]}}{4\,sin.\,\tfrac{1}{2}B\,cos.\,\tfrac{1}{2}B\,sin.\,\tfrac{1}{2}C\,cos.\,\tfrac{1}{2}C}$$

Stelt men deze waarde van *sin. a*, in de vergelijking (*c*); dan zal men vinden:

$$tang.\,y = \frac{\sqrt{[-cos.\,S \times cos.\,(S-A) \times cos.\,(S-B) \times cos.\,(S-C)]}}{2\,cos.\,\tfrac{1}{2}A \times cos.\,\tfrac{1}{2}B \times cos\,\tfrac{1}{2}C} \quad (70)$$

XXI. VRAAGSTUK. *Fig.* 117.

§. 1231. *De drie zijden van een bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de som van deszelfs hoeken te vinden?*

OPLOSSING. Volgens het *I. Vraagst. XI. B.*, formule (57) *Bladz.* 36, is

$$cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) = cos.\,\tfrac{1}{2}A\,cos.\,\tfrac{1}{2}B\,cos.\,\tfrac{1}{2}C - cos.\,\tfrac{1}{2}A\,sin.\,\tfrac{1}{2}B\,sin.\,C$$
$$-\,cos.\,\tfrac{1}{2}B\,sin.\,\tfrac{1}{2}A\,sin.\,\tfrac{1}{2}C - cos.\,\tfrac{1}{2}C\,sin.\,\tfrac{1}{2}A\,sin.\,\tfrac{1}{2}B \quad ..\ (a)$$

Men stelle nu, in deze vergelijking, de waarden, welke wij in de oplossing van het *VII. Vraagstuk* voor *cos.* ½ *A*, *cos.* ½ *B*, *cos.* ½ *C*, *sin.* ½ *A*, *sin.* ½ *B*, *sin.* ½ *C* gevonden hebben; dan zal men, indien men

$$\sqrt{[sin.\,s \times sin.\,(s-a) \times sin.\,(s-b) \times sin.\,(s-c)]} = P$$

stelt, verkrijgen:

$$cos.\,\tfrac{1}{2}A \times cos\,\tfrac{1}{2}B \times cos.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{P \times sin.\,s}{sin.\,a \times sin\,b \times sin.\,c}$$

$$cos.\,\tfrac{1}{2}A \times sin.\,\tfrac{1}{2}B \times sin.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{P \times sin.\,(s-a)}{sin.\,a \times sin.\,b \times sin.\,c}$$

$$cos.\,\tfrac{1}{2}B \times sin.\,\tfrac{1}{2}A \times sin.\,\tfrac{1}{2}C = \frac{P \times sin.\,(s-b)}{sin.\,a \times sin.\,b \times sin.\,c}$$

$$cos.\,\tfrac{1}{2}C \times sin.\,\tfrac{1}{2}A \times sin.\,\tfrac{1}{2}B = \frac{P \times sin\,(s-c)}{sin.\,a \times sin.\,b \times sin.\,c}$$

De vergelijking (*a*), wordt derhalve door de substitutie van deze waarden

$$cos.\,\tfrac{1}{2}(A+B+C) = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{sin.\,s - sin.\,(s-a) - sin\,(s-b) - sin.\,(s-c)}{sin.\,a \times sin.\,a \times sin.\,c} \times P \quad ..\ (b)$$

De-

Deze vergelijking (b), in welke $s = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$ is, wordt nu aldus herleid. Volgens de *VI. Stell. XI B.* is

$$\sin. s - \sin. (s - a) = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \times \cos. (s - \tfrac{1}{2} a)$$

of, omdat $s - \frac{1}{2} a = \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c = \frac{1}{2} (b + c)$ is,

$$\sin. s - \sin. (s - a) = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} (b + c)$$

en verder is,

$$\sin (s - b) + \sin. (s - c) = 2 \sin. [s - \tfrac{1}{2} (b + c)] \times \cos. \tfrac{1}{2} (b - c)$$

dat is, omdat $s - \frac{1}{2} (b + c) = \frac{1}{2} a$ is,

$$\sin. (s - b) + \sin. (s - c) = 2 \sin. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} (b - c)$$

Het blijkt, uit die herleidingen: dat de vergelijking (b) worden zal:

$$\cos. \tfrac{1}{2} (A + B + C) = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{2 \sin. \frac{1}{2} a \times [\cos. \frac{1}{2} (b + c) - \cos \frac{1}{2} (b - c)]}{\sin a \times \sin. b \times \sin. c} \times P \quad .. (c)$$

Maar, volgens de *VI. Stell. XI B*, is wederom

$$\cos. \tfrac{1}{2} (b + c) - \cos. \tfrac{1}{2} (b - c) = -2 \sin. \tfrac{1}{2} b \times \sin. \tfrac{1}{2} c$$

en verder is, volgens een zeer bekend beginsel,

$$\sin a \times \sin. b \times \sin. c = 8 \sin. \tfrac{1}{2} a \cos. \tfrac{1}{2} a \sin. \tfrac{1}{2} b \cos. \tfrac{1}{2} b \sin. \tfrac{1}{2} c \cos. \tfrac{1}{2} c$$

De vergelijking (c) zal dan, door de substitutie van die waarden eindelijk worden:

$$\cos. \tfrac{1}{2} (A + B + C) = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{-\sqrt{[\sin. s \times \sin (s - a) \times \sin (s - b) \times \sin. (s - c)]}}{2 \cos \frac{1}{2} a \times \cos. \frac{1}{2} b \times \cos. \frac{1}{2} c} \quad (71)$$

Door welke fraaije formule de som van de hoeken uit de gegevene zijden, kan worden berekend.

XXII. VRAAGSTUK. *Fig.* 98

§. 1232. *Den omtrek van een bolvormigen driehoek, uit deszelfs gegevene hoeken, te vinden?*

OPLOSSING. In den bolvormigen driehoek PQR, is, volgens de oplossing van het voorgaande *Vraagstuk*:

$$-\cos. \tfrac{1}{2} (P + Q + R) = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\sqrt{[\sin. s \times \sin. (s - PQ) \times \sin. (s - QR) \times \sin. (s - PR)]}}{2 \cos \frac{1}{2} PQ \times \cos \frac{1}{2} QR \times \cos. \frac{1}{2} PR}$$

$$\text{zijnde } s = \tfrac{1}{2} PQ + \tfrac{1}{2} PR + \tfrac{1}{2} QR$$

Nu is volgens de eigenschappen van den aspunts-driehoek ABC, die uit den driehoek PQR gevormd is, $P = 180^\circ - a$, $Q = 180^\circ - b$, $R = 180^\circ - c$; derhalve $P + Q + R = 540^\circ - (a + b + c)$

$$\tfrac{1}{2} (P + Q + R) = 270^\circ - \tfrac{1}{2} (a + b + c)$$

$$-\cos. \tfrac{1}{2} (P + Q + R) = \sin. \tfrac{1}{2} (a + b + c)$$

Verder is, volgens de figuur, $PQ = 180^\circ - C$, $QR = 180^\circ - A$, $PR = 180^\circ - B$; derhalve $PQ + QR + PR = 2s = 540^\circ - (A + B + C)$.

in-

Indien wij dan $A + B + C = 2S$ ſtellen; dan is:

$$s = 270^\circ - S; \quad \text{en} \quad sin.\, s = -cos.\, S$$

Nog is $2s - 2QR = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - 2(s - A)$; en om die reden wordt, als volgt:

$$s - QR = 90^\circ - (S - A) \quad \text{en} \quad sin.(s - QR) = sin.(S - A)$$
$$s - PR = 90^\circ - (S - B) \quad sin.(s - PR) = cos.\,(S - B)$$
$$s - PQ = 90^\circ - (S - C) \quad sin.(s - PQ) = sin.(S - C)$$
$$\tfrac{1}{2} QR = 90^\circ - \tfrac{1}{2} A \quad \text{en} \quad cos\, \tfrac{1}{2} QR = sin\, \tfrac{1}{2} A$$
$$\tfrac{1}{2} PR = 90^\circ - \tfrac{1}{2} B \quad cos\, \tfrac{1}{2} PR = sin\, \tfrac{1}{2} B$$
$$\tfrac{1}{2} PQ = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C \quad cos.\, \tfrac{1}{2} PQ = sin\, \tfrac{1}{2} C$$

Brengt men nu die waarden in formule (71) over; dan verkrijgt men:

$$sin.\, \tfrac{1}{2}(a + b + c) = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\sqrt{[-cos\, S \times cos.(S - A) \times cos.(S - B) \times cos.(S - C)]}}{2\, sin.\, \tfrac{1}{2} A \times sin.\, \tfrac{1}{2} B \times sin.\, \tfrac{1}{2} C} \quad . \quad (72)$$

XXIII. VRAAGSTUK.

§. 1233. *Te vinden: hoe den inhoud van een bolvormigen driehoek van twee zijner zijden a en b, en den ingeſloten hoek C, afhangt?*

OPLOSSING. In de *XL. Stelling VIII. Boek*, is bewezen: dat, wanneer het oppervlak van een bol $= \Omega$ geſteld wordt, en A, B, C de hoeken van een bolvormigen driehoek zijn, de inhoud van dien driehoek door de formule,

$$I = \frac{A + B + C - 180^\circ}{720^\circ} \times \Omega$$

wordt voorgeſteld.

In deze vergelijking is $A + B + C$ de ſom der bolvormige hoeken; daar nu die ſom altijd grooter dan twee regte hoeken is, is $A + B + C - 180^\circ$ altijd poſitief. Men heeft goedgevonden, *om de formule* $A + B + C - 180^\circ$ *het* ſpherisch exces *te noemen. Het ſperisch exces is dan het getal graden en deelen van dezelve, welke aanwijst: hoe veel de ſom der hoeken van een bolvormigen driehoek grooter dan twee regte hoeken is;* en wij hebben dan, om den inhoud van een bolvormigen driehoek te vinden, dezen regel: *acht regte hoeken ſtaat tot het ſperisch exces, als het oppervlak van den bol, tot den inhoud van den bolvormigen driehoek.* Dit ſphèrisch exces zullen wij door de letter ω voorſtellen, en dan is:

$$\omega = A + B + C - 180^\circ$$

Uit deze vergelijking volgt terſtond, $A + B + C = 180^\circ + \omega$, of $\tfrac{1}{2}(A + B + C) = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\omega$; gevolgelijk is:

$$tang.\, \tfrac{1}{2}(A + B + C) = -cot.\, \tfrac{1}{2}\omega \quad . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Vol-

Volgens formule (29), is nu

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B) = cot.\ \tfrac{1}{2}C \times \frac{cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a)}{cos.\ \tfrac{1}{2}(b+a)} \quad \ldots\ldots (b)$$

Nu is, zie *IV. Stell. XI. B.*;

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B+C) = \frac{taug.\ \tfrac{1}{2}(A+B)\ tang.\ \tfrac{1}{2}C}{1 - tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B) \times tang.\ \tfrac{1}{2}C}$$

Men stelle nu, in deze vergelijking, in plaats van $tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B)$ de waarde, die in vergelijking (b) voorkomende; dan is, volgens de vergelijking (a):

$$-cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{cot.\ \tfrac{1}{2}C \times cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a) + tang.\ \tfrac{1}{2}C \times cos.\ \tfrac{1}{2}(b+a)}{cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a) - cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a)}$$

of, indien men de teekens omkeert:

$$cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{cot.\ \tfrac{1}{2}C \times cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a) + tang.\ \tfrac{1}{2}C \times cos.\ \tfrac{1}{2}(b+a)}{cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a) - cos.\ \tfrac{1}{2}(b+a)} \quad . (c)$$

De teller van deze breuk wordt aldus herleid:

$$cot.\ \tfrac{1}{2}C \times cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a) = cot.\ \tfrac{1}{2}C\ cos.\ \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}b + cot.\ \tfrac{1}{2}C$$
$$sin.\ \tfrac{1}{2}a\ sin.\ \tfrac{1}{2}b$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}C \times cos.\ \tfrac{1}{2}(b+aq = tang.\ \tfrac{1}{2}C\ cos.\ \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}b - tang.\ \tfrac{1}{2}C$$
$$cin.\ \tfrac{1}{2}a\ sin.\ \tfrac{1}{2}b$$

en, indien men deze vergelijkingen optelt; dan wordt de teller van vergelijking (c):

$$(cot.\ \tfrac{1}{2}C + tang.\ \tfrac{1}{2}C)\ cos.\ \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}b + (cot.\ \tfrac{1}{2}C - tang.\ \tfrac{1}{2}C)$$
$$sin.\ \tfrac{1}{2}a\ sin.\ \tfrac{1}{2}b$$

Nu is, zie *II. Gev. IX. Stell. XI. B.*, *Bladz.* 47;

$$cot.\ \tfrac{1}{2}C + tang.\ \tfrac{1}{2}C = 2\ cosec.\ C$$
$$cot.\ \tfrac{1}{2}C - tang.\ \tfrac{1}{2}C = 2\ cot.\ C$$

de teller der voornoemde breuk wordt dan:

$$2\ cos.\ \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}b \times cosec.\ C + 2\ sin.\ \tfrac{1}{2}a\ sin.\ \tfrac{1}{2}b \times cot.\ C$$

De noemer van het gebroken (c) wordt, zie *VI. Stell. XI. B.*

$$cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a) - cos.\ \tfrac{1}{2}(b+a) = 2\ sin.\ \tfrac{1}{2}a \times sin.\ \tfrac{1}{2}b$$

De vergelijking (c) verkrijgt dan deze gedaante:

$$cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{cos.\ \tfrac{1}{2}a\ cos.\ \tfrac{1}{2}b \times cosec.\ C + sin\ \tfrac{1}{2}a\ sin.\ \tfrac{1}{2}b\ cot.\ C}{sin.\ \tfrac{1}{2}a\ sin.\ \tfrac{1}{2}b}$$

Men vermenigvuldige nu eerst teller en noemer van deze breuk met $sin.\ C$, en deele dezelve door $sin.\ \tfrac{1}{2}a \times sin.\ \tfrac{1}{2}b$; dan zal men, omdat $cosec.\ C \times sin.\ C = 1$, $sin.\ C \times cot.\ C$, en $cos.\ p : sin.\ p = cot.\ p$ is, eindelijk verkrijgen:

$$cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{cot\ \tfrac{1}{2}a \times cot.\ \tfrac{1}{2}b + cos.\ C}{sin.\ C} \quad \ldots (73)$$

door welke formule, uit de twee zijden a en b, en den ingesloten hoek C, het spherisch exces zal kunnen berekend worden.

§. 1234.

§. 1234. I. Gevolg. *Wanneer twee bolvormige driehoeken, onder denzelfden hoek C, gelijke inhouden hebben; dan zijn de producten van de tangenten der halve zijden, om de gelijke hoeken staande, gelijk; dat is, indien a en b de zijden van den eenen, en a' en b' de zijden van den anderen hoek zijn; dan zal*

$$tang.\tfrac{1}{2}a \times tang.\tfrac{1}{2}b = tang.\tfrac{1}{2}a' \times tang.\tfrac{1}{2}b \quad . \quad . \quad (74)$$

moeten zijn.

Want, indien de inhouden gelijk zijn; dan zijn ook de spherische excessen gelijk; en dan is:

$$cot.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{cot.\tfrac{1}{2}a \times cot.\tfrac{1}{2}b + cos.c}{sin.C} = \frac{cot.\tfrac{1}{2}a' \times cot.\tfrac{1}{2}b' + cos.C}{sin.C}$$

of deze met *sin.* C vermenigvuldigd, en aan beide zijden *cos.* C afgetrokken hebbende,

$$cot.\tfrac{1}{2}a \times cot.\tfrac{1}{2}b = cot.\tfrac{1}{2}a' \times cot.\tfrac{1}{2}b'$$

welke, indien zij in de identische vergelijking $1 = 1$ gedeeld wordt, geven zal:

$$tang.\tfrac{1}{2}a \times tang.\tfrac{1}{2}b = tang.\tfrac{1}{2}a' \times tang.\tfrac{1}{2}b'$$

eene vergelijking, welke, indien de zijden van den bolvormigen driehoek zeer klein worden in $ab = a'b'$ verandert, en dus op nieuw de overeenstemming tusschen de platte en bolvormige driehoeken aanwijst.

§. 1235. II. Gevolg. Men weet, uit de *XVI. Stelling VI. Boek*, dat, onder alle platte driehoeken, welke met twee gegevene zijden *a* en *b*, en een hoek *C*, tusschen die zijden, naar welgevallen genomen, zijn zamengesteld, die driehoek den grootsten inhoud zal hebben, wanneer de hoek *C* tusschen die standvastige zijden regt en gevolgelijk $C = A + B$ is; *zoo ook zal nu, onder alle bolvormige driehoeken, die twee gegevene standvastige zijden a en b hebben, die driehoek de grootste zijn, in welken de hoek C gelijk is aan de som der twee andere hoeken A en B.*

Men neme, zie *fig.* 118, $AM = 1$, en beschrijve, met dien straal AM, eenen cirkel. Men stelle de lijn ME regthoekig op AM; en na, door het punt E, eene onbepaalde lijn, loodregt op ME, en gevolgelijk evenwijdig aan AM getrokken te hebben, neme men, op den omtrek van den beschreven cirkel, de bogen $AB = \tfrac{1}{2}a$ en $AC = \tfrac{1}{2}b$; dan zijn $EF = cot.\tfrac{1}{2}a$ en $EG = cot.\tfrac{1}{2}b$.

Indien men nu $MH = EG$ neemt, en HI evenwijdig aan EF of AM trekt; dan zijn de driehoeken MEF en MHI gelijkvormig; en daarom is $ME : EF = MH : HI$; dat is, $1 : cot.\tfrac{1}{2}a = cot.\tfrac{1}{2}b : HI$; gevolgelijk is $HI = cot.\tfrac{1}{2}a \times cot.\tfrac{1}{2}b$.

Verder neme men boog AD = aan den bolvormigen hoek C, en trekke DK loodregt op AM; dan is $DK = sin.C$ en $KM = cos.C$,

voorts

Voorts neme men, op het verlengde van AM, de lijn $MP = MI = cot.\ \frac{1}{2}a \times cot.\ \frac{1}{2}b$; dan is klaarblijkelijk

$$PK = PM + KM = cot.\ \tfrac{1}{2}a \times cot.\ \tfrac{1}{2}b + cos.\ C$$

en, wanneer men nu de lijn PD trekt; dan is, in den regthoekigen driehoek PKD, $DK = PK \times tang.\ DPK$; derhalve is

$$tang.\ DPK = \frac{DK}{PK} = \frac{sin.\ C}{cot.\ \frac{1}{2}a \times cot.\ \frac{1}{2}b + cos.\ C}$$

en, wanneer men deze vergelijking omkeert,

$$cot.\ DPK = \frac{cot.\ \frac{1}{2}a \times cot.\ \frac{1}{2}b + cos.\ C}{sin.\ C} = cot.\ \tfrac{1}{2}\omega$$

gevolgelijk is de hoek DPK, door deze constructie verkregen, gelijk aan het halve *spherische exces* van den bolvormigen driehoek, wiens halve zijden de bogen AB en AC zijn, en wiens hoek tusschen die zijden gelijk is aan den boog AD. De hoek DPK staat derhalve tot vier regte hoeken, als de inhoud van den bolvormigen driehoek staat tot het geheele oppervlak van den bol.

Wanneer men nu onderstelt: dat de zijden a en b standvastig blijven, maar de hoek C verandert; dan is $MP = cot.\ \frac{1}{2}a \times cot.\ \frac{1}{2}b$ standvastig; en, zoo men verder aanneemt, dat $cot.\ \frac{1}{2}a \times cot.\ \frac{1}{2}b > 1$ is; dan zal het punt P buiten den omtrek van den cirkel vallen.

Men beschrijve, op PM, als middellijn, een halven cirkel, die den omtrek des eersten cirkels in L snijdt; dan is het, uit de figuur, duidelijk te zien: dat de hoek DPK (het halve spherische exces) op zijn grootst zal zijn, wanneer de hoek C gelijk aan den boog ADL is; in welk geval, het halve spherische exces zal zijn de hoek APL.

Omdat nu, zie *XX. Stell. V. B.* de hoek APD gemeten wordt door het halve verschil der bogen AD min QN; zoo zal, wanneer de inhoud op zijn grootst is, noodzakelijk

$$\tfrac{1}{2}\omega = \tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - 90^\circ = \tfrac{1}{2}(AL - LN) = \tfrac{1}{2}[AL - (180^\circ - AL)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(2LA - 180^\circ) = AL - 90^\circ = C - 90^\circ$$

zijn; gevolgelijk wordt

$$\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - 90^\circ = C - 90^\circ$$

trekt men hier van af $\frac{1}{2}C - 90^\circ = \frac{1}{2}C - 90^\circ$; dan verkrijgt men:

$$\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B = \tfrac{1}{2}C \quad \text{of} \quad C = A + B$$

Echter blijkt uit deze constructie: *dat een bolvormige driehoek, onder twee gegeven zijden en een ingesloten hoek, geen maximum kan worden, indien niet cos. ½ a × cot. ½ b grooter dan de eenheid is; of, met andere woorden, wanneer de som der zijden a en b niet kleiner dan 180° is.*

XXIV. VRAAGSTUK.

§. 1236. ***Den inhoud van een bolvormigen driehoek, in eene functie zijner drie zijden, te vinden?***

OPLOSSING. Omdat $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C = 90^\circ + \frac{1}{2}\omega$ is, zoo zal, naar den regel,

$$\cos.\tfrac{1}{2}(A+B+C) = -\sin.\tfrac{1}{2}\omega$$

zijn. Nu hebben wij, zie *XXI. Vraagst.* formule (71), de waarde van $\cos.\frac{1}{2}(A+B+C)$ gevonden, en wij hebben dan al ten eersten,

$$\sin.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{[\sin.s \times \sin(s-a) \times (\sin.(s-b) \times \sin.(s-c)]}}{2\cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos.\tfrac{1}{2}b \times \cos.\tfrac{1}{2}c} \quad (75)$$

Behalve deze vergelijking, welke reeds aan de vraag voldoet, kan men nog andere vinden, die niet minder merkwaardig zijn.

Wij hebben in het *XXIII. Vraagstuk* gevonden:

$$\cot.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cot a \times \cot.\tfrac{1}{2}b + \cos.C}{\sin.C} \quad \ldots\ldots (a)$$

Deze vergelijking kan aldus herleid worden. Men vermenigvuldige $1+\cos.a = 2\cos^2.\frac{1}{2}a$ en $1+\cos.b = 2\cos^2.\frac{1}{2}b$ met elkander; dan verkrijgt men:

$$1+\cos.a+\cos.b+\cos.a\times\cos.b = 4\cos^2.\tfrac{1}{2}a\times\cos^2.\tfrac{1}{2}b \quad . (b)$$

Men deele deze vergelijking (*b*) door $\sin.a \times \sin.b = 4\sin.\frac{1}{2}a \times \cos.\frac{1}{2}a \times \sin.\frac{1}{2}b \times \sin.\frac{1}{2}b$; dan verkrijgt men:

$$\cot.\tfrac{1}{2}a\times\cot.\tfrac{1}{2}b = \frac{1+\cos a+\cos.b+\cos.a\times\cos.b}{\sin.a\times\sin.b}$$

Telt men bij deze de identische vergelijking $\cos.C = \cos.C$; dan zal men, na verdere herleiding, verkrijgen:

$$\cot.\tfrac{1}{2}a\times\cot.\tfrac{1}{2}b+\cos.C = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1+\cos.a+\cos.b+\sin.a\times\cos b\times\cos.C+\cos.a\cos.b}{\sin.a\times\sin.b}$$

Nu is, zie *XIV. Stelling*,

$$\sin.a\times\sin.b\times\cos.C+\cos.a\times\cos.b = \cos.c$$

waardoor de laatste vergelijking wordt

$$\cot.\tfrac{1}{2}a\times\cot.\tfrac{1}{2}b+\cos.C = \frac{1+\cos.a+\cos.b+\cos.c}{\sin.a\times\sin.b}$$

Deelt men nu deze vergelijking door $\sin.C$; dan verkrijgt men, zie vergelijking (*a*):

$$\cot.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{1+\cos.a+\cos.b+\cos.c}{\sin.a\times\sin.b\times\sin.C} \quad \ldots (c)$$

In de oplossing van het *VII. Vraagstuk*, is gevonden:

$$\sin.C = \frac{2\sqrt{[\sin.s\times\sin.(s-a)\times\sin.(s-b)\times\sin.(s-c)]}}{\sin.a\times\sin.b}$$

Stelt men deze waarde van $\sin.C$ in de vergelijking (*c*); dan verkrijgt men:

$$\cot.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{1+\cos.a+\cos.b+\cos.c}{2\sqrt{[\sin.s\times\sin.(s-a)\times\sin.(s-b)\times\sin.(s-c)]}} \quad (76)$$

Vermenigvuldigt men de vergelijkingen (75) en (76) met elkander; dan

dan zal men vinden:

$$\cos.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{1 + \cos.a + \cos.b + \cos.c}{4\cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos.\tfrac{1}{2}b \times \cos.\tfrac{1}{2}c}$$

Men kan, in plaats van den teller dezer breuk, schrijven $(1+\cos.a) + (1\cos.b) + (1+\cos.c) - 2$; dat is, $2\cos^2.\tfrac{1}{2}a + 2\cos^2.\tfrac{1}{2}b + 2\cos^2.\tfrac{1}{2}c - 2$; derhalve is:

$$\cos.\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cos^2.\tfrac{1}{2}a + \cos^2.\tfrac{1}{2}b + \cos^2.\tfrac{1}{2}c - 1}{2\cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos\tfrac{1}{2}b \times \cos\tfrac{1}{2}c} \quad .\ .\ (77)$$

Men trekke deze vergelijking van $1 = 1$ af; dan verkrijgt men:

$$1 - \cos.\tfrac{1}{2}\omega = 2\sin^2\tfrac{1}{4}\omega = \ldots\ldots$$

$$\frac{1 - \cos^2.\tfrac{1}{2}a - \cos^2.\tfrac{1}{2}b - \cos^2.\tfrac{1}{2}c + 2\cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos.\tfrac{1}{2}b \times \cos.\tfrac{1}{2}c}{2\cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos.\tfrac{1}{2}b \times \cos\tfrac{1}{2}c.}$$

Men deele deze vergelijking door *Verg* 75, of door

$$\sin\tfrac{1}{2}\omega = 2\sin.\tfrac{1}{4}\omega \times \cos.\tfrac{1}{4}\omega = \ldots\ldots$$

$$\frac{\sqrt{[\sin s \times \sin.(s-a) \times \sin.(s-b) \times \sin.(s-c)]}}{2\cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos\tfrac{1}{2}b \times \cos.\tfrac{1}{2}c}$$

dan verkrijgt men:

$$\tan g.\tfrac{1}{4}\omega = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1 - \cos^2.\tfrac{1}{2}a - \cos^2.\tfrac{1}{2}b - \cos^2\tfrac{1}{2}c + 2\cos\tfrac{1}{2}a \times \cos.\tfrac{1}{2}b \times \cos\tfrac{1}{2}c}{\sqrt{[\sin.s \times \sin.(s-a) \times \sin.(s-b) \times \sin(s-c)]}} \quad (d)$$

De teller van deze breuk kan onder den vorm

$$(1 - \cos^2.\tfrac{1}{2}a)(1 - \cos^2.\tfrac{1}{2}b) - [\cos\tfrac{1}{2}a \times \cos\tfrac{1}{2}b - \cos.\tfrac{1}{2}c]^2 \quad (p)$$

gebragt worden; zoo als men zich daarvan, door dadelijke vermenigvuldiging, kan overtuigen.

Deze uitdrukking (p) kan wederom ontleed worden in de factoren,

$$\sin\tfrac{1}{2}a \times \sin.\tfrac{1}{2}b + \cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos.\tfrac{1}{2}b - \cos\tfrac{1}{2}c$$

en $\sin.\tfrac{1}{2}a \times \sin\tfrac{1}{2}b - \cos.\tfrac{1}{2}a \times \cos.\tfrac{1}{2}b + \cos\tfrac{1}{2}c$

zoo als blijken zal, wanneer men deze factoren werkelijk met elkander vermenigvuldigt.

In plaats van deze factoren, kan men verder schrijven:

$$\cos.\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos.\tfrac{1}{2}c$$

en $\cos.\tfrac{1}{2}c - \cos.\tfrac{1}{2}(a+b)$

of, dat hetzelfde is,

$$2\sin.\tfrac{1}{4}(-a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c)$$

en $2\sin.\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin.\tfrac{1}{4}(a+b-c)$

de vergelijking (d) wordt dan, na dezelve tot de tweede magt verheven, en $s = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c$ gesteld te hebben:

$$\tan g^2.\tfrac{1}{4}\omega = \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{16\sin^2.\tfrac{1}{2}s \times \sin^2\tfrac{1}{2}(s-a) \times \sin^2\tfrac{1}{2}(s-b) \times \sin^2\tfrac{1}{2}(s-c)}{\sin.s \times \sin.(s-a) \times \sin.(s-b) \times \sin.(s-c)}$$

aangezien nu $\sin.s = 2\sin.\tfrac{1}{2}s \times \cos.\tfrac{1}{2}s$, $\sin.(s-a) = 2\sin.\tfrac{1}{2}(s-a)$

$\times$ *cos.* $\frac{1}{2}(s-b)$ is, *enz.* Zoo wordt de laatste vergelijking, na uit dezelve den vierkants-wortel getrokken te hebben:

$$tang.\ \tfrac{1}{2}\omega = \ldots\ldots\ldots$$
$$\sqrt{[tang\ \tfrac{1}{2}s \times tang.\ \tfrac{1}{2}(s-a) \times tang.\ \tfrac{1}{2}(s-b) \times tang.\ \tfrac{1}{2}(s-c)]} \quad (78)$$

zijnde deze de fraaije formule van L'HUILLIER.

XXV. VRAAGSTUK. *Fig.* 119.

§. 1237. *Wanneer, op dezelfde basis AB, verscheidene bolvormige driehoeken ABC, welke denzelfden inhoud hebben, gedacht worden; dan begeert men: de kromme lijn te bepalen, in welke de toppunten van al die driehoeken gelegen zijn?*

OPLOSSING. Men late, door het midden van de basis AB, een loodregten boog EFG gaan, en men neme $EF = 90°$; dan is het punt F het aspunt van den boog AB.

Men late nog, door de punten F en C, een grooten cirkel gaan; dan zal die groote cirkel FCD den boog AB, of deszelfs verlengde, in D, regthoekig doorsnijden.

Men stelle $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $CD = q$ en $ED = p$; dan is, volgens de figuur, $AD = p + \frac{1}{2}c$ en $BD = p - \frac{1}{2}c$; en dan volgt, uit de regthoekige bolvormige driehoeken BCD en ACD, zie *VIII. Stelling*,

$$cos.\ a = cos.\ q \times cos.\ (p - \tfrac{1}{2}c),\quad cos.\ b = cos.\ q \times cos.\ (p + \tfrac{1}{2}c)$$
$$sin.\ q = sin\ a \times sin.\ B$$

Men stelle deze waarde van *cos a*, *cos. b* en *sin. q*, in de vergelijking

$$cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{1 + cos.\ a + cos.\ b + cos.\ c}{sin.\ a \times sin.\ b \times sin.\ C}$$

die, in de oplossing van het voorgaande Vraagstuk, gevonden is; en maakt men, bij die substitutie, $sin.\ b \times sin.\ C = sin.\ c \times sin.\ B = 2\ sin.\ \frac{1}{2}c \times cos.\ \frac{1}{2}c \times sin.\ B$; dan zal men verkrijgen

$$cot.\ \tfrac{1}{2}\omega = \frac{cos.\ \tfrac{1}{2}c + cos.\ p \times cos.\ q}{sin.\ \tfrac{1}{2}c \times sin.\ q}$$

welke vergelijking, verder herleid zijnde, worden zal:

$$cos.\ p \times cos.\ q = cot.\ \tfrac{1}{2}\omega \times sin.\ \tfrac{1}{2}c \times sin.\ q - cos.\ \tfrac{1}{2}c \quad . . \ (a)$$

In deze vergelijking (a), beteekent ω het spherisch exces van den bolvormigen driehoek ABC; derhalve is, voor alle driehoeken ABC, die dezelfde basis hebben, ω eene standvastige grootheid, en daar nu ook c standvastig is, zoo zijn de bogen p en q alleen veranderlijk; de vergelijking (a) is derhalve de vergelijking der coördinatenbogen p en q.

Om de betrekking tusschen deze bogen te vinden, verlenge men den loodregten boog EF ergens tot G, en men late door de punten C en G den grooten cirkelboog CG gaan. Deze twee bogen als veranderlijk be-

beschouwende, stelle men $CF = x$, $CG = y$; dan is $CF = 90° - q$ en hoek $CFG = 180° - p$. Uit den driehoek CFG kan men dan, volgens de *XV. Stelling*, de vergelijking

$$\cos.y = \sin.q \times \cos.x - \cos.p \times \cos.q \times \sin x \quad \ldots \quad (b)$$

opstellen.

Men vermenigvuldige de vergelijking (a) met $\sin.x$; dan verkrijgt men:

$$\cos.p \times \cos.q \times \sin.x = \cot.\tfrac{1}{2}\omega \times \sin.\tfrac{1}{2}c \times \sin.q \times \sin.x$$
$$- \cos.\tfrac{1}{2}q \times \sin.x$$

Indien men deze waarde in de vergelijking (a) overbrengt; dan verkrijgt men:

$$\cos.y = \cos.\tfrac{1}{2}c \times \sin.x + \sin.q \times [\cos x - \sin x \times \cot.\tfrac{1}{2}\omega \times \sin.\tfrac{1}{2}c] \quad (c)$$

In deze constructie, zijn de bogen x en y willekeuriglijk aangenomen; men kan dan

$$\cos.x - \sin.x \times \cot.\tfrac{1}{2}\omega \times \sin.\tfrac{1}{2}c = 0$$

stellen; en dan wordt, indien men deze vergelijking door $\sin.x$ deelt:

$$\cot.x = \cot.\tfrac{1}{2}\omega \times \sin\tfrac{1}{2}c$$

en $$\cos.y = \cos.\tfrac{1}{2}c \times \sin.x$$

Hieruit volgt dan: dat, wanneer de boog $GF = x$ zoo lang genomen wordt, dat $\cot.\tfrac{1}{2}\omega \times \sin.\tfrac{1}{2}c = \cot.x$ is, de boog $CG = y$ insgelijks eene standvastige grootheid zal zijn.

Men late dan, door C, het midden van de basis AB, een grooten cirkel gaan. Na $EF = 90°$ gemaakt en $\cot.FG = \cot.\tfrac{1}{2}\omega \times \sin.\tfrac{1}{2}c$ genomen te hebben, beschrijve men, uit G, als aspunt, met GC, als straal, een kleinen cirkel op het oppervlak van den bol; dan zal die kleine cirkel, de meetkunstige plaats zijn van de toppunten van al de bolvormige driehoeken, die op denzelfden boog AB staan, en denzelfden inhoud hebben.

XXVI. VRAAGSTUK.

§. 1238. *Het is, uit de oplossing van het* XXIV. Vraagstuk *gebleken: dat er bolvormige driehoeken ABC bestaan, in welke één der hoeken C gelijk is aan de som der twee anderen A en B. Men vraagt derhalve: de bijzondere eigenschappen van die soort van bolvommige driehoeken op te sporen?*

OPLOSSING. Men stelle $C = A + B$; dan is $A + B + C = 2C$, en derhalve C altijd grooter dan $90°$. Dit onder het oog houdende, zal men de volgende eigenschappen van die soort van bolvormige driehoeken ontdekken.

1°. *De zijden dezer driehoeken, worden door veel eenvoudiger formulen bepaald.*

Want $A + B + C = 2S$ stellende, of $S = C$; zoo volgt, uit de be-

 ken-

kende formule

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos.(S-A)\times\cos.(S-B)}{\sin.A\times\sin.B}$$

welke, in het *VIII. Vraagstuk*, gevonden is, $S-A=C-A=A+B-A=B$ en $S-B=C-B=A+B-B=A$

$$\cos.^2.\tfrac{1}{2}c = \frac{\cos.A\times\cos.B}{\sin.A\times\sin.B} = \cot.A\times\cot.B \quad . \quad . \quad (1)$$

En, uit de algemeene vergelijking,

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a = -\frac{\cos.S\times\cos.(S-A)}{\sin.B\times\sin C}$$

(omdat $S=C$ en $S-A=B$ is,) deze meer eenvoudige:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a = -\cot.B\times\cot.C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Om dezelfde reden, is,

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}b = -\cot A\times\cot.C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

2°. De som der vergelijkingen (2) en (3) zal geven:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a + \sin^2.\tfrac{1}{2}b = -(\cot.A+\cot.B)\times\cot C$$

Volgens de *XI Stell. XI. B.* hebben wij, omdat $A+B=C$ is,

$$\cot.A+\cot.B = \frac{\sin.(A+B)}{\sin.A\times\sin B} = \frac{\sin.C}{\sin A\times\sin.B}$$

Vermenigvuldigt men deze vergelijking met $\cot.C$; dan wordt

$$-(\cot.A+\cot.B)\times\cot.C = -\frac{\cos.C}{\sin.A\times\sin.B} = \ldots$$

$$\frac{\sin A\times\sin B-\cos A\times\cos.C}{\sin.A\times\sin.B} = 1-\cot.A\times\cot.B$$

Men verkrijgt dan eindelijk:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a + \sin^2.\tfrac{1}{2}b = 1-\cot.A\times\cot.B$$

maar, uit de vergelijking (1), volgt, dat

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}c = 1-\cos^2.\tfrac{1}{2}c = 1-\cot.A\times\cot.B$$

is; en wij verkrijgen alzoo de merkwaardige vergelijking:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}c = \sin^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2.\tfrac{1}{2}b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deze is de vergelijking op de vierkanten der halve koorden van de zijden des bolvormigen driehoeks. Deze koorden maken derhalve een regthoekigen platten driehoek, die, in het punt C regthoekig is. Het blijkt dus: *dat, wanneer men, om de hoekpunten des bolvormigen driehoeks, in welken $C=A+B$ is een kleinen cirkel beschrijft, de koorde van de zijde AB de middellijn van denzelven zal zijn, terwijl het aspunt van dien cirkel in het midden van de zijde AB zal liggen. Alle bolvormige driehoeken dus, welke AB tot basis hebben, en welker toppunten in den omtrek van dien kleinen cirkel liggen, hebben de eigenschap, dat* hoek C = hoek A + hoek B *is.*

3°. Omdat $2\sin^2.\tfrac{1}{2}x = 1-\cos.x$ is, en, volgens het voorgaande artikel

$$2\,sin^2.\tfrac{1}{2}c = 2\,sin^2.\tfrac{1}{2}a + 2\,sin^2.b$$

is, zoo zal men kunnen stellen:

$$1 - cos.c = 1 - cos.a + 1 - cos.b$$

of, na verschikking der termen:

$$1 + cos.c = cos.a + cos.b \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

uit welke vergelijking dan zal volgen:

$$cos^2.\tfrac{1}{2}c = cos.\tfrac{1}{2}(a+b) \times cos.\tfrac{1}{2}(a-b) \quad \ldots \quad (5)$$

Stelt men vergelijking (a) onder dezen vorm

$$1 - cos.a = cos\,b - cos.c$$

dan zal uit dezelve onmiddellijk volgen:

$$sin^2.\tfrac{1}{2}a = sin.\tfrac{1}{2}(b+c) \times sin.\tfrac{1}{2}(c-b) \quad \ldots \quad (6)$$

Om dezelfde reden, is nu ook

$$sin^2.\tfrac{1}{2}b = sin.\tfrac{1}{2}(a+c) \times sin.\tfrac{1}{2}(c-a) \quad \ldots \quad (7)$$

4°. Men stelle, in de algemeene vergelijking,

$$cos.C = \frac{cos.c - cos.a \times cos.b}{sin.a \times sin.b}$$

in plaats van $cos.c$, hare waarde $cos.a + cos.b - 1$, die uit de vergelijking (a) volgt; dan verkrijgt men:

$$cos.C = \frac{cos.a + cos.b - 1 - cos.a \times cos\,b}{sin.a \times sin.b}$$

Deze vergelijking kan gemakkelijk onder den vorm

$$cos.C = -\frac{(1 - cos\,a) \times (1 - cos.b)}{sin.a \times sin.b} = \ldots$$

$$- \frac{4\,sin^2.\tfrac{1}{2}a \times sin^2.\tfrac{1}{2}b}{4\,sin.\tfrac{1}{2}a\,cos.\tfrac{1}{2}a\,sin.\tfrac{1}{2}b\,cos.\tfrac{1}{2}b}$$

gesteld worden; uit welke dan onmiddellijk zal volgen:

$$cos.C = -\,tang.\tfrac{1}{2}a \times tang.\tfrac{1}{2}b \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Op dezelfde wijze zal men vinden:

$$cos.A = tang\,\tfrac{1}{2}b \times cot.\tfrac{1}{2}c \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$cos.B = tang.\tfrac{1}{2}a \times cot.\tfrac{1}{2}c \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

5°. Uit de *XIII. Stelling*, formulen (29) en (32) aldaar, verkrijgt men, omdat $C = A + B$ is, de vergelijkingen:

$$cos.\tfrac{1}{2}(a+b) = cos.\tfrac{1}{2}c \times cot\,\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$cos.\tfrac{1}{2}(a-b) = cos.\tfrac{1}{2}c \times cot.\tfrac{1}{2}C \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

door welke formulen, wanneer *hoek* C met de overstaande zijde c gegeven zijn, de onbekende zijden a en b zullen gevonden worden.

6°. Zijn A en a gegeven; dan zal men, uit de formulen der *XIII. Stelling*, verkrijgen:

$$sin.\tfrac{1}{2}(c+b) = sin.\tfrac{1}{2}a \times cot.\tfrac{1}{2}A \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$sin.\tfrac{1}{2}(c-b) = sin.\tfrac{1}{2}a \times tang.\tfrac{1}{2}A \quad \ldots \quad (14)$$

7°. Uit de Neperiaansche formulen, volgt nog:

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(A+B)=\sqrt{\frac{cos.\ \tfrac{1}{2}(a-b)}{cos.\ \tfrac{1}{2}(a+b)}}\quad\ldots\quad(15)$$

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{sin.\ \tfrac{1}{2}(a-b)}{sin\ \tfrac{1}{2}(a+b)}\times\sqrt{\frac{cos.\ \tfrac{1}{2}(a+b)}{cos.\ \tfrac{1}{2}(a-b)}}\ .\ (16)$$

§. 1239. I. Aanmerking. Het blijkt uit de gevondene formulen: *dat slechts twee gegevens genoeg zijn, om een bolvormigen driehoek, welks tophoek aan de som der twee andere hoeken gelijk is, te bepalen;* wordende zulk een driehoek even gemakkelijk, als een regthoekige bolvormige, berekend.

§. 1240. II. Aanmerking. *Fig.* 120. Laat ABC een driehoek zijn, waarin $C=A+B$ is. Wanneer men dan de zijden AC en BC verlengt, tot in C'; dan is ABC' de supplements-driehoek van ABC. Noemen wij nu, kortheidshalve, hoek $ABC'=B'$ en hoek $BAC'=A'$, dan is $C'=C=A+B$; $A'=180^\circ-A$ en $B'=180^\circ-B$; gevolgelijk $A'+B'+C'=360^\circ=4R$. Op dezelfde wijze, zal de som der hoeken van de supplements-driehoeken BCA' en ACB' gelijk 360° zijn. *Nemen wij dan, omgekeerd: dat de som der hoeken van eenigen driehoek ABC' gelijk 360° zij; dan zal de tophoek van elk der drie supplements-driehoeken gelijk aan de som der twee andere hoeken zijn.* Omdat nu $a=180^\circ-a'$ is, zal $sin.\ \tfrac{1}{2}a=cos.\ \tfrac{1}{2}a'$; $sin.\ \tfrac{1}{2}b=cos.\ \tfrac{1}{2}b'$ zijn; en daar $A=180^\circ-A'$; $B=180^\circ-B'$ is, zal $cot.\ A=-cot.\ A'$ en $cot.\ B=-cot.\ B'$ zijn, en de formulen (1), (2) en (3), die wij in de voorgaande oplossing gevonden hebben, zullen derhalve in

$$cos^2.\ \tfrac{1}{2}c'=cot.\ A'\times cot.\ B'\quad\ldots\ldots\quad(1)$$

$$cos^2.\ \tfrac{1}{2}a'=cot.\ B'\times cot.\ C'\quad\ldots\ldots\quad(2)$$

$$cos^2.\ \tfrac{1}{2}b'=cot.\ A'\times cot.\ C'\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

veranderen; *en, als eene bijzondere eigenschap van een bolvormigen driehoek*, waarvan de som der hoeken vier regte hoeken bedraagt, zal

$$cos.\ \tfrac{1}{2}a'\times cos.\ \tfrac{1}{2}b'\times cos.\ \tfrac{1}{2}c'=cot.\ A'\times cot.\ B'\times cot.\ C'$$

zijn. Voorts verandert de formule N°. (4) in:

$$sin^2.\ \tfrac{1}{2}a'+sin^2.\ \tfrac{1}{2}b'+sin^2.\ \tfrac{1}{2}c'=2\quad .\ :\ .\quad(4)$$

of, dat hetzelfde is, in

$$cos.\ a'+cos.\ b'+cos.\ c'=-1\quad\ldots\ldots\quad(5)$$

waaruit dan (*VI. Stell. XI. B.*) volgt:

$$cos^2.\ \tfrac{1}{2}a'=-cos.\ \tfrac{1}{2}(b'+c')\times cos.\ \tfrac{1}{2}(b'-c')\quad .\ .\quad(6)$$

$$cos^2.\ \tfrac{1}{2}b'=-cos.\ \tfrac{1}{2}(a'+c')\times cos.\ \tfrac{1}{2}(a'-c')\quad .\ .\quad(7)$$

$$cos^2.\ \tfrac{1}{2}c'=-cos.\ \tfrac{1}{2}(a'+b')\times cos.\ \tfrac{1}{2}(a'-b')\quad .\ .\quad(8)$$

verder zal men, uit dezelfde beginselen, vinden:

$$cos.\ C'=-cot.\ \tfrac{1}{2}a'\times cot.\ \tfrac{1}{2}b'\quad\ldots\ldots\quad(9)$$

$$cos.\ A'=-cot.\ \tfrac{1}{2}b'\times cot.\ \tfrac{1}{2}c'\quad\ldots\ldots\quad(10)$$

$$cos.\ B'=-cot.\ \tfrac{1}{2}a'\times cot.\ \tfrac{1}{2}c'\quad\ldots\ldots\quad(11)$$

$$cos.\ \tfrac{1}{2}(a'+b')=-cos.\ \tfrac{1}{2}c'\times cot.\ \tfrac{1}{2}C'\quad\ldots\ldots\quad(12)$$

cos.

$$\cos. \tfrac{1}{2}(a' - b') = + \cos. \tfrac{1}{2} c' \times \text{tang.} \tfrac{1}{2} C' \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}(c' - b') = + \cos. \tfrac{1}{2} a' \times \text{tang.} \tfrac{1}{2} A' \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

$$\cos. \tfrac{1}{2}(b' + c') = - \cos. \tfrac{1}{2} a' \times \cot. \tfrac{1}{2} A' \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

benevens nog vele andere vergelijkingen, welke alle leeren: *dat twee gegevens genoeg zijn, om eenen driehoek, waarvan de som der hoeken* 360° *is, te berekenen.*

§. 1241. III. AANMERKING. De inhoud van den driehoek, waarvan de som der hoeken vier regte hoeken is, is gelijk aan één vierde van het oppervlak van den bol, tot welken hij behoort: doch, het is merkwaardig: *dat het oppervlak van den bol, op oneindig vele wijzen, in vier gelijke- en gelijkvormige driehoeken kan verdeeld worden, waarvan de som der hoeken* 360° *is.* Laat, *fig.* 121, ABC zulk een driehoek zijn. Maak de hoek $CAD =$ hoek ACB, $AD = BC$, en trek de bogen CD en BD; dan is $AC = AC$, $AD = BC$, en hoek $CAD =$ hoek ACB; derhalve is $DC = AB$, *hoek* $ADC =$ *hoek* ABC en *hoek* $ACD =$ *hoek* BAC. Omdat nu de som der hoeken, om de punten A, B, C en D, vier regte hoeken is, zal ook *hoek* $BAD =$ *hoek* BCD, en $BD = AC$ zijn; waaruit dan de gelijkheid bij superpositie van deze vier driehoeken, die gelijk en onderling gelijkzijdig zijn, terstond in het oog valt. Om nu het eenvoudigste geval te stellen, neme men een gelijkzijdigen driehoek, wiens hoeken 120° zijn; dan is $\cos. \tfrac{1}{2} a = \cos. \tfrac{1}{2} b = \cos. \tfrac{1}{2} c = \text{tang.}\ 30^{\circ}$ en $a = b = c = 109^{\circ}\ 28'\ 16'', 27$. En, om het oppervlak van den bol, op zoo vele andere wijzen, als men goedvindt, in vier gelijke- en gelijkvormige deelen te verdeelen, neme men twee zijden a en b van eenen driehoek, naar welgevallen; mits $a + b > 180^{\circ}$ zij; en men berekene de derde zijde c door de formule $\cos. \tfrac{1}{2} c = \surd[- \cos. \tfrac{1}{2}(a+b) \times \tfrac{1}{2}(a-b)]$, dan zal men, wanneer men vier zulke driehoeken, onder deze zijden, zamenstelt, bevinden: dat zij het oppervlak van den bol volmaakt bedekken. *Er bestaan dan ook oneindig vele driehoekige piramiden, onder gelijke zijvlakken.*

§. 1242. IV. AANMERKING. *Men stelle zich eenen driehoek* ABC *voor, zoodanig, dat* $C = A + B$ *zij; dan stemt met denzelven een aspunts-driehoek overeen, waarin de som van twee zijden min de derde zijde, gelijk aan twee regte hoeken is. Even zoo zal met eenen driehoek, waarvan de som der hoeken vier regte hoeken is, een aspuntsdriehoek overeenstemmen, in welken de som der zijden twee regte hoeken bedraagt.* De formulen, ter oplossing van beide deze soorten van driehoeken, zullen uit de bovenstaande, naar de bekende regels, kunnen worden afgeleid.

XXVII. VRAAGSTUK. *Fig.* 106.

1243. *Wanneer men de hoekpunten* A, B *en* C *van een bolvormigen driehoek, door regte lijnen vereenigt; dan verkrijgt men*

een platten driehoek, welks zijden $AB=\gamma$, $BC=\alpha$ en $AC=\beta$ de koorden der bogen $AB=c$, $BC=a$ en $AC=b$ zijn. Gesteld nu: dat van een bolvormigen driehoek twee zijden $BC=a$ en $AC=b$, met den ingesloten hoek C, gegeven zijn; zoo vraagt men: den overeenstemmenden hoek $ACB=C'$ van den platten driehoek ABC te vinden?

Oplossing. Men stelle in de vergelijking,

$$\cos. c = \cos C \times \sin. a \times \sin. b + \cos. a \times \cos. b$$

welke in de *XIV. Stelling* betoogd is, $\cos. c = 1 - 2\sin^2. \frac{1}{2} c$, $\cos. a = 1 - 2\sin^2. \frac{1}{2} a$, $\cos. b = 1 - 2\sin^2. \frac{1}{2} b$, $\sin. a = 2\sin. \frac{1}{2} a \times \cos. \frac{1}{2} a$ en $\sin. b = 2\sin. \frac{1}{2} b \times \cos. \frac{1}{2} b$; dan verandert zij in deze:

$$1 - 2\sin^2. \tfrac{1}{2} c = 4\cos. C \times \sin. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} a \times \sin. \tfrac{1}{2} b \times \cos. \tfrac{1}{2} b$$
$$+ (1 - 2\sin^2. \tfrac{1}{2} a) \times (1 - \sin^2. \tfrac{1}{2} b)$$

welke bij nadere ontwikkeling wordt

$$1 - 2\sin^2. \tfrac{1}{2} c = 4\cos. C \times \sin \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} a \times \sin. \tfrac{1}{2} b \times \cos. \tfrac{1}{2} b$$
$$+ 1 - 2\sin^2. \tfrac{1}{2} a - 2\sin^2. \tfrac{1}{2} b + 4\sin^2. \tfrac{1}{2} a \times \sin^2. \tfrac{1}{2} b$$

en verder, wanneer men $1 = 1$ aftrekt, na verschikking der termen, en na de vergelijking met twee vermenigvuldigd te hebben:

$$4\sin^2. \tfrac{1}{2} a + 4\sin^2. b - 4\sin^2. \tfrac{1}{2} c = 8\cos. C \times \sin. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} a$$
$$\times \sin. \tfrac{1}{2} b \times \cos. \tfrac{1}{2} b + 8\sin^2. \tfrac{1}{2} a \times \sin^2. \tfrac{1}{2} b$$

zijnde eene vergelijking, die men onder den volgenden vorm kan voorstellen:

$$4\sin^2. \tfrac{1}{2} a + 4\sin^2. \tfrac{1}{2} b - 4\sin^2. \tfrac{1}{2} c = \ldots\ldots$$
$$8\sin. \tfrac{1}{2} a \times \sin. \tfrac{1}{2} b \times [\cos. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} b \times \cos. C + \sin. \tfrac{1}{2} a \times \sin. \tfrac{1}{2} b]$$

Volgens de figuur en de bekende beginselen, is $2\sin. \frac{1}{2} a = \alpha$, $2\sin. \frac{1}{2} b = \beta$ en $2\sin. \frac{1}{2} c = \gamma$; de voorgaande vergelijking wordt dan, door de substitutie van die waarden,

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\beta \times [\cos. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} b \times \cos. C + \sin. \tfrac{1}{2} a \times \sin. \tfrac{1}{2} b]$$

en, deze door $2\alpha\beta$ deelende,

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta} = \cos. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} b \times \cos. C + \sin. \tfrac{1}{2} a \times \sin. \tfrac{1}{2} b$$

Nu hebben wij in de *VIII. Stell. XI. B.* gezien, dat, in den platten driehoek ABC, de regtlijnigen hoek BCA door de formule

$$\cos. C' = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$$

is; wij verkrijgen dan, om dien hoek, uit de zijden a en b en den ingesloten hoek C, te vinden, de merkwaardige formule:

$$\cos. C' = \cos. \tfrac{1}{2} a \times \cos. \tfrac{1}{2} b \times \cos. C + \sin. \tfrac{1}{2} a \times \sin. \tfrac{1}{2} b \quad . . (1)$$

Welke formule, indien men voor $\cos. \frac{1}{2} a \times \cos. \frac{1}{2} b$ en $\sin. \frac{1}{2} a \times \sin. \frac{1}{2} b$ derzelver waarde stelt, in

$$\cos. C' = \cos. \tfrac{1}{2}(a-b) \times \cos^2. \tfrac{1}{2} C - \cos. \tfrac{1}{2}(a+b) \times \sin^2. \tfrac{1}{2} C \quad (2)$$

zal veranderen.

En,

En, zoo men deze laatste van $1 = \cos^2. \frac{1}{2} C + \sin^2. \frac{1}{2} C$ aftrekt; dan zal men verkrijgen:

$$\sin^2. \tfrac{1}{2} C' = \sin^2. \tfrac{1}{2}(a-b) \cos^2 \tfrac{1}{2} C - \cos^2. \tfrac{1}{2}(a+b) \sin^2. \tfrac{1}{2} C \quad (3)$$

§. 1244. AANMERKINGEN. 1°. In de vergelijking (1), zijn de producten $\cos. \frac{1}{2} a \times \cos \frac{1}{2} b$ en $\sin. \frac{1}{2} a \times \sin. \frac{1}{2} b$ altijd positief; omdat a en b altijd minder dan 180° zijn. Is de bolvormige hoek C gelijk 90°; dan wordt $\cos. C' = \sin \frac{1}{2} a \times \sin. \frac{1}{2} b$, en dus is, in dit geval, C' kleiner dan 90°. Nog minder wordt hoek C', indien (a en b standvastig blijvende) C grooter dan 90° wordt. Stelt men $C' = 90°$; dan verkrijgt men $\cos C = - \text{tang}. \frac{1}{2} a \times \text{tang} \frac{1}{2} b$, welke bestaanbaar zal zijn, zoo lang het product $\text{tang} \frac{1}{2} a \times \text{tang} \frac{1}{2} b$ minder dan de éénheid is.

2° *Wanneer men zich, zie fig. 116, verbeeldt, dat, om den bolvormigen driehoek ABC, een kleinen cirkel beschreven is, en dat men dan, uit deszelfs pool P, tot aan de hoekpunten A, B en C de groote cirkelbogen AP, BP en CP trekt; dan zijn de helften der bolvormige hoeken APB, BPC en APC gelijk aan de hoeken, welke de koorden der zijden, aan de hoekpunten C, A en B, met elkander maken.*

Want, zoowel de halve bolvormige hoeken APB, BPC en APC, als de hoeken der koorden ACB, BAC en ABC, worden door de halve bogen AB, BC en AC gemeten, en zijn derhalve gelijk. Deze eigenschap van den bolvormigen driehoek, stemt dus wederom met die van den platten driehoek overeen.

3°. Die overeenstemmingen tusschen de platte en bolvormige driehoeken is nog verder merkbaar in de volgende Leerstellingen, welker betoog wij aan den Lezer overlaten.

STELLING A. *Indien, binnen den omtrek van een kleinen cirkel van den bol, twee bogen AB en CD van groote cirkels bestaan, die elkander, in een punt E, snijden, en door den omtrek van dien kleinen cirkel bepaald zijn; dan is*

$$\text{tang}. \tfrac{1}{2} AE \times \text{tang}. \tfrac{1}{2} BE = \text{tang}. \tfrac{1}{2} CE \times \text{tang} \tfrac{1}{2} DE.$$

STELLING B *Wanneer in een kleinen cirkel een bolvormigen vierhoek ADBC beschreven is; dan is*

$$\text{hoek } DAC + \text{hoek } DBC = \text{hoek } ADB + \text{hoek } ACD.$$

STELLING C. *In dienzelfden bolvormigen vierhoek ADBC, is*

$$\sin \tfrac{1}{2} AB \times \sin. \tfrac{1}{2} CD = \sin. \tfrac{1}{2} AD \times \sin. \tfrac{1}{2} BC + \sin. \tfrac{1}{2} AC \times \sin. \tfrac{1}{2} BD.$$

Men kan nog meer zulke leerstellingen bijbrengen, welke gezegde overeenstemming bevestigen.

VI. *Iets over de Stereographische Projectie der bolvormige driehoeken.*

§. 1245. Wat men door de *stereographische projectie* te verstaan heb-

hebbe, is reeds in het ~~VIII~~ B. ~~XVI~~. *Stelling* verklaard. In deze projectie wordt, zie *fig.* 123, het oog van den waarnemer, in O, ergens in het oppervlak van den bol, geplaatst. Regthoekig door de middellijn *O M P*, laat men, door het middelpunt *M*, van den bol een onbepaald vlak gaan, dat het oppervlak van den bol, in den omtrek van een grooten cirkel *ZBGCN* snijdt: dit vlak wordt *het vlak van projectie* genoemd. Indien men, uit het oogpunt *O*, tot eenig punt *A* van het oppervlak van den bol, eene gezigtslijn *O A* trekt; dan zal die gezigtslijn of derzelver verlengde het vlak van projectie in het punt *F* doorsnijden. *Dit punt F is dan de stereographische projectie van het punt A.*

Het is duidelijk te zien: *dat de projectien van alle punten van de helft van het oppervlak, hetwelk, ten opzigte van het oogpunt, aan den anderen kant van het vlak van projectie ligt, binnen den omtrek van den grooten cirkel BGC zal vallen; doch de projectien der punten, in de andere helft van het oppervlak gelegen zijnde, liggen in het vlak van projectie, buiten den omtrek van den grooten cirkel. Die laatste projectien zijn des te verder van het middelpunt verwijderd, hoe nader het geprojecteerde punt bij het oogpunt O valt.* Verder is, op de aangehaalde plaats, bewezen: *dat de stereographische projectie van alle groote en kleine cirkels van den bol cirkels zijn, welker grootte en afmeting door constructie kan gevonden worden.* Eene niet minder merkwaardige eigenschap der stereographische projectie wordt in de volgende *Stelling* voorgedragen.

XIX. Stelling. *Fig.* 123.

§. 1246. *De hoek, onder welken de vlakken van twee groote, of van twee kleine cirkels, of van een grooten en kleinen cirkel van eenen bol elkander snijden, is altijd, welken stand die cirkels, ten opzigte van de as en van het vlak van projectie, mogen hebben, gelijk aan den hoek, onder welken de stereographische projectien van de omtrekken dezer cirkels elkander snijden.*

Betoog. Vooraf doen wij tot beter verstand van het gestelde opmerken: dat, zie *fig.* 122, de hoek, onder welken twee kromme lijnen *A B C* en *D B E* (en dus ook de omtrekken van twee cirkels) elkander snijden, eigenlijk de hoek *F B G* is, welke de raaklijnen der kromme lijnen, in het punt van doorsnijding, met elkander maken.

Laten, in *fig.* 123, *A B* en *A C* gedeelten van twee groote cirkels van eenen bol zijn, die elkander, in het punt *A*, op het oppervlak

door-

doorſnijden; *M* het middelpunt van den bol; *O* het oogpunt, en bijgevolg de middellijn *OMP* de as van de projectie; en zij eindelijk de groote cirkel *BGC* de doorſnijding van het oppervlak van den bol met het het vlak van projectie, dat door het middelpunt *M* gaat, en regthoekig op de as van projectie geplaatst is. Gezegde groote cirkels ſnijden dan den omtrek van het vlak van projectie, in de punten *B* en *C*, en maken derhalve, op het oppervlak van den bol, den bolvormigen drieboek *ABC*.

Men late, door het punt *A*, alwaar de omtrekken der twee groote cirkels elkander ſnijden en de as van projectie, de lijn *OMP*, een vlak gaan; dan zal dit vlak het oppervlak van den bol, volgens den grooten cirkel *PAGO*, ſnijden, en (*IV. Bep. VIII. B.*) loodregt op het vlak van projectie geplaatst zijn; en dus is *AG* de loodregte boog, die, uit het hoekpunt *A* van den bolvormigen driehoek *ABC*, op de overſtaande zijde *BC* valt.

Na den ſtraal *MA* getrokken te hebben, trekke men nog, uit het middelpunt *M*, door de punten *B*, *G* en *C*, de onbepaalde lijnen *MBD*, *MGH* en *MCE*, naar buiten; dan zijn die lijnen alle klaarblijkelijk in het vlak van projecte gelegen.

Men trekke, in de vlakken *AMB* en *AMC*, de lijnen *AD* en *AE*, loodregt op den ſtraal *AM*; dan zullen deze lijnen het verlengde der lijnen *MB* en *MC*, in de punten *D* en *E*, ontmoeten; de lijn *DE* zal dan in het vlak van projectie liggen; de regtlijnige hoek *DAE* is dan de bolvormige hoek *BAC*; de hoek anders, onder welken de groote cirkels *AB* en *AC* elkander ſnijden.

Het vlak DEA is, uit kracht van de verklaarde conſtructie, *het vlak, dat de oppervlakte van den bol, in het punt A, aanraakt.* Indien men derhalve, van *A* tot *H*, eene onbepaalde lijn trekt; dan zal zij den boog *AG*, in het punt *A*, aanraken; de hoeken *DAH* en *EAH* zullen eigenlijk de bolvormige hoeken *BAG* en *CAG* zijn. Eindelijk, omdat *AM*, met de lijnen *AD* en *AH*, regte hoeken maakt, ſtaat de lijn ~~XX~~ loodregt op het vlak ~~DMA~~; en op dit vlak ſtaat derhalve ook loodregt het vlak *PACO*; omdat het door de lijn *AM* gaat; en, aangezien dit laatſte vlak ook loodregt op het vlak *DME* ſtaat, zoo ſtaat de doorſnijding dezer vlakken, de lijn *DE* namelijk, loodregt op het vlak *AMH*; en de hoeken *AHD* en *AHE*, benevens de hoeken *MHD* en *MHE*, zijn alle regte hoeken.

Men trekke verder, uit het oogpunt *O*, de lijnen *OD*, *OE* en *OA*; dan zal de laatſte *AO* het vlak van projectie in het punt *F* ontmoeten. *Dit punt F is derhalve de ſtereographiſche projectie van het hoekpunt A*, en, wanneer men de lijnen *FD* en *EF* trekt; dan zullen deze de lijnen zijn, volgens welke de vlakken *OAD* en *OAE* het vlak van projectie ſnijden; zij zijn gevolgelijk de projectien der raaklijnen *DA* en *EA*; de raaklijnen namelijk van de projectien der cirkelbogen *AB* en *AC*; *de hoek DFE is dan de ſtereographiſche projectie van den hoek*

hoek DAE, *of van den bolvormigen hoek BAC*. En nu moet bewezen worden: *dat hoek DFE = hoek DAE is.*

Omdat *AM = OM* is, zoo is *hoek MAO = hoek MOA*. Omdat *hoek MAH* = 90° en *hoek OMF* = 90°, zoo is *hoek FAH = compl. MAO*, en *hoek MFO = hoek AFH = compl MOA*; gelijke hoeken hebben gelijke complementen; gevolgelijk is *hoek FAH = hoek AFH*, en bijgevolg *AH = HF*.

De regthoekige driehoeken *DHA* en *DHF*, zijn gelijk- en gelijkvormig; want *hoek DHA = hoek DHF*, *DH = DH*, en *AH = HF*; derhalve is ook *DA = DF*.

Om dezelfde reden, is *AE = EF*

Volgens de *XIII. Stell. I. B.*, zijn dan de driehoeken *DEA* en *DEF* gelijk- en gelijkvormig; en daarom is *hoek DFE = hoek DAE*.

Wanneer men dus het vlak van den driehoek *DAE*, om de lijn *DE* laat omdraaijen, tot dat hij op het vlak van projectie valt; dan zal het punt *A* in het punt *F* en de beenen van den hoek *DAF* langs de beenen van den hoek *DFE* vallen.

Het gestelde, voor twee groote cirkels van den bol betoogd zijnde, zoo zal nu gemakkelijk kunnen bewezen worden: dat hetzelve insgelijks zal moeten plaats hebben, wanneer een grooten eenen kleinen cirkel snijdt; of, wanneer twee kleine cirkels elkander snijden. Men verbeelde zich, tot dat einde, dat, door de raaklijnen *DA* en *EA* en het middelpunt van den bol, twee onbepaalde vlakken, *ADM* en *AEM* gaan. Laat men nu een dezer vlakken, *AEM* om de raaklijn *AE* een weinig omdraaijen; dan verkrijgt men de *doorsnijding van den omtrek* eens grooten en kleinen cirkels; draaijen beide vlakken om de raaklijnen *DA* en *EA*; dan verkrijgt men twee kleine cirkels, welker omtrekken elkander, op het oppervlak, in *A* doorsnijden. In beide gevallen, is *hoek DAE* de hoek, onder welken de omtrekken dezer cirkels elkander op het oppervlak van den bol, snijden (doch die hoek is niet meer, zoo als bij groote cirkels plaats heeft, de standhoek van derzelver vlakken,) daar nu de projectie van den hoek dezer raaklijnen (de hoek *DFE*) aan den hoek zelven gelijk is, zoo blijkt, dat het gestelde, voor alle groote en kleine cirkels van den bol, volstrekt algemeen is.

§. 1247. I. Aanmerking. *De projectien der groote cirkels, die elkander* (zie fig. 123,) *in A snijden, kunnen gemakkelijk door constructie bepaald worden.*

Men late, tot dat einde, door *OMP*, de as van projectie, een grooten cirkel *PZON* gaan, dien men naar welgevallen stelt, om den stand van elken grooten cirkel met denzelven te vergelijken. Die groote cirkel snijdt den grooten cirkel *IABK*, in de punten *I* en *K*, in de uiteinden van de middellijn *IMK*. Nu is het uit de figuur duidelijk te zien: *dat de stand van den cirkel IABK, door den bolvormigen hoek APZ, en de bogen AP en PI zal bekend zijn.*

Indien men, uit het oogpunt *O*, door de punten *I* en *K*, twee onbe-

bepaalde lijnen trekt, welke de middellijn ZN, of derzelver verlengde, in de punten R en L, doorsnijden; dan zijn deze punten R en L de projectien van de punten I en K; maar, het punt F de projectie van het punt A zijnde, zoo is het punt F insgelijks gegeven; gevolgelijk zal de cirkel, welke door de punten R, F en L gaat, (omdat de projectie van alle groote en kleine cirkels, cirkels zijn,) de stereographische projectie van den grooten cirkel $IABK$ zijn.

Het middelpunt van dien geprojecteerden cirkel, wordt, gelijk bekend is gevonden, wanneer men door het midden van de koorden LF en FR loodlijnen laat gaan.

De projectie van den grooten cirkel AC wordt, op dezelfde manier, gevonden.

Men stelle *hoek* $APZ =$ *hoek* $LMF = \phi$, *boog* $PI = p$ en *boog* $AP = q$; dan is *boog* $PZK = 180^\circ - p$. Volgens de bekende eigenschap van den cirkel, is *hoek* $MOR = \frac{1}{2}$ *boog* $PI = \frac{1}{2} p$, *hoek* $MOL = \frac{1}{2}$ *boog* $PZK = \frac{1}{2}(180^\circ - p) = 90^\circ - \frac{1}{2} p$, en *hoek* $MOF = \frac{1}{2}$ *boog*. $AP = \frac{1}{2} q$.

Neemt men derhalve, als naar gewoonte, den straal MO gelijk aan de éénheid; dan is $MR = tang.\ \frac{1}{2} p$, $ML = tang\ (90^\circ - \frac{1}{2} p) = cot.\ \frac{1}{2} p$ en $MF = tang.\ \frac{1}{2} q$. Hieruit volgt dan, dat $MR \times ML = tang.\ \frac{1}{2} p \times cot.\ \frac{1}{2} p = 1$ is.

Verlengt men MF tot aan den omtrek in S; dan is, zie *XXII. Stell. V. B.*, $MF \times MS = LM \times MR = 1$; derhalve is $MS \times tang.\ \frac{1}{2} q = 1$ en $MS = 1 : tang.\ \frac{1}{2} q = cot.\ \frac{1}{2} q$.

Laat, in *fig.* 124, de projectie van den grooten cirkel $IABK$, op eene kleinere schaal zijn voorgesteld. Zij T het middelpunt van denzelven, TV en TU lijnen, uit dit middelpunt, loodregt op de koorden LR en FS vallende; dan is, volgens de bekende eigenschap van den cirkel, en *III. Gev. IX. Stell. XI. B.*, $VM = VR - RM = \frac{1}{2}(cot.\ \frac{1}{2} p + tang.\ \frac{1}{2} p) - tang.\ \frac{1}{2} p = \frac{1}{2} cot.\ \frac{1}{2} p - tang.\ \frac{1}{2} p = cot\ p$.

Om dezelfde reden is $TU = cot.\ q$.

In de regthoekige driehoeken TMV en TMU, in welke wij $TM = x$ stellen, is 1°. $cos.\ TMV = VM : TM = cot.\ p$. en $sin.\ TMV = ..$ $V\left\{1 - \frac{cot^2.\ q}{x^2}\right\} = \frac{V(x^2 - cot^2.\ p)}{x}$; 2°. is $cos.\ TMU = \frac{UM}{TM} = \frac{cot.\ q}{x}$ en $sin.\ TMU = \frac{V(x^2 - cot^2.\ q)}{x}$.

Omdat nu $VMU = TMV + TMU = 180^\circ - \phi$ is; zoo is $cos.\ VMU = - cos.\ \phi$; en wij hebben dan:

$$cos.\ \phi = - \frac{cot.\ p\ cot.\ q}{x^2} + \frac{V(x^2 - cot^2.\ p)(x^2 - cot^2.\ q)}{x^2}$$

$$cos.\ \phi + \frac{cot.\ p\ cot.\ q}{x^2} = \frac{V(x^2 - cot^2.\ p)(x^2 - cot^2.\ q)}{x^2}$$

Men verheffe deze vergelijking tot de tweede magt; dan zal men verkrijgen:

$cos^2.\ \phi$

$$\cos^2.\phi + \frac{2 \cot. p \cot. q \cos. \phi}{x^2} = \frac{x^2 - (\cot^2. p + \cot^2 q)}{x^2}$$

Wanneer men nu uit deze de waarde van x oplost; dan zal men eindelijk vinden:

$$x = \frac{\sqrt{(\cot^2. p + 2 \cot. p \cot. q \cos \phi + \cot^2. q)}}{\sin \phi}$$

en eindelijk:

$$\cos. TMV = \frac{\cot. q \times \sin. \phi}{\sqrt{(\cot^2. p + 2 \cot. p \cot. q \cos. \phi + \cot^2. q)}}$$

door welke formulen al de afmetingen van den geprojecteerden cirkel, door berekening, zullen bekend worden.

§. 1248. II. Aanmerking. *Naar de verklaarde ſtereographiſche projectien, worden de algemeene wereldkaarten geconſtrueerd, die gewoonlijk onderſcheiden worden, in eene equatoriale, polaar- en horizontale projectie.*

1°. In de aequatoriale projectie, wordt, van den middagcirkel van het eiland *Ferro*, het oostelijk en westelijk halfrond der Aarde zoodanig geprojecteerd, dat, voor het eerſte, het oogpunt op den evenachtscirkel, op 270° lengte; en, voor het westelijk halfrond, op 90° lengte geplaatst is. *Het vlak van projectie is dan het vlak van den eerſten middagscirkel;* de projectien van de middagscirkels (die van 10° tot 10° graden worden voorgeſteld) zijn cirkelbogen, die door de polen gaan, de projectien van de parallel-cirkels zijn insgelijks cirkelbogen, die, volgens de verklaarde eigenſchappen, gemakkelijk kunnen geconſtrueerd en berekend worden.

Zij, in *fig.* 125, de cirkel $OAPB$ den omtrek van den aequator; A het nulpunt, vanwaar de lengte, oostwaarts geteld wordt; AB de lijn, volgens welke de eerſte middagscirkel het vlak der nachteveningen doorſnijdt; O het oogpunt, op 270° lengte, OMP de as van projectie; de lijn CMD de doorſnijding van een middagvlak met het vlak van de nachteveningen.

Om de projectie van dien middagscirkel te vinden, zoo trekke men de lijnen OC en OD, die het vlak van projectie, in de punten E en F, ontmoeten; dan is EF de middellijn van den cirkel (de projectie van den gezegden middagscirkel) wiens omtrek door de punten P en O gaat. Stelt men den boog $AC = L$ (zijnde de lengte van het punt C, ten opzigte van A) dan zal men ligtelijk vinden:

$$EM = tang. (45° - \tfrac{1}{2} L), \quad FM = tang. (45° + \tfrac{1}{2} L)$$

r. sec L. ~~$\tfrac{1}{2} EF = sec. \tfrac{1}{2} L.$~~

Wanneer, in dezelfde figuur, B de noordpool beteekent, en de koorde GH, die regthoekig op de as ſtaat; de middellijn van een parallel-cirkel, die op de breedte $PG = B$ ligt; dan zal, de lijnen OG en OH getrokken hebbende, IK de middellijn zijn van den cirkel, die de projec-

jectie van den parallel-cirkel voorstelt, en wiens omtrek door de punten G en H zal gaan.

Men zal, uit de figuur, ligtelijk vinden:

$$MI = tang.\ \tfrac{1}{2} B,\ MK = cot.\ \tfrac{1}{2} B \text{ en } \tfrac{1}{2} IK = co^{r}.\ B$$

Op die wijze, zijn de algemeene wereldkaarten geconstrueerd.

2°. In de pool projectie, wordt het noorder- en zuider-halfrond, op het vlak van de nachteveningen, afzonderlijk voorgesteld. De as van de Aarde is, in dezelve, het vlak van projectie. Het oogpunt is derhalve in eene der polen geplaatst. De projectien van al de middagscirkels zijn regte lijnen, die door de polen gaan; en de projectien der parallel-cirkels zijn cirkels, die hun gemeenschappelijk middelpunt in de projectie der polen hebben.

Zij, in *fig.* 125, A het oogpunt, AB de as der Aarde, en die der projectie tevens; OP de middellijn van den aequator, GH de middellijn van eenen parallel-cirkel, op de breedte $PG = B$; indien men dan de lijnen AG en AH trekt; dan is QR de middellijn van den geprojecteerden parallel-cirkel, en is $MR = MQ = tang.\ (45^{\circ} - \tfrac{1}{2} B)$.

3° In de horizontale stereographische projectie, wordt eene zekere plaats, bij voorbeeld *Leyden*, tot het middelpunt, de verticaal voor de as der projectie en de ware horizon voor het vlak van projectie aangenomen. Tot eigen oefening, laten wij thans aan den Lezer over, om de projectien van de middagscirkels en parallellen, zoo door constructie, als door berekening, te vinden; hetgeen hij ligtelijk, uit *figuur* 123, zal kunnen afleiden.

XXVIII. Vraagstuk. *Fig.* 126.

§. 1249. *Door middel van de stereographische projectie, het zij door berekening, het zij door constructie, een bolvormigen driehoek op te lossen, van welke twee zijden, met den ingesloten hoek, gegeven zijn?*

Oplossing. Zij O het oogpunt, OMA de as en ZFN het vlak van projectie. Men stelle één der hoekpunten A van den bolvormigen driehoek ABC in het uiteinde van de as OMA der projectie; dan zullen de verlengde zijden AC en AB, in het oogpunt, O zamenkomen.

Na de lijnen ZMN en MF getrokken te hebben, trekke men nog, uit het oogpunt, de lijnen OB en OC, die het vlak van projectie, in de punten E en D, ontmoeten; dan is (de lijn DE getrokken hebbende) de lijn DM de projectie van den boog AC, de lijn ME de projectie van den boog AB, en de lijn DE de projectie van de koorde van den boog BC; terwijl *hoek* DME gelijk is aan den bolvormigen *hoek* BAC.

Uit het betoog van de voorgaande *Stelling* en *Aanm.* op dezelve, is gebleken, dat $DM = tang.\ \tfrac{1}{2} AC = tang.\ \tfrac{1}{2} b$ en $ME = tang.\ \tfrac{1}{2} AB = tang.\ \tfrac{1}{2} c$ is. Volgens de *VII. Stell. XII. B.*, is dan

$$DE^2 = DM^2 + ME^2 - 2\,DM \times ME \times cos.\,DME$$

$$DE^2 = tang^2.\tfrac{1}{2}b + tang^2.\tfrac{1}{2}c - 2\,tang.\tfrac{1}{2}b \times tang.\tfrac{1}{2}c \times cos.\,DME$$

Volgens het *I. Gev. XIV. Stelling*, is verder:

$$cos.\,DME = cos.\,A = \frac{cos.\,a - cos.\,b \times cos.\,c}{sin.\,b \times sin.\,c}$$

De voorgaande vergelijking wordt derhalve:

$$DE^2 = tang^2.\tfrac{1}{2}b + tang^2.\tfrac{1}{2}c - 2\,tang.\tfrac{1}{2}b \times tang.\tfrac{1}{2}c \ldots$$
$$\times \frac{cos.\,a - cos\,b \times cos.\,c}{sin.\,b \times sin.\,c}$$

Deze vergelijking kan, door de volgende kunstige herleiding, onder eene zeer eenvoudige gedaante gebragt worden. Omdat $tang.\,x = sin.\,x : cos.\,x$ is, zoo kan zij, door de substitutie van die waarde, aldus worden voorgesteld:

$$DE^2 = \frac{sin^2.\tfrac{1}{2}b}{cos^2.\tfrac{1}{2}b} + \frac{sin^2.\tfrac{1}{2}c}{cos^2.\tfrac{1}{2}c} + 2\frac{sin.\tfrac{1}{2}b\,sin\,\tfrac{1}{2}c}{cos.\tfrac{1}{2}b\,cos.\tfrac{1}{2}c}\cdot\frac{cos.\,b\,cos.\,c - cos\,a}{sin.\,b\,sin.\,c}$$

Deze zal nog eenvoudiger worden, wanneer men, in de plaats van $sin.\,b \times sin.\,c$, schrijft $4\,sin.\tfrac{1}{2}b\,cos.\tfrac{1}{2}b\,sin.\tfrac{1}{2}c\,cos.\tfrac{1}{2}c$; want dan wordt zij:

$$DE^2 = \frac{sin^2.\tfrac{1}{2}b}{cos^2.\tfrac{1}{2}b} + \frac{sin^2.\tfrac{1}{2}c}{cos^2.\tfrac{1}{2}c} + \frac{cos.\,b \times cos.\,c - cos.\,a}{2\,cos^2.\tfrac{1}{2}b \times cos^2.\tfrac{1}{2}c}$$

Indien men al de breuken, die in het tweede lid dezer vergelijking voorkomen, tot eene enkele breuk vereenigt; dan zal men, na teller en noemer met twee vermenigvuldigd te hebben, verkrijgen:

$$DE^2 = \frac{4\,sin^2.\tfrac{1}{2}b\,cos^2.\tfrac{1}{2}c + 4\,sin^2.\tfrac{1}{2}c\,cos^2.\tfrac{1}{2}b + 2\,cos.\,b\,cos.\,c - 2\,cos.\,a}{4\,cos^2.\tfrac{1}{2}b\,cos^2.\tfrac{1}{2}c}$$

Nu is, in het algemeen, $2\,sin^2.\tfrac{1}{2}x = 1 - cos.\,x$ en $2\,cos^2.\tfrac{1}{2}x = 1 + cos.\,x$, en daarom kan de laatste vergelijking nog aldus worden voorgesteld:

$$DE^2 = \ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{(1 - cos.\,b)(1 + cos.\,c) + (1 + cos\,b)(1 - cos.\,c) + 2\,cos.\,b\,cos.\,c - 2\,cos.\,a}{4\,cos^2.\tfrac{1}{2}b \times cos^2.\tfrac{1}{2}c}$$

Nu is, als volgt:

$$(1 - cos.\,b)(1 + cos.\,c) = 1 - cos.\,b + cos.\,c - cos.\,b\,cos.\,c$$
$$(1 + cos.\,b)(1 - cos.\,c) = 1 + cos.\,b - cos.\,c + cos.\,b\,cos.\,c$$

en de laatste vergelijking wordt dan, door de substitutie van die waarden:

$$DE^2 = \frac{2 - 2\,cos.\,a}{4\,cos^2.\tfrac{1}{2}b \times cos^2.\tfrac{1}{2}b}$$

Maar, nu is $2 - 2\,cos.\,a = 4\,sin^2.\tfrac{1}{2}a$; en dus wordt eindelijk:

$$DE^2 = \frac{4\,sin^2.\tfrac{1}{2}a}{4\,cos^2.\tfrac{1}{2}b\,cos^2.\tfrac{1}{2}c} \quad \text{en} \quad DE = \frac{2\,sin.\tfrac{1}{2}a}{2\,cos.\tfrac{1}{2}b \times cos.\tfrac{1}{2}c}$$

De waarden van de zijden *DM* en *EM* van den driehoek *DME* kun-

kunnen nu verder, met behulp van de *V. Stell. XI. B.* aldus herleid worden:

$$DM = tang.\tfrac{1}{2}b = \frac{sin.\tfrac{1}{2}b \times cos.\tfrac{1}{2}c}{cos.\tfrac{1}{2}b \times cos.\tfrac{1}{2}c} = \frac{sin.\tfrac{1}{2}(b+c) + sin.\tfrac{1}{2}(b-c)}{2\,cos.\tfrac{1}{2}b \times cos.\tfrac{1}{2}c}$$

$$EM = tang.\tfrac{1}{2}c = \frac{sin.\tfrac{1}{2}c \times cos.\tfrac{1}{2}b}{cos.\tfrac{1}{2}c \times cos.\tfrac{1}{2}b} = \frac{sin.\tfrac{1}{2}(b+c) - sin.\tfrac{1}{2}(b-c)}{2\,cos.\tfrac{1}{2}b \times cos.\tfrac{1}{2}c}$$

Laat nu, in de figuur, op de projectie-as OA, de lijn $OH = 2\,cos.\tfrac{1}{2}b \times cos.\tfrac{1}{2}c = cos.\tfrac{1}{2}(b+c) + cos.\tfrac{1}{2}(b-c)$ genomen, en de lijnen HG en HI, evenwijdig aan MD en ME worden getrokken; dan verkrijgt men eene driehoekige piramide, die haar toppunt in het oogpunt heeft; en dan is, volgens de *V. Stell. X. B.*

$$DE : GI = DM : GH = EM : HI = OM : OH = 1 : 2\,cos.\tfrac{1}{2}b\,cos.\tfrac{1}{2}c$$

derhalve wordt

$$GI = DE \times 2\,cos.\tfrac{1}{2}b\,cos.\tfrac{1}{2}c = 2\,sin.\tfrac{1}{2}a = koorde\ a \quad \ldots\ (1)$$

$$GH = DM \times 2\,cos.\tfrac{1}{2}b\,cos.\tfrac{1}{2}c = sin.\tfrac{1}{2}(b+c) + sin.\tfrac{1}{2}(b-c) \quad (2)$$

$$HI = EM \times 2\,cos.\tfrac{1}{2}b\,cos.\tfrac{1}{2}c = sin.\tfrac{1}{2}(b+c) - sin.\tfrac{1}{2}(b-c) \quad (3)$$

en de hoek GHI, is gelijk aan den bolvormigen hoek ABC.

Door deze vergelijkingen, welke de zijden van een platten driehoek voorstellen, wiens hoek GHI aan den hoek A van den bolvormigen driehoek gelijk is, zal men de oplossing van het geval, om, uit de drie gegevene zijden van een bolvormigen driehoek, de hoeken te vinden, tot de oplossing van een platten driehoek kunnen brengen, wiens zijden, naar aanwijzing der vergelijkingen (1), (2) *en* (3) *van de goniometrische lijnen der zijden van den bolvormigen driehoek afhangen.* Men denke namelijk een platten driehoek GHI, wiens zijden GI, GH en HI aan $2\,sin.\tfrac{1}{2}a$, $sin.\tfrac{1}{2}(b+c) + sin\tfrac{1}{2}(b-c)$ en $sin.\tfrac{1}{2}(b+c) - sin.\tfrac{1}{2}(b-c)$ gelijk zijn, welke derhalve, door middel van de natuurlijke sinus-tafel, in dezelfde deelen worden voorgesteld, en men bereken den hoek, die tegen over de zijde, aan $2\,sin.\tfrac{1}{2}a$ gelijk zijnde, gelegen is; dan zal de bolvormigen hoek A, die over de zijde a staat, bekend worden Offschoon nu het berekenen van dien hoek GHI althans niet gemakkelijker, maar wel omslagtiger is, dan het onmiddellijk berekenen van den bolvormigen hoek A zelf; zoo zal men uit voornoemde vergelijkingen eene eenvoudige constructie kunnen afleiden. Ook berusten op die formulen de zamenstelling van een werktuig, in 1792, door JEAN FRANCOIS RICHER uitgevonden, bekend onder den naam van *Driehoeks-passer*, *compas trigonométrique*. Men zie CALLET, *supplement à la trigonométrie sphérique*, *Paris*, 1798.

En dit zij voor het tegenwoordige genoeg van de stereographische projectie. Men raadplege verder de onlangs uitgegevene verhandeling van den Hoogleeraar DANDELIN, getiteld: *Mémoires sur l'emploi des projections stéréographiques.*

VII. *Gevallen, in welke een bolvormige driehoek, door benadering, met een grooten graad van naauwkeurigheid, kan worden opgelost.*

XXIX. Vraagstuk.

§. 1250. *Wanneer, drie zijden a, b en c van eenen bolvormigen driehoek gegeven zijnde, de bekende zijden a en b weinig van 90° verschillen, den hoek C, tusschen de zijden a en b liggende, door eene eenvoudige benadering, te vinden?*

Oplossing. Men stelle $a = 90° - \alpha$ en $b = 90° - \beta$ en $C = c + x$; dan zal, omdat, wanneer $a = 90°$ en $b = 90°$ gesteld wordt, $C = c$ is, x een zeer kleine boog zijn, en de vergelijking $cos. C = [cos. c - cos. a \times cos. b] : sin. a \times sin. b$, zal in

$$cos. (c + x) = \frac{cos. c - sin. \alpha \times sin. \beta}{cos. \alpha \times cos. \beta}$$

veranderen. Maar, aangezien α en β zeer klein zijn, zal men, uit de bekende reeksen, voor de waarden van de sinus en cosinus van eenen boog, de vierde magten van α en β, als ten uitersten klein zijnde, verwaarloozende, vinden: $sin. \alpha \times sin. \beta = \alpha \times \beta$ en $cos. \alpha \times cos. \beta = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2$, en dan verkrijgt men:

$$cos. (c + x) = \frac{cos\ c - \alpha\beta}{1 - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2} = (1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\beta^2) \times (cos. c - \alpha\beta)$$

Maar verwaarloost men het vierkant van x; dan is: $cos. (c + x) = cos. c - x\ sin. c$, en men verkrijgt alzoo:

$$x = \frac{\alpha\beta - \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2) \times cos. c}{sin\ c}$$

in welke vergelijking (aangezien $\alpha\beta$ en $\frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$, ten opzigte van α en β zelve, zeer klein zijn,) niet meer dan zeer kleine grootheden verwaarloosd zijn geworden. Men stelle nu $\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = p$ en $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = q$; dan verandert de gevondene vergelijking in:

$$x = +p^2 \left(\frac{1 - cos. c}{sin. c}\right) - q^2 \left(\frac{1 + cos. c}{sin. c}\right) = +p^2 \times tang. \tfrac{1}{2}c$$
$$- q^2 . cot. \tfrac{1}{2}c$$

Het tweede lid dezer vergelijking, in deelen van den straal uitgedrukt zijnde, moet met het standvastige getal 206264″,8 vermenigvuldigd, of met $sin. 1''$ gedeeld worden, om x in secunden te verkrijgen: men heeft derhalve, in secunden van eenen boog:

$$x = + \frac{p^2 \times tang. \frac{1}{2}c}{sin. 1''} - \frac{q^2 \times cot. \frac{1}{2}c}{sin. 1''}$$
$$\text{en } C = c + x$$

wanneer echter α en $\beta > \pm 2°$ waren, zou het beter zijn, zich van de ge-

gewone oplossing des driehoeks te bedienen. De formule is zeer geschikt, om de hoeken, die men niet precies in het horizontale vlak heeft waarnomen, tot den horizon over te brengen. Zie *XVII. Vraagst. XII. B.*

XXX. VRAAGSTUK.

§. 1251. *Eenen bolvormigen driehoek, welks zijden, met betrekking tot den straal van den bol, tot welken hij behoort, zeer klein zijn, op de wijze van een regtlijnigen driehoek op te lossen?*

OPLOSSING. Laten a, b, c, de zijden van een bolvormigen driehoek zijn, behoorende tot den bol, welks straal $= r$ is; nemen wij, dat a, b, c en r, in dezelfde éénheden, bij voorbeeld, meters, zijn uitgedrukt; dan zullen de zijden van eenen bolvormigen driehoek, de éénheid tot straal hebbende, zijn $a : r$, $b : r$ en $c : r$, en, volgens de bekende eigenschap, zal

$$\cos. A = \frac{\cos. \frac{a}{r} - \cos. \frac{b}{r} \times \cos. \frac{c}{r}}{\sin. \frac{b}{r} \times \sin. \frac{c}{r}}$$

moeten zijn. Vermits nu r, in vergelijking van a, b en c, zeer groot is, zoo zal nagenoeg

$$\cos. \frac{a}{r} = 1 - \frac{a^2}{2r^2} + \frac{a^4}{24r^4}; \quad \cos. \frac{b}{r} = 1 - \frac{b^2}{2r^2} + \frac{b^4}{24r^4};$$

$$\cos. \frac{c}{r} = 1 - \frac{c^2}{2r^2} + \frac{c^4}{24r^4}$$

$$\sin. \frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{b^3}{6r^3}, \text{ en } \sin. \frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{c^3}{6r^3}$$

zijn. Stelt men dan deze waarden in de vergelijking voor $\cos. A$; dan zal men, na behoorlijke herleiding, en, na den teller en den noemer der breuk met $1 + (b^2 + c^2) : 6r^2$ vermenigvuldigd te hebben (de vijfde en hoogere magten verwaarloozende,) nagenoeg verkrijgen:

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{24bcr^2}$$

Verbeelden wij ons nu eenen regtlijnigen driehoek, welks zijden, in lengte, gelijk zijn aan de zijden van den voorgestelden bolvormigen driehoek. Zij A' de hoek, welke, in dien regtlijnigen driehoek, tegen over de zijde a staat; dan is (zie *VII. Stell. XI B.* en *Bijv. XVIII* en *XIX. Stell. III. B.*) $\cos. A' = (b^2 + c^2 - a^2) : 2bc$ en $4b^2c^2 \sin^2. A' = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$; en

$$\cos. A = \cos. A' - \frac{bc}{6r^2} \times \sin^2. A' \quad \ldots \ldots \quad (p)$$

Hieruit blijkt: dat $A > A'$ is; stel derhalve $A = A' + x$; men zal dan het

het vierkant van x, als zeer klein zijnde, zonder merkbare onnaauwkeurigheid, kunnen verwerpen, en dan is $cos. A = cos. A' - x\, sin. A'$. Trekt men nu deze vergelijking van de vergelijking (p) af; dan zal men, na alles door $sin. A'$ gedeeld te hebben, vinden: $x = \frac{bc}{6r^2} \times sin. A'$, en

$$A = A' + \frac{bc}{6r^2} \times sin. A'$$

Maar nu is $\frac{1}{2} bc \times sin. A'$ de inhoud van den regtlijnigen driehoek, waarvan a, b en c, de zijden zijn; en deze is (dit gevoelt men van zelf,) niet merkelijk van den inhoud des voorgestelden bolvormigen driehoeks onderscheiden: wanneer men derhalve den inhoud dezes driehoeks $= \omega$ stelt; dan zal $A' = A - \frac{\omega}{3r^2}$ zijn. Het zal op dezelfde wijze blijken: dat

$$B' = B - \frac{\omega}{3r^2}, \text{ en } C' = C - \frac{\omega}{3r^2}$$

is, en telt men deze vergelijking bij elkander, dan zal:

$$A' + B' + C' = 180^\circ = A + B + C - \frac{\omega}{r^2}$$

zijn. Men kan dan $\frac{\omega}{r^2}$ aanmerken, als het *exces* of de *overmaat* van de som der hoeken des bolvormigen driehoeks boven twee regte hoeken. Wij noemen voortaan, die overmaat het *sphærische exces*, en uit dit alles volgt dan deze merkwaardige eigenschap des bolvormigen driehoeks.

Een bolvormige driehoek, welks hoeken wij A, B en C noemen, en welks overstaande zijden a, b, c, met betrekking tot den straal van den bol, tot welken hij behoort, zeer klein zijn, stemt nagenoeg overeen met eenen regtlijnigen driehoek, welks zijden a, b en c, dezelfde lengte, als de zijden van den bolvormigen driehoek, hebben, en waarvan (indien ω het sphærische exces is,) de overstaande hoeken gelijk zijn aan $A - \frac{1}{3}\omega$, $B - \frac{1}{3}\omega$ *en* $C - \frac{1}{3}\omega$

§. 1252. AANMERKINGEN. 1°. Dit Theorema is, in de berekening der driehoeken, welke op het oppervlak van den Aardbol, in de *Geodesie*, ontworpen worden, van het uitgestrektste nut. De standplaatsen zijn, wel is waar, meestal, op onderscheidene afstanden van het middelpunt der Aarde, verwijderd; dan, men neemt, door de behoorlijke herleidingen in acht te nemen, in plaats van de waargenomen driehoeken, de bolvormige driehoeken, welke op een bolvormig waterpas ontworpen zijn. De bekende zijden dezer driehoeken moeten, tevens met den straal der Aarde, in dezelfde maat (bij voorbeeld, meters,) zijn uitgedrukt, en dan is, *het sphærische exces ω gelijk aan den inhoud van den driehoek, gedeeld door het vierkant van den straal der Aarde*, en om dit

sphe-

ſpheriſche exces, in ſecunden te verkrijgen, moet hetzelve met 206264″, 8, van den omtrek eens cirkels, welke in de lengte van den ſtraal begrepen zijn, vermenigvuldigd worden. Daar nu één vierde van den middagscirkel, of $\frac{1}{2} \pi r = 10000000$ meters is, zal $Log. r^2 = 13,6077602$ zijn. Dit aftrekkende van de Logarithmus van den ſtraal, in ſecunden uitgedrukt, namelijk *Log* 206264″, 8 = 5, 3144251, *verkrijgt men* 1,7066649 *voor den ſtandvastigen Logarithmus, welke men bij den Logarithmus van den inhoud des driehoeks moet optellen, en van de ſom tien aftrekken, om den Logarithmus van het ſpheriſche exces te vinden.*

2°. Wanneer dus twee zijden a en b, met den ingeſloten hoek, gegeven zijn; dan zal, daar $Inh. = \frac{1}{2}\, a b \times sin.\, C$ is, het ſpheriſche exces door

$$Log.\, \omega = Log.\, a + Log.\, b + Log.\, sin.\, C + 1,4056349 - 10 \quad (H)$$

gevonden worden.

3°. Is ééne zijde, met de twee aanliggende hoeken A en B, gegeven, zal, daar $Inh. = \frac{1}{2}\, c^2 \times sin.\, A \times sin.\, C : sin.\, (A+B)$ is, het ſpheriſche exces gevonden worden door

$$Log.\, \omega = 2\, Log.\, c + Log.\, sin.\, A + Log.\, sin.\, B - Log.\, sin.\, (A+B)$$
$$+ 1,4056349 - 10 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

4°. Zijn eindelijk de drie zijden a, b en c gegeven; dan zal, $s = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} b + \frac{1}{2} c$ ſtellende, het ſpheriſche exces

$$Log.\, \omega = \tfrac{1}{2}\, [Log.\, s + Log.\, (s-a) + Log.\, (s-b) + Log.\, (s-c)]$$
$$+ 1,7066649 - 10 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (K)$$

berekend worden.

5°. *Door het ſpheriſche exces, tot welks berekening vijf cijfers van de decimalen der Logarithmen voldoen, kan men den graad van naauwkeurigheid, met welken de hoeken aan de middelpunten der ſtandplaatſen, welke de zijden van eenen ſpheriſchen driehoek, op het oppervlak der Aarde, maken, vereenigen, ten ſtrengſte beoordeelen.* Bij voorbeeld, indien men, na behoorlijke herleiding tot de middelpunten der torens en tot den horizon, bevonden heeft, den hoek

Alkmaar, Waagtoren	39° 7′ 40″, 303
Amſterdam, Westertoren	53° 24′ 2″, 283
Edam, Kerktoren	87° 28′ 18″, 337

en, door eene ruwe berekening, de Logarithmen van de afſtanden dezer punten zijn bekend geworden, de Logarithmus afſtand van *Alkmaar* tot *Amſterdam*, in meters, = 4,4805476; dan zal men door formule (*I*) vinden $\omega = 1''$, 180: daar nu de ſom der waargenomene hoeken . . . . . = 180° 0′ 0″, 923 is, en de ſom dezer hoeken 180° 0′ 1″, 180 moet zijn; is deze ſom 0″, 257 te weinig, en elk der waargenomen hoeken moet gevolgelijk met 0″, 086 vermeerderd worden, om de misſlagen der waarneming over de hoeken gelijkelijk te verdeelen.

6°. Wanneer van een bolvormigen driehoek ééne der zijden, in meters, bekend is, en de bolvormige hoeken, aan deze zijde gelegen, zijn waargenomen; dan zal men den derden hoek bij concluſie vinden: wan-

 neer

voer men (het spherische exces door formule (*I*) berekend hebbende,) *het supplement van de som der waargenomen hoeken met het spherische exces vermeerdert; en trekt men dan één-derde van het spherische exces van elken hoek af; dan zullen de verschillen dienen, om de twee onbekende zijden, naar de regels der platte Driehoeksmeting, te bepalen.*

7°. Zijn voorts twee zijden van een kleinen bolvormigen driehoek, in meters, gegeven, benevens de ingesloten hoek; *dan zal men één-derde van het spherische exces van den gegeven hoek aftrekken, en dit verschil voor den hoek eens regtlijnigen driehoeks, dezelfde zijden als den gegeven bolvormigen driehoek hebbende, aannemen: men zal dan, door de berekening van dien regtlijnigen driehoek, de onbekende zijden vinden en de hoeken, die deze berekening geeft, met één-derde van het spherische exces moeten vergrooten, om de onbekende bolvormige hoeken van den gegevenen bolvormigen driehoek te verkrijgen.*

8°. Zijn de drie zijden van eenen bolvormigen driehoek, in meters, gegeven; *dan zal men, om de hoeken te vinden, den regtlijnigen driehoek, welke die gegevene zijden heeft, en elk der gevondene hoeken, met één-derde van het spherische exces, dat nu door de formule (K) gevonden wordt, moeten verhoogen.*

9°. *Eindelijk zal men nog, door de toepassing van diezelfde beginselen, een bolvormigen driehoek, welke twee zeer scherpe hoeken heeft, na eene ligte herleiding, op de wijze van een regtlijnigen, kunnen oplossen.* Want, de aspunts-driehoek van den gegevenen zal twee zijden hebben, die weinig minder dan 180° zijn; lost men nu de aspunts-driehoek van den laatsten op, welks zijden zeer klein zijn; dan zullen al de onbekede zijden en hoeken van den aspunts-driehoek, en gevolgelijk ook die van den gegevenen driehoek bekend worden.

VIII. *Nog iets, over het ontwikkelen van sommige formulen, in regelmatige reeksen.*

§. 1253. Het is reeds, bij de oplossing van de eenvoudige gevallen der regthoekige bolvormige driehoeken, gebleken, hoe de algemeene reeksen (219)—(225), die wij, in de XV, XVI en XVII. *Vraagstukken* van het XI. *Boek*, hebben leeren kennen, kunnen dienen, om, met voordeel, sommige gevallen der regthoekige driehoeken, door middel van dezelve, op te lossen. Wij zullen thans nog eenige toepassing dezer reeksen hier bijvoegen.

XXXI. VRAAGSTUK.

§. 1254. *De Neperiaansche analogien*

pang.

$$tang.\ \tfrac{1}{2}(B-A) = cot.\ \tfrac{1}{2}C \times \frac{sin.\ \tfrac{1}{2}(b-a)}{sin.\ \tfrac{1}{2}(b+a)}$$

en $$tang.\ \tfrac{1}{2}(B+A) = cot.\ \tfrac{1}{2}C \times \frac{cos.\ \tfrac{1}{2}(b-a)}{cos.\ \tfrac{1}{2}(b+a)}$$

in reekfen te ontwikkelen?

Oplossing. Met behulp van de reekfen (224) of (225), zie *Bladz.* 104, zal men vinden: dat, ftellende:

$$tang.\ \tfrac{1}{2}a \times cot.\ \tfrac{1}{2}b = m, \quad \text{en} \quad tang.\ \tfrac{1}{2}a \times tang.\ \tfrac{1}{2}b = n$$

zal gevonden worden:

$$\tfrac{1}{2}(B-A) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C - \frac{m \times sin.\ C}{sin.\ 1''} - \frac{m^2\ sin.\ 2\ C}{2\ .\ sin.\ 1''} - \frac{m^3\ sin.\ 3\ C}{3\ .\ sin.\ 1''}$$

$$- \frac{m^4\ sin.\ 4\ C}{4\ .\ sin.\ 1''} - \text{enz. (zijnde } b > a \text{ en } B > A)$$

$$\tfrac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C + \frac{n\ sin.\ C}{sin.\ 1''} - \frac{n^2\ sin.\ 3\ C}{2\ sin.\ 1''} + \frac{n^3\ sin.\ 3\ C}{3\ sin.\ 1''}$$

$$- \frac{n^4\ sin.\ 4\ C}{4\ sin.\ 1''} + \text{enz.}$$

door welke reekfen de halve fom en het halve verfchil der twee onbekende hoeken A en B, uit de gegevene zijden a en b en den ingefloten hoek C, kunnen gevonden worden; maar, daartoe wordt vereischt: dat beide reekfen genoeg convergeren, om flechts een gering aantal termen in de berekening noodig te hebben. De eerfte convergeert altijd; omdat, in de analogie, waaruit zij is afgeleid, $b > a$ gefteld wordt: de tweede reeks zal ook convergeren, indien $tang.\ \tfrac{1}{2}a \times tang.\ \tfrac{1}{2}b < 1$, of $tang.\ \tfrac{1}{2}a < cot.\ \tfrac{1}{2}b$ is; en, dit geval heeft klaarblijkelijk plaats, indien $a + b < 180^\circ$ is. Wanneer nogtans $a + b > 180^\circ$ is; dan zal men, door den aspunts-driehoek in plaats van den gegevenen te berekenen, de divergentie van de reeks kunnen vermijden. Dan, men zal, in allen gevalle, wanneer de gegevene zijden a en b, beneden de 45° vallen, en het verfchil dezer zijden zeer groot is, deze reekfen met voordeel kunnen gebruiken.

§. 1855. Gevolg. Uit de tweede reeks volgt onmiddellijk: dat

$$A+B+C-180^\circ = 2 \times \left\{ \frac{n\ sin.\ C}{sin.\ 1''} - \frac{n^2\ sin.\ 2\ C}{2\ sin.\ 1''} + \frac{n^3\ sin.\ 3\ C}{3\ sin.\ 1''} - \frac{n^4\ sin.\ 4\ C}{4\ sin.\ 1''} + \text{enz.} \right\}$$

is, zijnde $n = tang.\ \tfrac{1}{2}a \times tang.\ \tfrac{1}{2}b$, door welke reeks de overmaat van de fom der hoeken eens bolvormigen driehoeks boven twee regte hoeken, in eene reeks, welke eene functie van twee zijden en derzelver ingefloten hoek is, in een getal van fecunden, wordt voorgefteld; zoodat, wanneer men het getal, dat de berekening van deze reeks geeft, door 2592000″, welke in 720° begrepen zijn, deelt, het quotiënt de

betrekking van den inhoud des bolvormigen driehoeks tot den inhoud van het oppervlak van den bol, tot welken hij behoort, zal voorstellen.

XXXII. Vraagstuk.

§. 1256. *De vergelijkingen*

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}c = \sin^2.\tfrac{1}{2}(a+b)\times\sin^2.\tfrac{1}{2}C + \sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos^2.\tfrac{1}{2}C$$

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b)\times\sin^2.\tfrac{1}{2}C + \cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos^2.\tfrac{1}{2}C$$

welke in de III. Oplossing *van het* IX. Vraagstuk *gevonden zijn*, *in reeksen te herleiden?*

Oplossing. De termen van de leden dezer vergelijkingen kunnen aangemerkt worden, als voorstellende de zijden van twee regthoekige platte driehoeken; in den eersten van welke $\sin.\tfrac{1}{2}c$ de hypothenusa, $\sin.\tfrac{1}{2}(a+b)\times\sin.\tfrac{1}{2}C$ en $\sin.\tfrac{1}{2}(b-a)\cos.\tfrac{1}{2}C$ de regthoekszijden zijn; en, in den tweeden, $\cos.\tfrac{1}{2}c$, $\cos.\tfrac{1}{2}(a+b)\sin.\tfrac{1}{2}C$ en $\cos.\tfrac{1}{2}(b-a)\times\cos.\tfrac{1}{2}C$ de regthoekszijden. Nu kan men ook uit deze vergelijkingen twee andere afleiden, welke de zijden van een platten driehoek voorstellen, met den bolvormigen driehoek *ABC*, denzelfden hoek *C* gemeen hebbende. Men ontwikkele, tot dat einde, de waarden van $\sin^2.\tfrac{1}{2}(b+a)$, $\sin^2.\tfrac{1}{2}(b-a)$, $\cos^2.\tfrac{1}{2}(a+b)$ en $\cos^2.\tfrac{1}{2}(b-a)$, naar de bekende grondformulen, en schrijve voor $\sin^2.\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos.C$, en voor $\cos^2.\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos.C$; dan zal men vinden:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}c = \sin^2.\tfrac{1}{2}a\times\cos^2.\tfrac{1}{2}b + \sin^2.\tfrac{1}{2}b\times\cos^2.\tfrac{1}{2}a \ldots\ldots$$
$$- 2\sin.\tfrac{1}{2}a\times\cos.\tfrac{1}{2}b\times\sin.\tfrac{1}{2}b\times\cos.\tfrac{1}{2}a\times\cos.C \ldots \quad (uu)$$

$$\cos^2.\tfrac{1}{2}c = \cos^2.\tfrac{1}{2}a\times\cos^2.\tfrac{1}{2}b + \sin^2.\tfrac{1}{2}a\times\sin^2.\tfrac{1}{2}b \ldots\ldots$$
$$+ 2\sin.\tfrac{1}{2}a\times\cos.\tfrac{1}{2}b\times\sin.\tfrac{1}{2}b\times\cos.\tfrac{1}{2}a\times\cos.C \ldots \quad (vv)$$

Het is genoeg deze formulen aandachtig in te zien, om overtuigd te worden: dat de eerste (zie *VIII. Stell. XI B.*) de vergelijking is op de zijden van eenen regtlijnigen driehoek, welks zijden respectievelijk aan $\sin.\tfrac{1}{2}c$, $\sin.\tfrac{1}{2}a\times\cos.\tfrac{1}{2}b$ en $\sin.\tfrac{1}{2}b\times\cos.\tfrac{1}{2}a$, gelijk zijn, en welks hoek, tegen over de zijde $\sin.\tfrac{1}{2}c$ staande, gelijk *C* is; en dat de tweede formule de vergelijking is, op de zijden van eenen anderen regtlijnigen driehoek, welks zijden door $\cos.\tfrac{1}{2}c$, $\cos.\tfrac{1}{2}a\times\cos.\tfrac{1}{2}b$ en $\sin.\tfrac{1}{2}a\times\sin.\tfrac{1}{2}b$ worden voorgesteld, en waarvan $180° - C$ de hoek is, welke tegen over de zijde $\cos.\tfrac{1}{2}c$ staat.

Wanneer nu de vergelijking op eenen regtlijnigen driehoek $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\times\cos.C$ gegeven is; dan zal, zie *XXIII. Vraagstuk XI. B.*, in Neperiaansche Logarithmen,

$$Log.\gamma = Log.\alpha - \frac{\beta}{\alpha}.\cos.C - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}.\cos.2C - \frac{\beta^3}{3\alpha^3}.\cos.3C - \text{enz.}$$

of wel,

$$Log.\gamma = Log.\beta - \frac{\alpha}{\beta}.\cos.C - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}.\cos 2C - \frac{\alpha^3}{3\beta^3}.\cos.3C - \text{enz.}$$

en,

en, wanneer (de hoek ſtomp zijnde) de term $2\alpha\beta \times cos. C$ van teeken verandert; dan zal

$$Log.\gamma = Log.\alpha + \frac{\beta}{\alpha}.cos.C - \frac{\beta^2}{2\alpha^2}.cos.2C + \frac{\beta^3}{3\alpha^3}.cos.3C - enz.$$

$$Log\,\gamma = Log.\beta + \frac{\alpha}{\beta}.cos.C - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}.cos.2C + \frac{\alpha^3}{3\beta^3}.cos.3C - enz.$$

zijn, en men zal, naar dat $\alpha > \beta$ of $\beta > \alpha$ is, de eerſte of tweede reeks nemen, welke des te ſterker zal convergeren, naarmate het onderſcheid tusſchen de zijden α en β grooter is. Men vergelijke nu de vergelijking (uu), term voor term, met de vergelijking $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta.cos.C$; dan is $\alpha = \frac{1}{2}a \times cos.\frac{1}{2}b$ en $\beta = cos.\frac{1}{2}a \times sin.\frac{1}{2}b$; men zal dan,

$$tang.\tfrac{1}{2}a : tang.\tfrac{1}{2}b = p \text{ en } tang.\tfrac{1}{2}b : tang.\tfrac{1}{2}a = q$$

ſtellende, vinden:

$$Log.sin.\tfrac{1}{2}c = Log.cos.\tfrac{1}{2}a + Log.sin.\tfrac{1}{2}b \mp p.cos\,C - \tfrac{1}{2}p^2.cos.2C \mp \tfrac{1}{3}p^3.cos.3C - \tfrac{1}{4}p^4.cos.4C \mp \tfrac{1}{5}p^5.cos.5C - enz.$$

$$Log.sin.\tfrac{1}{2}c = Log.sin.\tfrac{1}{2}a + Log.cos.\tfrac{1}{2}b \mp p.cos.C - \tfrac{1}{2}q^2.cos.2C \mp \tfrac{1}{3}q^3.cos.3C - \tfrac{1}{4}q^4.cos.4C \mp \tfrac{1}{5}q^5.cos.5C - enz.$$

in welke vergelijkingen de bovenſte teekens, indien C ſcherp is, en de benedenſte, indien C ſtomp is, moeten genomen worden; en, wanneer $b > a$ is, zal de eerſte reeks convergeren; de tweede indien $a > b$ is.

De vergelijking (vv), term voor term, met $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta.cos.C$ vergelijkende, zal men:

$$tang.\tfrac{1}{2}a \times tang.\tfrac{1}{2}b = r, \text{ en } cot.\tfrac{1}{2}a \times cot.\tfrac{1}{2}b = s$$

ſtellende, vinden:

$$Log.cos.\tfrac{1}{2}c = Log.cos.\tfrac{1}{2}a + Log.cos.\tfrac{1}{2}b \pm r.cos.C - \tfrac{1}{2}r^2.cos.2C \pm enz.$$

$$Log.cos.\tfrac{1}{2}c = Log.sin.\tfrac{1}{2}a + Log.sin.\tfrac{1}{2}b \pm s.cos.C - \tfrac{1}{2}s^2.cos.2C \pm enz.$$

in welke reekſen, de bovenſte of benedenſte teekens gelden, naar dat C ſcherp of ſtomp is; en, vermits $r = 1 : s$ zal ééne dezer reekſen convergeren, indien de andere divergeert.

IX. *Gebruik van de regels der bolvormige Driehoeksmeting, in de Meetkunst der platvlakkige Ligchamen.*

§. 1257. IV. Bepaling. Wanneer men zich, op het oppervlak van eenen bol, een zeker aantal punten *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *enz.* voorſtelt, van welke geene drie in den omtrek van een grooten cirkel liggen, en men die punten door bogen *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *enz.* van groote cirkels vereenigt; dan verkrijgt men een bolvormigen veelhoek.

§. 1258. V. Bepaling. Indien men, in den kleinen cirkel van eenen bol, een regelmatigen veelhoek *ABCDEF enz.* beſchrijft, en door de zijden van dien regelmatigen veelhoek en het middel-

punt

punt van den bol, vlakken laat gaan; dan verkrijgt men een regelmatigen bolvormigen veelhoek, wiens zijden de bogen *AB*, *BC*, *CD*, *enz.* van groote cirkels zijn, en wiens hoekpunten alle in hetzelfde vlak van een kleinen cirkel liggen.

§. 1259. Aanmerking. Zij *P* de pool van den kleinen cirkel. Indien men dan, door de hoekpunten van den regelmatigen bolvormigen veelhoek en die pool, bogen van groote cirkels laat gaan; dan zal, omdat die bogen even groot zijn, het oppervlak van den regelmatigen bolvormigen veelhoek, in even zooveel gelijkbeenige bolvormige driehoeken *ABP*, *BCP*, *CDP*, *enz.* verdeeld zijn, als er zijden of hoeken in gezegden veelhoek bestaan. *De hoeken* $APB = BPC =$ *enz. zijn alle gelijk aan* $360° : n$, *indien* n *het aantal der zijden of hoeken voorstelt.*

XXXIII. Vraagstuk. *Fig.* 127.

§. 1260. *Gegeven zijnde de boog van den grooten cirkel, met welks koorde eenen kleinen cirkel, op het oppervlak van den bol, beschreven is; de zijden van eenen regelmatigen bolvormigen n-hoek, in den kleinen cirkel passende, benevens de polygoonshoek en de apothema van dien veelhoek te vinden?*

Oplossing. Laat *C* het aspunt van den kleinen cirkel zijn, waarin een regelmatige bolvormige veelhoek beschreven is; dan is dit punt tevens het middelpunt van dien veelhoek, welks oppervlak (indien men, uit het middelpunt *C*, tot aan al de hoekpunten, bogen van groote cirkels trekt,) in even zooveel onderlinge gelijke- en gelijkvormige middelpunts-driehoeken verdeeld wordt, als er hoeken of zijden in den veelhoek zijn. Nu is *ACB* een centerhoek, *ABD* een polygoonshoek; de boog *CE*, welke eenen centerhoek midden door deelt, de apothema. Stellen wij dan het getal der zijden $= n$; $AC = BC = DC =$ *enz.* $= r$; $CE = p$; $AB = BC =$ *enz.* $= a$; en $ABD = P$; dan is $ACB = 360° : n$; $ACE = BCE = 180° : n$; en de regthoekige bolvormige driehoek *ACE* geeft:

$$sin. \tfrac{1}{2} a = sin. r \times sin. \frac{180°}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$tang. p = tang. r \times cos. \frac{180°}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$cos. \tfrac{1}{2} P = cos. r \times tang. \frac{180°}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

XXXIV. Vraagstuk *Fig.* 128.

§. 1261. *Eéne der zijden van het grondvlak, benevens ééne der* op-

opstaande ribben van eene regelmatige piramide gegeven zijnde, den inhoud van deze piramide te vinden?

OPLOSSING. Zij ABM één der middelpunts-driehoeken van het grondvlak; ABC ééne der opstaande zijvlakken van de piramide; CM de loodlijn. Stel het getal der zijden $= n$; $AB = a$; $AM = r$; $AC = b$; $CM = h$; dan zal men hebben: $r^2 = \frac{1}{4}a^2 : sin^2. \frac{180^\circ}{n}$; $h^2 = b^2 - r^2$, en de inhoud van het grondvlak $= \frac{1}{4} n a^2 \times cot. \frac{180^\circ}{n}$. Hieruit zal men vinden: dat, stellende

$$sin.\psi = a : 2b \times sin. \frac{180^\circ}{n}$$

en den inhoud van de regelmatige piramide $= I$ zal zijn:

$$I = \tfrac{1}{12} n a^2 b \times cos.\psi \times cot. \frac{180^\circ}{n}$$

§. 1262. I. GEVOLG. Stellen wij $n = 3$ en $a = b$; dan verkrijgt men voor den inhoud van de driehoekige regelmatige piramide, welker opstaande ribben aan de zijden van het grondvlak gelijk zijn, $\frac{1}{12} a^3 \times \sqrt{2}$.

§. 1263. II. GEVOLG. Stellen wij $n = 4$ en $a = b$; dan is $I = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$. *Het dubbeld van de piramide is $\frac{1}{3} a^3 \sqrt{2}$ gelijk den inhoud van een achtvlakkig ligchaam, dat, door onderling gelijke- en gelijkzijdige driehoeken, a tot zijde hebbende, is ingesloten.*

§. 1264. AANMERKING. Wanneer niet b maar den hoek CAB, die wij gelijk q stellen, gegeven is; dan heeft men:

$$sin.\psi = cos.q \times cosec. \frac{180^\circ}{n}$$

$$I = \tfrac{1}{24} n a^3 \times sec.q \times cos.\psi \times cot. \frac{180^\circ}{n}$$

XXXV. VRAAGSTUK. *Fig.* 129.

§. 1265. *Al de ribben AB, AC en AD van den drievlakkigen hoek A van een parallelopipedum, benevens de hoeken BAC, BAD en CAD, welke deze ribben met elkander maken, gegeven zijnde; den inhoud van dit parallelopipedum te vinden?*

OPLOSSING. Stel $AB = a$; $AC = b$; $AD = c$; hoek $BAC = \gamma$; $BAD = \beta$ en $CAD = \alpha$. Volgens de *XI. Stell. IX. B.* is Inhoud Parallelogram $ABEC = a b \times sin.\gamma$. Laat nu DP loodregt op het grondvlak vallen; dan wordt de inhoud van het parallelopipedum (*II. Gev. XV. Stell. X. B.*) door

$$Parallelogr.\ ABCE \times DP = ab \times DP \times sin.\gamma \quad . \; . \; . \; (P)$$

uitgedrukt. Men moet nu nog DP uit deze vergelijking wegmaken. Men denke, tot dat einde, eenen bol, welks middelpunt in het hoekpunt

punt *A* geplaatst zij; dan zijn de zijden van den bolvormigen driehoek, welke uit de snijding der zijvlakken ontstaat, de maat der hoeken α, β en γ, en de hoek *DAP* wordt door den loodregten boog, die uit het toppunt dezes driehoeks op zijne basis valt, gemeten; derhalve is, (*VII. Vraagst.*) $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=s$ stellende,

$$sin.\,DAP = \frac{2\sqrt{[sin\,s \times sin.(s-\alpha) \times sin.(s-\beta) \times sin.(s-\gamma)]}}{sin.\,\gamma}$$

daar nu $DP = AD \times sin.DAP = c \times sin.DAP$ is, zal men deze waarde van *DP* in (*P*) stellende, vinden: (den inhoud van het parallelopipedum $= I$ stellende,)

$$I = 2\,abc \times \sqrt{[sin.\,s \times sin.(s-\alpha) \times sin.(s-\beta) \times sin.(s-\gamma)]}$$

§. 1266. I. Gevolg. Stel $\alpha=\beta=\gamma=90°$; dan is $s=135°$; $s-\alpha = s-\beta = s-\gamma = 45°$; en $sin.s = sin.135° = sin.45° = \frac{1}{2}\sqrt{2} = sin.(s-\alpha) = sin.(s-\beta) = sin.(s-\gamma)$, en men verkrijgt, in dit geval,

$$I = 2\,abc \times \sqrt{[\tfrac{1}{2}\sqrt{2}]^4} = 2\,abc \times [\tfrac{1}{2}\sqrt{2}]^2 = abc$$

zoo als het behoort.

§. 1267. II. Gevolg. *Fig.* 129. Indien men de lijnen *BC*, *BD* en *CD* trekt; dan is de piramide *ABCD* gelijk aan één-zesde van het parallelopipedum; bijgevolg is

$$\text{Inhoud Piramide } ABCD = \ldots\ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{3}\,abc \times \sqrt{[sin.\,s \times sin.(s-\alpha) \times sin.(s-\beta) \times sin.(s-\gamma)]}$$

§. 1268. III. Gevolg. Men stelle, in de laatste vergelijking, $\alpha=\beta=\gamma=60°$, dan is:

$$\text{Inhoud Pir. } ABCD = \tfrac{1}{12}\,abc \times \sqrt{2}$$

stelt men nog $a=b=c$, dan vindt men, voor den inhoud van het regelmatige viervlak, $\frac{1}{12}a^3 \times \sqrt{2}$. Vergelijk §. 1262.

§. 1269. Aanmerking. Men zal, met behulp van het *XVII. Vraagstuk*, den inhoud van een parallelopipedum, en van eene piramide, in eene functie van de drie ribben van éénen der drievlakkige hoeken, en de standhoeken van deszelfs zijvlakken, kunnen uitdrukken.

XXXVI. Vraagstuk. *Fig.* 130.

§. 1270. *Den afstand van het hoekpunt eener driehoekige piramide tot het overstaande zijvlak, in eene functie van de zes ribben, te vinden?*

Oplossing. (Hoewel dit en eenige volgende Vraagstukken wel niet tot de bolvormige drie- en veelhoeken behooren, staan dezelve daarmede toch in zulk een naauw verband, dat wij voor derzelver plaatsing geene geschiktere gelegenheid hebben kunnen vinden.) Laat, *ABC* de basis der driehoekige piramide; *AD*, *BD* en *CD* hare opstaande ribben zijn; *DP* de loodlijn, welke uit het toppunt *D* op de basis valt. Men noeme $AB=a$, $BC=b$, $AC=c$, en de ribben, welke respectievelijk tegen over deze laatste staan, $DC=\alpha$, $AD=\beta$ en $BD=\gamma$: men trekke

de

de lijnen AP, BP en CP, en stelle $PC=A$, $AP=B$ en $BP=C$; dan is (*VII. Stell. IX. B.*)

$$\cos.APB=\frac{B^2+C^2-a^2}{2BC};\ \cos.BPC=\frac{A^2+C^2-b^2}{2AC};$$

$$\text{en}\ \cos.APC\frac{A^2+B^2-c^2}{2AB}.$$

Men stelle $DP=p$; dan is $A^2=\alpha^2-p^2$; $B^2=\beta^2-p^2$; $C^2=\gamma^2-p^2$; $A^2+B^2-c^2=\alpha^2+\beta^2-c^2-2p^2$; $A^2+C^2-b^2=\alpha^2+\gamma^2-b^2-2p^2$ en $B^2+C^2-a^2=\beta^2+\gamma^2-a^2-2p^2$;

$$\cos.APB=\frac{\beta^2+\gamma^2-a^2-2p^2}{2\sqrt{(\beta^2-p^2)\times(\gamma^2-p^2)}};\ \cos.BPC=\ \ldots$$

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-b^2-2p^2}{2\sqrt{(\alpha^2-p^2)\times(\gamma^2-p^2)}};\ \text{en}\ \cos.APC=\ \ldots.$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-c^2-2p^2}{2\sqrt{(\alpha^2-p^2)\times(\beta^2-p^4)}}$$

stelt men nu deze waarden der cosinussen in de vergelijking:

$$1-\cos^2.APB-\cos^2.APC-\cos^2.BPC+2\cos.APB\times\cos.APC\times\cos.BPC=0$$

welke (*III. Gev. III. Stell. XI. B.*) gegeven is, zal men, de termen behoorlijk ontwikkelende, eene zamengestelde uitdrukking verkrijgen, welke, op de volgende wijze zal kunnen vereenvoudigd worden, (eene notatie, die wij ook in het vervolg gebruiken.) Men stelle

1°. *De som der producten van de vierde magten van al de ribben der piramide, met het vierkant van de ribbe, die er tegen over staat, of*

$$a^4\alpha^2+b^4\beta^2+c^4\gamma^2+\alpha^4a^2+\beta^4b^2+\gamma^4c^2=A.$$

2°. *De som van de producten van de vierkanten van drie ribben, welke hetzelfde zijvlak bepalen, of*

$$a^2b^2c^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2+b^2\alpha^2\gamma^2+c^2\alpha^2\beta^2=B.$$

3°. *De som van de producten van de vierkanten van drie ribben, waarvan de middelste aan de uiterste sluiten; zoodanig, dat, in elk product, twee overstaande ribben gevonden worden, op alle mogelijke wijzen genomen, of*

$$\left.\begin{array}{l}+a^2b^2\alpha^2+a^2c^2\alpha^2+b^2a^2\beta^2+b^2c^2\beta^2+c^2a^2\gamma^2+c^2b^2\gamma^2\\+\alpha^2\beta^2a^2+\alpha^2\gamma^2a^2+b^2\alpha^2\beta^2+b^2\gamma^2\beta^2+c^2\alpha^2\gamma^2+c^2\beta^2\gamma^2\end{array}\right\}=C$$

4°. *De dubbele som van de producten van de vierkanten der ribben, op alle mogelijke wijzen, vier aan vier, zoodanig genomen, dat, in elk product, twee ribben tegen over de twee andere staan, of*

$$2a^2b^2\alpha^2\beta^2+2a^2c^2\alpha^2\gamma^2+2b^2c^2\beta^2\gamma^2=D.$$

5°. *De som van de producten van de vierde magten der overstaande ribben, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, genomen, of*

$$a^4\alpha^4+b^4\beta^4+c^4\gamma^4=E.$$

Dit alzoo gesteld zijnde; dan zal men vinden:

$h^2 \times [2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4] + A + B - C = 0$; of

$$h^2 = \frac{C - (A + B)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

zijnde $(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$ = zestienmaal het vierkant van den inhoud van den driehoek ABC.

XXXVII. Vraagstuk. Fig. 130.

1271. *Den inhoud eener driehoekige piramide, in eene functie van hare zes ribben, uit te drukken?*

Oplossing. Men ftelle den inhoud $= I$; omdat dan de inhoud gevonden wordt, door de bafis met één-derde der hoogte te vermenigvuldigen, zal men, (zie voorgaande Vraagftuk) vinden:

$$I = \tfrac{1}{12} \sqrt{[C - (A + B)]} \quad \ldots\ldots \quad (\lambda)$$

§. 1272. Gevolg. Indien men de opftaande ribben α, β en γ, gelijk ftelt; dan wordt de inhoud door de vergelijking:

$$I^2 = \tfrac{1}{144} \alpha^2 (2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4) - \tfrac{1}{12} a^2b^2c^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mu)$$

gevonden. Stelt men nu, in deze vergelijking, $\alpha = a = b = c$; dan vindt men, als boven, $I = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$ voor den inhoud van de regelmatige driehoekige piramide.

XXXVIII. Vraagstuk.

§. 1273. *Te vinden, hoe de ftraal van den bol, welke, om eene driehoekige piramide, befchreven is, van derzelver zes gegevene ribben afhangt?*

Oplossing. Men ftelle den ftraal van den omgefchrevenen bol $= R$; indien men dan, uit het middelpunt van den bol, vier lijnen tot aan de vier hoekpunten der piramide trekt; dan wordt de geheele piramide in vier piramiden verdeeld, welke, in het middelpunt van den bol, aan elkander fluiten, en welker opftaande ribben gelijk r zijn; de inhoud van elke dezer piramiden wordt door de vergelijking (μ) *Gev. XXXVII. Vraagft.* gevonden: deze inhouden opgeteld en met den geheelen inhoud door de vergelijking (λ) gegeven, vergeleken zijnde, zoo zal men vinden:

$$R = \tfrac{1}{2} \times \sqrt{\frac{E - D}{A + B - C}}$$

§. 1274. Gevolg. Indien alle de ribben der piramiden gelijk a zijn, dan is ook $R = \frac{1}{4} a \sqrt{6}$.

XXXIX. Vraagstuk.

§. 1275. *Te vinden, hoe de ftraal van den bol, welke in eene drie-*

driehoekige piramide beschreven is, van de ribben dezer piramide afhangt?

OPLOSSING. Men verbeelde zich, dat, uit het middelpunt van den bol, lijnen tot aan de hoekpunten der piramiden getrokken zijn; dan zal de geheele piramide in vier piramiden verdeeld zijn, welke den straal van den bol tot hoogte, en de zijvlakken der geheele piramide tot grondvlakken zullen hebben. Men stelle den straal van den ingeschrevenen bol $= r$; dan zal:

$$I = \tfrac{1}{3} \times (dr.\, ABC + dr.\, ABD + dr.\, ACD + dr.\, BCD)$$

zijn, en, omdat (*XXXVII. Vraagst.*) $I = \tfrac{1}{12}\sqrt{[C-(A+B)]}$ is, zal

$$r = \frac{\tfrac{1}{4}\sqrt{[C-(A+B)]}}{dr.\, ABC + dr.\, ABD + dr.\, ACD + dr.\, BCD}$$

zijn. Zijnde (gelijk bekend is,) *Inh. drieh.* $ABC = \tfrac{1}{4}\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$, *enz.*

§. 1276. GEVOLG. Indien al de ribben van de piramide gelijk a genomen worden; dan verandert de gevondene vergelijking in $r = \tfrac{1}{12}a\sqrt{6}$. Dat is: *de straal van den bol, welke om de regelmatige driehoekige piramide beschreven is, is gelijk aan driemaal den straal van den bol, welke in dezelve is beschreven.*

§. 1277. AANMERKING. *Behalve de bol, welke in eene piramide kan geplaatst worden, zijn er nog vier bollen, welke iéne der zijden uitwendig, en drie anderen inwendig aanraken; de stralen dezer bollen worden gevonden, wanneer men, in de gevondene formule, den inhoud der zijde, welke uitwendig wordt aangeraakt, negatief neemt.*

XL. VRAAGSTUK. *Fig.* 130.

§. 1278. *Eene vergelijking tusschen de hoeken, welke, door de ribben eener driehoekige piramide, aan de toppunten van derzelver hoeken, gemaakt worden, en derzelver ribben te vinden?*

OPLOSSING. In het vervolg, zullen wij, kortheidshalve, den hoek, welke door twee lijnen gemaakt wordt, door eene comma tusschen deze lijnen te zetten, uitdrukken: dus zal $cos.\, ABC$ door $cos.\, a,b$ worden voorgesteld, *enz.* Beschouwt men de zijvlakken, welke aan de punten A, B, C en D zamenkomen; dan heeft men:

$$2ab\, cos.\, a,b = a^2 + b^2 - c^2$$
$$2a\gamma\, cos.\, a,\gamma = a^2 + \gamma^2 - \beta^2$$
$$2b\gamma\, cos.\, b,\gamma = b^2 + \gamma^2 - \alpha^2$$

deze vergelijkingen opgeteld hebbende, zoo verkrijgt men, ten opzigte van de hoeken, welke aan hetzelfde hoekpunt B der piramide gemaakt worden,

$$2ab\, cos.\, a,b + 2a\gamma\, cos.\, a,\gamma + 2b\gamma\, sos.\, b,\gamma = 2a^2 + 2b^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 - c^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Elk der drie andere hoekpunten *A*, *C* en *D* geven eene aan deze gelijkvormig zijnde vergelijking: telt men nu die vier vergelijkingen op; dan zal men vinden:

$$\left.\begin{matrix} +ab\cos.a,b+a\gamma\cos.a,\gamma+b\gamma\cos.b,\gamma \\ +ac\cos.a,c+a\beta\cos.a,\beta+c\beta\cos.c,\beta \\ +bc\cos.b,c+b\alpha\cos.b,\alpha+c\alpha\cos.c,\alpha \\ +\alpha\beta\cos.\alpha,\beta+\alpha\gamma\cos.\alpha,\gamma+\beta\gamma\cos.\beta,\gamma \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} +\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ a^2+b^2+c^2 \end{matrix}\right\} \quad (2)$$

welke vergelijkingen dienen kunnen, om verscheidene vragen, aangaande de driehoekige piramide, op te lossen.

XLI. VRAAGSTUK. *Fig.* 130 *en* 131.

§. 1279. *Al de ribben eener driehoekige piramide gegeven zijnde, den standhoek van twee van derzelver overstaande ribben, bij voorbeeld, a en α te vinden?*

OPLOSSING. Men trekke, *fig.* 131, uit het punt *D*, de lijn *DE*, evenwijdig aan *AB*: dan liggen de lijnen *AB*, *DE* en *BD*, in hetzelfde vlak, en de hoek *CDE* is de standhoek der lijnen *AB* en *DC*, welken wij door a,α uitdrukken. Men denke dan, in het hoekpunt *D*, het middelpunt van eenen bol, op welks oppervlak, door de snijding der vlakken *ADB*, *BCD*, *ACD* en *CDE*, de twee bolvormige driehoeken *pqr* en *psr* ontstaan, die den hoek *p* gemeen hebben, en welker zijden de maat van de hoeken *ADB*, *BDC*, *ADC* en *CDE* zijn. Nu is (*XIV. Stell.*) omdat de hoek *ADE* het supplement van *BAD* is:

$$\cos.p = \frac{\cos.a,\alpha+\cos.BAD\times\cos.ADC}{\sin.BAD\times\sin.ADC} = \ldots$$

$$\frac{\cos.BDC-\cos.ADB\times\cos.ADC}{\sin.ADB\times\sin.ADC}$$

uit welke vergelijking terstond volgt:

$$[\cos.a,\alpha+\cos.BAD\times\cos.ADC]\times\sin.ADB = \ldots$$

$$[\cos.BDC-\cos.ADB\times\cos.ADC]\times\sin BAD$$

Wanneer men nu, uit deze vergelijking, $\cos.a,\alpha$ afzondert, en de cosinusfen en sinusfen der hoeken *BAD*, *ADC*, *ADB* en *BDC*, in functien van de ribben uitdrukt; dan zal men verkrijgen:

$$2a\alpha\cot.a,\alpha = (b^2+\beta^2)-(c^2+\gamma^2)$$

eene eenvoudige vergelijking, waardoor de standhoek van twee der overstaande ribben, zoo door constructie, als door berekening, kan gevonden worden.

§. 1280. I. GEVOLG. Wanneer men de twee vergelijkingen, welke de standhoeken b,β en c,γ bepalen, bij de gevondene optelt; dan verkrijgt men de merkwaardige vergelijking:

$$a\alpha\cos.a,\alpha+b\beta\cos.b,\beta+c\gamma\cos.c,\gamma=0$$

§. 1281. II. GEVOLG. Indien al de ribben der piramiden gelijk zijn; dan

dan wordt $2\,\alpha\,\alpha\,cos.\,\alpha,\alpha = 0$; derhalve is ook $cos.\,\alpha,\alpha = 0$ en hoek $\alpha,\alpha = 90°$.

§. 1282. AANMERKING. Wanneer men, *fig.* 130, het punt D in het vlak ABC laat vallen; dan zijn de gevondene formulen, welke alsdan nog plaats blijven hebben, in de berekening van den onregelmatigen vierhoek, van veel gebruik.

XLII. VRAAGSTUK. *Fig.* 131.

§. 1283. *De standhoeken van twee der zijvlakken eener driehoekige piramide, in eene functie der ribben, te bepalen?*

OPLOSSING. Dezelfde bolvormige driehoek pqr, welke ons, in de oplossing van het voorgaande Vraagstuk, gediend heeft, (en in welken de hoek p de standhoek der zijvlakken ABD en ACD is) geeft:

$$cos.\,p = \frac{cos.\,BDC - cos.\,ADC \times cos\,ADB}{sin.\,ADC \times sin.\,ADB}$$

Men schrijve, in deze vergelijking, voor $cos.\,BDC$, $cos.\,ADC$, $cos.\,ADB$, $sin.\,ADC$ en $sin.\,ADB$, derzelver waarden, in functien van de ribben uitgedrukt; dan zal men, onder het oog houdende, dat

$$2\,\alpha^2\beta^2 + 2\,\alpha^2\gamma^2 + 2\,\beta^2\gamma^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 = 16\,Inh^2.\,ABD$$
$$2\,c^2a^2 + 2\,c^2\beta^2 + 2\,a^2\beta^2 - c^4 - a^2 - \beta^4 = 16\,Inh^2.\,ACD$$

is, en dat $cos^2.\,p = 1 - sin^2.\,p$ is, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$64\,Inh^2.\,ABD \times Inh^2.\,ACD \times sin^2.\,p + \beta^2 \times (A + B - C) = 0$$

hebbende A, B en C, dezelfde beteekenis als in *Vraagstuk XXXVI*; waaruit volgt:

$$sin.\,p = \frac{\beta \sqrt{[C - (A + B)]}}{8\,Inh.\,ABD \times Inh.\,ACD}$$

§. 1284. GEVOLG. Volgens *Vraagstuk XXXVII*, in Inhoud Piramide, of $I = \frac{1}{12}\sqrt{[C - (A + B)]}$, bijgevolg $\sqrt{[C - (A + B)]} = 12\,I$; derhalve zal:

$$sin.\,p = \frac{3\,\beta \times I}{2\,Inh.\,ABD \times Inh.\,ACD}.$$

zijn; welke vergelijking eene fraaije eigenschap der driehoekige piramide leert kennen.

XLIII. VRAAGSTUK. *Fig.* 132.

§. 1285. *Eene vergelijking op de inhouden van de vier zijvlakken eener driehoekige piramide te vinden?*

OPLOSSING. Men stelle den inhoud van het grondvlak $ABC = M$; de inhouden van de zijvlakken, BCD, ACD en ABD, respectievelijk $= P$, Q en R, en de standhoeken der opstaande zijvlakken als volgt; den standhoek van P met $Q = r$, van P met $R = q$ en van Q met R $= p$,

$=p$, en behoude voorts dezelfde letters, als in de voorgaande Vraagstukken. Men denke nu, in de hoekpunten A, B en C, de middelpunten van drie bollen, welke de éénheid der lengtemaat tot straal hebben; dan worden er, aan de drievlakkige hoeken A, B en C, drie bolvormige driehoeken geboren. De bolvormige driehoek aan A geeft:

$$\cos.p = \frac{\cos.BAC - \cos.BAD \times \cos.DAC}{\sin.BAD \times \sin.CAD} \quad \ldots \quad (1)$$

Nu is $\cos.BAC = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\cos.BAD = \frac{a^2+\beta^2-\gamma^2}{2a\beta}$; ... $\cos.CAD = \frac{c^2+\beta^2-\alpha^2}{2c\beta}$; $\sin.BAD = 2R : a\beta$ en $\sin.CAD = 2Q : c\beta$. Stelt men dit alles, in de vergelijking (1); dan zal zij, na herleiding, de gedaante

$$32QR \times \cos.p = 4\beta^2(a^2+c^2-b^2) - 2(a^2+\beta^2-\gamma^2) \times (c^2+\beta^2-\alpha^2)$$

verkrijgen. De driehoeken, aan de hoekpunten B en C, geven soortgelijke, en aan deze gelijkvormig zijnde, vergelijkingen. Men heeft dan in alles:

$$32QR \times \cos.p = 4\beta^2(a^2+c^2-b^2) - 2(a^2+\beta^2-\gamma^2) \times (c^2+\beta^2-\alpha^2)$$

$$32PR \times \cos.q = 4\gamma^2(a^2+b^2-c^2) - 2(a^2+\gamma^2-\beta^2) \times (b^2+\gamma^2-\alpha^2)$$

$$32PQ \times \cos.r = 4\alpha^2(b^2+c^2-a^2) - 2(b^2+\alpha^2-\gamma^2) \times (c^2+\alpha^2-\beta^2)$$

Wanneer men nu al die vergelijkingen ontwikkelt, en derzelver leden, tevens met de leden der vergelijking $0 = a^4+b^4+c^4-a^4-b^4-c^4$, optelt; dan zal men na uit de som, welke men dan verkrijgt, de termen, die elkander vernietigen, weggenomen te hebben, eene vergelijking verkrijgen, welke, nadat men in dezelve

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 16M^2$$
$$2b^2\gamma^2 + 2b^2a^2 + 2a^2\gamma^2 - b^4 - a^4 - \gamma^4 = 16P^2$$
$$2c^2\beta^2 + 2c^2\alpha^2 + 2\alpha^2\beta^2 - c^4 - \alpha^4 - \beta^4 = 16Q^2$$
$$2a^2\beta^2 + 2a^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2 - a^4 - \beta^4 - \gamma^4 = 16R^2$$

gesteld, en al de termen door 16 zal gedeeld hebben, na verschikking, geven zal:

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2 - 2PQ \times \cos.r - 2PR \times \cos.q - 2QR \times \cos.p$$

Eene vergelijking, welke ons leert: *dat het vierkant van ééne der zijvlakken eener driehoekige piramide gelijk is aan de som van de vierkanten der drie andere zijvlakken, verminderd met de som der producten dezer drie andere zijvlakken, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk dezer producten vermenigvuldigd met de cosinus van den standhoek der twee zijvlakken, welke in dit product*

duct voorkomen. Eene eigenschap der driehoekige piramide, welke met die van den driehoek, zie *VII. Stell. XII. B.* volmaakt overeenkomt.

§. 1286. I. Gevolg. De som der vier vergelijkingen, welke de waarden van M^2, P^2, Q^2 en R^2 uitdrukken, zal geven:

$$M^2 + P^2 + Q^2 + R^2 =$$
$$2\,MP\cos.M,P + 2\,MQ\cos.M,Q + 2\,MR\cos.M,R + 2\,PQ\cos.P,Q$$
$$+ 2\,PR\cos.P,R + 2\,QR\cos.Q,R$$

zijnde M, P de standhoek der zijvlakken M en P, *enz.*

§. 1287. II. Gevolg. Indien de zijvlakken P, Q en R, regthoekig op elkander staan; dan heeft men eene driehoekige piramide, die men, omdat zij, onder de piramiden, denzelfden rang, als de regthoekige driehoek, onder de driehoeken, bekleedt, *regthoekige driehoekige piramide* zou kunnen noemen. In deze piramide, is nu $\cos.p = 0$ en $\cos.q = 0$ en $\cos.r = 0$: de gevondene vergelijking verandert dan in deze:

$$M^2 = P^2 + Q^2 + R^2$$

Men ziet dan: *dat het vierkant van de zijde, tegen over den regten drievlakkigen hoek eener regthoekige driehoekige piramide, gelijk is aan de som van de vierkanten der drie zijvlakken, welke om den regten drievlakkigen hoek staan.* Eene eigenschap, welke met het Theorema van Pythagoras volmaakt overeenstemt.

§. 1288. Aanmerking. Het *vierkant van een zijvlak* is eene zegwijze, onder welke niet anders verstaan kan worden, dan *de tweede magt van het getal, dat de betrekking van den inhoud van het zijvlak tot de éénheid van de vlaktemaat, of tot het vierkant van de éénheid op de lengtemaat, uitdrukt;* want men kan wel een vierkant beschrijven, dat eene gegevene lijn tot zijde heeft; maar geen vlak kan de zijde van een vierkant zijn. Het Theorema van Pythagoras kan ook in dien zin verklaard worden.

XLIV. Vraagstuk. *Fig.* 133.

§. 1289. *Wanneer, in de ruimte, uit eenig punt P, vier lijnen zoodanig getrokken zijn, dat geen drie dezer lijnen in hetzelfde vlak liggen; dan begeert men eene vergelijking, op de zes onderscheidene hoeken te vinden, welke deze lijnen, twee aan twee genomen, met elkander maken?*

Oplossing. Men stelle, in het gegeven punt P, het middelpunt van eenen bol; dan ontmoeten de lijnen, welke uit het punt P getrokken zijn, het oppervlak van dien bol, in de punten A, B, C en D, en de hoeken, welke door de lijnen AP, BP, CP en DP, twee aan twee genomen, gemaakt worden, worden door de bogen AB, EC, CD,

CD, AD, AC en BD, (welke de zijden en hoekpunts-bogen van eenen bolvormigen vierhoek zijn,) gemeten. *De onderlinge betrekking dezer zes bogen moet nu gevonden worden.* Wij noemen, om de fymetrie van de uitkomst zooveel te fprekender in het oog te doen vallen, *overftaande bogen*, welke niet in hetzelfde hoekpunt van den vierhoek zamenkomen; aldus ftaan de bogen DC, AC en AD, tegen over de bogen AB, BD en BC, of α, β en γ, tegen over a, b en c.

Nu geven de driehoeken ABD, ABC en BCD, de vergelijkingen

$$\cos.ABD = [\cos.\gamma - \cos.a \times \cos.b] : \sin.a \times \sin.b \quad \ldots (1)$$

$$\cos.ABC = [\cos.\beta - \cos.a \times \cos.c] : \sin.a \times \sin.c \quad \ldots (2)$$

$$\cos.CBD = [\cos.\alpha - \cos.b \times \cos.c] : \sin.b \times \sin.c \quad \ldots (3)$$

en de hoeken ABD, CBD en $360^\circ - ABC$ maken 360°; derhalve is (omdat $\cos.(360^\circ - a) = \cos.a$ is,) zie *I. Vraagft. XI. B.*

$$1 - \cos^2.ABD - \cos^2.CBD - \cos^2.ABC + 2\cos.ABD \times \cos.CBD \times \cos.ABC = 0$$

Brengt men nu, in deze laatfte vergelijking, de vergelijkingen (1), (2) en (3) over; dan zal men, na voor $\sin^2.p$ gefchreven te hebben $1 - \cos^2.p$, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$\begin{aligned} 1 &- \cos^2.a - \cos^2.b - \cos^2.c - \cos^2.\alpha - \cos^2.\beta - \cos^2.\gamma \;\ldots \\ &+ \cos^2.a \times \cos^2.\alpha + \cos^2.b \times \cos^2.\beta + \cos^2.c \times \cos^2.\gamma \;\ldots \\ &+ 2\cos.a \times \cos.b \times \cos.c + 2\cos.a \times \cos.b \times \cos.\gamma \;\ldots \\ &+ 2\cos.b \times \cos.\alpha \times \cos.\gamma + 2\cos.c \times \cos.\alpha \times \cos.\beta \;\ldots \\ &- 2\cos.a \times \cos.b \times \cos.\alpha \times \cos.\beta - 2\cos.\alpha \times \cos.c \times \cos.\beta \times \cos.\gamma \\ &- 2\cos.b \times \cos.c \times \cos.\beta \times \cos.\gamma = 0 \quad \ldots \ldots (\mu) \end{aligned}$$

§. 1290. AANMERKING. Vermits $\cos.(360^\circ - a) = \cos.a$ is, zoo valt het in het oog: dat deze vergelijking ook gelden zal, wanneer men $360^\circ - b$ en $360^\circ - \beta$ voor de hoekpuntsbogen neemt; en dat zij ook voor elk ander ftelfel van vier lijnen, gelden zal, welke, in het punt P, gedacht kan worden.

XLV. VRAAGSTUK. *Fig.* 132.

§. 1291. *Eene formule te vinden, door welke, wanneer van de zes ftandhoeken, welke de vier zijvlakken eener driehoekige piramide met elkander maken, vijf gegeven zijn, de zesde kan gevonden worden?*

OPLOSSING. Men verbeelde zich, binnen de piramide, een punt en uit hetzelve loodlijnen op de zijvlakken; dan heeft men een ftelfel van vier lijnen, welker hoeken, twee aan twee genomen, de fupplementen van de ftandhoeken der zijvlakken zijn: de betrekking van de hoeken dezer loodlijnen wordt door de vergelijking (μ) uitgedrukt. Omdat nu $\cos.(180^\circ - q) = -\cos.q$ en $\cos.q = -\cos.(180^\circ - q)$ is, zoo zal, wanneer

neer men de ſtandhoeken der zijvlakken, welke aan de ribben gemaakt worden, door dezelfde letters, welke voor de ribben genomen zijn, aanwijst, (namelijk ſtandhoek der vlakken P en Q door α *enz.*) de betrekking dezer ſtandhoeken worden uitgedrukt door

$$1 - \cos^2.a - \cos^2.b - \cos^2.c - \cos^2.\alpha - \cos^2.\beta - \cos^2.\gamma \ldots$$
$$+ \cos^2.a \times \cos^2.\alpha + \cos^2.b \times \cos^2.\beta + \cos^2.c \times \cos^2.\gamma \ldots$$
$$- 2\cos.a \times \cos.b \times \cos.c - 2\cos.\alpha \times \cos.\beta \times \cos.\gamma \ldots$$
$$- 2\cos.b \times \cos.\alpha \times \cos.\gamma - 2\cos.c \times \cos.\alpha \times \cos.\beta \ldots$$
$$- 2\cos.a \times \cos.b \times \cos.\alpha \times \cos.\beta - 2\cos.a \times \cos.c \times \cos.\alpha \times \cos.\gamma$$
$$- 2\cos.b \times \cos.c \times \cos.\beta \times \cos.\gamma = 0$$

uit welke vergelijking, één der hoeken, uit de vijf anderen, door de oplosſing eener vierkants-vergelijking, zal kunnen gevonden worden.

IX. *Gebruik der Bolvormige Driehoeksmeting, in de Aardrijks-, Sterre- en Zeevaartkunde.*

XLVI. VRAAGSTUK. *Fig.* 134.

§. 1292. *Uit de bekende breedte eener plaats op Aarde, alwaar men zich bevindt, en de declinatie, welke de Zon, op zekeren dag des jaars, heeft, te vinden, hoe laat, en, in welken ſtreek van den horizon, de Zon zal opkomen?*

OPLOSSING. Zij ZPN de bovenſte helft van den Middagscirkel, ZSN de oostelijke helft van den horizon, P de noordpool, S de plaats in het vlak van denzelven, alwaar het middelpunt van de Zon zich bij haar opkomen bevindt. Men late, door het middelpunt M van den Hemelbol, de noordpool P en het middelpunt S van de Zon, de declinatiecirkel PS gaan; dan verkrijgt men den bolvormigen driehoek PNS, welke (omdat de vlakken van den middagscirkel en den horizon loodregt op elkander ſtaan,) in N regthoekig is.

In dien regthoekigen bolvormigen driehoek PNS, is nu $PN = B$ de noorder-breedte van de plaats, alwaar men zich bevindt; PS de afſtand van het middelpunt van de Zon tot de noordpool, of het complement van de Zons-declinatie; of, indien wij de Zons-declinatie D ſtellen, dan is $PS = 90^\circ - D$. De bolvormige hoek NPS, die wij U noemen, is evenredig aan den tijd, die, federt middernacht, tot op den oogenblik van het opkomen der Zon, verloopen is; en eindelijk is de zijde SN het azimuth van de Zon, buiten het Noorden, ten tijde van hare opkomst, dien boog noemen wij $SN = A$.

Om den hoek $SPN = U$ te vinden, hebben wij, volgens de *VII. Stelling*,

$$tang.\,PN = tang.\,PS \times \cos U$$
$$\text{of } \; tang.\,B = cot.\,D \times \cos.U$$

uit welke dan onmiddellijk volgt:

$$\cos. U = \text{tang}. B \times \text{tang}. D \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dat is: *de cosinus van den uurhoek van de Zon, bij derzelver opkomen, is gelijk aan het product van de tangenten der breedte en der Zons-declinatie.*

In denzelfden regthoekigen driehoek PSN, is nog $\cos. PS = \cos. PN \times \cos. SN$, of $\sin. D = \cos. B \times \cos. SN$; waaruit dan volgt:

$$\cos. SN = \cos A = \frac{\sin. D}{\cos. B} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dat is: *de cosinus van het azimuth van de Zon, ten tijde van haar opkomen, is gelijk aan de sinus van hare declinatie, gedeeld door de cosinus van de breedte der plaats.*

§. 1293. Aanmerking. Alhoewel deze formulen berekend zijn, in de onderstelling, dat men zich op Noorder-breedte bevindt, en de Zon noorder-declinatie heeft, kunnen zij evenwel voor alle gevallen dienen; want, op eene zuider-breedte, is B negatief, en, zoo de Zon zuider-declinatie heeft, dan moet D negatief genomen worden; terwijl de teekens der goniometrische lijnen, overeenkomstig die gevallen, naar de regels moeten genomen en de uitkomst der berekening, naar die omstandigheden, gewijzigd worden.

XVLII. Vraagstuk. *Fig.* 135.

§. 1294. *De breedte van de plaats, alwaar men zich bevindt, benevens de Noorder-declinatie van de Zon, bekend zijnde, zoo vraagt men: hoe, uit eene waargenomene hoogte der Zon, voor den middag in het werk gesteld, den tijd der waarneming, benevens het azimuth van de Zon zal kunnen berekend worden?*

Oplossing. Zij ZTP een gedeelte van den middagscirkel; ZH een gedeelte van den omtrek van den waren horizon; T het toppunt, P de noordpool, S het middelpunt van de Zon; de boog PS een gedeelte van de Zons-declinatie cirkel, TSH de verticaal, die door het middelpunt van de Zon gaat. Indien wij dan de noorder-breedte B, de Zons-declinatie D, de waargenomene hoogte H stellen; dan is, in den parallactifchen driehoek PTS, $PT = 90° - B$, $PS = 90° - D$ en $TS = 90° - H$.

Men stelle nog den bolvormigen hoek $TPS = U$, en den bolvormigen hoek $PTS = A$; dan is U, in tijd overgebragt, de tijd, die van den oogenblik der waarneming nog tot den middag verloopen moet; en de hoek A het azimuth van de Zon, van het noorden door het oosten naar het zuiden gerekend.

In dezen parallactifchen driehoek PTS, is nu, zie *I. Gev. XIV. Stell.* vooreerst

cos.

$$\cos TPS = \frac{\cos. ST - \cos. PT \times \cos PS}{\sin. PT \times \sin. PS}$$

maar nu is $ST = 90^\circ - H$, $PT = 90^\circ - B$ en $PS = 90^\circ - D$; deze formule wordt dus:

$$\cos. U = \frac{\sin H - \sin. B \times \sin D}{\cos. B \times \cos. D} \quad . \; . \; . \; . \quad (1)$$

door welke de tijd van de waarneming zal gevonden worden.

In denzelfden driehoek, is verder

$$\cos. PTS = \frac{\cos. PS - \cos. PT \times \cos. TS}{\sin. PT \times \sin. TS}$$

dat is, indien men wederom voor de zijden derzelver waarden stelt:

$$\cos. A = \frac{\sin D - \sin. B \times \sin. H}{\cos. B \times \cos. H} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

zijnde deze formulen dezelfde, welke wij in het *XXII. Vraagstuk* van het voorgaande *Boek*, uit andere beginselen, hebben afgeleid.

De vergelijking (1) is, in alle deelen der Sterrekunde, van het grootste belang; men zal zulks uit het volgende zien.

XLVIII. Vraagstuk. *Fig.* 136.

§. 1295. *Gesteld zijnde, dat men zich in volle zee bevinde, alwaar de kim in het ronde geheel vrij is, op een punt, dat op B graden breedte gelegen is; en dat de noorder-declinatie van de Zon D graden zij; zoo vraagt men:* 1°. *hoeveel tijds de schijf van de Zon zal noodig hebben, om door de kim te gaan? en* 2°. *hoe men, de breedte onbekend zijnde, uit den tijd, welken de Zon noodig heeft, om door de kim gaan, de breedte bepalen kan?*

Oplossing. Zij *TPN* een gedeelte van den middagscirkel, *ZN* een gedeelte van de kim (zie, *wat de kim is, XVIII. Vraagst. XII. Boek*) *T* het toppunt en *P* de noord-pool.

Stel, dat bij *A* de bovenrand van de Zon de kim in het opkomen aanrake, en dat, na verloop van eenigen tijd, na dat het middelpunt van de Zon door de kim gegaan is, derzelver onderrand de kim, bij *B* aanrake; dan is de tijd, welken de Zon noodig gehad heeft, om van *A* in *B* te komen, de tijd, dien zij noodig heeft, om door de kim te gaan; en die tijd kan, bij eene heldere kim, naauwkeurig worden waargenomen.

Indien men dan, uit de punten *A* en *B*, welke het middelpunt van de Zon bij de eerste en tweede aanraking van haren rand met de kim voorstellen, eerst de topcirkels *AT* en *BT*, en dan de declinatie-cirkels *AP* en *BP* trekt; dan verkrijgt men twee bolvormige driehoeken *APT* en *BPT*, welke ons tot de oplossing van de twee onderscheidene deelen der vraag zullen moeten brengen.

Wanneer er geene ſtraalbreking beſtond en ZCN niet de kim, maar de ſchijnbare horizon ware; dan zouden de topbogen AT en BT gelijk zijn aan 90° plus of min de zons-halve-middellijn, welke uit de ſterrekundige ephemeriden, voor elken dag van het jaar, kan worden opgezocht; dan, wegens de kimsduiking (zie *XVIII. Vraagſtuk XII. E.*) ſchijnt de Zon hooger, dan zij inderdaad is en de ſtraalbreking doet haar insgelijks hooger ſchijnen. Indien men dus de ſom van de horizontale ſtraalbreking en de kimsduiking $= R$, en de halve middellijn van de Zon $= r$ ſtelt; dan is *boog* $AT = 90° + R + r$ en *boog* $BT = 90° + R - r$. Men ſtelle de breedte $= B$, de declinatie $= D$; dan is $TP = 90° - B$ en (aannemende, dat de declinatie van de Zon, gedurende dat zij door de kim gaat, niet merkelijk verandert,) $AP = BP = 90° - D$. Eindelijk ſtelle men de uurhoeken APN en BPN, als volgt; *hoek* $APN = U - \frac{1}{2}u$ en *hoek* $BPN = U + \frac{1}{2}u$; dan is *hoek* APN, die evenredig is aan den tijd, welken de Zon noodig heeft, om door de kim te gaan, gelijk u.

Nu hebben wij, volgens het *I. Gevolg XIV. Stelling*, in de bolvormige driehoeken APT en BPT, als volgt:

$$\cos. APT = \frac{\cos. AT - \cos PT \times \cos. AP}{\sin. PT \times \sin. AP}$$

$$\cos. BPT = \frac{\cos. BT - \cos. PT \times \cos. BP}{\sin PT \times \sin. BP}$$

of, wanneer men, in plaats van de hoeken APT en BPT, derzelver ſupplementen APN en BPN ſtelt, en in acht neemt, dat de coſinus van eenen hoek gelijk is aan de coſinus van deszelfs ſupplement, negatief genomen,

$$\cos. APN = \frac{\cos. PT \times \cos. AP - \cos. AT}{\sin. PT \times \sin AP}$$

$$\cos. BPN = \frac{\cos. PT \times \cos. BP - \cos. BT}{\sin PT \times \sin BP}$$

welke vergelijkingen in de aangenomene notatie, aldus kunnen worden voorgeſteld:

$$\cos. (U - \tfrac{1}{2}u) = \tang. B \times \tang. D - \frac{\cos. (90° + R + r)}{\cos. B \times \cos. D}$$

$$\cos. (U + \tfrac{1}{2}u) = \tang. B \times \tang. D - \frac{\cos. (90° + R - r)}{\cos. B \times \cos. D}$$

of wel, omdat in het algemeen $\cos. (90° + x) = -\sin. x$ is,

$$\cos. (U - \tfrac{1}{2}u) = \tang. B \times \tang. D + \frac{\sin. (R + r)}{\cos. B \times \cos. D} \quad . . (a)$$

$$\cos. (U + \tfrac{1}{2}u) = \tang. B \times \tang. D + \frac{\sin. (R - r)}{\cos. B \times \cos D} \quad . . (b)$$

Uit deze twee vergelijkingen (a) en (b), zal men dadelijk de waarden van $U - \frac{1}{2}u$ en $U + \frac{1}{2}u$, waarvan de halve ſom U en het verſchil

u

u zal geven, kunnen oplossen, en het eerste gedeelte der vraag zal derhalve door dezelve voor opgelost kunnen gehouden worden.

Wanneer men de vergelijkingen (a) en (b) bij elkander optelt en van elkander aftrekt; dan zal men, van de herleidingen, welke in de *VI. Stell. XI. B.* geleerd zijn, gebruik makende, verkrijgen:

$$cos. U \times cos. \tfrac{1}{2} u = tang. B \times tang. D + \frac{sin. R \times cos. r}{cos. B \times cos. D} \quad \ldots (c)$$

$$sin. U \times sin. \tfrac{1}{2} u = \frac{cos. R \times sin. r}{cos. B \times cos. D} \quad \ldots\ldots (d)$$

Indien men nu de vergelijking (c) door $cos. \tfrac{1}{2} u$, en de vergelijking (d) door $sin. \tfrac{1}{2} u$ deelt, en de tweede magten dezer vergelijkingen bij elkander optelt; dan zal men, aangezien $cos^2. U + sin^2. U = 1$ is, eene vergelijking verkrijgen, in welk slechts de enkele onbekende u voorkomt; doch deze vergelijking zal vrij zamengesteld worden, en bovendien tot de tweede magt opklimmen.

Gelukkig kan dit inconvenient, door de omstandigheden der vraag, vermeden, en de eindelijke oplossing aanmerkelijk vereenvoudigd worden.

Het is klaar, dat het gedeelte ACB van den dagboog, welke de Zon, gedurende dat zij door de kim gaat, beschrijft door de kim in het punt C, wanneer namelijk haar middelpunt in de kim is, in twee gelijke deelen wordt verdeeld. Indien men dus de bogen PC en TC trekt; dan is $TC = 90° + R$ en $PC = 90° - D$, *hoek* APC = *hoek* $BPC = \tfrac{1}{2} u$ en *hoek* $NPC = U$, en in den bolvormigen driehoek CPT, is dan:

$$cos. CPT = \frac{cos. CT - cos. PT \times cos. CP}{sin. PT \times sin. CP}$$

Uit welke men, even als boven, eindelijk zal verkrijgen:

$$cos. U = tang. B \times tang. D + \frac{sin. R}{cos. B \times cos. D} \quad \ldots\ldots (e)$$

Deze formule (e) is eigenlijk de formule, die men op zee zou moeten gebruiken, om (de straalbreking en kimsduiking in rekening brengende) den waren tijd van doorgang van het middelpunt der Zon door de kim te bepalen.

Men trekke de vergelijking (c) van de vergelijking (e) af; dan verkrijgt men:

$$cos. U \times (1 - cos. \tfrac{1}{2} u) = \frac{sin. R \times (1 - cos. r)}{cos. B \times cos. D}$$

een vergelijking, voor welke, omdat $1 - cos. x = 2 sin^2. \tfrac{1}{2} x$ is, dadelijk zal kunnen gesteld worden:

$$cos. U \times sin^2. \tfrac{1}{2} u = \frac{sin. R \times sin^2. \tfrac{1}{2} r}{cos. B \times cos. D} \quad \ldots\ldots (f)$$

Men stelle de vergelijking (e) nog onder deze gedaante:

cos. U

$$\cos. U = \frac{\sin. B \times \sin. D + \sin. R}{\cos. B \times \cos. D}$$

en deele verder de vergelijking (f) door die waarde van $\cos. U$; dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$\sin^2. \tfrac{1}{2} u = \frac{\sin. R \times \sin^2 \tfrac{1}{2} r}{\sin. B \times \sin. D + \sin. R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Om deze vergelijking voor de getallen berekening geschikter te maken, zoo deele men teller en noemer van het tweede lid door $\sin. R$, en stelle daarna

$$\frac{\sin. B \times \sin. D}{\sin. R} = tang^2. K$$

dan zal men verkrijgen:

$$\sin^2. \tfrac{1}{2} u = \frac{\sin^2. \tfrac{1}{2} r}{1 + tang^2. K} = \frac{\sin^2. \tfrac{1}{2} r}{sec^2. K} = \sin^2. \tfrac{1}{2} r \times \cos^2. K$$

Men heeft dan, om de vergelijking (A) in getallen te berekenen, dit stelsel van vergelijkingen:

$$tang. K = \sqrt{\frac{\sin. B \times \sin. D}{\sin R}} \; (1) \quad \text{en} \quad \sin. \tfrac{1}{2} u = \sin. \tfrac{1}{2} r \times \cos. K \; (2)$$

En nu zal men het tweede gedeelte der vraag insgelijks gemakkelijk kunnen oplossen; want, uit het zoo even uitgebragte stelsel van vergelijkingen, volgt onmiddellijk:

$$\cos. K = \frac{\sin. \tfrac{1}{2} u}{\sin. \tfrac{1}{2} r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\sin. B = \frac{\sin. R \times tang^2. K}{\sin. D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

De oplossing van dit Vraagstuk kan aanleiding geven tot velerlei opmerkingen, over welke wij hier niet verder kunnen uitwijden.

XLIX. Vraagstuk. *Fig.* 137.

§. 1296. *De breedte van de plaats, alwaar men zich op Aarde bevindt (bij voorbeeld,* Leyden,) *op* 52° 09′ *Noorder-breedte gelegen is, bekend zijnde, voor een gegevenen dag van het jaar, wanneer de Zons-noorder-declinatie D is, alle plaatsen op Aarde te vinden, alwaar de Zon opkomt of ondergaat, op denzelven oogenblik, als zij te* Leyden *opkomt?*

Oplossing. Laat, in de figuur, het punt L de stad *Leyden*, of liever eenig bepaald punt in dezelve, bij voorbeeld, het *observatorium van de Hoogeschool*, verbeelden; de onbepaalde lijn $B\,P\,L\,Z$ de middagslijn of de streek van het noorden tot het zuiden, en den omtrek van den cirkel $C\,B\,A\,D\,Z$ de cirkel, volgens welke het oppervlak der Aarde den waren horizon van *Leyden* doorsnijdt. Indien men dan, op het vlak van de tee-

teekening, eene onbepaalde loodlijn denkt, en het oog van den waarnemer op een onbegrijpelijken verren afstand buiten de Aarde in die loodlijn denkt; dan zal de beschouwer, dáár geplaatst zijnde, de helft van het oppervlak der Aarde boven den waren horizon van *Leyden* liggende, beschouwen; en, indien men nu, uit alle punten van het oppervlak, loodlijnen op het vlak van den waren horizon laat vallen, (welk vlak men hier als het *vlak van projectie* aanneemt,) dan zal men de zoogenaamde ORTHOGRAPHISCHE PROJECTIE van het bovenste halfrond hebben; alzoo zal P de orthographische projectie van de noordpool der Aarde; de middellijn BZ de orthographische projectie van den middagscirkel van *Leyden* zijn; eindelijk zal CLD de orthographische projectie zijn van een grooten cirkel van den aardbol, welke door de verticaal van *Leyden* gaat.

Stellen wij, dat, de Zon, noorder-declinatie hebbende, met haar middelpunt in de vlakte van den waren horizon van *Leyden* zij, en trek de lijn LZ; dan komt zij (straalbreking en parallaxis niet in aanmerking nemende) op; en, zoo wij nu de breedte van *Leyden* $= B$ en de declinatie van de Zon $= D$ stellen, dan zal de hoek BLZ het azimuth van de Zon zijn, op den oogenblik, als zij opkomt. Stellen wij dus *hoek* $BLZ = A$; dan is, volgens het *XLVI. Vraagstuk:*

$$\cos. A = \sin. D : \cos. B \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Men trekke de middellijn CLD, loodregt op de lijn LZ; dan zal die middellijn de orthographische projectie zijn van eenen grooten cirkel van den aardbol, welke de eene helft der Aarde, die zich in het zonnelicht bevindt, van de andere helft, die in de schaduw is, afscheidt. In het halfrond $CBAD$ is het derhalve dag, en in het tegenovergestelde halfrond is het nacht.

Alle punten van het oppervlak der Aarde, die in den omtrek van dien cirkel liggen, hebben de eigenschap, dat de Zon voor dezelve opkomt of ondergaat.

De hoek CLB is, volgens die constructie, klaarblijkelijk het complement van den hoek ABL; derhalve is $\cos. A = \sin. CLB$; en, volgens vergelijking (1),

$$\sin. CLB = \sin. D : \cos. B \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Men late, uit de Noordpool P, den loodregten PE, op den grooten cirkel CLD vallen; dan verkrijgt men den regthoekigen bolvormigen driehoek ELP, die regthoekig in E is, volgens de *VII. Stelling*, is dan:

$$\sin. BP = \sin. BLC \times \sin. PL$$

dat is, aangezien $PL = 90° - B$ is, zie vergelijking (2),

$$\sin. EP = [\sin. D : \cos. B] \times \cos. B = \sin. D \quad \ldots \quad (3)$$

en derhalve $EP = D$; waaruit blijkt, (hetgeen ook uit andere beginselen kan worden afgeleid,) *dat de hoek, welken de as der Aarde met het veranderlijke vlak, dat het verlichte deel der Aarde van het duistere afscheidt, ten allen tijde, aan de Zons-declinatie gelijk is.*

Om-

Omdat het vlak van den boog *E P* loodregt op het vlak van den afscheidings-cirkel staat, zoo gaat het ook noodzakelijk door het middelpunt van de Zon. *Het punt E is derhalve het punt of de plaats op Aarde, alwaar men de Zon, op den oogenblik, als zij te* Leyden *opkomt, in het Noorden aan den Horizon wordt waargenomen; met andere woorden, het punt E is ééne der plaatsen op Aarde, alwaar de dag 24 uren lang is.*

Een dergelijk punt *F*, bestaat er in het onderste halfrond, alwaar de nacht 24 uren lang is, en dit punt wordt gevonden, wanneer men, van het punt *E*, door het middelpunt van den bol, eene lijn trekt, die aan den anderen kant het oppervlak in *F* ontmoet.

De inwoners van alle punten of plaatsen, in den halven cirkel E L D F, zien de Zon opkomen; maar de inwoners, die zich in den omtrek van de andere helft van dien cirkel bevinden, zien de Zon ondergaan.

Nemen wij nu, ergens, op den omtrek van den afscheidings-cirkel, een punt *G*, en laat, door dit punt en de Noord-pool, den boog *P G* van een grooten cirkel gaan; dan is deze een gedeelte van den middagscirkel van het punt *G*, en de boog *P G* het complement van deszelfs breedte, de bolvormige hoek *E P L* de oostelijke lengte van het punt *G*, ten opzigte van *Leyden*, en de bolvormige hoek $PLG = 90^\circ + A$.

Stel, als boven, de breedte van *Leyden* $= B$, de breedte van het punt $G = \beta$, den boog $LH = H$; de afstand namelijk van het punt *G* tot *Leyden*, in de rigting van de affcheidings-cirkel genomen; dan zijn, in den bolvormigen driehoek *P L G*, bekend twee zijden $PL = 90^\circ - B$, $LG = H$ en den ingesloten hoek $PLG = 90^\circ + A$; en dan hebben wij, zie *XIV. Stelling:*

$$\cos. PG = \cos. PLG \times \sin. PL \times \sin\ LG + \cos. PL \times \cos. LG$$

of, volgens de aangenomene notatie,

$$\cos. \beta = \sin. B \times \cos. H - \sin. A \times \cos. B \times \sin. H \quad . \ . \ . \ (4)$$

zijnde, zie boven,

$$\cos. A = \sin. D : \cos. B \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (5)$$

Eindelijk is $\sin. PG : \sin. LG = \sin. PLG : \sin. LPG$; dat is, in de aangenomene notatie,

$$\cos \beta : \sin. H = \sin. (90^\circ + A) : \sin. PLG$$

waaruit dan volgt:

$$\sin. PLG = \frac{\cos. A \times \sin. H}{\cos. \beta} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (6)$$

door welke formulen de breedte en lengte van alle plaatsen zullen kunnen berekend worden, waar de Zon op- en ondergaat, als zij te *Leyden* opkomt.

L. VRAAGSTUK. *Fig.* 138.

§. 1297. *Wanneer men, op zee zijnde, twee hoogten van de Zon,*

Zon, buiten den middagscirkel, heeft waargenomen; uit die hoogten, de Zons-declinatie en den tijd, die tusschen beide waarnemingen verloopen is, de breedte van de plaats der waarneming te vinden?

Dit belangrijke Vraagstuk kan wel door de gewone regels der bolvormige driehoeksmeting worden opgelost; maar de berekening is dan zoo langwijlig en omslachtig, dat men dezelve van de zeelieden naauwelijks vergen kan. Onze beroemde Landgenoot, DOUWES, maakte in den jare 1754 eene oplossing van dit werkstuk bekend, welke, door middel van hulptafelen, de berekening aanmerkelijk verligt; en is zijne handelwijze, sedert dien tijd, bij alle vreemde zeelieden aangenomen. Naderhand echter heeft men bevonden: dat die handelwijze, daar zij op eene gegiste breedte, en bijgevolg op eene benadering berust, in sommige gevallen, niet slechts omslachtig, maar ook onzeker kan worden. Men heeft dan, om die reden, al sedert het begin van deze eeuw, getracht, om de regtstreeksche oplossing, door bijzondere kunstgrepen, zoo te vereenvoudigen, dat het berekenen van de breedte, ten minste niet veel omslachtiger wordt, dan de manier van DOUWES; dan, alhoewel vele Wiskundigen van den eersten rang, onder anderen DELAMBRE, zich bij herhaling daarmede onledig gehouden, en dit onderwerp als het ware hebben gepijnigd, was men tot hiertoe niet zeer gelukkig geslaagd.

In den jare 1824, deelde de Heer R. LOBATTO mij eene handelwijze mede, welke onlangs onder den titel: *Nouvelle méthode pour calculer la latitude par deux hauteurs du soleil, prises hors du méridien*, is uitgegeven.

In het begin van dit jaar, is ook, door den Heer HAZEWINKEL, een werkje uitgegeven, onder den titel: *Handleiding, om, op verschillende wijzen, de breedte buiten den Meridiaan te vinden.*

Beide handelwijzen, zoowel die van den Heer LOBATTO, als die van den Heer HAZEWINKEL, zijn regtstreeks; en hoezeer elk hunner een bijzonderen weg is ingeslagen, hebben zij elk hun voorgesteld oogmerk zoo gelukkig volbragt, dat de regtstreeksche berekening van de breedte althans niet moeijelijker en omslachtiger meer is, dan de benadering van DOUWES, in de gunstigste gevallen genomen. Wij zullen beide manieren opgeven.

I. OPLOSSING. Zij, om de oplossing des Heeren LOBATTO te verklaren, *fig.* 138, $ZTPN$ de omtrek van den middagscirkel, ZON de horizon, LOI de equator, $SBAT$ de dagcirkel van de Zon, die wij stellen noorder-declinatie te hebben; P de noord pool en T het toppunt.

Laat de hoogte van de Zon, voormiddags, in de punten A en B, zijn waargenomen, tevens met den tijd, die tusschen beide waarnemingen verloopen is; indien men dan, uit het toppunt T, door de punten A en B, de topbogen TAH en TBI trekt, en, uit de pool P, door diezelfde punten, de declinatie-cirkels PA en PB; dan is AH de hoogte der Zon, bij de eerste, en BI de hoogte van dezelve, bij de tweede

waar-

waarneming. De tijd, tusschen beide waarnemingen verloopen, en in graden overgebragt zijnde, is gelijk aan den hoek APB. Er zijn dan bekend de bogen AH, BI, of derzelver complementen AT en BT, het complement van de declinatie, die wij standvastig aannemen; te weten de bogen AP of BP. Onbekend zijn de boog PT of het complement van de breedte, benevens de uurhoeken APT en BPT der Zon, bij de eerste en tweede hoogtemeting.

Men stelle de kleinste ware hoogte der Zon $AH = H$, de grootste ware zons-hoogte $BI = H'$; dan is $AT = 90° - H$ en $BT = 90° - H'$; de zons-declinatie $= D$; dan is $AP = BP = 90° - D$; verder stelle men hoek $APB = 2t$, de onbekende uurhoeken $APT = u$ en $BPT = u'$; dan is $u - u' = 2t$, en zoo wij nu $u + u' = 2x$ stellen; dan is $u = x + t$ en $u' = x - t$. Eindelijk stelle men de onbekende breedte B; dan is $PT = 90° - B$.

In den bolvormigen driehoek APT; is, volgens de *XIV. Stelling:*

$$\cos AT = \cos. APT \times \sin. AP \times \sin PT + \cos. AP \times \cos. PT$$

dat is, volgens de aangenomene notatie,

$$\sin. H = \cos. B \times \cos. D \times \cos. (x + t) + \sin B \times \sin D \quad (a)$$

Om dezelfde reden, zal uit den bolvormigen driehoek BPT volgen:

$$\sin. H' = \cos. B \times \cos. D \times \cos. (x - t) + \sin. B \times \sin. D \quad (b)$$

Indien men de vergelijkingen (a) en (b) bij elkander optelt; dan zal men, omdat

$$\cos. (x + t) + \cos. (x - t) = 2 \cos. x \times \cos. t$$

is, verkrijgen:

$$\sin. H' + \sin. H = 2 \cos. B \times \cos D \times \cos. x \times \cos. t + 2 \sin. B \times \sin D \quad \ldots\ldots\ldots (c)$$

En trekt men de vergelijking (a) van de vergelijking (b) af; dan zal men, omdat

$$\cos. (x - t) - \cos. (x + t) = 2 \sin. x \times \sin. t$$

is, verkrijgen:

$$\sin. H' - \sin. H = 2 \cos. B \times \cos. D \times \sin. x \times \sin. t \quad \ldots (d)$$

In deze vergelijkingen (c) en (d), zijn B en x de onbekenden, welke uit dezelve moeten worden opgelost; waarin wel geene zwarigheid steekt; maar, hoe men deze oplossing, zonder de kunstgreep, die ik, in den jare 1811, in mijne *Meetkundige Analysis* heb leeren kennen, moge aanvatten, (zie die kunstgreep in het *XVIII. Vraagst. XI B.* voorgesteld en verklaard,) zal, of de eene of de andere der onbekende, in de eindvergelijking tot de tweede magt opklimmen; hetgeen ook niet anders kan zijn; aangezien de Meetkunstige constructie twee onderscheidene plaatsen geeft, welke aan de gegevene waarnemingen voldoen — en, tot hier is het die omstandigheid geweest, die het berekenen van de regtstreeksche oplossing zoo bezwaarlijk maakte.

Men deele vergelijking (c) door $\cos. D \times \cos. t$, en vergelijking (d)

door

door $cos. D \times sin. t$; dan verkrijgt men, wanneer men, zie *VI. Stell. XI. B.*,

$$sin. H' + sin. H = 2\, sin. \tfrac{1}{2}(H' + H) \times cos. \tfrac{1}{2}(H' - H)$$
$$sin\ H' - sin. H = 2\, sin. \tfrac{1}{2}(H' - H) \times cos. \tfrac{1}{2}(H' + H)$$

stelt, de twee volgende vergelijkingen:

$$\frac{sin. \tfrac{1}{2}(H'+H) cos. \tfrac{1}{2}(H'-H)}{cos. D \times cos. t} = cos. B \times cos. x + \frac{sin. B\, tang. D}{cot. t} \quad . \ (e)$$

$$\frac{cos. \tfrac{1}{2}(H' + H)\, sin. \tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos. D \times sin. t} = cos. B \times sin. x \quad . \ . \ . \ (f)$$

Omdat nu het product van twee sinusfen of cosinusfen altijd minder dan de éénheid is, zoo zal men $cos. B \times sin. x = sin. a$ kunnen stellen; en dan heeft men:

$$sin. a = \frac{cos. \tfrac{1}{2}(H' + H) \times sin. \tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos. D \times sin. t}$$

door de berekening van welke formule de hoek a zal bekend worden; terwijl de onbekende x zal worden gevonden, door het berekenen van de formule

$$sin. x = \frac{sin. a}{cos. B} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (g)$$

Uit deze laatste vergelijking volgt nu onmiddellijk:

$$cos^2. x = 1 - sin^2. x = 1 - \frac{sin^2. a}{cos^2. B} = \frac{cos^2. B - sin^2. a}{cos^2. B}$$

en deze met $cos^2. B$ vermenigvuldigd hebbende,

$$cos^2. x \times cos^2. B = cos^2. B - sin^2. a = (1 - sin^2. B) - (1 - cos^2. a)$$
$$\text{of}\quad cos^2. x \times cos^2. B = cos^2. a - sin^2. B$$
$$cos. x \times cos. B = \sqrt{(cos^2. a - sin^2. B)}$$

Stelt men nu verder deze waarde van $cos. x \times cos. B$, in de vergelijking (e); dan wordt zij:

$$\frac{sin. \tfrac{1}{2}(H' + H) cos. \tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos. D \times cot. t} = \sqrt{(cos^2. a - sin^2 B)} \ . \ . \ .$$
$$\times \frac{sin. B\, tang. D}{cos. t.} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (h)$$

en deze is de eindvergelijking, in welke B de enkele onbekende is, die nog moet worden opgelost; welke onbekende, bij de ontwikkeling, tot de tweede magt zal opklimmen.

Om de tweede magtsvergelijking te ontwijken, en echter de waarden van B te verkrijgen, stelle men vooreerst:

$$\frac{tang. D}{cos. t} = cot. m \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (i)$$

dan zal men, door deze formule (i), den hoek m uit de bekenden D en t kunnen vinden.

Verder stelle men, om de wortel-uitdrukking weg te maken:

$$\sin. B = \cos. a \times \cos. p \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (k)$$

dan wordt eindelijk:

$$\cos^2. a - \sin^2. B = \cos^2. a - \cos^2. a \times \cos^2. p = \cos^2. a\,(1 - \cos^2. p)$$

of $\cos^2. a - \sin^2. B = \cos^2. a \times \sin^2. p$

$$\sqrt{(\cos^2. a - \sin^2. B)} = \cos. a \times \sin. p$$

De vergelijking (h) wordt dan, door de waarde van die wortel-uitdrukking in dezelve over te brengen, na alles door $\cos. a$ gedeeld te hebben:

$$\frac{\sin. \tfrac{1}{2}(H' + H) \cos. \tfrac{1}{2}(H' - H)}{\cos. D \times \cos. t \times \cos. a} = \sin. p + \frac{\cos. m}{\sin. m} \times \cos. p \; . \; .$$

$$= \frac{\sin. p \times \sin. m + \cos. p \times \cos. m}{\sin. m} = \frac{\cos. (p - m)}{\sin. m} \; .$$

uit welke dan onmiddellijk zal volgen:

$$\cos. (p - m) = \frac{\sin. m \times \sin. \tfrac{1}{2}(H' + H) \times \cos. \tfrac{1}{2}(H' - H)}{\cos. D \times . \; t \times \cos. a} \; . \; (l)$$

in welke vergelijking, zoowel $\cos. (p - m)$, als $\cos. (m - p$, kan genomen worden; omdat $+ q$ en $- q$ dezelfde cofinus hebben. Men zal door (l) de waarde van $p - m$ verkrijgen. De hoek m wordt door (i) gevonden; p zal derhalve bekend zijn. En eindelijk zal B, door de berekening van formule (k), bekend worden.

Men kan thans het Vraagftuk voor opgelost houden; maar de vergelijking (l) kan nog worden vereenvoudigd, of liever voor de berekening gefchikter gemaakt.

Uit de vergelijking (i), volgt:

$$\tang. D = \cot. m \times \cot. t$$

$$\frac{\sin. D}{\cos. D} = \frac{\cos. m}{\sin. m} \times \cos. t$$

$$\sin. D \times \sin. m = \cos. m \times \cos. D \times \cos. t$$

$$\frac{\sin. m}{\cos. D \times \cos. t} = \frac{\cos. m}{\sin. D}$$

gevolgelijk wordt de vergelijking (l),

$$\cos. (p - m) = \frac{\cos. m \times \sin. \tfrac{1}{2}(H' + H) \cos. \tfrac{1}{2}(H' - H)}{\sin. D \times \cos. a} \; . \; . \; (m)$$

Men kan deze formule (m) nog eenvoudiger maken. Uit de vergelijking (1), volgt:

$$\tang. m = \cos. t \times \cot. D$$

$$\tang^2. m = \cos^2. t \times \cot^2. D$$

Nu is, volgens de bekende beginfelen,

$$\sec^2. m = 1 + \tang^2. m = 1 + \cos^2. t \times \cot^2. D$$

$$\sec^2. m = 1 + \cos^2. t \times \frac{\cos^2. D}{\sin^2. D} = \frac{\sin^2. D + \cos^2. t \times \cos^2. D}{\sin^2. D}$$

of

$$\text{of } sec^2.m = \frac{1 - cos^2.D + cos^2.t \times cos^2.D}{sin^2.D}$$

$$sec^2.m = \frac{1 - (1 - cos^2.t)\,cos^2.D}{sin^2.D} = \frac{1 - sin^2.t \times cos^2.D}{sin^2.D}$$

en, deze vergelijking omkeerende,

$$cos^2.m = \frac{sin.D}{1 - sin^2.t \times cos^2.D}$$

Men ftelle nu

$$sin.t \times cos.D = sin.b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (n)$$

dan wordt

$$cos^2.m = \frac{sin^2.D}{cos^2.b} \text{ of } cos.m = \frac{sin.D}{cos.b} \quad \ldots\ldots \quad (o)$$

en de vergelijking (m) wordt dan eindelijk:

$$cos.(p - m) = \frac{sin.\tfrac{1}{2}(H' + H) \times cos.\tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos.a \times cos.b} \quad \ldots \quad (p)$$

Men heeft dan, om uit de waargenomene hoogten, den verloopen tijd en zons-declinatie, de breedte en den waren tijd aan boord te vinden, de volgende formulen:

$$sin.b = cos.D \times sin.t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$cos.m = \frac{sin.D}{cos.b} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$sin.a = \frac{sin.\tfrac{1}{2}(H' - H) \times cos.\tfrac{1}{2}(H' + H)}{sin.b} \quad \ldots \quad (3)$$

$$cos.(p - m) = \frac{sin.\tfrac{1}{2}(H' + H) \times cos.\tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos.a \times cos.b} = cos.q \quad . \quad (4)$$

derhalve is, omdat $p - m$ zoowel pofitief als negatief kan genomen worden $q = \pm(p - m)$, gevolgelijk heeft p deze twee waarden:

$$p = q + m \quad \text{en } p = m - q \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$sin.B = cos.a \times cos.p \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

En, om den waren tijd der waarneming te vinden, heeft men:

$$sin.x = \frac{sin.a}{cos.B} \quad \text{en } u = x + t \quad \text{en } u' = x - t \quad . \; . \quad (7)$$

Men raadplege verder het aangehaalde werkje van den Heer LOBATTO.

II. OPLOSSING Om de oplosfing van den Heer HAZEWINKEL op te geven en met die van den Heer LOBATTO te vergelijken, zoo is, in *fig.* 139, flechts een gedeelte van *fig.* 138, voorgefteld, in dezelve is derhalve $AP = BP = 90^\circ - D$, hoek $APB = 2t$, $PT = 90^\circ - B$, $AT = 90^\circ - H$, $BT = 90^\circ - H'$.

Men verbeelde zich, door het middelpunt van den Hemelbol en de punten A en B, een grooten cirkel, die de hemelvlakte, volgens den grooten cirkelboog AB doorfnijdt; dan is, indien men, de declinatie

als ſtandvastig aanneemt, ABP een gelijkbeenigen bolvormigen driehoek; gevolgelijk is *hoek* $BAP =$ *hoek* ABP.

Men late, uit de pool P, een loodregten boog PM op de overſtaande zijde AB vallen; dan is *boog* $AM =$ *boog* BM. Verder late men, door de punten T en M, een grooten cirkelboog TM gaan, en late dan nog, uit het punt T, den loodregten boog TC op den boog PM vallen.

Men ſtelle *boog* $AM =$ *boog* $BM = b$, *boog* $PM = m$, *boog* $TC = r$, *boog* $MC = p$ en *boog* $TM = 90^o - q$; dan hebben wij, als volgt:

In den regthoekigen bolvormigen driehoek AMP, is vooreerst:

$$sin.\,AM = sin.\,APM \times sin.\,AP$$

dat is, volgens de aangenomene notatie,

$$sin.\,b = cos.\,D \times sin.\,t \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en deze is de eerſte formule van den Heer LOBATTO.

In denzelfden driehoek, is nog

$$cos.\,AP = cos.\,PM \times cos.\,AM$$

uit welke dan onmiddellijk volgt:

$$cos.\,PM = \frac{cos.\,AP}{cos.\,AM} \quad \text{of} \quad cos.\,m = \frac{sin.\,D}{cos.\,b} \quad \ldots \quad (2)$$

zijnde de tweede formule van den Heer LOBATTO.

Uit de twee ſcheefhoekige bolvormige driehoeken AMP en ABP, haalt men, zie *I. Gev. XIV. Stell.*

$$cos.\,BAT = \frac{cos.\,TM - cos.\,AT \times cos.\,AM}{sin.\,AT \times sin.\,AM}$$

$$cos.\,BAT = \frac{cos.\,BT - cos.\,AT \times cos.\,AB}{sin.\,AT \times sin.\,AB}$$

en uit deze volgt dan, na alles met *sin.* AT vermenigvuldigd te hebben:

$$\frac{cos.\,TM - cos.\,AT \times cos.\,AM}{sin.\,AM} = \frac{cos.\,BT - cos.\,AT \times cos.\,AB}{sin.\,AB}$$

dat is, volgens de aangenomene notatie,

$$\frac{sin.\,a - sin.\,H \times cos.\,b}{sin.\,b} = \frac{sin.\,H' - sin.\,H \times cos.\,2\,b}{sin.\,2\,b}$$

Om, uit deze vergelijking, de waarde van a te verkrijgen, werke men aldus. Omdat $cos.\,2\,b = 2\,cos^2.\,b - 1$ en $sin.\,2\,b = 2\,sin.\,b \times cos.\,b$ is, zoo heeft men:

$$\frac{sin.\,a - sin.\,H \times cos.\,b}{sin.\,b} = \frac{sin.\,H'}{2\,sin.\,b \times cos.\,b} - \frac{2\,cos^2.\,b \times sin.\,H}{2\,sin.\,b \times cos.\,b} + \frac{sin.\,H}{2\,sin.\,b \times cos.\,b}$$

dat is, na alles met *sin.* b vermenigvuldigd en de gelijke termen weggenomen te hebben, na verdere herleiding:

sin. q

$$sin.\,q = \frac{sin.\,H' + sin\ H}{2\,cos.\,b} \quad \ldots\ldots\ (a)$$

of wel, na voor $sin.\,H' + sin.\,H$ de meermaal aangehaalde waarde gefchreven te hebben:

$$sin.\,q = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(H' + H) \times cos.\,\tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos.\,b} \quad \ldots\ (3).$$

welke formule niet meer met die van den Heer LOBATTO overeenkomt.

Voorts is, in den fcheefhoekigen bolvormigen driehoek BMT:

$$cos.\,BMT = sin.\,TMC = \frac{cos.\,BT - cos.\,BM \times cos.\,TM}{sin.\,BM \times sin.\,TM}$$

of, volgens de aangenomene notatie,

$$sin.\,TMC = \frac{sin.\,H' - sin.\,q \times cos.\,b}{cos.\,q \times sin.\,b}$$

Schrijft men nu in deze vergelijking voor $sin.\,q$, die in vergelijking (a) voorkomt; dan verkrijgt men, na de noodige herleiding:

$$sin.\,TMC = \frac{sin.\,H' - sin.\,H}{2\,cos.\,a \times sin.\,b}$$

of wel, zie de meermaal aangehaalde herleiding,

$$sin.\,TMC = \frac{cos.\,\tfrac{1}{2}(H' + H) \times sin.\,\tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos.\,q \times sin.\,b}$$

Men vermenigvuldige nu deze laatfte vergelijking met $sin.\,TM = cos.\,q$; dan zal, omdat in den regthoekigen bolvormigen driehoek TMC, zie *VIII. Stell.* $sin.\,TMC \times sin.\,TM = sin.\,TC$ is, verkrijgen:

$$sin.\,r = \frac{cos.\,\tfrac{1}{2}(H' + H) \times sin.\,\tfrac{1}{2}(H' - H)}{sin.\,b} \quad \ldots\ (4)$$

In den regthoekigen bolvormigen driehoek TMC, is nog verder

$$cos.\,MC = \frac{cos.\,MT}{cos.\,TC} \text{ of } cos.\,p = \frac{sin.\,q}{cos.\,r} \quad \ldots\ldots\ (5)$$

derhalve is $PC = MP - CM$, of $PC = m - p$.

Eindelijk is, in den regthoekigen bolvormigen driehoek TPC,

$$cos.\,PT = cos.\,TC \times cos.\,CM$$

$$\text{of } sin.\,B = sin.\,r \times cos.\,(m - p) \quad \ldots\ldots\ (6)$$

Men heeft dan het volgende ftelfel van formulen:

$$sin.\,b = cos.\,D \times sin.\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$cos.\,m = \frac{sin\ D}{cos.\,b} \quad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

$$sin.\,q = \frac{sin.\,\tfrac{1}{2}(H + H) \times cos.\,\tfrac{1}{2}(H' - H)}{cos.\,b} \quad \ldots\ (3)$$

$$sin.\,r = \frac{cos.\,\tfrac{1}{2}(H' + H) \times sin.\,\tfrac{1}{2}(H - H)}{sin.\,b} \quad \ldots\ (4)$$

$$cos. p = \frac{sin. q}{cos. r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

$$sin. B = sin. r \times cos. (m - p) \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Men ziet, dat er, ten aanzien van het gemak der berekening, geen merkelijk verfchil tusfchen de formulen van den Heer LOBATTO, en die van Heer HAZEWINKEL beftaat. In beide ftelfels, zijn de formulen (1) en (2) dezelfde; en, indien men deze, zoo als de Heer HAZEWINKEL daarvan, in het aangehaalde werkje, eene proeve heeft gegeven, in tafels brengt; dan is de berekening ten minfte zoo eenvoudig, als die van den Heer DOUWES, en gaat veel zekerder.

LI. VRAAGSTUK. *Fig.* 140.

§. 1298. *Om, op zee, de lengte te bepalen, wordt de afftand van het middelpunt der Maan tot het middelpunt der Zon, of van het middelpunt der Maan tot eene vaste fter, benevens de hoogte dezer hemellichten waargenomen; men vraagt: hier uit den afftand, uit het middelpunt der Aarde gezien, te berekenen?*

OPLOSSING. Zij T het toppunt, IK een gedeelte van den omtrek van den waren horizon. TI de verticale boog, die door het middelpunt van de Maan, TK de verticale boog, die door het middelpunt van de Zon of van eene vaste Ster gaat. Stel, dat men, op het oppervlak van de Zee, de Maan waarneme, in het punt M, de Zon of de Ster in het punt S; dan zal de Maan, uit het middelpunt der Aarde gezien, wegens hare groote parallaxis, in het punt m hooger; doch de Zon, wegens de ftraalbreking lager in s fchijnen te zijn. De waargenomen afftand is de boog MS de afftand uit het middelpunt der Aarde gezien, de boog ms. Nu is de vraag: *om, uit den waargenomen fchijnbaren afftand MS, de waargenomene hoogten MI en KS* (uit welke de ware hoogten mI en sK kunnen warden afgeleid,) *den afftand ms, uit het middelpunt der Aarde gezien, te berekenen?*

Men noeme den waargenomen afftand $MS = A$; de afftand ms, uit het middelpunt der Aarde gezien, $ms = a$; de waargenomen hoogte van de Maan, $IM = M$, hare hoogte uit het middelpunt der Aarde $Im = m$; de waargenomene hoogte van de Zon, $KS = Z$ en de ware hoogte, uit het middelpunt der Aarde, $Ks = z$.

Volgens de *XIV. Stell.* en *Gev.*, is, in de bolvormige driehoeken Tms en TMS,

$$cos. ms = cos. T \times sin. mT \times sin. sT + cos. mT \times cos. sT$$

$$\text{en} \quad cos. T = \frac{cos. MZ - cos. MT \times cos. ST}{sin. MT \times sin. ST}$$

dat is, in de aangenomene notatie,

$$cos. a = cos. T \times cos. m \times cos. z + sin. m \times sin. z \quad . \; . \quad (1)$$

$$\cos. T = \frac{\cos. A - \sin. M \times \sin. Z}{\cos. M \times \cos. Z} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Indien men nu de vergelijking (2) in vergelijking (1) overbrengt; dan verkrijgt men:

$$\cos. a = [\cos. A - \sin. M \times \sin. Z] \times \frac{\cos. m \times \cos. z}{\cos. M \times \cos. Z}$$
$$+ \sin. m \times \sin. z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Deze is de grondvergelijking, die den waren afstand, uit het middelpunt der Aarde gezien, voorstelt, en uit welke de onderscheidene rekenmanieren, van welke men zich tot hiertoe bediend heeft, zijn afgeleid.

De factor $\cos. A - \sin. M \times \sin. Z$, die in het tweede lid van de vergelijking (A) voorkomt, kan aldus

$$\cos. A - \sin. M \times \sin. Z + \cos. M \times \cos. Z - \cos. M \times \cos. Z$$

worden voorgesteld, en dan verkrijgt de vergelijking (A) dezen vorm:

$$\cos. a = [\cos. A - \sin. M \times \sin. Z + \cos. M \times \cos. Z - \cos. M \times \cos. Z]$$
$$\times \frac{\cos. m \times \cos. z}{\cos. M \times \cos. Z} + \sin. m \times \sin. z \quad . \quad . \quad . \quad (A')$$

Deze vergelijking (A') is nu voor twee onderscheidene herleidingen vatbaar.

1°. Is, volgens de bekende grondformulen,

$$-\cos. M \times \cos. Z - \sin. M \times \sin. Z = -\cos. (M - Z)$$

men verkrijgt derhalve:

$$\cos. a = [\cos. A - \cos. (M - Z) + \cos. M \times \cos. Z] \times \frac{\cos. m \cos. z}{\cos. M \times \cos. Z}$$
$$+ \sin. m \times \sin. z$$

$$\cos. a = [\cos. A - \cos. (M - Z)] \times \frac{\cos. m \cos. z}{\cos. M \times \cos. Z}$$
$$+ \cos. m \times \cos. z + \sin. m \times \sin. z$$

of, omdat $\cos. m \cos. z + \sin. m \sin. z = \cos. (m - z)$ is

$$\cos a = [\cos. A - \cos. (M - Z)] \times \frac{\cos. m \cos. z}{\cos M \cos. Z} + \cos. (m - z) \quad (A a)$$

2°. En, omdat

$$\cos. M \cos. Z - \sin. M \times \sin. Z = \cos. (M + Z)$$

is, zoo kan de vergelijking (A'), indien wij, na die substitutie, dezelve op dezelfde wijze behandelen, ook nog onder dezen vorm worden voorgesteld

$$\cos. a = [\cos. A + \cos. (M + Z)] \times \frac{\cos. m \cos. z}{\cos. M \cos. Z} + \cos. (m + z) \quad (A b)$$

Wij beschouwen, in het vervolg, deze vergelijkingen ($A a$) en ($B b$), als de hoofdvergelijkingen, uit welke al de volgende worden afgeleid:

A. Omdat, zie *VI. Stell. XI. Boek*,

$$\cos. A - \cos. (M - Z) = -[\cos. (M - Z) - \cos. A]$$

 =

$$= -2\,sin.\tfrac{1}{2}(A+M-Z)\times sin.\tfrac{1}{2}(A-M+Z)$$

is, zoo kan de vergelijking (Aa) aldus worden voorgesteld:

$$cos.\,a = cos.(m-z) - 2\,sin.\tfrac{1}{2}(A+M-Z)\,sin.\tfrac{1}{2}(A-M+Z) \times \frac{cos.\,m\,cos.\,z}{cos.\,M\,cos.\,Z}$$

Men trekke deze af van de identische vergelijking $1 = 1$; dan zal zij, aangezien, in het algemeen, $1 - cos.\,x = 2\,sin^2.\tfrac{1}{2}x$ is, dezen nieuwen vorm verkrijgen:

$$sin^2.\tfrac{1}{2}a = sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z) + sin.\tfrac{1}{2}(A+M-Z)\,sin.\tfrac{1}{2}(A-M+Z) \times \frac{cos\,m\,cos.\,z}{cos.\,M\,cos.\,Z} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (A'a)$$

Het tweede lid dezer vergelijking bestaat nu uit twee termen; om hetzelve derhalve voor de berekening in Logarithmen geschikter te maken, deele men eerst door $sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z)$, en vermenigvuldige het quotient dan wederom met dien deeler; dan verkrijgt men:

$$sin^2.\tfrac{1}{2}a = sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z) \ldots\ldots \times\left[1 + \frac{sin.\tfrac{1}{2}(A+M-Z)\,sin.\tfrac{1}{2}(A-M+Z)}{sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z)} \times \frac{cos.\,m\,cos.\,z}{cos.\,M\,cos.\,Z}\right]$$

Men stelle, in deze vergelijking,

$$tang^2.\,P = \frac{sin.\tfrac{1}{2}(A+M-Z)\,sin.\tfrac{1}{2}(A-M+Z)}{sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z)} \times \frac{cos.\,m\,cos.\,z}{cos.\,M\,cos.\,Z}$$

dan zal zij worden:

$$sin^2.\tfrac{1}{2}a = sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z)\times(1+tang^2.\,P) = sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z)\,sec^2.\,P$$

$$sin^2.\tfrac{1}{2}a = \frac{sin^2.\tfrac{1}{2}(m-z)}{cos^2.\,P}$$

Wij hebben dan, om, uit de waarnemingen, den waren afstand te berekenen, deze twee formulen:

$$tang^2.\,P = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\sqrt{[sin.\tfrac{1}{2}(A+M-Z)\,sin.\tfrac{1}{2}(A-M+Z)]}}{sin.\tfrac{1}{2}(m-z)} \times \frac{cos.\,m\,cos.\,z}{cos.\,M\,cos.\,Z} \quad (1)$$

$$sin.\tfrac{1}{2}a = sin.\tfrac{1}{2}(m-z) : cos.\,P \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Deze formulen bevatten de rekenmanier van MASKELYNE.

B. De vergelijking (Ab) kan, omdat

$$cos.\,A + cos.(M-Z) = 2\,cos.\tfrac{1}{2}(A+M+Z)\,cos.\tfrac{1}{2}(M+Z-A)$$

is, aldus worden voorgesteld:

$$cos.\,a = -cos.(m+z) + 2\,cos.\tfrac{1}{2}(A+M+Z) \ldots\; cos.\tfrac{1}{2}(M+Z-A) \times \frac{cos.\,m\,cos.\,z}{cos.\,M\,cos.\,Z}$$

Indien men deze nu van de identische vergelijking $1 = 1$ aftrekt; dan zal men wederom verkrijgen:

sin². ½

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a = \cos^2.\tfrac{1}{2}(m+z) - \cos.\tfrac{1}{2}(A+M+Z)\times \ldots$$
$$\cos.\tfrac{1}{2}(M+Z+A)\times\frac{\cos.m\cos.z}{\cos.M\cos.Z}$$
$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a = \cos.\tfrac{1}{2}(m+z)\ \ldots\ldots$$
$$\times\left[1-\frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+M+Z)\cos.\tfrac{1}{2}(M+Z-A)}{\cos^2.\tfrac{1}{2}(m+z)}\times\frac{\cos.m\cos.z}{\cos.M\cos.Z}\right]$$

Men ftelle, in deze laatfte,

$$\sin^2.Q = \frac{\cos.\tfrac{1}{2}(A+M+Z)\cos.\tfrac{1}{2}(M+Z-A)}{\cos^2.\tfrac{1}{2}(m+z)}\times\frac{\cos.m\cos.z}{\cos.M\cos.Z}$$

dan verkrijgt men:

$$\sin^2.\tfrac{1}{2}a = \sin^2.(m+z)\times(1-\sin^2.Q) = \cos^2.\tfrac{1}{2}(m+z)\cos^2.P$$

Wij hebben derhalve, om den waren afftand te berekenen, nog deze twee andere vergelijkingen:

$$\sin.Q = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\sqrt{[\cos.\tfrac{1}{2}(A+M+Z)\cos.\tfrac{1}{2}(M+Z-A)]}}{\cos.\tfrac{1}{2}(m+z)}\times\frac{\cos.m\cos.z}{\cos.M\cos.Z}\ .\ (1)$$
$$\sin.\tfrac{1}{2}a = \cos.\tfrac{1}{2}(m+z)\cos.P\ \ldots\ldots\ (2)$$

in welk ftelfel van formulen, de manier van BORDA beftaat.

C. De vergelijking (Aa), namelijk

$$\cos.a = [\cos.A - \cos.(M-Z)]\times\frac{\cos.m\cos.z}{\cos.M\cos.Z} + \cos.(m-z)\ (Aa)$$

is nog voor eene andere herleiding vatbaar. Men ftelle

$$\frac{\cos.m\times\cos.z}{2\cos.M\times\cos.Z} = \cos.B\ \ldots\ldots\ldots\ (\Delta)$$

dan verkrijgt men:

$$\cos.a = 2\cos.A\cos.B - 2\cos.(M-Z)\cos.B + \cos.(m-z)$$

maar nu is,

$$2\cos.A\cos.B = \cos.(A+B)+\cos.(A-B)$$
$$2\cos.(M-Z)\cos.B = \cos.(B+M-Z)+\cos.(B-M+Z)$$

en wij verkrijgen derhalve:

$$\cos.A = \cos.(A+B)+\cos.(A-B)-\cos.(B+M-Z)-$$
$$\cos.(B-M+Z)+\cos.(m-z)\ \ldots\ldots\ (C)$$

Door deze formulen kan men (de hoek B door de berekening van de formule (Δ) bekend geworden zijnde) $\cos.a$ of den waren afftand door de natuurlijke finus-tafel vinden; dan, daar de zeeman. bij het gebruik der natuurlijke cofinusfen, op derzelver teekens zou moeten letten; heeft men bedacht, om de formule B in *finus-verfus* en *fufinus-verfus* over te brengen, welke altijd pofitief zijn. Men weet namelijk, dat

$$\sin.\ vers.\ x = 1 - \cos.x$$
$$susin.\ vers.\ x = 1 + \cos.x$$

is; derhalve is natuurlijk,

$$cos.\, x = 1 - sin.\, vers.\, x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\alpha)$$

$$cos.\, x = susin.\, vers.\, x - 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (\beta)$$

Uit welke twee vergelijkingen dan verder volgt:

$$susin.\, vers.\, x - 1 = 1 - sin.\, vers.\, x$$

$$sin.\, vers.\, x = 2 - susin.\, vers.\, x \quad \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

Met behulp van de vergelijking (α), wordt de vergelijking (C),

$$(1 - sin.\, vers.\, a) = [1 - sin.\, vers\, (A+B)] + [1 - sin.\, vers.\, (A-B)]$$
$$- [1 - sin.\, vers.\, (B+M-Z)] - [1 - sin.\, vers.\, (B-M+Z)]$$
$$+ [1 - sin.\, vers.\, (m-z)].$$

dat is, indien men dezelve van $1 = 1$ aftrekt, en de teekens omkeert,

$$sin.\, vers.\, a = sin.\, vers.\, (A+B) + sin.\, vers.\, (A-B) - sin.\, vers.\, (B+M-Z)$$
$$- sin.\, vers.\, (B-M+Z) + sin.\, vers.\, (m-z) \quad \ldots \quad (Cc)$$

en deze is de formule, welke de Heer KRAFFT, in de *Act. Petrop.* 1789, heeft bekend gemaakt.

Met behulp van de vergelijking (γ), zal de formule (Cc) dezen vorm verkrijgen:

$$sin.\, vers.\, a = sin.\, vers.\, (A+B) + sin.\, vers.\, (A-B) + susin.\, vers.\, (B+M+Z)$$
$$+ susin.\, vers.\, (B-M+Z) + sin.\, vers.\, (m-z) - 4 \quad (Ccc)$$

en deze is de vorm, welke MENDAZA RIOS aan de formule van KRAFFT gegeven heeft.

D. Met behulp van de vergelijking (Δ), wordt de vergelijking (Ab), namelijk

$$cos.\, a = [cos.\, A + cos.\, (M+Z)] \times \frac{cos.\, m\, cos.\, z}{cos.\, M\, cos.\, Z} - cos.\, (m-z)$$

op dezelfde wijze, als boven, onder den vorm

$$cos.\, a = cos.\, (A+B) + cos.\, (A-B) + cos.\, (M+Z+B)$$
$$+ cos.\, (M+Z-B) - cos.\, (m-z) \quad \ldots \ldots \quad (D)$$

gebragt; uit welke, met behulp van de vergelijking (α) en (γ), zal volgen:

$$sin.\, vers.\, a = sin.\, vers.\, (A+B) + sin.\, vers.\, (A-B) + sin.\, vers.\, (M+Z+B)$$
$$+ sin.\, vers.\, (M+Z-B) + susin.\, vers.\, (m+z) - 4 \;.\; (Dd)$$

en deze is eene andere formulen van MENDAZA RIOS.

Wij gaan andere herleidingen, die uit de grondvergelijking zouden kunnen afgeleid worden, met stilzwijgen voorbij.

VEER-

VEERTIENDE BOEK.

Over de Theorie der Transversalen, *benevens eene korte aanwijzing van derzelver gebruik.*

---

§. 1299. I. BEPALING. Eene *Transversaal* is eene regte of kromme lijn, welke, in het vlak van eenige figuur, naar welgevallen, wordt aangenomen, en de zijden van die figuur of derzelver verlengde ergens doorsnijdt. Een *transversaal vlak* is een plat of gebogen vlak, dat, naar welgevallen, in de ruimte wordt aangenomen, en een stelsel van lijnen snijdt, *enz.*

§. 1300. II. BEPALING. Wij nemen thans het woord veelhoek in eene uitgestrektere beteekenis, en verstaan door denzelven een stelsel van regte lijnen, welke eenige gegevene punten, (mits geen drie dezer punten in dezelfde regte lijn liggen,) in eenigerlei rangorde genomen, het eerste met het tweede, het tweede met het derde, *enz.* en het laatste met het eerste vereenigen. Zie *fig.* 141 en 142.

§. 1301. III. BEPALING. Wanneer de hoekpunten van zulk eenen veelhoek in hetzelfde vlak gelegen zijn; dan noemt men den veelhoek *vlakke veelhoek:* maar liggen zij in onderscheidene vlakken, dan wordt de veelhoek *scheve veelhoek.* (*polygone gauche*) genoemd.

1302. AANMERKINGEN. 1°. Wanneer het aantal der gegevene punten n is; dan zal het aantal veelhoeken, welke, door deze punten, op de voorschrevene wijze te vereenigen, kunnen ontstaan, door

$$\tfrac{1}{2}(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\,enz.\times 3\times 2\times 1$$

worden uitgedrukt; eene waarheid, welke, door de Leer der permutatien, gemakkelijk kan bewezen worden.

2°. Men kan ook den veelhoek beschouwen, als te ontstaan, uit de onderlinge snijding van eenige gegevene lijnen; en dan ontstaan er, in deze figuur, onderscheidene veelhoeken: doch wij zullen ons met deze wijze van beschouwon, als minder tot ons oogmerk dienende, thans niet ophouden.

3°. De beschouwing der veelhoeken, op de wijze, zoo als wij dezelve hier aannemen, leert zeer fraaije eigenschappen kennen, welke wij, als tot ons tegenwoordig plan niet behoorende, bij eene andere gelegenheid, zullen leeren kennen.

I. STELLING. *Fig.* 143, 144 *en* 145.

§. 1303. ***Wanneer de drie zijden (AB, AC en BC) van eenen driehoek, of derzelver verlengden, door eene regte lijn (DEF), als transversaal, gesneden worden; dan ontstaan er, op elke zijde des driehoeks, twee lijnen, begrepen tusschen de uiteinden van die zijde en het snijpunt, (namelijk AD en BD op AB, BF en CF op BC, CE en EA op AC,) welke wij, kortheidshalve, segmenten der zijden zullen noemen; deze segmenten hebben, hoe de transversaal moge genomen zijn, zulk eene overeenkomst met elkander, dat het product van drie dezer segmenten, welke geen gemeenschappelijk hoekpunt hebben, gelijk is aan het product der drie anderen; dat is:***

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF.$$

BETOOG. Men trekke de lijn AG, evenwijdig aan BC; dan geven de driehoeken DAG en DBF, die (*XXIV. Stell. I. B.* en *VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig zijn, de evenredigheid:

$$AD : DB = AG : BF; \textit{ waaruit } AD \times BF = AG \times BD \;..\; (1)$$

De driehoeken AGE en CFG, (*XXVI. Stell. I. B.* en *VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig zijnde, geven:

$$AG : AE = CF : CE; \textit{ waaruit } AG \times CE = AE \times CF \;..\; (2)$$

Vermenigvuldigt men nu de leden der vergelijkingen (1) en (2) met elkander, en deelt men de gelijke producten door den gemeenen factor AG; dan heeft men:

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF$$

en dit betoog geldt voor al de figuren, gelijk ook voor vele anderen, in welke aan de transversaal eene andere stelling mogt gegeven zijn.

§ 1304. I. GEVOLG. Indien men, *fig.* 143, de transversaal DF evenwijdig aan AB stelt; dan worden AD en BD oneindig, en de vergelijking op de segmenten der zijden wordt $BF \times CE = AE \times CF$; waaruit volgt: $BF : CF = AE : CE$, hetgeen met de *I. Stelling* van het *IV. Boek*, overeenstemt.

§. 1305. II. GEVOLG. Wanneer de transversaal, *fig.* 143, door het punt A gaat; dan worden AD en $AE = 0$, en wij hebben, $0 \times BF \times CE = 0 \times DB \times CF$ en $BF \times CE : BD \times CF = \frac{0}{0}$ = eene onbepaalde grootheid; en de vergelijking kan, in dit geval, niets leeren.

§. 1306. III. GEVOLG. *Fig.* 143, 144 en 145. Door de transversaal ontstaan er in de figuur, behalve de driehoek ABC, nog de drie driehoeken DBF, CEF en DAE, welke respectievelijk de lijnen AC, BD en BC, tot transversalen hebben: men heeft derhalve de vier volgende vergelijkingen:

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF \textit{ uit drieh. } ABC$$
$$AB \times CF \times DE = AD \times EF \times BC \;.....\; DBF$$

AE

$$AE \times FD \times BC = BF \times AC \times DE \text{ uit drieh. } CFE$$
$$BD \times AC \times EF = EC \times DF \times AB \text{ . . . . . } DAE$$

welker product $1 = 1$ geeft; zoodat het product van drie dezer vergelijkingen de vierde vergelijking moet geven.

§. 1307. IV. Gevolg. Wanneer men de eerste met de tweede, of de derde met de vierde vergelijking, vermenigvuldigt; dan verkrijgt men:

$$AB \times BF \times CE \times DE = BD \times BC \times AE \times EF$$

en het product van de eerste en derde, of van de tweede en vierde vergelijking, geeft:

$$AD \times FD \times CE \times BC = BD \times AC \times CF \times DE$$

uit welke vergelijkingen de evenredigheden,

$$BD \times BC : AB \times BF = CE \times DE : AE \times EF$$
en $$AD \times DF : BD \times DE = AC \times CF : BC \times CE$$

volgen, waarvan men, in vele gevallen, een nuttig gebruik kan maken.

II. Stelling. *Fig.* 143, 144 *en* 145. (*Het omgek. der voorg.*)

§. 1308. *Wanneer men, op twee zijden, AC en BC, eens driehoeks, of op derzelver verlengden, twee punten E en F; en, op het verlengde van de derde zijde AB, een punt D, zoodanig neemt; dat het product der segmenten AD, BF en CE, welke geen gemeenschappelijk punt hebben, gelijk is aan het product der drie andere segmenten, AE, BD en CF; dan zullen de punten D, E en F in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

Betoog. Wanneer een ander punt D', met de punten E en F, in dezelfde regte lijn liggen; dan is (*I. Stell.*)

$$AD' \times BF \times CE = AE \times BD' \times CF$$

maar, volgens de onderstelling is:

$$AD \times BF \times CE = AE \times BD \times CF$$

uit welke vergelijkingen, de evenredigheden (*V. Stell. II. B.*)

$$AD' : BD' = AE \times CF : BF \times CE$$
$$AD : BD = AE \times CF : BF \times CE$$

volgen, en uit deze wederom (*I. Stell. II. B.*)

$$AD' : BD' = AD : BD$$

en (*VIII. Stell. II. B.*)

$$BD' - AD' : BD - AD = AD' : AD = AB : AB$$

dat is twee ongelijke grootheden, in dezelfde reden, als twee gelijke: daar nu zulks ongerijmd is, zoo kan geen ander, dan het punt D, met de punten E en F, in dezelfde regte lijn gelegen zijn.

III. Stelling. *Fig.* 146, 147 *en* 148.

§. 1309. *Wanneer al de zijden van eenen vlakken veelhoek van*

n

n zijden, of derzelver verlengden, (zoo als het valt,) door eene transversaal lijn gesneden worden; dan ontstaan er, op elke van dezelfs zijden, van de hoekpunten af te rekenen, tot aan het snijpunt, twee segmenten: nu zal het product van n segmenten, waarvan er op elke zijde één zoodanig genomen is, dat geen dezer segmenten een gemeen hoekpunt hebben, gelijk zijn aan het product van de n andere segmenten. Dat is voor eenen zeshoek, welke de figuur voorstelt:

$$AG \times BH \times CI \times DK \times EL \times FM = AM \times FL \times EK \times DI \times CH \times BG.$$

Betoog. Offchoon deze stelling niet, in het algemeen, voor eenen *n*-hoek, kan bewezen worden, zal het bewijs voor de zeshoeken, waarvan de figuren 146, 147 en 148, er drie onderscheidene soorten voorstellen, aanwijzen: hoe men de bewijzen voor de vier, vijf, zeven, acht, negenhoeken, *enz.* kan opmaken; terwijl men, door de leiding van dit bijzonder bewijs, zal gevoelen, dat het bewezene voor den zeshoek zich tot alle andere veelhoeken, hoe groot het getal der zijden zijn moge, moet uitstrekken.

Men trekke van één der hoekpunten, bij voorbeeld A, de hoekpuntslijnen AC, AD en AE, welke men, indien het noodig is, tot aan de transversaal lijn, in N, O en P, verlengt; dan geven, volgens de *I. Stelling*, de driehoeken ABC, ACD, ADE en AEF, de lijn KI als derzelver transversaal lijn beschouwende, de vier volgende vergelijkingen:

$$AG \times BH \times CN = AN \times CH \times BG$$
$$AN \times CI \times DO = AO \times DI \times CN$$
$$AO \times EP \times DK = AP \times EK \times OD$$
$$AP \times EL \times FM = AM \times FL \times EP$$

Vermenigvuldigt men nu de overeenkomstige leden dezer vergelijkingen met elkander; dan verkrijgt men, na alles door de gelijke factoren CN, AN, DO, AO, EP en AP, welke in de beide producten voorkomen, gedeeld te hebben:

$$AG \times BH \times CI \times DK \times EL \times FM = AM \times BG \times CH \times DI \times EK \times EL$$

welke de gestelde vergelijking is, die men betoogen moest.

Men zal, door, uit hetzelfde hoekpunt, tot de andere hoekpunten, hoekpuntslijnen te trekken, eenen vierhoek in twee, eenen vijfhoek in drie, eenen *n*-hoek in *n* — 2 driehoeken verdeelen, en het product der vergelijkingen, op de gemeenschappelijke transversaal van alle deze driehoeken, zal, na door de gelijke factoren, welke in hetzelve voorkomen, gedeeld te hebben, altijd de gestelde vergelijking geven.

IV.

IV. STELLING. *Fig.* 146, 147 *en* 148.

§. 1310. *Wanneer de hoekpunten van eenen veelhoek in onderscheidene vlakken gelegen zijn, en de veelhoek diensvolgens een scheve veelhoek is; dan zal, indien men, in plaats van eene transversaal lijn, een transversaal vlak KI aanneemt, hetwelk de zijden, of derzelver verlengden, doorsnijdt, de vergelijking op de segmenten, welke, door de ontmoeting van dit vlak, gemaakt worden, nog, op dezelfde wijze, als in het geval van eenen vlakken veelhoek, die door eene transversaal lijn gesneden wordt, blijven plaats hebben; namelijk, voor onze bijzondere figuren*

$$AG \times BH \times CI \times DK \times EL \times FM = AM \times BG \times CH \times DI \times EK \times FL.$$

BETOOG. Men trekke wederom de hoekpuntslijnen AC, AD en AE, welke het transversaal vlak, in de punten N, O en P, snijden: omdat nu de driehoeken ABC, ACD, ADE en AEF, elk, in een bijzonder vlak, liggen, zijn de snijpunten G, H en N; N, O en I; O, K en P; en M, L en P, (die zich alle in het transversale vlak bevinden,) drie aan drie, in dezelfde regte lijnen gelegen; welke regte lijnen, als in het algemeene transversale vlak liggende, de transversaal lijnen van elken dezer driehoeken zijn. Deze transversaal lijnen geven dezelfde vergelijkingen van het betoog der voorgaande Stelling, en bijgevolg ook dezelfde vergelijking op de segmenten van den scheven zeshoek. De beschouwing van twee of drie andere scheve veelhoeken zal aan het verstand overtuigend doen blijken: *dat het gestelde voor alle scheve, zoowel als voor alle vlakke veelhoeken, volstrekt, en zonder eenige uitzondering, algemeen is.*

§. 1311. AANMERKING. Men zal het omgekeerde der twee voorgaande Stellingen, op dezelfde wijze, als het omgekeerde van de eerste stelling, kunnen bewijzen.

V. STELLING. *Fig.* 149 *en* 150.

§. 1312. *Wanneer men, binnen of buiten eenen driehoek ABC, een punt P neemt, en uit de hoekpunten A, B en C van dien driehoek ABC, door dit punt P, de transversaal lijnen AD, BE en CF trekt, welke de zijden des driehoeks ABC, of derzelver verlengden, in de punten D, E en F, in twee segmenten deelen; dan zal het product van drie segmenten, op de drie onderscheidene zijden genomen, en die niet hetzelfde hoekpunt gemeen hebben, gelijk zijn aan het product der drie andere segmenten. Dat is:* $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$.

BE-

Betoog. Men beschouwe de driehoeken ACF en BCF, en neme de lijnen BE en AD, als derzelver transversalen aan; dan is (*I. Stell.*)

$$EP \times CE \times AB = BF \times CP \times AE$$
$$AF \times BD \times CP = FP \times CD \times AB$$

het product dezer vergelijkingen geeft, na alles door $FP \times CP \times AB$ gedeeld te hebben:

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

§. 1313. I. Gevolg. Uit deze betoogde vergelijking volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$AF : BF = AE \times CD : BD \times CE.$$

§. 1314. II. Gevolg. Men trekke, door C, de lijn RQ, evenwijdig aan AB; dan zijn de driehoeken AFP en BFP aan de driehoeken QCP en RCP (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig. Men heeft dan $AF : FP = CQ : CP$ en BF, $PF = CR : CP$; derhalve (*XII. Stell. II. B.*) $AF : BF = CQ : CR$, en eindelijk, (*I. Stell. II. B.*)

$$CQ : CR = AE \times CD : BD \times CE$$

en $AE \times CD \times CR = BD \times CE \times CQ.$

VI. Stelling. *Fig.* 149 *en* 150. (*Het omgek. der voorg.*)

§. 1315. *Wanneer, op de drie zijden AB, BC en AC van eenen driehoek ABC, (of, op twee van derzelver verlengde, naar denzelfden kant,) drie punten F, D en E, zoodanig genomen worden, dat $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$ is; dan zullen de lijnen AD, BE en CF, welke, uit de hoekpunten, A, B en C der overstaande hoeken, tot deze altoo aangenomene punten getrokken worden, elkander in hetzelfde punt P, buiten of binnen den driehoek, ontmoeten.*

Betoog. De lijnen BE en CF snijden elkander in een punt P; wanneer nu de lijn AD niet door het punt P gaat; dan zal men, door het punt P, eene lijn AD' kunnen trekken, welke de zijde BC, in het punt D', snijdt; dan zal (*V. Stell.*)

$$AF \times BD' \times CE = BF \times CD' \times AE$$

zijn; maar, volgens de onderstelling, is

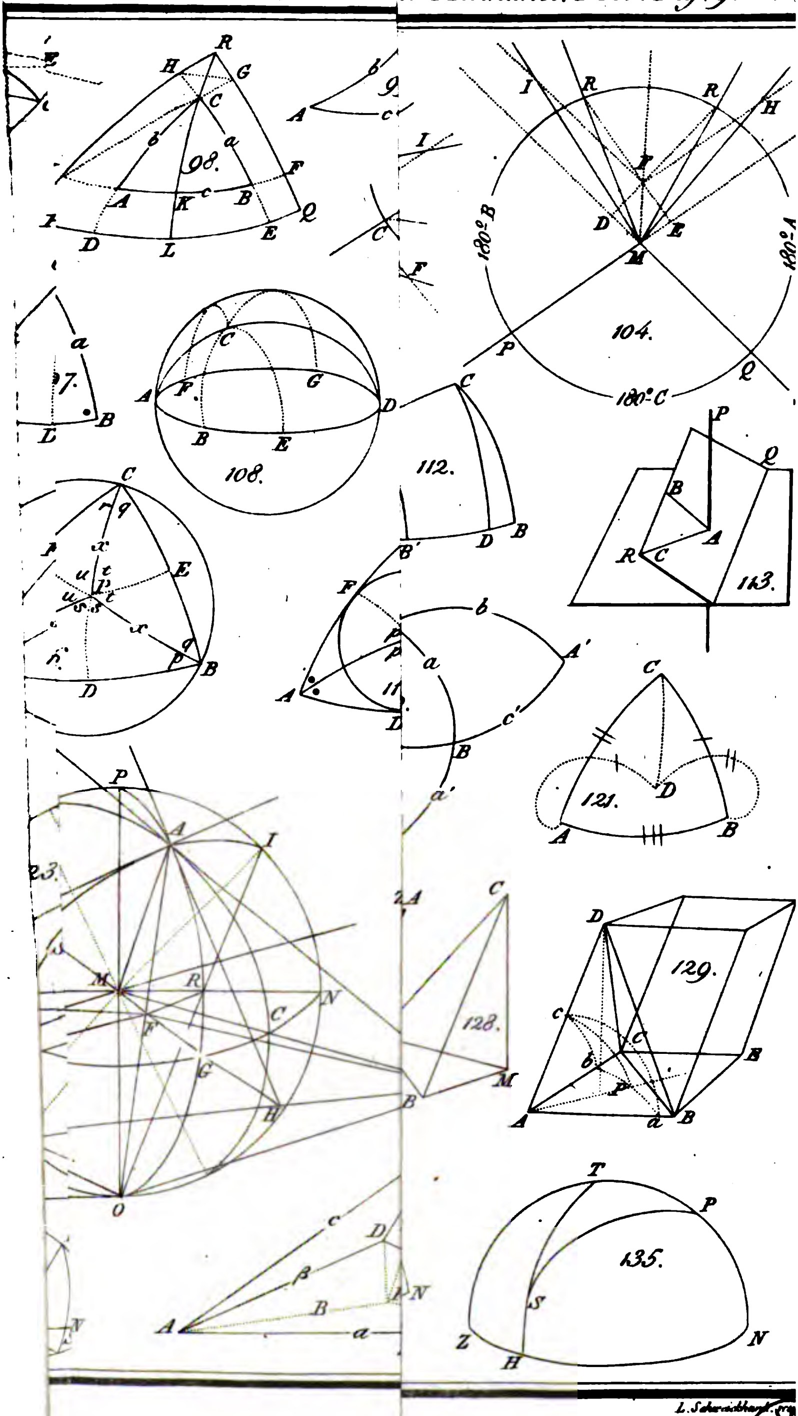
$$AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$$

Hieruit volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$BD' : CD' = AE \times BF : AF \times CE$$
$$BD : CD = AE \times BF : AF \times CE$$

en (*I. Stell. II. B.*) $BD' : CD' = BD : CD$; waaruit (*VIII. St. II. B.*) $BD' + CD' : BD + CD = BD' : BD$; dat is, $BD' : BD = BC : BC$ volgen zal; daar nu zulks ongerijmd is, zal geene andere, dan de lijn AD, door het punt P kunnen gaan, en het gestelde is hierdoor ten vollen bewezen.

§. 1316.



L. Schweickhardt ...

Betoog. Men beschouwe de driehoeken ACF en BCF, en neme de lijnen BE en AD, als derzelver transversalen aan; dan is (*I. Stell.*)

$$EP \times CE \times AB = BF \times CP \times AE$$

$$AF \times BD \times CP = FP \times CD \times AB$$

het product dezer vergelijkingen geeft, na alles door $FP \times CP \times AB$ gedeeld te hebben:

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

§. 1313. I. Gevolg. Uit deze betoogde vergelijking volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$AF : BF = AE \times CD : BD \times CE.$$

§. 1314. II. Gevolg. Men trekke, door C, de lijn RQ, evenwijdig aan AB; dan zijn de driehoeken AFP en BFP aan de driehoeken QCP en RCP (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig. Men heeft dan $AF : FP = CQ : CP$ en $BF, PF = CR : CP$; derhalve (*XII. Stell. II. B.*) $AF : BF = CQ : CR$, en eindelijk, (*I. Stell. II. B.*)

$$CQ : CR = AE \times CD : BD \times CE$$

$$\text{en } AE \times CD \times CR = BD \times CE \times CQ.$$

VI. Stelling. *Fig.* 149 *en* 150. (*Het omgek. der voorg.*)

§. 1315. *Wanneer, op de drie zijden AB, BC en AC van eenen driehoek ABC, (of, op twee van derzelver verlengde, naar denzelfden kant,) drie punten F, D en E, zoodanig genomen worden, dat* $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$ *is; dan zullen de lijnen AD, BE en CF, welke, uit de hoekpunten, A, B en C der overstaande hoeken, tot deze altoo aangenomene punten getrokken worden, elkander in hetzelfde punt P, buiten of binnen den driehoek, ontmoeten.*

Betoog. De lijnen BE en CF snijden elkander in een punt P; wanneer nu de lijn AD niet door het punt P gaat; dan zal men, door het punt P, eene lijn AD' kunnen trekken, welke de zijde BC, in het punt D', snijdt; dan zal (*V. Stell.*)

$$AF \times BD' \times CE = BF \times CD' \times AE$$

zijn; maar, volgens de onderstelling, is

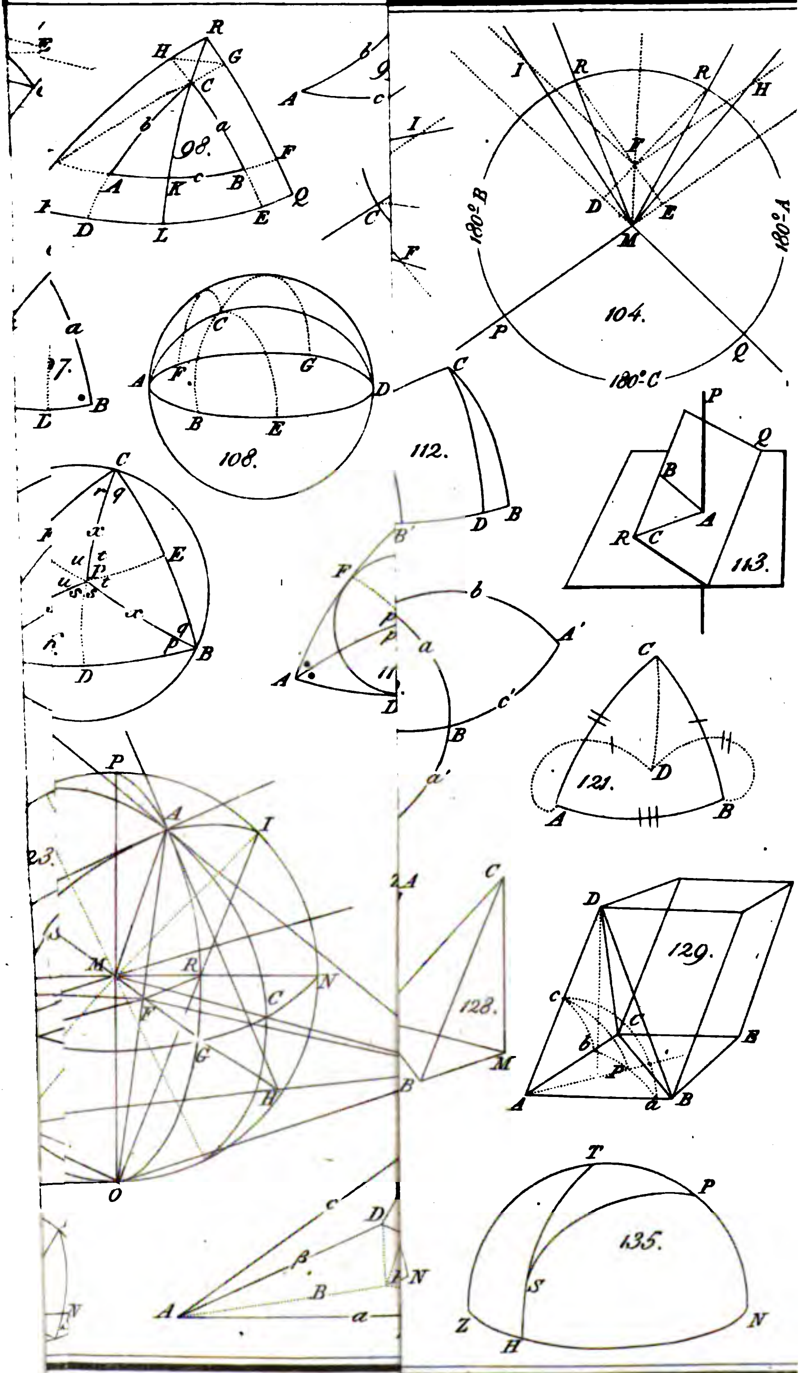
$$AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$$

Hieruit volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$BD' : CD' = AE \times BF : AF \times CE$$

$$BD : CD = AE \times BF : AF \times CE$$

en (*I. Stell. II. B.*) $BD' : CD' = BD : CD$; waaruit (*VIII. St. II. B.*) $BD' + CD' : BD + CD = BD' : BD$; dat is, $BD' : BD = BC : BC$ volgen zal; daar nu zulks ongerijmd is, zal geene andere, dan de lijn AD, door het punt P kunnen gaan, en het gestelde is hierdoor ten vollen bewezen.



L. Schweickhardt

§. 1316. I. GEVOLG. *Fig.* 149. Laten AD, BE en CF de loodlijnen zijn, welke, uit de hoekpunten, op de overstaande zijden van den driehoek vallen; dan is de driehoek AFC met den driehoek AEB, de driehoek CDA met den driehoek CEB, en de driehoek BDA met den driehoek BFC gelijkvormig; derhalve is,

$$AF:AE = AC:AB$$
$$BD:BF = AB:BC$$
$$CE:CD = BC:AC$$

vermenigvuldigt men deze vergelijkingen met elkander; dan verkrijgt men: (*XVI. Stell. II. B.*)

$$AF \times BD \times CE : AE \times BF \times CD = AC : AC = 1:1$$

of wel, omdat de termen van de tweede reden gelijk zijn, $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$. Volgens het bewezene in de stelling, *moeten dan de loodlijnen van eenen driehoek elkander, in hetzelfde punt P, doorsnijden.*

§. 1317. II. GEVOLG. *Fig.* 149. Laat $AF = BF$; $BD = CD$ en $CE = AE$ genomen worden; dan is $AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$; *de lijnen derhalve, welke, uit de toppunten van de hoeken eens driehoeks, tot het midden der overstaande zijden getrokken worden, moeten elkander in hetzelfde punt P, binnen den driehoek, doorsnijden.*

§. 1318. III. GEVOLG. *Fig.* 149. Laten de lijnen AD, BE en CF de hoeken A, B en C midden door deelen; dan is (*IV. Stell. IV. B.*)

$$AF:FB = AC:BC$$
$$BD:CD = AB:AC$$
$$CE:AE = BC:AB$$

het product dezer evenredigheden geeft $AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$. *De lijnen derhalve, welke de hoeken eens driehoeks in twee gelijke deelen snijden, ontmoeten elkander in hetzelfde punt.*

§. 1319. IV. BEPALING. Eenige grootheden, a, b, c, d, enz. zijn in eene harmonische reeks, wanneer drie op elkander volgende termen, a, b, c, of b, c, d, enz., tot elkander zulk eene betrekking hebben, dat de eerste dezer termen tot de derde, in dezelfde reden staat, als het verschil der twee eersten tot het verschil der twee laatsten: dat is, wanneer $a:c = a-b:b-c$; $b:d = b-c:c-d$ is, enz. Wanneer die reeks slechts uit drie leden bestaat, dan noemt men haar eene *harmonische evenredigheid.*

§. 1320. V. BEPALING. *Fig.* 151. Wanneer men, op eene lijn AD, van het punt A af te rekenen, de lijnen AB, AC en AD, in eene harmonische evenredigheid neemt; dan wordt de lijn AD gezegd, in de punten B en C, *harmonisch* (of in eene *harmonische evenredigheid*) *gesneden* te zijn; en men noemt dan de deelen AB en CD de *uiterste* deelen, en BC het *middelste* deel.

§. 1321. Gevolg. *Fig.* 151. Omdat, naar den aard der harmonische evenredigheid, $AB:AD = AC - AB:AD - AC$ is, of $AB:AD = BC:CD$, zal $AB \times CD = AD \times BC$ zijn. *Wanneer derhalve eene lijn AD, in de punten B en C, harmonisch gesneden is, dan zal de regthoek, onder de geheele lijn en het middelste deel, gelijk zijn aan den regthoek, onder de uiterste deelen.*

§. 1322. Aanmerking. *Fig.* 151. *Eene bepaalde of gegevene lijn AD kan, op onnoemlijk vele wijzen, harmonisch gesneden worden.* Stellen wij de geheele lijn $AD = a$, en nemen wij ééne der uiterste deelen $AB = b$; stellen wij dan het middelste deel $BC = x$; dan is $CD = a - b - x$, en $ax = ab - b^2 - bx$, en $x = b \times \frac{a-b}{a+b}$; waaruit volgt: *dat aan b alle waarden, van o tot a, kunnen gegeven, en bijgevolg het uiterste deel b, naar welgevallen, kan aangenomen worden.*

§. 1323. *Wanneer men*, Fig. 151, *eene lijn AC, welke, in het punt B, in twee, naar welgevallen genomene deelen, verdeeld is, tot in D, zoodanig wil verlengen, dat de geheele verlengde lijn AD, in de punten B en C, harmonisch gesneden zij*; of, dat hetzelfde is, *wanneer men tot twee lijnen AB en AC eene derde harmonische evenredige AD vinden wil*; dan zal men $AB = a$, $BC = b$ en $CD = x$ stellen, en dan is $(a + b + x) \times b = ax$; en hieruit zal volgen: $x = b \times \frac{a+b}{a-b}$; waaromtrent moet aangemerkt worden: dat, zal het verlengde inderdaad positief zijn, $a > b$ moet gegeven zijn.

§. 1324. Men kan dit alles, op eene eenvoudige wijze, door constructie, vinden. Zij, *fig.* 151, AD de gegevene lijn, AB het naar welgevallen genomen uiterste deel; dan trekke men, uit de uiteinden A en D, twee lijnen AE en DE, welke, in een willekeurig punt E, zamenkomen; door het punt B eene lijn FBG, evenwijdig aan DE; men neme $BG = FB$; dan zal de lijn EG de beide andere deelen BC en CD bepalen. Want, uit de gelijkvormige driehoeken, welke, door de constructie, in de figuur ontstaan zijn, is $AB:AD = BF:DE = BG:DE = BC:CD$ en $AB \times CD = AD \times CD$.

§. 1325. En, om eene gedeelde lijn AC, tot in D, zoodanig te verlengen, dat AD in B en C harmonisch gesneden zij, zal men eene onbepaalde lijn AE, door B eene onbepaalde lijn FGB trekken,

ken, $BC = BF$ nemen, GCE trekken, en ED evenwijdig aan FG; dan zal CD het verlengde der gegevene lijn zijn.

VII. STELLING. *Fig.* 152.

§. 1326. *Wanneer eene lijn AD, in de punten B en C harmonisch gesneden is, en men, uit eenig punt P, buiten die lijn gelegen, de lijnen AP, BP, CP en DP, trekt; dan zal,* $\sin.APD \times \sin.BPC = \sin.APB \times \sin.CPD$ *zijn.* En, omgekeerd, *wanneer de lijnen AP, BP, CP en DP, uit een punt P, zoodanig zijn getrokken: dat* $\sin.APD \times \sin.BPC = \sin.APB \times \sin.CPD$ *is; dan zal dit stelsel van lijnen elke lijn AB, welke door hetzelve, naar welgevallen, getrokken wordt, harmonisch snijden.*

BETOOG *van het eerste.* Men heeft (*III. Stell. IX. B.*) de evenredigheden:

$$AB : AP = \sin.APB : \sin.B$$
$$AP : AD = \sin.D : \sin.APD$$
$$CP : BC = \sin.B : \sin.BPC$$
$$CD : CP = \sin.CPD : \sin.D$$

vermenigvuldigt men de overeenkomstige termen dezer evenredigheden met elkander; dan verkrijgt men, na de termen van dezelfde reden, door hunne gelijke factoren, gedeeld te hebben:

$$AB \times CD : AD \times BC = \sin APB \times \sin.CPD : \sin.APD \times \sin.BPC$$

Omdat nu (*onderst.*) $AB \times CD = AD \times BC$ is, zal ook $\sin.APB \times \sin.CPD = \sin.APD \times \sin.BPC$ zijn.

BETOOG *van het omgekeerde.* Geheel onafhankelijk van de onderstelling, is voor elke lijn AD, de gezegde lijnen snijdende,

$$AB \times CD : AD \times BC = \sin.APB \times \sin.CPD : \sin.APD \times \sin.BPC$$

Omdat nu (*onderst.*) $\sin.APB \times \sin.CPD = \sin.APD \times \sin.BPC$ is, zal ook $AB \times CD = AD \times BC$ zijn.

§. 1327. I. GEVOLG. *Fig* 152. *Elke lijn A'B'C'D', welke, boven of beneden AD, evenwijdig, of niet evenwijdig, aan dezelve getrokken wordt, zal, indien AD door de lijnen AP, BP, CP en DP, harmonisch gedeeld is, ook door diezelfde lijnen harmonisch gesneden worden;* welke waarheid onmiddellijk, uit de stelling en de tegenstelling, volgt.

§. 1328. II. GEVOLG. Wanneer men de lijnen AP, BP, CP en DP, naar boven verlengt; dan zullen de verlengde lijnen aP, bP, cP, dP, nog de eigenschap behouden, dat zij elke lijn, die dezelve snijdt, harmonisch zullen snijden.

§. 1329. III. GEVOLG. Vermits de sinusfen van de supplementen der hoeken aan de sinusfen van die hoeken zelve gelijk zijn, *zullen de hoe-*

Betoog. Men beschouwe de driehoeken ACF en BCF, en neme de lijnen BE en AD, als derzelver transversalen aan; dan is (*I. Stell.*)

$$EP \times CE \times AB = BF \times CP \times AE$$
$$AF \times BD \times CP = FP \times CD \times AB$$

het product dezer vergelijkingen geeft, na alles door $FP \times CP \times AB$ gedeeld te hebben:

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD.$$

§. 1313. I. Gevolg. Uit deze betoogde vergelijking volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$AF : BF = AE \times CD : BD \times CE.$$

§. 1314. II. Gevolg. Men trekke, door C, de lijn RQ, evenwijdig aan AB; dan zijn de driehoeken AFP en BFP aan de driehoeken QCP en RCP (*VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig. Men heeft dan $AF : FP = CQ : CP$ en $BF, PF = CR : CP$; derhalve (*XII. Stell. II. B.*) $AF : BF = CQ : CR$, en eindelijk, (*I. Stell. II. B.*)

$$CQ : CR = AE \times CD : BD \times CE$$
en $$AE \times CD \times CR = BD \times CE \times CQ.$$

VI. Stelling. *Fig.* 149 *en* 150. (*Het omgek. der voorg.*)

§. 1315. *Wanneer, op de drie zijden* AB, BC *en* AC *van eenen driehoek* ABC, (*of, op twee van derzelver verlengde, naar denzelfden kant,*) *drie punten* F, D *en* E, *zoodanig genomen worden, dat* $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$ *is; dan zullen de lijnen* AD, BE *en* CF, *welke, uit de hoekpunten,* A, B *en* C *der overstaande hoeken, tot deze alzoo aangenomene punten getrokken worden, elkander in hetzelfde punt* P, *buiten of binnen den driehoek, ontmoeten.*

Betoog. De lijnen BE en CF snijden elkander in een punt P; wanneer nu de lijn AD niet door het punt P gaat; dan zal men, door het punt P, eene lijn AD' kunnen trekken, welke de zijde BC, in het punt D', snijdt; dan zal (*V. Stell.*)

$$AF \times BD' \times CE = BF \times CD' \times AE$$

zijn; maar, volgens de onderstelling, is

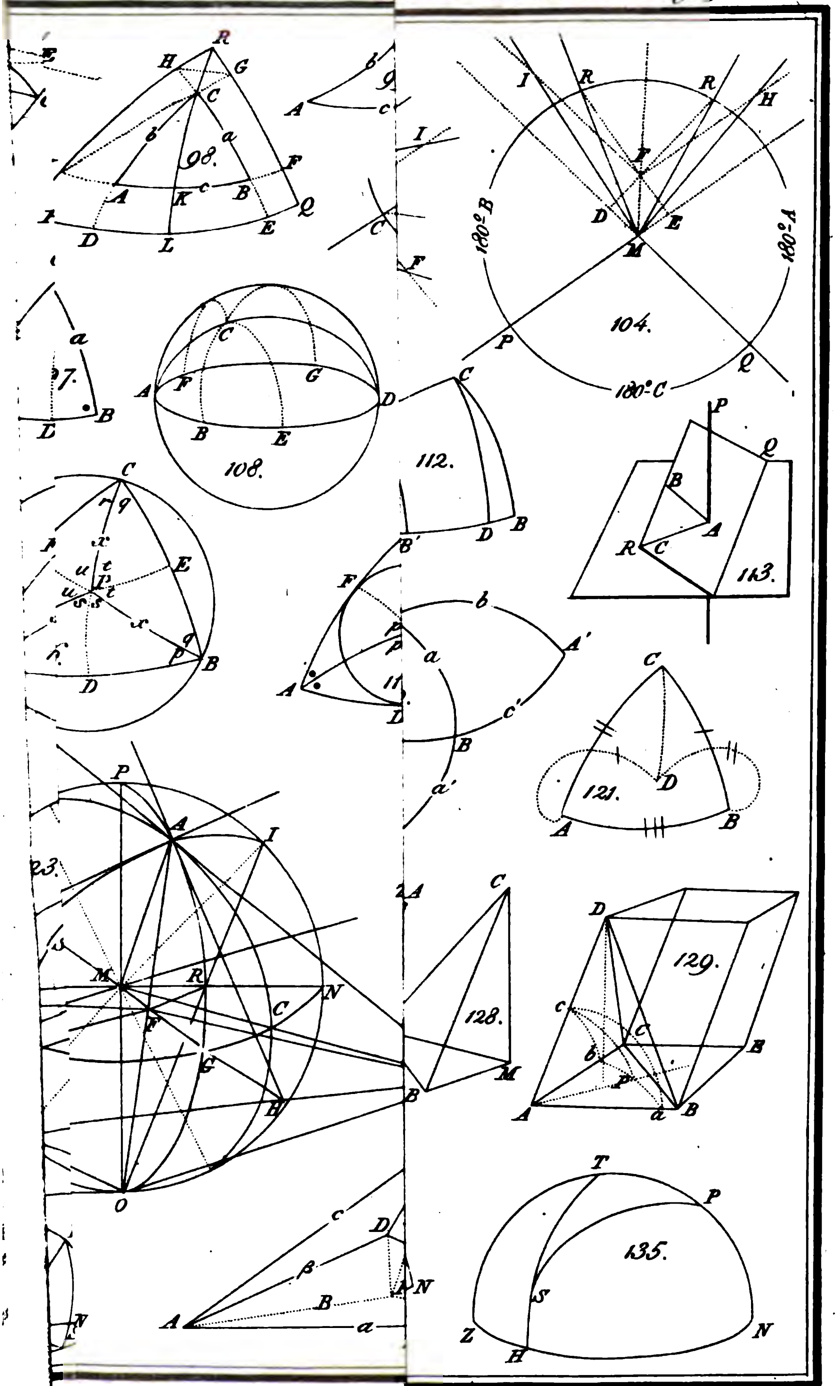
$$AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$$

Hieruit volgt: (*V. Stell. II. B.*)

$$BD' : CD' = AE \times BF : AF \times CE$$
$$BD : CD = AE \times BF : AF \times CE$$

en (*I. Stell. II. B.*) $BD' : CD' = BD : CD$; waaruit (*VIII. St. II. B.*) $BD' + CD' : BD + CD = BD' : BD$; dat is, $BD' : BD = BC : BC$ volgen zal; daar nu zulks ongerijmd is, zal geene andere, dan de lijn AD, door het punt P kunnen gaan, en het gestelde is hierdoor ten vollen bewezen.

§. 1316.



L. Schwitthard... sculps.

§. 1316. I. GEVOLG. *Fig.* 149. Laten AD, BE en CF de loodlijnen zijn, welke, uit de hoekpunten, op de overstaande zijden van den driehoek vallen; dan is de driehoek AFC met den driehoek AEB, de driehoek CDA met den driehoek CEB, en de driehoek BDA met den driehoek BFC gelijkvormig; derhalve is,

$$AF : AE = AC : AB$$
$$BD : BF = AB : BC$$
$$CE : CD = BC : AC$$

vermenigvuldigt men deze vergelijkingen met elkander; dan verkrijgt men: (*XVI. Stell. II. B.*)

$$AF \times BD \times CE : AE \times BF \times CD = AC : AC = 1 : 1$$

of wel, omdat de termen van de tweede reden gelijk zijn, $AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$. Volgens het bewezene in de stelling, *moeten dan de loodlijnen van eenen driehoek elkander, in hetzelfde punt P, doorsnijden.*

§. 1317. II. GEVOLG. *Fig.* 149. Laat $AF = BF$; $BD = CD$ en $CE = AE$ genomen worden; dan is $AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$: *de lijnen derhalve, welke, uit de toppunten van de hoeken eens driehoeks, tot het midden der overstaande zijden getrokken worden, moeten elkander in hetzelfde punt P, binnen den driehoek, doorsnijden.*

§. 1318. III. GEVOLG. *Fig.* 149. Laten de lijnen AD, BE en CF de hoeken A, B en C midden door deelen; dan is (*IV. Stell. IV. B.*)

$$AF : FB = AC : BC$$
$$BD : CD = AB : AC$$
$$CE : AE = BC : AB$$

het product dezer evenredigheden geeft $AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$. *De lijnen derhalve, welke de hoeken eens driehoeks in twee gelijke deelen snijden, ontmoeten elkander in hetzelfde punt.*

§. 1319. IV. BEPALING. Eenige grootheden, a, b, c, d, *enz.* zijn in eene harmonische reeks, wanneer drie op elkander volgende termen, a, b, c, of b, c, d, *enz.*, tot elkander zulk eene betrekking hebben, dat de eerste dezer termen tot de derde, in dezelfde reden staat, als het verschil der twee eersten tot het verschil der twee laatsten: dat is, wanneer $a : c = a - b : b - c$; $b : d = b - c : c - d$ is, *enz.* Wanneer die reeks slechts uit drie leden bestaat, dan noemt men haar eene *harmonische evenredigheid.*

§. 1320. V. BEPALING. *Fig.* 151. Wanneer men, op eene lijn AD, van het punt A af te rekenen, de lijnen AB, AC en AD, in eene harmonische evenredigheid neemt; dan wordt de lijn AD gezegd, in de punten B en C, *harmonisch* (of in eene *harmonische evenredigheid*) *gesneden* te zijn; en men noemt dan de deelen AB en CD de *uiterste* deelen, en BC het *middelste* deel.

§. 1321. Gevolg. *Fig.* 151. Omdat, naar den aard der harmoniſche evenredigheid, $AB : AD = AC - AB : AD - AC$ is, of $AB : AD = BC : CD$, zal $AB \times CD = AD \times BC$ zijn. *Wanneer derhalve eene lijn AD, in de punten B en C, harmonisch geſneden is, dan zal de regthoek, onder de geheele lijn en het middelſte deel, gelijk zijn aan den regthoek, onder de uiterſte deelen.*

§. 1322. Aanmerking. *Fig.* 151. *Eene bepaalde of gegevene lijn AD kan, op onnoemlijk vele wijzen, harmonisch geſneden worden.* Stellen wij de geheele lijn $AD = a$, en nemen wij ééne der uiterſte deelen $AB = b$; ſtellen wij dan het middelſte deel $BC = x$; dan is $CD = a - b - x$, en $ax = ab - b^2 - bx$, en $x = b \times \frac{a-b}{a+b}$; waaruit volgt: *dat aan b alle waarden, van o tot a, kunnen gegeven, en bijgevolg het uiterſte deel b, naar welgevallen, kan aangenomen worden.*

§. 1323. *Wanneer men*, Fig. 151, *eene lijn AC, welke, in het punt B, in twee, naar welgevallen genomene deelen, verdeeld is, tot in D, zoodanig wil verlengen, dat de geheele verlengde lijn AD, in de punten B en C, harmonisch geſneden zij*; of, dat hetzelfde is, *wanneer men tot twee lijnen AB en AC eene derde harmoniſche evenredige AD vinden wil*; dan zal men $AB = a$, $BC = b$ en $CD = x$ ſtellen, en dan is $(a + b + x) \times b = ax$; en hieruit zal volgen: $x = b \times \frac{a+b}{a-b}$; waaromtrent moet aangemerkt worden: dat, zal het verlengde inderdaad poſitief zijn, $a > b$ moet gegeven zijn.

§. 1324. Men kan dit alles, op eene eenvoudige wijze, door conſtructie, vinden. Zij, *fig.* 151, AD de gegevene lijn, AB het naar welgevallen genomen uiterſte deel; dan trekke men, uit de uiteinden A en D, twee lijnen AE en DE, welke, in een willekeurig punt E, zamenkomen; door het punt B eene lijn FBG, evenwijdig aan DE; men neme $BG = FB$; dan zal de lijn EG de beide andere deelen BC en CD bepalen. Want, uit de gelijkvormige driehoeken, welke, door de conſtructie, in de figuur ontſtaan zijn, is $AB : AD = BF : DE = BG : DE = BC : CD$ en $AB \times CD = AD \times CD$.

§. 1325. En, om eene gedeelde lijn AC, tot in D, zoodanig te verlengen, dat AD in B en C harmonisch geſneden zij, zal men eene onbepaalde lijn AE, door B eene onbepaalde lijn FGB trekken,

ken, $BC = BF$ nemen, GCE trekken, en ED evenwijdig aan FG; dan zal CD het verlengde der gegevene lijn zijn.

VII. STELLING. *Fig.* 152.

§. 1326. *Wanneer eene lijn AD, in de punten B en C harmonisch gesneden is, en men, uit eenig punt P, buiten die lijn gelegen, de lijnen AP, BP, CP en DP, trekt; dan zal, $\sin. APD \times \sin. BPC = \sin. APB \times \sin. CPD$ zijn.* En, omgekeerd, *wanneer de lijnen AP, BP, CP en DP, uit een punt P, zoodanig zijn getrokken: dat $\sin. APD \times \sin. BPC = \sin. APB \times \sin. CPD$ is; dan zal dit stelsel van lijnen elke lijn AB, welke door hetzelve, naar welgevallen, getrokken wordt, harmonisch snijden.*

BETOOG *van het eerste.* Men heeft (*III. Stell. IX. B.*) de evenredigheden:

$$AB : AP = \sin. APB : \sin. B$$
$$AP : AD = \sin. D : \sin. APD$$
$$CP : BC = \sin. B : \sin. BPC$$
$$CD : CP = \sin. CPD : \sin. D$$

vermenigvuldigt men de overeenkomstige termen dezer evenredigheden met elkander; dan verkrijgt men, na de termen van dezelfde reden, door hunne gelijke factoren, gedeeld te hebben:

$$AB \times CD : AD \times BC = \sin APB \times \sin. CPD : \sin. APD \times \sin. BPC$$

Omdat nu (*onderst.*) $AB \times CD = AD \times BC$ is, zal ook $\sin. APB \times \sin. CPD = \sin. APD \times \sin. BPC$ zijn.

BETOOG *van het omgekeerde.* Geheel onafhankelijk van de onderstelling, is voor elke lijn AD, de gezegde lijnen snijdende,

$$AB \times CD : AD \times BC = \sin. APB \times \sin. CPD : \sin. APD \times \sin. BPC$$

Omdat nu (*onderst.*) $\sin. APB \times \sin. CPD = \sin. APD \times \sin. BPC$ is, zal ook $AB \times CD = AD \times BC$ zijn.

§. 1327. I. GEVOLG. *Fig.* 152. *Elke lijn $A'B'C'D'$, welke, boven of beneden AD, evenwijdig, of niet evenwijdig, aan dezelve getrokken wordt, zal, indien AD door de lijnen AP, BP, CP en DP, harmonisch gedeeld is, ook door diezelfde lijnen harmonisch gesneden worden;* welke waarheid onmiddellijk, uit de stelling en de tegenstelling, volgt.

§. 1328. II. GEVOLG. Wanneer men de lijnen AP, BP, CP en DP, naar boven verlengt; dan zullen de verlengde lijnen aP, bP, cP, dP, nog de eigenschap behouden, dat zij elke lijn, die dezelve snijdt, harmonisch zullen snijden.

§. 1329. III. GEVOLG. Vermits de sinusfen van de supplementen der hoeken aan de sinusfen van die hoeken zelve gelijk zijn, *zullen de hoe-*

ken APb, DPc, CPd en BPa, door de lijnen, welke binnen dezelve gelegen zijn, op dezelfde wijze, als de hoeken APD en aPd gesneden zijn, zoodat alle transversalen, welke door deze hoeken getrokken worden, door de lijnen, welke dezelve snijden, harmonisch zullen worden doorgesneden.

VIII. STELLING. *Fig.* 153 *en* 154.

§. 1330. *Wanneer men, uit het hoekpunt C van den hoek eens driehoeks ABC, eene lijn CD tot aan de basis of derzelver verlengde trekt, en voorts, uit de hoekpunten der twee andere hoeken, A en B, door eenig punt P, van die eerste lijn CD, twee andere lijnen, AF en BE, tot aan de overstaande zijden, of derzelver verlengden, trekt; dan zal, indien de lijn CD de zijde AB niet midden door deelt, de lijn, welke door de punten E en F gaat, de zijde AB, of derzelver verlengde, in een punt Q, snijden, naar dat CD buiten of binnen den driehoek valt. En de lijn BD zal, in het eerste geval,* fig. 153, *door de punten A en Q, en, in het tweede geval,* fig. 153, *de lijn BQ, door de punten A en D, harmonisch gesneden zijn. Dat is, in beide figuren, zal AD × BQ = AQ × BD zijn. Eindelijk zullen alle lijnen QEF, welke, door het punt P hooger of lager te nemen, op de gezegde wijze ontstaan, elkander, in hetzelfde punt Q, doorsnijden.*

BETOOG *van het eerste.* Omdat de lijnen CD, AF en BE, elkander in P snijden, is (*V. Stell.*) is $AD \times BF \times CE = BD \times CF \times AF$; derhalve is:

$$AD : BD = CF \times AE : BF \times CE$$

en, omdat QF eene transversaal van den driehoek ABC is, zoo is $AQ \times BF \times CE = AE \times BQ \times CF$; derhalve

$$AQ : BQ = CF \times AE : BF \times CE$$

en daarom is (*I. Stell. II. B.*) $AD : BD = AQ : BQ$; dat is: $BQ \times AD = BD \times AQ$.

BETOOG *van het tweede.* Wanneer het punt P hooger of lager, ja zelfs aan de andere zijde van AC, of beneden den driehoek, genomen wordt, en de transversaal lijn, welke alsdan ontstaat, niet door Q, maar door een ander punt Q' mogte gaan; dan zal, volgens het bewezene, $Q'A : Q'B = AD : BD$ zijn; maar nu is $QA : QB = AD : BD$; derhalve (*I. Stell. II. B*) $Q'A : Q'B = QA : QB$ en (*VII. Stell. II. B.*) $Q'B - Q'A : QB - QA = Q'A : QA = AB : AB$; welke evenredigheid, daar zij ongerijmd is, bewijst: dat de nieuwe transversaal, gelijk ook elke andere, die op dezelfde wijze geplaatst is, door het punt Q zal loopen.

§. 1331. I. GEVOLG. *Fig.* 153. Wanneer de lijn CD zoodanig is aange-

genomen, dat zij de zijde AB in twee gelijke deelen verdeelt; dan zal, omdat $AD : BD = AQ : BQ$ is, ook $AQ = BQ$ zijn, welke gelijkheid onbestaanbaar is, indien Q niet op eenen oneindigen afstand van A gelegen, en $AQ = BQ$ zijnde, FEQ evenwijdig aan AB loopt. Uit deze eigenschap volgt eene bijzondere constructie voor de evenwijdige lijnen.

§. 1332. II. GEVOLG. *Fig.* 153. Trekt men de lijn CQ; dan zal (*VII. Stell.*) *sin.* $QCB \times$ *sin.* $ACD =$ *sin.* $QCA \times$ *sin.* BCD zijn; *de lijn* QF *is dan ook, in de punten* E *en* G, *harmonisch gesneden.* En, wanneer men BE tot aan H verlengt; *dan is*, om dezelfde reden, *de lijn* BH, *in de punten* E *en* P, *harmonisch gesneden.* Hetzelfde is ook, in *fig.* 154, waarheid.

§. 1333. III. GEVOLG. Wanneer men, *fig.* 153, door de punten P en Q de lijn $QKPI$ trekt; dan bevindt zich de driehoek BFQ, ten opzigte van de transversaal AC, in dezelfde betrekkelijke ligging, als de driehoek ABC, ten opzigte van de transversaal QF; *volgens het bewezene, zijn dan de zijden* BC *en* AC, *in de punten* I *en* F, K *en* E, *harmonisch gesneden, gelijk ook de lijn* CD, *in de punten* P *en* G.

I. HULPSTELLING. *Fig.* 153.

§. 1334. *Wanneer, in eene lijn* BC, *een punt* F *genomen is; dan bestaat er slechts één enkel punt* I, *hetwelk, met het punt* E, *die lijn harmonisch snijdt.*

BETOOG. Want, indien deze snijding nog in een ander punt P konde plaats hebben; dan zou (*Gev. V. Bep.*) $BI : IF = BC : CF$ en $BI' : I'F = BC : CF$ moeten zijn, en daarom (*I. Stell. II. B.*) $BI : IF = BI' : I'F$, waaruit (*VII. Stell. II. B.*) volgen zou: $BI + IF : BI' + I'F = BI : BI'$; dat is $BF : BF = BI : BI'$; dat ongerijmd is.

IX. STELLING. *Fig.* 153.

§. 1335. *Wanneer twee zijden* AC *en* BC *van eenen driehoek* ABC, *door eene transversaal* QEF, *die het verlengde van de zijde* AB *in* Q *ontmoet, gesneden is; dan zullen de punten* K *en* I, *welke, met de punten* E *en* F, *deze zijden harmonisch snijden, met het punt* Q, *in in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

BETOOG. Want, indien men, van het punt Q, door het punt P, alwaar de hoekpuntslijnen van den vierhoek $ABFE$ elkander snijden, eene transversaal QP trekt; dan zal deze transversaal, met de transversaal QF, de zijden AC en BC (*III. Gev. VIII. Stell.*) in de punten K en E, en I en F, harmonisch snijden: deze snijding kan nu (*voorgaande Hulpst.*) slechts op ééne wijze geschieden; de lijn, welke

door de punten *I* en *K* loopt, zal dan ook door het punt *Q* loopen, en de punten *I*, *K* en *Q* liggen diensvolgens in dezelfde regte lijn.

X. STELLING. *Fig.* 155.

§. 1336. *Wanneer, uit een punt P, buiten eene regte lijn AE gelegen, verscheidene lijnen AP, BP, CP, DP, EP, enz. tot die regte lijn AE, zoo als het valt, getrokken worden, en voorts, door dit stelsel van lijnen, eene transversaal FGHIKL, welke die eerstgenoemde lijn AB, of derzelver verlengde, in een punt F ontmoet; dan zullen de punten M, N, O, Q, enz., in welke de hoekpuntslijnen der vierhoeken HBAG, BCIH, CDKI, DELK, enz., elkander snijden, in dezelfde regte lijn liggen, welker verlengde door het ontmoetingspunt F zal gaan.*

BETOOG. Want de lijn *AP* is, (*III. Gev. VIII. Stell.*) in de punten *S* en *G*, harmonisch gesneden; derhalve zullen ook (*I Gev. VII. Stell.*) al de lijnen *PB*, *PC*, *PD*, *PE*, *enz.* als binnen denzelfden hoek *PFE* liggende, harmonisch gesneden zijn; en de punten *S*, *T*, *U*, *V* en *W*, liggen, (*IX. Stell.*) met het punt *F*, in dezelfde regte lijn *FW*; maar het punt *M* ligt (*VII. Stell.*) in de lijn *ST*; *N* in de lijn *TU*; *O* in de lijn *UV*; *Q* in de lijn *VW*; *enz.*; deze punten liggen dan in de deelen van dezelfde lijn *FW*; dat is, in de lijn, welke door het punt *F* loopt.

XI. STELLING. *Fig.* 155.

§. 1337. *Wanneer de lijn EF een vlak verbeeldt, en, uit een punt P, buiten dit vlak genomen, verscheidene regte lijnen AP, BP, CP, enz. tot aan dit vlak getrokken worden, en voorts dit stelsel van lijnen, door een ander vlak, door de lijn FL afgebeeld, wordt doorgesneden, welk vlak het eerste volgens eene regte lijn FV snijdt; dan wordt door elk tweetal dezer lijnen AP, BP, CP, enz. een vierhoek ABHG gemaakt, en nu zullen de punten M, N, O, P, enz., alwaar de hoekpuntslijnen dezer vierhoeken elkander snijden, in een derde vlak gelegen zijn, hetwelk, met de twee voorgaande vlakken, dezelfde doorsnijdingslijn FV heeft.*

BETOOG. Stel, dat het vlak, waarin de lijnen *AP* en *BP* liggen, de gemeene doorsnijding der vlakken *FE* en *FL* in het punt *F* snijdt; dan zal de lijn, welke door het punt *M* gaat, in het vlak *ABP* liggen, en de lijnen *AP* en *BP* (*III. Gev. VIII. Stell.*) harmonisch snijden. Op dezelfde wijze, zal, (wanneer een vlak, dat door de lijnen

BP

BP en *CP* gaat, en de doorsnijding der vlakken *FE* en *FL* in *W* snijdt,) de lijn, welke door de punten *W* en *N* gaat, de lijnen *BP* en *CP* harmonisch snijden: omdat er nu (*Hulpst.*) maar een punt T bestaat, waardoor *BP* harmonisch, in *T* en *H*, kan gesneden worden, zal de lijn, welke door *F* en *M* gaat, de lijn, door *W* en *N* loopende, in het punt *T* snijden, en met *FV* in hetzelfde vlak gelegen zijn. Hetzelfde zal ook plaats hebben voor de lijnen, welke door *W* en *N* en door *X* en *O* loopen, en elkander in *U* doorsnijden; waruit volgt: dat de punten *S*, *T*, *U*, *V*, *W*, *enz.* in het vlak liggen, hetwelk door de snijding *FV* gaat: maar in dit vlak liggen ook de punten *M*, *N*, *O*, *Q*, *enz.* derhalve *enz.*

§. 1338. Aanmerking. Het betoogde leert eene fraaije eigenschap der drie- en veelhoekige piramiden kennen.

XII. Stelling. *Fig.* 156.

§. 1339. *Wanneer men, op de opstaande ribben AD, BD en CD eener driehoekige piramide ABCD, (zijnde ABC de basis,) drie naar welgevallen genomene punten, E, F en G, aanneemt, en, van de hoekpunten van de basis, tot deze punten, de lijnen BE, CE, AF, CF; AG, BG; trekt, welke elkander, op de zijvlakken, in de punten H, K en M, snijden; en voorts, uit het toppunt, door deze punten, de lijnen DI, DL en DN, tot aan de basis trekt; dan zullen de lijnen, welke de hoekpunten van de basis, met de uiteinden I, L en N dezer laatste lijnen, vereenigen, elkander in hetzelfde punt O doorsnijden; en, wanneer men nu, van de hoekpunten der piramide A, B, C en D, tot de punten K, M, H en O, alwaar de transversalen der tegenoverstaande zijvlakken elkander snijden, de lijnen AK, BM, GH en DO trekt; dan zullen deze lijnen elkander, binnen het ligchaam der piramide, in hetzelfde punt P, doorsnijden.*

Betoog *van het eerste.* Volgens de *V. Stelling*, heeft men, in de driehoeken *ABD*, *BCD* en *ACD*, de vergelijkingen:

$$AI \times BF \times DE = AE \times DF \times BI$$
$$DF \times CG \times BL = BF \times DG \times CL$$
$$AE \times DC \times CN = DE \times CG \times AN$$

wanneer men deze drie vergelijkingen met elkander vermenigvuldigt, en de producten door de gelijke factoren deelt; dan verkrijgt men:

$$AI \times BL \times CN = BI \times CL \times AN$$

en deze vergelijking kan niet bestaan, ten zij (*VI. Stell.*) de lijnen *AL*, *BN* en *CI*, elkander in hetzelfde punt *O* snijden.

Betoog *van het tweede.* Het vlak *AGB* snijdt het vlak *ACF* volgens

gens de lijn *AK*; het vlak *AGB* fnijdt het vlak *BCE*, volgens de lijn *BM*, en het vlak *ACF* fnijdt het vlak *BCE*, volgens de lijn *CH*; geene dezer drie vlakken zijn evenwijdig; gevolgelijk moeten hunne fnijdingen *AK*, *BM* en *CH*, hetzelfde punt *P* gemeen hebben. Men moet dan flechts nog bewijzen, dat de lijn *DO* door het punt *P* gaat. *ABG* fnijdt *ADL* volgens *AK*; *AB*? fnijdt *BDN* volgens *BM*; en *ADL* fnijdt *BDN* volgens *DO*; de lijnen *AK*, *BM* en *DO*, fnijden elkander derhalve in hetzelfde punt; maar de lijnen *AK* en *BM* fnijden elkander in *P*; de lijn *DO* gaat dan ook door datzelfde punt *P*.

§. 1340. I. Gevolg. *Fig.* 156. Men trekke de lijnen *NF*, *LE* en *IC*; dan fnijden deze elkander in hetzelfde punt *P*, alwaar de lijnen *DO*, *AK*, *BM* en *CH*, elkander fnijden. Want de vlakken *BDN* en *ADL*, fnijden elkander volgens de lijn *DO*, de vlakken *BDN* en *AFC* volgens de lijn *NF*, en de vlakken *ADL* en *AFC* volgens de lijn *AK*. De lijnen *DO*, *NF* en *AK* moeten elkander dienvolgens, in hetzelfde punt *P*, fnijden; maar nu fnijden de lijnen *AK* en *DO* elkander in het punt *P*; de lijn *NF* zal dan ook door dit punt *P* loopen. Om dezelfde reden gaan de lijnen *LE* en *IG* door hetzelfde punt *P*.

§. 1341. II. Gevolg. *Fig.* 156. Men heeft dan ook, volgens de *V*. *Stelling*, de vergelijkingen:

$$DF \times BO \times NM = BF \times NO \times MD$$
$$DG \times CO \times IH = CG \times IO \times HD$$
$$DE \times AO \times LK = AE \times LO \times KD$$

§. 1342. III. Gevolg. *Fig.* 156. Wanneer men een punt *P* binnen de piramide aanneemt, en, uit de hoekpunten, door dit punt, tot aan de overftaande zijvlakken, de lijnen *AK*, *BM*, *CH* en *DO* trekt, dan is het zigtbaar, dat, vermits *AK* en *BM*, *AK* en *CH*, *BM* en *CH*, *AK* en *OD*, *BM* en *DO*, *CH* en *DO*, twee aan twee, in hetzelfde vlak liggen, de lijnen, welke van de hoekpunten der piramide door de punten *K*, *M*, *H* en *O*, getrokken worden elkander, op de zes ribben der piramide, in dezelfde punten *E*, *F*, *G*, *I*, *L* en *N* moeten fnijden, en dat alzoo *K* en *M* met *A* en *B*; *K* en *K* met *A* en *C*; *enz*, in een zelfde vlak liggen, en dat alle de vergelijkingen van de *V*. *Stelling* en het voorgaande gevolg op de figuur toepasfelijk zijn.

A. *Toepasfing der voorgaande Befchouwingen.*

§. 1343. Men kan de voorgaande befchouwingen verder uitbreiden; bij eenen vlakken veelhoek eenen cirkel, en bij den fcheven veelhoek eenen bol, als transverfaal, aannemen: men zal dan, bij deze fnijdingen, eigenfchappen vinden, welke met de voorgaande volkomen inftemmen. De bolvormige drie- en veelhoeken bezitten ook, ten opzigte van eenigen grooten cirkel van den bol, welke

als

als derzelver transverſaal aangenomen wordt, ſoortgelijke eigenſchappen. Aldus zal, in *fig.* 143, 144, 145, (de driehoek ABC als bolvormig aannemende, en DF als eenen grooten cirkel van den bol)

$$\sin. AD \times \sin. BF \times \sin. CE = \sin. AE \times \sin. CF \times \sin. BD$$

zijn; en, in *fig.* 149 en 150,

$$\sin. AF \times \sin. BD \times \sin. CE = \sin. AE \times \sin. CD \times \sin. BF$$

hetwelk, uit de *X. Stell. XIII. B.* met weinig moeite, wordt afgeleid. Dan wij gaan de verdere uitbreiding dezer eigenſchappen voorbij, om, in het kort, eenige werkdadige toepasſingen van dezelve aan te wijzen.

§. 1344. Onder anderen, kunnen de betoogde eigenſchappen der transverſalen en der harmoniſche ſnijdingen, welke uit dezelve volgen, zeer gelukkig worden toegepast, om onderſcheidene Werkſtukken op het veld, door middel van baken, en het enkel meten van toegankelijke afſtanden, op te losſen, zonder eenig der gewone werktuigen daarbij te gebruiken.

I. VRAAGSTUK. *Fig.* 157.

§. 1345. *Tusſchen twee verafgelegene punten A en B eenig punt C te vinden, dat met dezelve in eene regte lijn gelegen is?*

CONSTRUCTIE. Men ſtelle ergens, buiten de lijn AB, eene baak in D. Op de rigtingen BD en AD, twee baken E en F, naar welgevallen; voorts eene baak in G, alwaar de lijnen EA en BF elkander ſnijden; eindelijk nog eene baak in H, in de ſnijding der lijnen EF en DG. Nu mete men, met eenen maatſtok, of op den pas, de lengte der lijnen $DH = a$ en $HG = b$. Men neme $GC = b \times \frac{a+b}{a-b}$, en men ga, in de rigting DG, van G, zoo vele pasſen achter uit, als er éénheden in $b \times (a+b) : (a-b)$ begrepen zijn, en dan zal men in het punt C, dat in de lijn AB gelegen is, gekomen zijn. — Want de lijn DC is (*III. Gev. VIII. Stell.*) in de punten H en G harmonisch geſneden, en CG is (*Aanmerk. V. Bep.*) gelijk aan $b \times (a+b) : (a-b)$. Laat, om een voorbeeld te geven, $a = 280$ pasſen, $b = 120$ pasſen zijn; dan zal $CG = 300$ pasſen moeten genomen worden. De proef, dat men in het ware punt C gekomen zij, zal daarin beſtaan: dat men, na, in de rigting van BC, eene baak I geſteld te hebben, bevindt, dat deze baak in de lijn AC gelegen is.

II. VRAAGSTUK. *Fig.* 158.

§. 1346. *Onderſteld zijnde, dat er twee toegankelijke punten, A en B, gegeven zijn, zoodanig echter, dat eenig voorwerp P,*

 het-

hetwelk tusschen deze punten ligt, verhindert, dat, men zich, in de regte lijn, welke door deze twee punten gaat, kunne plaatsen; dan begeert men een punt F te vinden, dat in het verlengde van de lijn, welke door deze punten gaat, gelegen zij?

Constructie. Men plaatse, op eenige regte lijn AE, twee baken D en E; en, naar welgevallen, in het verlengde van BD, eene baak C, en men verbeelde zich, in F, het punt, alwaar het verlengde van de lijn AB de lijn CE doorsnijdt; dan zal dit punt F, door berekening, aldus kunnen gevonden worden. Men stelle $AD = a$; $DE = b$; $CE = c$; $CB = d$; $BD = f$; $EF = x$; dan is $CF = c - x$. Nu is (*I. Stell.*) $AD \times EF \times CB = DE \times CF \times EA$ of $adx = (f + b) \times (c - x) \times e$. Hieruit vindt men:

$$x = \frac{(a+b)ec}{ad + (a+b)e}$$

Men neme dan, op de lijn CE, van E tot F, zoo vele deelen, als de berekening van de waarde van $x = EF$ geeft; dan zal men in het punt F komen, hetwelk in het verlengde van AE zal gelegen zijn.

III. Vraagstuk. *Fig.* 159.

§. 1347. *In het verlengde van de lijn AB, welke twee ontoegankelijke punten A en B, tusschen welke een heuvel ligt, vereenigen, eenig punt P te vinden?*

Constructie. Men stelle eene baak in een punt F, uit hetwelke beide de gegevene punten A en B kunnen gezien worden; men ga achter uit, en plaatse, in de rigting van AF, eene baak E; en, in de rigting van BF, eene baak D; voorts ga men achter uit in C, en stelle eene baak in het punt, alwaar de lijnen AD en BE zamenkomen, en men zoeke het punt G, alwaar de lijnen CF en CD elkander snijden. Men mete dan DG en GE, en ga, in de rigting van DE, zoo verre achter uit, tot dat men in P gekomen, en $EP = x = b \times (a + b) : (a - b)$ zij; dan zal (zie *III. Gev. VIII. Stell.* en *Aanm. V. Bep.*) het punt P in het verlengde van AB gelegen zijn. Men kan, op deze wijze, verscheidene punten P vinden, welke, indien zij in dezelfde regte lijn liggen, tot eene proef van de naauwkeurigheid der constructie kunnen verstrekken.

IV. Vraagstuk. *Fig.* 160.

§. 1348. *Door een gegeven punt P, eene lijn te af te bakenen, evenwijdig aan eene gegevene lijn AB loopende?*

Constructie. Men neme, op de lijn AB, het punt C zoodanig, dat $BC = AB$ zij. Men ga, in de rigting van A, achter uit, tot ergens in D, en stelle aldaar eene baak; voorts stelle men in E, alwaar de lijnen

BD

B D en *P C* elkander fnijden, eene andere baak, en men ga eindelijk in de rigting van *A E* achterwaarts, tot dat men in de lijn *C D* zal gekomen zijn; dan zullen de punten *P* en *F* (zie *I. Gev. VIII. Stell.*) in eene lijn liggen, welke evenwijdig aan *A B* zal zijn.

V. VRAAGSTUK. *Fig.* 161.

§. 1349. *Door een punt C, eene lijn te trekken, evenwijdig loopende aan eene lijn A B, welke door twee ontoegankelijke voorwerpen A en B loopt?*

CONSTRUCTIE. Stel, in het gegeven punt *C*, eene baak; op de lijnen *A C* en *B C* twee baken *D* en *E*, welker rigting zigtbaar genoeg niet evenwijdig aan *A B* loopt. Stel eindelijk, in de fnijding der lijnen *A E* en *B D*, en in die der lijnen *C F* en *D E*, de baken *F* en *G*. Nu komt het er op aan, om, in het verlengde van *D E*, een punt *H* te vinden, hetwelk, met het gegevene punt *C*, in eene, met *A B* evenwijdig loopende, lijn gelegen zij? Men verlenge, in de gedachte, de lijnen *D E* en *C F* tot aan *A B*, en trekke *C H* evenwijdig aan *A B*. Men mete de lijnen $CF = a$, $FG = b$, $EG = c$, en $DG = d$, ftel $DI = x$, $FK = y$ en $HE = z$. Omdat dan (*V. Stell* en *Gev.*) de lijnen *C K* en *E I* harmonisch gefneden zijn, is $EI \times DG = DI \times GE$ of $(c+d+x)d = cx$ en $CK \times GF = CG \times FK$, of $(a+b+y)b = ay$. Hieruit volgt dan:

$$x = d \times \frac{c+d}{c-d}, \text{ en } x + d = IC = \frac{2cd}{c-d}$$

$$y = b \times \frac{a+b}{a-b}, \text{ en } y + b = GK = \frac{2ab}{a-b}$$

Omdat nu *C H* evenwijdig aan *A B* moet zijn, zijn de driehoeken *K G I* en *C G H* gelijkvormig, en wij hebben derhalve de evenredigheid, $GK : GI = CG : GH$; dat is, $\frac{2ab}{a-b} : \frac{2cd}{c-d} = a : GH$, en hieruit volgt:

$$GH = \frac{a-b}{c-d} \times \frac{cd}{b}, \text{ en } z = GH - c = HE = \frac{c}{b} \times \frac{ad-bc}{c-d}$$

Men zal dan, door de berekening dezer formule, uit het getal éénheden of pasfen, welke in *a*, *b*, *c* en *d*, begrepen zijn, vinden: hoe vele éénheden of pasfen men uit *E*, in de rigting van *D E*, moet teruggaan, om in het punt *H* te komen, en de rigting *C H* evenwijdig aan *A B* te vinden.

VI. VRAAGSTUK. *Fig.* 162.

§. 1350. *Te vinden, hoe verre men, in een punt A, van een ontoegankelijk voorwerp B afstaat?*

CON-

Constructie. Stel, in het gegevene punt *A*, eene baak; en, een goed eind wegs achteruit gaande, eene baak *D*; voorts in eenig punt *C* eene baak *C*: men verkrijgt dan eenen driehoek *ADC*, op welks zijden *AC* en *DC* twee baken, *E* en *F*, met het gegevene voorwerp, in dezelfde regte lijn liggende, genomen worden: eindelijk stelle men, in de snijding van *AF* en *DE*, de baak *G*, en, in de snijding *CH* en *AD*, de baak *H*. Men mete nu, met eene ketting, of op den pas, de lijnen $DH = a$ en $AH = b$; dan is, als boven, de begeerde afstand gelijk $b \times (a+b) : (a-b)$.

VII. Vraagstuk. *Fig.* 163.

§. 1351. *Den afstand van twee afgelegene en ontoegankelijke voorwerpen A en B te vinden?*

Constructie. Men bepale, door het voorgaande Vraagstuk, hoe verre men in een punt *C* van de voorwerpen *A* en *B* afsta: dit gevonden hebbende, neme men, in de rigting van *BC*, den afstand $bC = BC$; en, in de rigting van *AC*, den afstand $aC = AC$; dan is $ab = AB$; of men neme, bij voorbeeld, $b'C = \frac{1}{2} BC$; $a'C = \frac{1}{2} AC$, dan zal $a'b' = \frac{1}{2} AB$ zijn; al hetwelk, uit de gelijkvormige driehoeken *ABC* en *abC* of *a'b'C*, zigtbaar is.

§. 1352. Aanmerking. Deze Vraagstukken, welke wij nog met een groot aantal anderen zouden hebben kunnen vermeerderen, doen zien: welk eene voordeelige partij men van de transversalen en de harmonische snijding der lijnen, in het werkdadige, trekken kan. Onze Landgenoot van Schooten, heeft, in zijne *Exercit. Mathem. Liber II. de Constructione Problematum Simplicium quæ solvi possunt, ducendo tantum rectas lineas*, den eersten grondslag tot deze soort van handelwijzen gelegd: doch, wanneer men slechts zijne figuren met de onze vergelijkt, zal men zien, hoeveel eenvoudiger het werk door de transversalen en de harmonische snijding, dan bij hem, geworden is. Intusschen zijn de gelegde gronden niet slechts van nut in de bewerkingen op het veld; maar ook in de meetkundige constructien op het papier. Het volgend Vraagstuk zal hiervan een voorbeeld geven.

VIII. Vraagstuk. *Fig.* 165.

§. 1353. *Wanneer twee lijnen AB en CD, gegeven zijn, met een punt P tusschen dezelve; dan begeert men, alleenlijk door het trekken van lijnen, door het punt P, eene lijn PH te trekken, welker verlengde door het ontmoetingspunt dezer twee gegevene lijnen AB en CD gaat?*

Constructie. Men trekke eene onbepaalde lijn EGF, naar welgevallen; door de punten G en P, de lijn GB; door de punten F en P, de lijn DF; en door de punten B en D, de lijn BDE. Voorts trekke men, door het punt E, eene lijn EA; en eindelijk de hoekpuntslijnen AG en CF van den vierhoek $AFGC$; dan zal (*XI. Stell.*) de lijn; welke door de punten P en H gaat, de gegevene lijnen AB en CD, in derzelver ontmoetingspunt, doorsnijden.

B. *Meetkundige Stellingen, welke, met behulp van de Leer der Transversalen, kunnen getoogd worden.*

XIII. Stelling. *Fig.* 165.

§. 1354. *Wanneer drie cirkels van onderscheidene grootte, (welker middelpunten A, B en C zijn,) in een vlak gegeven zijn; dan zullen de raaklijnen, welke die cirkels, twee aan twee genomen, uitwendig aanraken, elkander, in het verlengde der lijn, welke de middelpunten vereenigt, in drie onderscheidene punten D, E en F, doorsnijden: deze snijpunten zullen nu op dezelfde regte lijn DEF liggen.*

Betoog. Wij zullen, in dit betoog, kortheidshalve, de stralen der cirkels, door de letters, die aan de middelpunten staan uitdrukken. Men verbeelde zich nu eene raaklijn MNE, welke de cirkels A en C, in de punten M en N, aanraakt; dan zijn de stralen AM en CN regthoekig op de raaklijn, en wij hebben (door de gelijkvormige driehoeken AME en CNE) $A:B = AE:CE$, eene soortgelijke evenredigheid heeft voor de cirkels A en B, en B en C plaats; zoodat

$$A:C = AE:CE$$
$$C:B = CD:BD$$
$$B:A = BF:AF \text{ is;}$$

indien men nu de overeenkomstige termen van deze evenredigheid vermenigvuldigt, dan verkrijgt men $AE \times CD \times BF = CE \times BD \times AF$. Volgens de *II. Stelling*, liggen dan de punten D, E en F, in dezelfde regte lijn.

§. 1355. I. Aanmerking. *Fig.* 165. Men kan ook nog twee andere inwendige raaklijnen aan de gegevene cirkels, twee aan twee genomen, trekken, welke elkander, op de lijn, die de middelpunten vereenigt, tusschen deze cirkels, in G, H en I, snijden, en dan zal wederom $A:B = AG:GB$; $B:C = BH:CH$; en $C:A = CI:AI$ zijn; het product dezer evenredigheden geeft $AG \times BH \times CI = BG \times CH \times AI$, en daarom snijden (*VI. Stell.*) de lijnen AH, BI en CG, elkander, in hetzelfde punt P.

§. 1356.

§. 1656. II. AANMERKING. *Fig.* 165. Volgens het betoogde, is $A:C = AE:CE = AI:CI$, en daarom $AI \times CE = CI \times AE$; zoodat de lijnen, welke de middelpunten der drie cirkels vereenigen, door de raaklijnen, harmonisch gesneden worden.

§. 1357. III. AANMERKING. *Wanneer drie kleine cirkels, op het oppervlak van eenen bol, beschreven zijn; dan zullen de groote cirkels, die deze cirkels, twee aan twee genomen, aanraken, in den omtrek van eenen anderen grooten cirkel gelegen zijn.* Men zal deze waarheid, op gelijke wijze, als boven, betoogen.

§. 1358. IV. AANMERKING. Men kan het betoogde ook uitstrekken tot vier bollen, welker middelpunten, drie aan drie genomen, in onderscheidene vlakken gelegen zijn, (hetwelk wij, om de plaats der figuren uit te sparen, niet afzonderlijk zullen betoogen.) en dan zal men vinden: 1°. *Dat de toppunten der cirkelvormige kegels, welke, wanneer vier bollen van onderscheidene middellijnen gegeven zijn, twee derzelver, op eenige wijze gekozen, insluiten, en welke dus zes in aantal zijn, in hetzelfde platte vlak gelegen zijn.* 2°. *Dat, wanneer men de middelpunten der bollen, op alle mogelijke wijzen, met de toppunten der cirkelvormige kegels, welke de bollen naar binnen aanraken, vereenigt, de vier lijnen, daardoor ontstaande, elkander in hetzelfde punt zullen snijden.* 3°. *En, dat, eindelijk, de lijnen, die de middelpunten der bollen, twee aan twee, vereenigen, door de toppunten der gezegde kegels, harmonisch gesneden zullen zijn.* — Andere aanmerkingen (want wij kunnen de voornaamste zaken slechts aanstippen,) gaan wij met stilzwijgen voorbij.

XIV. STELLING. *Fig.* 166.

§. 1359. *De lijnen AE, BD en CF, welke de supplementen der hoeken A, B en C eens driehoeks midden door deelen, snijden de verlengden der zijden, BC, AC en AB, welke tegen over die hoeken staan, in drie onderscheidene punten, E, D en F, welke in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

BETOOG. Men heeft (*IV. Stell. IV. B.*) de volgende evenredigheden:

$$BC:AC = BF:AF$$
$$AC:AB = CE:BE$$
$$AB:BC = AD:CD$$

het product dezer evenredigheden geeft de vergelijking $BF \times CE \times AD = AF \times BE \times CD$; en daarom zullen (*II. Stell.*) de punten D, E en F, in dezelfde regte lijn liggen.

XV.

XV. Stelling. *Fig.* 167.

§. 1360. *Wanneer, in eenen cirkel, een driehoek ABC beschreven is; dan zullen de raaklijnen, AD, BE en CF, welk, door de hoekpunten A, B en C, dezes driehoeks, aan dien cirkel getrokken worden, de zijden BC, AC en AB, welke tegen over die hoeken staan, in dezelfde regte lijn snijden: dat is, deze snijpunten zullen in dezelfde regte lijn gelegen zijn.*

Betoog. Men beschouwe de driehoeken *BCF* en *ACF*: in dezelve is (*III. Stell. IX. B.*)

$$BC : BF = \sin.AFC : \sin.BCF$$

$$AF : AC = \sin.ACF : \sin.BFC$$

het product van de overeenkomstige termen dezer evenredigheden geeft de evenredigheid:

$$BC \times AF : BF \times AC = \sin.ACF : \sin.BCF$$

maar nu wordt (*XIX. Stell. V. B.*) de hoek *BCF* door de helft van den boog *CAD* gemeten, en is bijgevolg het supplement van den hoek *BAC*, welke (*I. Gev. XX. Stell. V. B.*) door de helft van den boog *BC* gemeten wordt; gevolgelijk is $\sin.BCF = \sin.BAC$, om dezelfde reden, is hoek $ACF =$ hoek ABC; de voorgaande evenredigheid wordt derhalve,

$$BC \times AF : BF \times AC = \sin.ABC : \sin.BAC$$

De beschouwing van de driehoeken *DCA* en *DBA*, en van de driehoeken *EBC* en *EAB* geven soortgelijke evenredigheden: men heeft dan, in alles, deze drie evenredigheden:

$$BC \times AF : AC \times BF = \sin.ABC : \sin.BAC$$

$$AC \times BD : AB \times CD = \sin.ACB : \sin.ABC$$

$$AB \times CE : BC \times AE = \sin.BAC : \sin.ACB$$

Het product van de overeenkomstige termen dezer evenredigheden geeft eindelijk:

$$AF \times BD \times CE = AE \times BF \times CD$$

en daarom moeten (*II. Stell*) de punten *D*, *E* en *F*, in dezelfde regte lijn liggen.

II. Hulpstelling. *Fig.* 168.

§. 1361. *Wanneer men, uit het punt C, alwaar de raaklijnen van twee punten A en B van den omtrek eens cirkels elkander ontmoeten, eene snijlijn CDEF trekt; dan zal deze, door den omtrek des cirkels en de koorde AB, welke deze raakpunten vereenigt, harmonisch gesneden worden. En, wanneer men, op twee snijlijnen, CF en CI, welke, uit hetzelfde punt C, buiten den omtrek, getrok-*

trokken zijn, binnen den omtrek twee punten E en H neemt, zodanig, dat deze snijlijnen harmonisch gesneden zijn; dan zullen de raaklijnen, welke, uit datzelfde punt C, aan den cirkel getrokken worden, de lijn, welke door de punten E en H getrokken wordt, in de raakpunten A en B, snijden.

Betoog *van het eerste.* Omdat (*Leer. XIII. Stell. V. B.*) ABC een gelijkbeenigen driehoek is, is (*XII. Stell. IV. B.*) $AC^2 = CE^2 + AE \times BE$: maar (*Aanm. XXII. Stell. V. B.*) $AC^2 = CD \times CF$ en (*XXI. Stell. V. B.*) $AE \times EB = DE \times EF$ zijnde, is $CD \times CF = CE^2 + DE \times EF$. Nu is (*VII en VIII. Gev. VIII. Stell. en I. Hulpst. II. B.*) $CD \times CF = CD^2 + CD \times DE + CD \times EF$ en $CE^2 + DE \times EF = CD^2 + 2CD \times DE^2 + DE \times EF$; derhalve $CD \times EF = CD \times DE + DE^2 + DE \times EF = DE \times (CD + DE + EF) = DE \times CF$.

Betoog *van het tweede.* Wanneer de raaklijnen, uit het punt C getrokken zijnde, den omtrek niet, in de punten A en B, raken; dan zal die aanraking, in twee andere punten a en b, plaats hebben, en de koorde ab zal dan de snijlijnen CF en CH, in twee andere punten e en h harmonisch snijden: maar daar, (*onderst.*) deze harmonische snijding, in de punten E en H, plaats heeft, en dezelve (*I. Hulpst.*) slechts op ééne wijze kan plaats hebben, kunnen a en b de raakpunten niet zijn: deze raakpunten zijn derhalve de punten, alwaar de lijn, welke door de punten E en H gaat, den omtrek snijdt.

XVI. Stelling. *Fig. 169.*

§. 1362. *Wanneer een onregelmatige vierhoek ABCD (geene twee evenwijdige zijden hebbende,) in eenen cirkel beschreven is, en aan de hoekpunten, A, B, C en D, van dien vierhoek, raaklijnen HE, EF, EG en GH aan dien cirkel getrokken worden, welker onderlinge snijding den vierhoek EFGH, om den cirkel beschreven, voortbrengt; dan zal deze figuur de volgende eigenschappen hebben:*

1°. *Zullen de punten K, L, M en N, in welke de verlengden van de overstaande zijden der in- en omgeschrevene veelhoeken ABCD en EFGH elkander snijden, in dezelfde regte lijn NK gelegen zijn.*

2°. *De hoekpuntslijnen AC en BD, EG en FH, zoowel van den in- als van den omgeschrevenen vierhoek, zullen elkander, in hetzelfde punt O, ontmoeten.*

3°. *De lijn NK, in welke de gezegde punten K, L, M en N gelegen zijn, wordt door dezelve harmonisch gesneden.*

Be-

BETOOG *van het eerste.* Men trekke, van het punt N, door het punt D, de lijn NDP tot aan P, en van C door P de lijn CPR, en eindelijk de koorden AR en BR; dan ontstaat in de figuur de kleine driehoek ADP, op welken men, in dit betoog, bijzonder de aandacht behoort te vestigen. Volgens de *III. Stell. IX. B.*, heeft men de evenredigheden.

$CK : DK = sin. CDK : sin. DCK$	*volgende uit de driehoeken*	DCK
$AK : CK = sin. ACK : sin. CAK$		CAK
$CN : PN = sin. CPN : sin. PCN$		CPN
$DN : CN = sin. NCD : sin. CDN$		CDN
$LD : AL = sin. LAD : sin. LDA$		LDA
$LP : LD = sin. LDP : sin. LPD$		LDP

Nu is vooreerst $sin. CDK = sin. LDA$. Voorts is (*IV. Stell. I. B.*) $sin. LDP = sin. CDN$, en (*VI. Gev. XX. Stell. V. B.*) $sin. LAD = sin. DCK$; wanneer men derhalve deze zes evenredigheden met elkander vermenigvuldigt, en de termen van dezelfde reden door hunne gelijke factoren deelt: dan verkrijgt men de evenredigheid:

$$AK \times DN \times LP : DK \times PN \times AL = sin. ACK \times sin. CPN \times sin. NCD : sin. CAK \times sin. PCN \times sin. LPD \quad . \ . \ (\alpha)$$

Nu kan men bewijzen, dat de termen van de laatste reden dezer zamengestelde evenredigheid gelijk zijn; want

1°. Indien men de middellijn van den cirkel, in welken de vierhoek beschreven is, als éénheid aanneemt; dan is (*I. Gev. XX. Stell. V. B.*) $sin. ACK = sin. ACB = AB$ en $sin. CAK = sin. DAC = DC$; men heeft derhalve

$$sin. ACK : sin. CAK = AB : DC \quad . \ . \ . \ . \ (\beta)$$

2°. De driehoeken APN en CPN geven de evenredigheden:

$$sin. APN : sin. NAP = AN : PN$$
$$sin. CPN : sin. NCP = CN : PN \ .$$

maar nu is (*Leer. XIII. Stell. V. B.*) $AN = CN$; derhalve

$$sin. APN : sin. CPN = sin. NAP : sin. NCP;$$

of, omdat *hoek* $NAP =$ *hoek* ARB, en *hoek* $NCP =$ *hoek* CBR is,

$$sin. APN : sin. CPN = sin. ARB : sin. CBR$$

maar nu is $sin. ARB : sin. CBR = AB : CR$; men heeft dan eindelijk:

$$sin. CPN : sin. LPD = CR : AB \quad . \ . \ . \ . \ (\gamma)$$

3°. De hoek $NCD =$ hoek CBD, en hoek $PCN =$ hoek CBR zijnde, zoo heeft men ook:

$$sin. NCD : sin. PCN = DC : CR \quad . \ . \ . \ . \ . \ (\delta)$$

Vermenigvuldigt men nu de evenredigheden (β), (γ) en (δ) met elkander; dan verkrijgt men:

$$sin. ACK \times sin. CPN \times sin. NCD = sin. CAK \times sin. PCN \times sin. LPD$$

de termen van de laatste reden der evenredigheid. (*a*) zijn derhalve gelijk; maar dan is ook:

$$AK \times DN \times LP = DK \times PN \times BL$$

doch deze gelijkheid brengt (*II. Stell.*) mede, dat de punten *N*, *L* en *K*, in dezelfde regte lijn liggen.

Wanneer men, van het punt *M*, door het punt *A*, de lijn *MAQ* trekt; dan zal men, door middel van den driehoek *ADQ*, bewijzen: dat de punten *L*, *M* en *K*, in dezelfde regte lijn gelegen zijn. Het punt *M* ligt derhalve in de lijn *LK*, het punt *N* in derzelver verlengde; de punten *N*, *L*, *M* en *K*, liggen derhalve in dezelfde regte lijn *NK*.

Betoog *van het tweede*. Wanneer de hoekpuntslijnen *BD* en *AC* van den ingeschreven veelhoek getrokken zijn, die elkander in *O* snijden; dan trekke men, van *L*, door het hoekpunt *F* van den omgeschrevenen vierhoek, eene lijn *LF*, en, van het punt *L*, door het hoekpunt *H*, de lijn *LHV*; indien men nu bewijzen kan: dat beide deze lijnen, afzonderlijk genomen, door het punt *O* loopen; dan zal men daaruit besluiten kunnen: dat de lijnen *LF* en *LH*, als beide door *O* loopende, dezelfde zijn, en dat de lijn, welke de hoekpunten *H* en *F* vereenigt, noodzakelijk door het punt *O* moet loopen.

1°. Ten opzigte van de lijn *LF*, heeft men: (*III. Stell. XI. B.*)

$$BL : LF = \sin. BFL : \sin. FBL, \text{ uit drieh. } BLF$$
$$LF : CL = \sin. LCF : \sin. CFL \;\ldots\ldots\; CLF$$
$$CL : BL = \sin. ABC : \sin. BCD \;\ldots\ldots\; BCL$$

Het product dezer evenredigheden geeft (*XVI. Stell. II. B.*) de vergelijking:

$$\sin. BFL \times \sin. LCF \times \sin. ABC = \sin. FBL \times \sin. CFL \times \sin. BCD$$

uit welke vergelijking dan de evenredigheid,

$$\sin. BFL : \sin. CFL = \sin. BCD \times \sin. ACB : \sin. ABC \times \sin. CBD \;\ldots\ldots\ldots\; (\alpha)$$

volgen zal, indien men namelijk onder het oog houdt, dat $\sin. FBL = \sin. BBL = \sin. ACB$, en $\sin. LCF = \sin. DCG = \sin. DBF$ is. De driehoeken *BVF* en *CVF* geven voorts (*III. Stell. XI. B.*)

$$BV : VF = \sin. BFL : \sin. CBF$$
$$VF : CV = \sin. BCF : \sin. CFL$$

vermenigvuldigt men deze evenredigheden; dan zal, omdat $BF = CG$ en diensvolgens $\sin. CBF = \sin. BCF$ is, (*XVI. Stell. II. B.*)

$$BV : CV = \sin. BFL : \sin. CFL$$

zijn; welke evenredigheid met de evenredigheid (*α*) vergeleken zijnde, geven zal:

$$BV : CV = \sin. BCD \times \sin. ACB : \sin. ABC \times \sin CBD \quad (\beta)$$

Nu is in den cirkel

DC

$$DC : AB = sin. CBD : sin. ACB \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

en, in den driehoek ADL,

$$AL : LD = sin. ADL : sin. DAL = sin. ABC : sin. BCD \quad (\delta)$$

Vermenigvuldigt men nu de evenredigheden (β), (γ) en (δ), met elkander; dan verkrijgt men (*XVI. Stell. II. B.*)

$$BV \times DC \times AL = CV \times AB \times LD$$

en deze vergelijking kan niet bestaan, ten zij (*VI. Stell.*) de lijnen BD, AC en LF, elkander, in hetzelfde punt O, doorsnijden.

2°. Men trekke, van L door H, de lijn LHV; dan zal men, met behulp der driehoeken ALH, LDH, en de verdere eigenschappen der figuur, bewijzen: dat de lijnen LV, AC en BD, elkander in hetzelfde punt O doorsnijden.

Omdat dan de lijnen, welke van F tot L, en van L door H getrokken worden, door hetzelfde punt O loopen, liggen die lijnen op elkander, en de hoekpuntslijn FH loopt derhalve door het punt O.

3°. Men zal, op dezelfde wijze, betoogen, dat de hoekpuntslijnen EG ook door het punt O gaan: *de hoekpuntslijnen der om- en ingeschrevene vierhoeken snijden elkander, in hetzelfde punt, en de verlengden der hoekpuntslijnen van den omgeschreven veelhoek loopen nog daarenboven door de punten, alwaar de overstaande zijden des ingeschreven vierhoeks elkander snijden.*

Betoog *van het derde.* Wij hebben bewezen, dat de punten N, L, M en K, in dezelfde regte lijn liggen; de punten L, H, O, F, in eene andere, en de punten K, E, O, G, in eene derde regte lijn; in den driehoek MFN snijden de transversalen FL, MG en NE elkander in hetzelfde punt H; en de lijn, welke door de punten G en E loopt, ontmoet het verlengde van de basis in het punt K; de lijn KN is derhalve, (*VIII. Stell.*) in de punten L en M, harmonisch gesneden.

§. 1363. I. Gevolg. Daar dan de regte lijn NK, in L en M, harmonisch gesneden is, heeft men, (*VII. Stell.*) ten opzigte van het punt A, de vergelijking,

$$sin. NAK \times sin. LAM = sin. LAN \times sin. MAK \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en, ten opzigte van het punt D, de vergelijking,

$$sin. NDK \times sin. LDM = sin. NLD \times sin. MDK \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

§. 1364. II. Gevolg. Uit de eerste dezer vergelijkingen volgt:

$$sin. MAB \times sin. KAE = sin. MAK \times sin. BAE \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

§. 1365. III. Gevolg. Omdat bewezen is, dat de hoekpuntslijn EG door het punt K gaat, is (*VII. Stell.*) de lijn MB, in de punten U en E, harmonisch gesneden, en men heeft (*VII. Stell.*) de vergelijking,

$$sin. NKD \times sin. CKG = sin. NKC \times sin. DKG \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

§. 1366. IV. Gevolg. Men heeft ook bewezen: dat de hoekpuntslijn HF door het punt L gaat; daar nu alle de hoekpuntslijnen der vierhoeken elkander, in hetzelfde punt O, snijden, zal (*VIII. Stell.*) de lijn CK,

 in

in de punten *B* en *V*, harmonisch gesneden zijn, en men heeft daarom de vergelijking,

$$sin. KLB \times sin. CLF = sin. KLC \times sin. BLF \dots (5)$$

§. 1367. V. GEVOLG. Uit deze laatste vergelijking volgt:

$$sin. BLN \times sin. CLF = sin. CLN \times sin. BLF \dots (6)$$

§. 1368. VI. GEVOLG. Uit alle deze vergelijkingen kan men tot zeer vele harmonische snijdingen (*VII. Stell.*) besluiten, waaronder de volgende de merkwaardigste zijn. 1°. De snijlijn *L C* wordt door de hoekpuntslijn *G K*, in de punten *D* en *m*. 2°. De snijlijn *L B* wordt, door diezelfde hoekpuntslijn *GK*, in de punten *A* en *n*, harmonisch gesneden. Ook snijdt 3°. de hoekpuntslijn *LF* de snijlijn *KD*, in de punten *A* en *d*, harmonisch; en dat *CK*, in *B* en *V*, harmonisch gesneden wordt, is reeds bewezen.

§. 1369. VII. GEVOLG. Beschouwen wij de punten *a* en *c* en *b* en *d*, in welke de hoekpuntslijnen van den omgeschrevenen vierhoek den omtrek des cirkels snijden; wanneer men dan, uit het punt *L*, de lijnen *Lc* en *La*, en uit het punt *K* de lijnen *Kb* en *Kd* trekt; dan zullen deze (*II. Hulpst.*) den omtrek des cirkels, in deze punten *c*, *a*, *b* en *d*, aanraken.

§. 1370. VIII. GEVOLG. Verbeelden wij ons, dat door de vereeniging der koorden *ad*, *dc*, *cb* en *ab*, de vierhoek *abcd* ontstaat; dan maken de raaklijnen *La*, *Lb*, *Kb* en *Kb* behoorlijk verlengd zijnde, eenen vierhoek, welke om den cirkel beschreven is; daar nu de verlengde van de overstaande zijden van dien omgeschrevenen vierhoek elkander, in de punten *L* en *K*, ontmoeten, zoo zullen, volgens het bewezene in de stelling, de overstaande zijden van den vierhoek *abcd* elkander in de lijn *KN* moeten snijden.

§. 1371. IX. GEVOLG. Laat, uit het middelpunt *Z* van den cirkel, de lijnen *LZ* en *LK* getrokken worden; dan zullen (*Betoog XIII. Stell. V. B.*) deze lijnen de hoekpuntslijnen *GK* en *LF*, in *p* en *q*, regthoekig snijden; indien men dan, uit hetzelfde middelpunt, door het ontmoetingspunt *O*, de lijn *ZW* tot aan *KN* trekt; dan zal (*I. Gev. VI. Stell.*) *ZW* loodregt op *KN* staan.

§. 1372. X. GEVOLG. De driehoeken *ZOp* en *ZLW* zijn dan (*IX. Gev. XVIII. Stell. I. B.* en *VIII. Stell. IV. B.*) gelijkvormig; derhalve $Zp : ZO = ZW : ZL$ en $ZO \times ZW = Zp \times ZL$; maar (*Leer. XVI. Stell. III. B.*) $Zp \times ZL = Zc^2$ zijnde, is (*R* de straal van den cirkel noemende) $R^2 = ZO \times ZW$. *De straal van den cirkel is dus middenevenredig tusschen ZO en ZW, dat is, tusschen de afstanden van het middelpunt des cirkels, en het punt, alwaar de hoekpuntslijnen elkander snijden, tot de lijn, welke door de punten L, L, M en N loopt.*

§. 1373. XI. GEVOLG. In alle gevallen liggen de punten *K*, *P* en *Q*, in dezelfde regte lijn.

§ 1374 XII. GEVOLG. En, wanneer $AN = AK$ is, dan liggen de punten *K*, *E*, *P*, *O*, *Q* en *G*, op dezelfde regte lijn. Wij laten de betoo-

toogen dezer twee laatste gevolgen aan den Leerling over. De figuur bezit nog vele andere fraaije eigenschappen.

XVII. STELLING.

§. 1375. *Wanneer een onregelmatige zeshoek in eenen cirkel beschreven is; dan zullen de drie punten, in welken de overstaande zijden van dien zeshoek elkander ontmoeten, in dezelfde regte lijn gelegen zijn. En, wanneer men, door de hoekpunten van dien zeshoek, aan den omtrek van den cirkel, raaklijnen trekt; dan zullen de hoekpuntslijnen, welke de overstaande hoeken van den onregelmatigen zeshoek, om den cirkel beschreven zijnde, twee aan twee genomen, in hetzelfde punt doorsnijden.*

Het betoog dezer Stelling kan, door de Leerwijze der transversalen, op dezelfde wijze, als in de voorgaande Stelling te werk gaande, worden opgemaakt, en wij laten hetzelve aan den Leerling over, ten einde hij hierin, als op den weg geholpen en voorzien van al de noodige hulpmiddelen, die hem daartoe dienen kunnen, zijne krachten beproeve.

VIJFTIENDE BOEK.

Over de eerste beginselen der Veelhoeksmeting (Polygonometrie) *en over de Eigenschappen der veelvlakkige Ligchamen* (Polyedrometrie.)

---

§. 1376. I. Bepaling. De Veelhoeksmeting (*Polygonometrie*) is een bijzonder gedeelte der Meetkunst, hetwelk de overeenstemming tusschen de zijden, de hoeken en de inhouden van alle soorten van veelhoeken leert kennen.

§. 1377. I. Aanmerking. Het woord veelhoek wordt alhier in de uitgestrekte beteekenis van de *II. Bep. XIV. B.* genomen.

§. 1378. II. Aanmerking. Daar de behandeling van de afzonderlijke gevallen der Veelhoeksmeting, voor elken bijzonderen veelhoek, op de wijze, zoo als de Driehoeksmeting is voorgedragen, een geheel boekdeel zou vereischen, zullen wij ons, in dit Boek, bij de beschouwing der voornaamste hoofdzaken moeten bepalen.

§. 1379. II. Bepaling. In het bijzonder zullen hier de zes Grondregelen, aangaande de beoordeeling van den positieven en negatieven toestand der lijnen en hoeken, bij het begin van het *XI. Boek* verklaard, en, welke hier ter plaatse moeten geraadpleegd worden, te stade komen. Ook moet hier worden onder het oog gehouden: dat wij, om de orde en duidelijkheid, in onze volgende beschouwingen, niet uit het oog verliezen, en alle duisterheid in de ware beteekenis der vergelijkingen, welke de eigenschappen der veelhoeken zullen uitdrukken, te vermijden, *de zijden en hoeken van elken vlakken of scheven veelhoek* (fig. 170.) *in rangorde van de letters A, B, C, enz., van de regter- naar linkerhand zullen tellen; zoodat, den veelhoek in die rigting rondgaande, elke zijde, AB of BC, van A tot B, of van B tot C, zal gerekend worden. Ook zal men elken hoek ABC, van de volgende naar de voorgaande zijde, van BC naar AB, binnenwaarts om, van de regte- naar de linkerhand, tellen; waardoor dan elke inspringende of naar binnen staande hoek grooter dan 180°, en zijn supplement negatief wordt.* Nog moeten wij herinneren: *dat, wanneer, op eene onbepaalde lijn*

PQ,

PQ, eenige deelen A′B′, B′C′, C′D′, van de linker- naar de regterhand gaande, genomen worden, zoodanig dat elk volgend deel aan het naast voorgaande sluite, de deelen D′E′, E′F′, F′A′, welke in eene teruggaande rangorde genomen worden, ten opzigte van de eerste, als negatief worden aangemerkt; en dat eindelijk, op dezelfde wijze, wanneer men, van eene zekere lijn af te rekenen, eenige hoeken, van de regter- naar de linkerhand, telt, (elke volgende hoek aan den naast voorgaanden grenzende,) de hoeken, welke, in eene teruggaande rigting; (op die wijze genomen,) geteld worden, ten opzigte van de eerste, als negatief moeten worden aangemerkt. Met één woord, *in elke figuur, moet elke lijn en elke hoek, op dezelfde wijze, en volgens dezelfde regelmaat, als alle andere lijnen en hoeken, in die figuur voorkomende, beschouwd en gerekend worden;* zonder welke voorzorg de wet van opvolging en zamenhang verbroken, en de gevolgtrekkingen onwettig zouden worden.

§. 1380. AANMERKING. Wanneer men deze gronden niet uit het oog verliest, zullen de zaken, op de algemeenste wijze, kunnen worden voorgedragen, en, zonder eene menigte omschrijvingen, voor bijzondere gevallen, te ontwerpen, den hoogstmogelijken graad van algemeenheid verkrijgen. Men zal, door zulk eene handelwijze, niet, gelijk in de *XVII. Stell. I. B.*, behoeven te zeggen: *de som van de supplementen der hoeken eens veelhoeks,* WELKER HOEKEN ALLE NAAR BUITEN STAAN, *is gelijk aan vier regte hoeken;* maar zulks, algemeen, van alle veelhoeken, die inspringende hoeken hebben, mits zij niet van de soort zijn, welke de 165 en 166 figuren voorstellen, kunnen vaststellen.

I. STELLING. *Fig.* 170.

§. 1381. *Wanneer, in het vlak van eenen vlakken veelhoek ABCDEF, eenige onbepaalde lijn PQ wordt aangenomen; dan zal, op welke eene wijze deze lijn PQ ook geplaatst zij, de som der producten, die men verkrijgt, wanneer men elke zijde vermenigvuldigt met de cosinus van den hoek, welke die zijde, of haar verlengde, met die aangenomene lijn PQ maakt, gelijk nul zijn; dat is: (AB = a; BC = b; CD = c; DE = d; EF = e en AF = f; en hoek AB met PQ = (a); hoek BC met PQ = (b) enz. stellende,)*

$$a \times cos.(a) + b \times cos.(b) + c \times cos.(c) \times d \times cos.(d) + e \times cos.(e) + f \times cos.(f) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en deze zelfde vergelijking zal nog blijven plaats hebben, wanneer ABCDEF een scheve veelhoek is, en de lijn PQ ergens, naar welgevallen, in de ruimte is aangenomen geworden.

Betoog *van het eerste.* Men late, uit de hoekpunten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F*, de loodlijnen *AA'*, *BB'*, *CC'*, *DD'*, *EE'* en *FF'*, op de aangenomene lijn *PQ* vallen, en trekke, door dezelfde hoekpunten, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* en *F*, de lijnen *AQ*, *BQ*, *CQ*, *DQ*, *EQ* en *FQ*, van die hoekpunten af te rekenen, naar de regterhand, evenwijdig aan *PQ*; dan worden, aan de hoekpunten van den veelhoek, met die evenwijdige lijnen, hoeken gemaakt, gelijk zijnde aan de hoeken, welke de verlengde zijden, met de lijn *PQ*, maken. Maar om nu niet te dwalen in de wijze, op welke die hoeken, aan elk hoekpunt, genomen moeten worden, moet men het begin van elke zijde als het hoekpunt van den hoek, welke die zijde met *PQ* maakt, aanmerken, (behoorende alzoo het hoekpunt *A* tot de zijde *AB*, het hoekpunt *B* tot de zijde *BC*, *enz.*,) en de hoeken, van de evenwijdige lijnen af te rekenen, regtsom, tot de zijde tellen: de hoek, welke *AB* met *AQ*, en gevolgelijk met *PQ* maakt, behoort dus tot het vierde quadrant; de hoeken, welke *BC* en *CD* met *BQ* en *CQ*, of met *PQ* maken, tot het eerste; de hoek, welke *DE* met *DQ*, of met *PQ* maakt, tot het tweede, en de hoeken, welke *EF* en *EA* met *EQ* en *FQ*, of met *PQ* maken, tot het derde quadrant; zoodat (zie de *Tafel II*, *Bladz.* 17.) *cos.* (*a*), *cos.* (*b*), *cos.* (*c*), positief en *cos.* (*d*), *cos.* (*e*) en *cos.* (*f*), negatief zijn. Het is nu in dien zin, dat de hoeken, onder welke de zijden, of hare verlengden, de lijn *PQ* snijden, regelmatigheidshalve, en om de vergelijking, zoo als zij in de stelling voorgedragen is, voor elken veelhoek waarheid te doen zijn, moeten genomen worden.

Wij hebben dan, door de loodlijnen *AA'*, *BB'*, *enz.* en de evenwijdige *AQ*, *BQ*, *enz.* die elkander in *A''*, *B''*, *C''*, *enz.* snijden, en de regthoeken, welke daaruit geboren worden, (*I. Stell. III. B.*) $A'B' = AB''$; $B'C' = BC''$; $C'D' = CD''$; $D'E' = DB''$; $E'F' = EF''$ en $E'A' = FA''$. De regthoekige driehoek *ABB''* geeft (*II. Stell. XI. B.*) $AB'' = AB \times cos. BAB''$; maar $cos.(BAB'') = cos.[360° - (a)] = cos.(a)$ zijnde, is $AB'' = AB \times cos.(a) = a \times cos.(a)$. Op dezelfde wijze is het met de andere regthoekige driehoeken *BCC''*, *CDD''*, *DEE''*, *EFF''*, *FAA''*, gelegen; men heeft daarom:

$$a \times cos.(a) = AB \times cos. B''AB = + AB'' = + A'B'$$
$$b \times cos.(b) = BC \times cos. C''BC = + BC'' = + B'C'$$
$$c \times cos.(c) = CD \times cos. D''CD = + CD'' = + C'D'$$
$$d \times cos.(d) = DE \times cos. EDQ = - DE'' = - D'E'$$
$$e \times cos.(e) = EF \times cos. QEF = - EF'' = - E'F'$$
$$f \times cos.(f) = AF \times cos. QFA = - FA'' = - F'A'$$

Nu

Nu is klaarblijkelijk $A'B'+B'C'+C'D'=D'E'+E'F'+F'A'$, en daarom $A'B'+B'C'+C'D'-D'E'-E'F'-A'F'=0$; wanneer man derhalve deze vergelijkingen optelt; dan zal

$$a\times cos.(a)+b\times cos.(b)+c\times cos.(c)+d\times cos.(d)+e\times cos.(e)+f\times cos.(f)=0$$

moeten zijn.

Dit betoog, hoezeer voor eene bijzondere figuur ingerigt, zal voor alle andere veelhoeken, op dezelfde wijze, gelden; want, in hoedanige rangorde, eenige punten mogen genomen worden, wanneer maar de figuur altijd gesloten blijft, zal men, op de aangenomene lijn PQ, een aantal deelen vinden, welke van P naar Q, en een ander aantal deelen, welke van Q naar P geteld worden, en juist daarom, omdat de figuur sluit en een veelhoek is, zal de som der deelen, die voorwaarts geteld worden, gelijk zijn aan de som der deelen, die terugwaarts geteld worden: maar, uit de beschouwing van onze bijzondere figuur, blijkt: dat een achterwaarts gaande deel van de lijn PQ ontstaat, door eene zijde, welke met PQ zulk een hoek maakt, wiens cosinus uit haren aard negatief is; en deze aanmerking maakt de overweging van alle andere bijzondere gevallen overtollig: men begint van een punt A, en komt op hetzelve terug; de veelhoek moge dan zoo als de 170 en 171 figuren voorstellen, of nog anders, gesteld zijn, het betoogde zal, voor elken bijzonderen veelhoek, zonder eenige uitzondering, waarheid blijven.

Betoog *van het tweede.* Verbeelden wij ons, dat de punten A, B, C, D, E en F, niet in hetzelfde vlak liggen, maar op eenigerlei wijze in de ruimte verspreid zijn, en dat de lijn PQ naar welgevallen zij aangenomen; dan blijft nog dezelfde vergelijking, onder dezelfde voorwaarden, bestaan. Men late, door de punten A, B, C, D, E en F, een stelsel van evenwijdige vlakken, door de lijnen AA', BB', CC', *enz.* afgebeeld, gaan, welke alle de lijn PQ regthoekig doorsnijden, (en dit kan altijd geschieden,) en men trekke uit de punten A, B, C, D, E en F, de lijnen AB', BC', CD', DE', EF' en FA', evenwijdig aan PQ; deze evenwijdige lijnen staan dan (*XXIX. Stell. VIII. B.*) regthoekig op gezegde evenwijdige vlakken AA'', BB'', *enz.* en (*XXV. Stell. VIII. B.*) dan is $AB''=A'B'$; $BC''=B'C'$; $CD''=C'D'$; *enz.* de hoeken $B''AB$, $C''BC$, $D''CD$, QDE, QEF en QFA, zijn dan gelijk aan de standhoeken van de zijden AB, BC, *enz.* met de lijn PQ; en, omdat de driehoeken ABB'', BCC'', *enz.* regthoekig zijn, verkrijgt men dezelfde vergelijkingen als boven, en het betoogde geldt derhalve ook voor elken scheven veelhoek.

§. 1382. I. **Aanmerking.** Als een zeker hulpmiddel, waaraan, behalve de boven opgegevene omstandigheden, de positieve of negatieve toestanden van de cosinussen der hoeken, welke in de vergelijking voorkomen, kunnen onderkend worden, mag men vaststellen: dat de cosinus, welke eenige zijde met de lijn PQ maakt, positief of negatief zal zijn,

naar dat deze zijde uitwendig (gelijk AB, BB en CD,) of inwendig (gelijk DE, EF en FA,) naar de lijn PQ gekeerd is.

§. 1383. II. Aanmerking. Wanneer de lijn PQ evenwijdig aan ééne der zijden loopt; dan wordt de cosinus van den hoek, welke die zijde met PQ maakt, gelijk aan de éénheid, en, wanneer eenige zijde, of haar verlengde, de lijn PQ regthoekig snijdt; dan wordt de cosinus, welke de hoek van die zijde met PQ maakt, gelijk nul.

§. 1384. Gevolg. Wanneer men bij de betoogde vergelijking $2s = a + b + c + d +$ enz. (zijnde s de halve omtrek van den vlakken of scheven veelhoek,) bijtelt; dan zal, aangezien (*II. Gev. III. Stell. XI. B.*) $1 + \cos. p = 2\cos^2. \frac{1}{2}p$ is

$$s = a \times \cos^2. \tfrac{1}{2}(a) + b \times \cos^2. \tfrac{1}{2}(b) + c \times \cos^2. \tfrac{1}{2}(c) + d \times \cos^2. \tfrac{1}{2}(d) + \text{enz.} \quad (2)$$

zijn; dat is: *de halve omtrek van elke vlakken of scheven veelhoek is gelijk aan de som der producten, welke men verkrijgt, indien men elke zijde vermenigvuldigt met het vierkant van de cosinus van de helft van den hoek, welke die zijde met eenige naar welgevallen aangenomene lijn maakt.*

II. Stelling. Fig. 170.

§. 1385. *Elke zijde van een vlakken of scheven veelhoek is gelijk aan de som der producten, die ontstaan, wanneer elke der andere zijden, zonder ééne uit te zonderen, vermenigvuldigd wordt met de cosinus van den hoek, welke die zijde of haar verlengde, met de eerst gedachte zijde maakt; wel verstaande, dat men deze hoeken inwendig neme, zoo als de hoeken van eene figuur gewoonlijk genomen worden. Dat is: (noemende (a,b) de hoek van b met a; (a,d) de hoek van d met a, enz.)*

$$a = b \times \cos.(a.b) + c \times \cos.(a,c) + d \times \cos.(a.d) + \text{enz.} \quad (3)$$
$$b = a \times \cos.(b,a) + c \times \cos.(b,c) + d \times \cos.(b,d) + \text{enz.}$$

Betoog. Laat PQ eene zekere lijn zijn; dan is (*I. Stell.*)

$$a \times \cos.(a) = -b \times \cos.(b) - c \times \cos.(c) - d \times \cos.(d) - \text{enz.}$$

daar nu deze vergelijking, voor elken stand van de lijn PQ algemeen moet plaats hebben, zoo zal zij ook gelden, wanneer de lijn PQ langs AB gebragt wordt; maar dan is $(a) = 0$, en derhalve $\cos.(a) = +1$. Wanneer men nu AB tot in R verlengt; BS, BT, BU en BV, evenwijdig aan CD, DE, EF en FA trekt; dan is, van BR, regtsom gerekend, hoek $RBC = (b)$; hoek $RBS = (c)$; hoek $RBT = (d)$; hoek $RBU = (e)$ en hoek $RBV = (f)$; de vergelijking,

$$a \times \cos.(a) = a = -b \times \cos.(b) - c \times \cos.(c) - d \times \cos.(d) - \text{enz.}$$

geldt dan voor de hoeken RBC. RBF, RBF, enz. maar nu moeten, door de voorwaarde der stelling, de hoeken niet van de lijn BR, maar

maar van BA, op de wijze, zoo als men de inwendige hoeken van eenen veelhoek telt, gerekend worden; dat is, men moet de supplementen der hoeken RBC, RBS, RBT, RBU en RBV, of de supplementen der hoeken (b), (c), (d), (e) en (f), nemen. Omdat dan, in het algemeen, $cos.\ (180^0 - a) = - cos.\ a$ is, zoo zal $cos.(b) = - cos.\ ABC = - cos.\ (a,b)$; $cos.\ (c) = - cos.\ ABQ = - cos.(a,c)$; $cos.\ (d) = - cos.\ ABT = - cos.(a,d)$ enz. zijn; zoodat, wanneer men deze waarden van $cos.\ (b)$, $cos.\ (c)$, enz., in de bovenstaande vergelijking overbrengt, dezelve in

$$a = b \times cos.\ (a,b) + c \times cos.\ (a,c) + d \times cos.\ (a,d) + enz.$$

veranderen zal. Men zal, op dezelfde wijze, al de andere verlijkingen betoogen, welke, voor elke zijde van den veelhoek, gesteld kunnen worden, en bijgevolg zooveel in aantal zijn, als de veelhoek zijden of hoeken heeft.

§. 1386. I. GEVOLG. Wanneer men, aan beide zijden van de vergelijking, $a = b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + enz.$, bijtelt de som der zijden min de eerste zijde; dan zal men, aangezien (*II. Gev III. Stell. VIII. B.*) $1 + cos.p = 2 cos^2.\frac{1}{2}p$ is, en $s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + enz.$ = de halve som van de zijden van den veelhoek stellende, verkrijgen:

$$s = b \times cos^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + c \times cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + enz. \quad (4)$$

§. 1387. II. GEVOLG. En, wanneer men dezelfde vergelijking van $b + c + d + enz. = b + c + d + enz.$ of van $2s - a = b + c + d + enz.$ aftrekt; dan zal men, daar $1 - cos.p = 2 sin^2.\frac{1}{2}p$ is, verkrijgen:

$$s - a = b \times sin^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + c \times sin^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times sin^2.\tfrac{1}{2}(a,d)$$
$$+ enz. \ldots\ldots\ldots (5)$$

en men zal ook soortgelijke vergelijkingen voor $s - b$, $s - c$, $s - d$, enz. vinden.

§. 1388. III. GEVOLG. Wanneer de veelhoek een vlakke veelhoek is; dan valt het terstond in het oog, dat de hoeken RBC, CBS, SBT, TBU, UBV en VBR, de supplementen van de inwendige hoeken B, C, D, E, F en A des veelhoeks zijn; men heeft derhalve, altijd, van BR regtsom gaande,

$$RBC = 180^0 - B$$
$$RBS = 2 \times 180^0 - (B + C)$$
$$RBT = 3 \times 180^0 - (B + C + D)$$
$$RBU = 4 \times 180^0 - (B + C + D + E)$$
$$RBV = 5 \times 180^0 - (B + C + D + E + F) \ldots (\mu)$$

Omdat nu $cos.\ 180^0 = -1$; $cos.\ 2n \times 180^0 = +1$ en $cos.\ (2n+1) \times 180^0 = -1$ is; zoo zal (*IV. Stell. VIII. B.*) $cos.\ RBC = cos.\ (b) = - cos.\ B$; $cos.\ RBS = cos.(c) = + cos.(B + C)$; $cos.\ RBT = cos.(d) = - cos.\ (B + C + D)$; $cos.\ RBU = cos.\ (e) = + cos,\ (B + C + D + E)$ en $cos.\ RBV = cos.\ (f) = - cos.\ (B + C + D + E + F)$ moeten zijn; en brengt men nu deze waarden van $cos.\ (b)$, $cos.\ (c)$, enz. in de vergelijking:

$a =$

$$a = -b \times cos.(b) - c \times cos.(c) - d \times cos.(d) - enz.$$

over; dan verkrijgt men:

$$a = +b \times cos. B - c \times cos.(B + C) + d \times cos.(B + C + D) - e \times cos.(B + C + D + E) + f \times cos.(B + C + D + E + F) \quad (5)$$

ons leerende: *dat elke zijde van eenen veelhoek gevonden wordt, indien men (den veelhoek, van deze zijde af te rekenen, in de eene of andere rigting, rondgaande,) elke zijde vermenigvuldigt met de cosinus van de som der hoeken, welke tusschen die zijde en de onbekende zijde gelegen is, en van de som der producten, welke de cosinus van de som van een gegeven aantal hoeken tot factoren hebben, de som van al de andere producten aftrekt.*

§. 1389. I. Aanmerking. Deze laatste vergelijking (6) geldt alleen voor eenen vlakken veelhoek; omdat, wanneer de zijden in onderscheidene vlakken gelegen zijn, de som der hoeken *RBC* en *CBS* niet meer gelijk is aan den hoek *RBS*: maar de vergelijkingen (3), (4) en (5), zijn voor scheve, zoowel als vlakke veelhoeken, algemeen.

§. 1390. II. Aanmerking. Daar het aan den eenen kant natuurlijker is aan te nemen, dat de inwendige hoeken van eenen vlakken veelhoek, door dadelijke meting, bekend zijn, en, aan den anderen kant, de vergelijking $a = b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + enz.$, wegens de gelijke teekens, geschikter schijnt, zoo is het nuttig op te geven, hoe de cosinussen der hoeken (a,b), (a,c), (a,d), uit de hoeken B, C, D, E, enz. volgen. Indien men elke der bovenstaande vergelijkingen (μ) van $180° = 180°$ aftrekt; dan verkrijgt men:

$$(a,b) = B$$
$$(a,c) = (B + C) - 180°$$
$$(a,d) = (B + C + D) - 2 \times 180°$$
$$(a,e) = (B + C + D + E) - 3 \times 180°$$
$$(a,f) = (B + C + D + E + F) - 4 \times 180°$$

diensvolgens $cos.(a,b) = cos. B$; $cos.(a,c) = -cos.(B + C)$; $cos.(a,d) = + cos.(B + C + D)$, enz. Men zoeke dan de som der twee eerste, drie eerste, vier eerste, enz. hoeken en de cosinussen dezer sommen, waaraan men die teekens geeft, welke aan dezelve, overeenkomstig de quadranten, waarin zij vallen, toekomen: dit gedaan hebbende, keere men de teekens van de cosinussen van de sommen van de evene aantallen hoeken om, en stelle de gevondene cosinussen met hare teekens in $a = b \times cos.(a,b) +$ enz. Men zal zich, op deze wijze te werk gaande, niet ligtelijk verzinnen kunnen.

§. 1391. III. Aanmerking. *Fig.* 171. Laat, in den omtrek van eenen cirkel, de bogen *BC*, *CD*, *DE*, enz. gelijk genomen, en de koorden dezer bogen getrokken worden; dan verkrijgt men eenen veelhoek *ABCD* enz. in den cirkel beschreven, welker zijden alle, behalve de zijde *AB*, gelijk zijn; stel de boog $BC = 2q$, het getal der gelijke zijden $= n$;

AB

$AB = a$, de koorde $BC = CD = DE =$ *enz.* $= b$; dan is, volgens het betoogde:

$$a = b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + d \times cos.(a,d) + enz.$$

neemt men nu de middellijn des cirkels voor de éénheid; dan is $a = sin.\, n\, q$; $b = sin.\, q = c = d = e = f = enz.$; $cos.(a,b) = cos.(n-1).q$, verlengt men DC tot in G; dan is $(a,c) =$ *hoek* $AFC =$ *hoek* $ABC =$ *hoek* BCG: derhalve $cos.\,(a,c) = cos.\,(n-3)\,q$; $cos.\,(a,d) = cos.\,(n-5)\,q$; *enz*; en de vergelijking verandert derhalve in:

$$sin.\, n\, q = sin.\, q \times [cos.(n-1)\, q + cos.(n-3)\, q + cos.(n-3)\, q$$
$$+ cos.\,(n-7)\, q + cos.\,(n-9)\, q + enz.]$$

Wanneer nu die veelhoek zoodanig genomen wordt, dat $AB = 0$ zij; dan wordt $sin.\, n\, q = 0$, en de veelhoek is dan een regelmatige n-hoek; wij hebben dan:

$$cos.(n-1)\, q + cos.(n-3)\, q + cos.(n-5)\, q + cos.(n-7)\, q + enz. = 0$$

III. STELLING.

§. 1392. *De som van de vierkanten van de zijden van eenigen vlakken of scheven veelhoek is gelijk aan het dubbel van de som der producten van derzelver zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, elk vermenigvuldigd met de cosinus van den hoek, welke deze zijden, of derzelver verlengden, met elkander maken. Dat is:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + enz. = \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2ab \times cos.(a,b) + 2ac \times cos.(a.c) + 2ad \times cos.(a,d) + enz.$$
$$+ 2bc \times cos.(b,c) + 2bd \times cos.(c,d) + enz.$$
$$+ 2cd \times cos.(c,d) + enz.$$
$$+ enz. \ldots . \quad (7)$$

BETOOG. Om den zin dezer stelling wel te begrijpen, moet men verstaan, wat het zeggen wil, eenige dingen, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, waarvan men, in de *Beginselen der Stelkunst*, de noodige opheldering zal vinden. Men schrijve, om tot het betoog zelve te komen, de vergelijkingen:

$$a = b \times cos.\,(a,b) + c \times cos.\,(a,c) + d \times cos.\,(a,d) + enz.$$
$$b = a \times cos.\,(b,a) + c \times cos.\,(b,c) + d \times cos.\,(b,d) + enz.$$
$$c = a \times cos.\,(c,a) + b \times cos.\,(c,b) + d \times cos.\,(c,d) + enz.$$
$$d = a \times cos.\,(d,a) + b \times cos.\,(d,b) + c \times cos.\,(d,c) + enz.$$

welke vergelijkingen zooveel in aantal zijn, als het getal der zijden van den veelhoek. Men vermenigvuldige nu de eerste vergelijking met a, de tweede met b, de derde met c, de vierde met d, *enz.*; dan zal men verkrijgen:

$a^2 =$

$$a^2 = ab \times \cos.(a,b) + ac \times \cos.(a,c) + ad \times \cos.(a,d) + \text{enz.} \ldots$$
$$b^2 = ba \times \cos.(b,a) + bc \times \cos.(b,c) + bd \times \cos.(b,d) + \text{enz.} \ldots$$
$$c^2 = ca \times \cos.(c,a) + cb \times \cos.(c,b) + cd \times \cos.(c,d) + \text{enz.} \ldots$$
$$d^2 = ad \times \cos.(a,d) + db \times \cos.(d,b) + dc \times \cos.(d,c) + \text{enz.} \quad (\varphi)$$

In de achterste leden dezer vergelijkingen, vindt men alle mogelijke producten der zijden, twee aan twee genomen, maar $ab \times \cos.(a,b) = ba \times \cos.(b,a)$; $ac \times \cos.(a,c) = ca \times \cos.(c,a)$ zijnde; zoo zal men, bij aandachtige overweging, zien: dat elk product tweemaal voorkomt, en dat geene andere producten van twee zijden, hiervan zijn uitgesloten: men zal dan gemelde vergelijkingen optellende, de vergelijking

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 + \text{enz.} =$$
$$2ab \times \cos.(a.b) + 2ac \times \cos.(a,c) + 2ad \times \cos.(a,d) + \text{enz.}$$
$$+ 2bc \times \cos.(b,c) + 2bd \times \cos.(b,d) + \text{enz.}$$
$$+ 2cd \times \cos.(c,d) + \text{enz.}$$
$$+ \text{enz.}$$

verkrijgen:

§. 1393. I. GEVOLG. Wanneer men, in het voorgaande betoog, de eerste der vergelijkingen (φ) van de som van alle de anderen aftrekt; dan zal men, na verschikking der termen, verkrijgen:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \text{enz.} - 2bc \times \cos. \times (b,c) - 2bd \times \cos.(b,d) -$$
$$\text{enz.} - 2cd \times \cos.(c,d) - 2ce \times \cos.(c,e) - \text{enz.} - \text{enz.} \ldots (8)$$

dat wil zeggen: *Het vierkant op ééne der zijden van eenigen vlakken of scheven veelhoek is gelijk aan de som van de vierkanten van al de andere zijden, verminderd met het dubbel van de som der producten, welke ontstaan, indien men alle die andere zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, vermenigvuldigt, en elk product nog eens met de cosinus van den hoek, onder welken deze twee zijden, verlengd zijnde, elkander ontmoeten.*

§. 1394. II. GEVOLG. Men telle, bij elk lid der vergelijking (7), het dubbel van de som van de producten der zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen; dan zal men, vermits (*II. Gev. III. Stell. VIII. B.*) $1 + \cos.p = 2\cos^2.\frac{1}{2}p$ is, ($s = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + \text{enz.}$ stellende,) vinden:

$$s^2 = a \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + ac \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + ad \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + \text{enz.}$$
$$+ bc \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(b,c) + bd \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(b,d) + \text{enz.}$$
$$+ cd \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(c,d) + \text{enz.}$$
$$+ \text{enz.} \ldots (9)$$

Het vierkant van de halve som der zijden is derhalve gelijk aan de som van de producten van al de zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk product vermenigvuldigd met het vierkant van de cosinus van de helft van den hoek, welke deze twee zijden met elkander maken.

§. 1395. III. GEVOLG. En, wanneer men, met uitzondering van de eer-

eerste zijde a, bij het tweede lid der vergelijking (8) het dubbel van de som van de producten der zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, optelt; dan zal men, na behoorlijke herleiding, verkrijgen:

$$(b + c + d + c + enz.)^2 - a^2 = \ldots\ldots\ldots$$
$$4\,bc \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}(b,c) + 4\,bd \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}(b,d) + enz.$$
$$+ 3\,cd \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}(c,d) + enz.$$
$$+ enz. \ldots\ldots \quad (10)$$

§. 1396. IV. Gevolg. Uit de vergelijking (7) volgt nog: *dat, wanneer de zijden van eenen vlakken of scheven veelhoek dezelfde lengte blijven behouden, en het stelsel van die zijden, om deszelfs hoekpunten, omdraait, altijd, in elken stand, indien de figuur slechts gesloten blijve, de som van de producten der zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk product vermenigvuldigd met de cosinus van den hoek, welke die twee zijden met elkander maken, eene standvastige waarde zal blijven behouden.*

§. 1397. I. Aanmerking. Men moet, in al deze vergelijkingen, niet uit het oog verliezen: dat, door de hoeken, welke twee zijden met elkander maken, de inwendige hoeken verstaan worden, en dat men, ten einde zich in de teekens der cosinussen niet te vergissen, letten moet: 1°. op de hoekpunten, welke voor het begin van eene zijde gehouden worden; 2°. op de rangorde der zijden, welke in een product voorkomen. Men trekke dan, in de gedachte, door het begin der zijde, welke in eene hoogere rangorde voorkomt, eene lijn, evenwijdig aan de zijde van den lageren rang, en in dezelfde rigting, waarin deze laatste geteld wordt; dan zal men, van de hoogere naar de lagere zijde, regtsom gaande, de rigting verkrijgen, in welke de hoek moet geteld worden, waaruit blijken zal, met welk teeken de cosinus van dien hoek zal moeten worden aangedaan.

§. 1398. II. Aanmerking. De verklaarde eigenschappen der veelhoeken, van het getal der zijden onafhankelijk zijnde, gelden ook voor den driehoek. Men zal, deszelfs zijden a, b en c, en de daar tegenoverstaande hoeken A, B en C stellende, vinden:

$$a = b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c)$$
$$\text{of}\quad a = b \times cos.C + c \times cos.B$$
$$a + b + c = 2\,b \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}C + 2\,c \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}B$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\,ab \times cos.C + 2\,ac \times cos.B + 2\,bc \times cos.A$$
$$(a + b + c)^2 = 4\,ab \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}C + 4\,ac \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}B + 4\,bc \times cos^2.\ \tfrac{1}{2}A$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \times cos.A$$

IV. Stelling. *Fig.* 172.

§. 1399. *Wanneer men, in eene vlakken veelhoek, ééne zijde,*

bij

bij voorbeeld, de zijde a uitzondert, en al de overige zijden b, c, d, enz. *benevens de hoeken, welke deze zijden, met de uitgezonderde zijde a, maken, gegeven zijn; dan wordt de inhoud van dien veelhoek uitgedrukt door de vergelijking:*

$$I = b \times \cos.(a,b) \times \tfrac{1}{2} b \times \sin.(a,b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$
$$+ c \times \cos.(a,c) \times [b \times \sin.(a,b) + \tfrac{1}{2} c \times \sin.(a,c)]$$
$$+ d \times \cos.(a,d) \times [b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + \tfrac{1}{2} d \times \sin.(a,d)]$$
$$+ \text{enz.}$$
$$+ p \times \cos.(a,p) \times [b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + \text{enz.} \ldots + \tfrac{1}{2} p \times \sin.(a,p)]$$

zijnde, in deze vergelijking, I de inhoud en p de zijde, welke, aan den anderen kant naast a gelegen is.

BETOOG. Men late, uit alle de hoekpunten, C, D, E, enz. loodlijnen CG, DH, EI, FK, op de zijde AB, of derzelver verlengde vallen, en trekke, door diezelfde hoekpunten, CL, DM, DN, enz. evenwijdig aan AB; dan is, (*II. Stell. XI. B.*) volgens de figuur, $CG = b \times \sin.(a,b)$; $DL = c \times \sin.(a,c)$; $EM = d \times \sin.(a,d)$; $FN = -e \times \sin.(a,e)$; $FK = -f \times \sin.(a,f)$; derhalve is

$$CG = b \times \sin.(a,b)$$
$$DH = b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c)$$
$$EI = b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + d \times \sin.(a,d)$$
$$FK = b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + d \times \sin.(a,d) + e \times \sin.(a,e)$$
$$\text{en } o = b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + d \times \sin.(a,d) + e \times \sin.(a,e) + f \times \sin.(a,f)$$

al hetwelk men gemakkelijk, uit de beschouwing der regthoekige driehoeken en der regthoeken, welke in de figuur voorkomen, kan afleiden. Voorts is:
$BG = -b \times \cos.(a,b)$; $GH = +c \times \cos.(a,c)$; $HI = +d \times \cos.(a,d)$; $IK = +e \times \cos.(a,e)$ en $AK = -f \times \cos.(a,f)$; hierdoor wordt (*Bijv. XV. Stell. III. B.*)

$$\text{drieh. } BGC = -b \times \sin.(a,b) \times \tfrac{1}{2} b \times \cos.(a,b)$$
$$\text{trap } GCDH = +c \times \cos.(a,c) \times [b \times \sin.(a,b) + \tfrac{1}{2} c \times \sin.(a,c)]$$
$$\text{trap. } HDEI = +d \times \cos.(a,d) \times [b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + \tfrac{1}{2} d \times \sin.(a,d)]$$
$$\text{trap. } IEFK = +e \times \cos.(a,e) \times [b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + d \times \sin.(a,d) + \tfrac{1}{2} e \times \sin.(a,e)]$$
$$\text{drieh. } AFK = -f \times \cos.(a,f) \times [b \times \sin.(a,b) + c \times \sin.(a,c) + d \times \sin.(a,d) + e \times \sin.(a,e) + \tfrac{1}{2} f \times \sin.(a,f)]$$

Uit de beschouwing van de figuur blijkt nu: dat de inhoud van den veelhoek gelijk is aan *trap.* $GCDH$ + *trap.* $HDEI$ + *trap.* $IEFK$ − *drieh.* BCG − *drieh.* AFK. Wanneer men dan de straks gevondene waar-

waarden dezer trapeziums en driehoeken in onze vergelijking overbrengt, dan zal men de vergelijking, die betoogd moest worden, verkrijgen.

Wanneer men, uit den loop van ons bijzonder betoog, hetwelk op eene bijzondere figuur gegrond is, deszelfs algemeenheid niet mogt gevoeld hebben, zoo ontwerpe men eenen vlakken veelhoek van een grooter aantal zijden, en zelfs eenen met inspringende hoeken; dan zal men zien: dat (lettende behoorlijk op de teekens der sinussen en cosinussen,) de inhouden der driehoeken en trapeziums, welke, om den inhoud van den veelhoek te verkrijgen, afgetrokken moeten worden, eene negatieve waarde verkrijgen; terwijl al de andere positief zijn; waardoor al de termen van de uitdrukking, welke den inhoud voorstelt, positief worden, en dat alzoo de vergelijking, voor alle veelhoeken, denzelfden vorm blijft behouden.

§. 1400. Aanmerking. *Fig.* 172. Wanneer men al de zijden des veelhoeks, in de rigting, waarin zij geteld worden, (aan *B*, *C*, *D*, *enz.*) verlengt; dan is $(a,b) = AEC = B$; $(a,c) = DCL = C - suppl.\ B = C - (180^\circ - B) = B + C - 180^\circ$; $(a,d) = EDM = D - suppl.\ (a,c) = D - [180^\circ - (B + C - 180^\circ)] = B + C + D - 2 \times 180^\circ$; $(a,e) = FEN = E - suppl.\ (a,d) = B + C + D + E - 3 \times 180^\circ$; $(a,f) = B + C + D + E + F - 4 \times 180^\circ$; men zal derhalve hebben:

$$\cos.(a,b) = \cos. B \quad \ldots\ldots \quad \sin.(a,b)\ \sin. B$$
$$\cos.(a,c) = -\cos\ (B+C) \quad \ldots \quad \sin\ (a\ c) = -\sin.(B+C)$$
$$\cos.(a,d) = +\cos.(B+C+D) \quad . \quad \sin.(a,d) = +\sin\ (B+C+D)$$
$$\cos.(a,e) = -\cos.(B+C+D+E)\ \sin.(a,e) = -\sin.(B+C+D+E)$$

enz. enz.

in welke vergelijkingen, de letters *B*, *C*, *D*, *E*, *enz.* de inwendige hoeken des veelhoeks beteekenen, (houdende onder het oog, dat de inspringende hoeken grooter dan 180° zijn,) terwijl de teekens beurtelings afwisselen. *Wordt nu de cosinus en de sinus van eenen hoek of van de som van twee of meer hoeken, naar het quadrant, waarin dien hoek of de som dezer hoeken valt, positief; dan behoudt die goniometrische lijn het teeken, waarmede zij, in de bovenstaande vergelijkingen, is aangedaan; maar moet die goniometrische lijn naar de waarde van den hoek, tot welken zij behoort, negatief genomen worden; dan veranderen de teekens der vergelijkingen.* Deze regel moet overal, in het vervolg, stiptelijk in acht genomen worden.

V. Stelling. *Fig.* 173.

§. 1401. *Onder dezelfde omstandigheden der voorgaande Stelling, zal de inhoud des vlakken veelhoeks door*

$$I = -b \times \sin.(a,b) \times \tfrac{1}{2} b \times \cos\ (a,b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$
$$- c \times \sin.(a,c) \times [b \times \cos.(a,b) + \tfrac{1}{2} c \times \cos.(a,c)]$$

$$-d \times sin.(a,d) \times [b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + \tfrac{1}{2} d \times cos.(a,d)] - enz.$$

$$-p \times sin.(a\,p) \times [b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + d \times cos.(a,d) + enz. \tfrac{1}{2} p \times cos.(a,p)]$$

$$- enz.$$

worden uitgedrukt.

Betoog. Nemende, even als in *fig.* 171, $AB = a$ voor de eerste (en de niet gegevene) zijde, zoo rigte men uit B eene onbepaalde loodlijn BK op AB op, en trekke, uit de hoekpunten C, D, E, F, des veelhoeks, loodlijnen op AB, en loodlijnen op BK, en trekke door B, de lijn BD' evenwijdig aan CD, BE' evenwijdig aan DE, BF' evenwijdig aan EF, en BA' evenwijdig aan FA; dan zijn de hoeken $CBA = (a,b)$; $D'BA = (a,c)$; $E'BA = (a,d)$ positief, en de hoeken $F'BA = (a,e)$ en $A'BA = (a,f)$ negatief, en nu valt in het oog, dat

$$BG = -b \times cos.(a,b) \qquad CG = BH = +b \times sin.(a,b)$$
$$GN = +c \times cos.(a,c) \qquad DM = HI = +c \times sin.(a,c)$$
$$NO = +d \times cos.(a,d) \qquad DS = IK = +d \times sin.(a,d)$$
$$OP = +e \times cos.(a,e) \qquad ET = KL = -e \times sin.(a,e)$$
$$PA = +f \times cos.(a,f) \qquad EP = LB = -f \times sin.(a,f)$$

is, en dat dienvolgens

$$BG = -b \times (a,b)$$
$$BN = GN - DI = +b \times (a,b) + c \times cos.(a,c)$$
$$BO = EK = +b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + d \times cos.(a,d)$$
$$BP = FL = +b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + d \times cos.(a,d) + e \times cos.(a,e)$$
$$BA = +b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + d \times cos.(a,d) + e \times cos.(a,e) + f \times cos.(a,f)$$

zal zijn. Men zal nu, ingevolge deze waarden, vinden:

$$drieh.\ BCH = -b \times sin.(a,b) \times \tfrac{1}{2} b \times cos.(a,b)$$
$$trap\ CHID = -c \times sin.(a,c) \times [b \times cos.(a,b) + \tfrac{1}{2} c \times cos.(a,c)]$$
$$trap.\ IKED = -d \times sin.(a,d) \times [b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + \ldots \tfrac{1}{2} d \times cos.(a,d)]$$
$$trap\ KEFL = -e \times sin.(a,c) \times [b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + \ldots d \times cos.(a,d) + \tfrac{1}{2} e \times cos.(a,e)]$$
$$trap.\ LFAB = -f \times sin.(a,f) \times [b \times cos.(a,b) + c \times cos.(a,c) + \ldots d \times cos.(a,d) + e \times cos.(a,e) + \tfrac{1}{2} f \times cos.(a,f)]$$

De waarde van den inhoud van *trap.* $CHID$, kan den eerstbeginnenden zwarigheden maken; maar, om deze weg te nemen, denke men het punt D aan den anderen kant van de loodlijn BI; alsdan is *trap.* $CHID = \tfrac{1}{2} HI \times [DI + CH]$; maar, daar het punt D aan de linkerhand van IK valt, wordt DI negatief, en *trap.* $CHID = \tfrac{1}{2} HI \times [CH - DI] =$ $\tfrac{1}{2} HI$

$\frac{1}{2} HI \times [BG - (GN - BG)] = \frac{1}{2} HI \times [2 BG - GN] = - c \times sin.(a,c) \times [b \times cos.(a,b) + \frac{1}{2} c \times cot.(a,c)]$. Het blijkt hieruit, dat de inhoud van het trapezium *CHID* eigenlijk gelijk is aan *Inh. drieh. CHQ* — *Inh. drieh. DIQ.*

De inhoud van den veelhoek is nu klaarblijkelijk gelijk aan *drieh. BCH* + *drieh. CHQ* — *drieh. DIQ* — *trap. IKED* + *trap. KEFL* + *trap. LFAB* = *drich. BCH* + *trap. CHID* — *trap. IKED* + *trap. KEFL* + *trap. LFAB.* Stelt men dan de waarden dezer trapeziums, hier boven gevonden, in deze vergelijking; dan zal men de vergelijking, welke betoogd moest worden, verkrijgen.

§. 1402. I. AANMERKING. Al de termen van het tweede lid der vergelijking zijn negatief: men kan aan dezelve nogtans een positief teeken geven; mits men, in plaats van de hoeken (a,b), (a,c), *enz.* derzelver supplementen stelle; want, omdat, in het algemeen, $sin.\,p = sin.\,suppl.\,p$, en $cos.\,p = - cos.\,suppl.\,p$ is, zoo zal de betoogde vergelijking veranderen in:

$$I = b \times sin.\,suppl.(a,b) \times \tfrac{1}{2} b\,cos.\,suppl.(a,b)$$
$$+ c \times sin.\,suppl.(a,c) \times [b\,cos.\,suppl.(a,b) + \tfrac{1}{2} c\,cos.\,suppl.(a,c)]$$
$$+ enz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

§. 1403. II. AANMERKING. Men heeft, zie *III. Gev. II. Stell.*

$$(a,b) = B$$
$$(a,c) = B + C - 180^\circ$$
$$(a,d) = B + C + D - 2 \times 180^\circ$$
$$(a,e) = B + C + D + E - \times 180^\circ, \text{ enz.}$$

Waaruit terstond volgen zal:

$$suppl.(a,b) = 180^\circ - B$$
$$suppl.(a,c) = 2 \times 180^\circ - (B + C)$$
$$suppl.(a,d) = 3 \times 180^\circ - (B + C + D)$$
$$suppl.(a,e) = 4 \times 180^\circ - (B + C + D + E), \text{ enz.}$$

en hierdoor kan men aan de teekens van de termen der (12) vergelijking het positieve teeken geven, en de hoeken, welke in dezelve voorkomen, van de inwendige hoeken des veelhoeks, die gemeenlijk gegeven zijn, doen afhangen.

§. 1404. III. AANMERKING. Men kan nu de (11) en (12) vergelijkingen, ten einde dezelve op de dadelijke berekening van den inhoud van eenen veelhoek toe te passen, aldus voorstellen:

1°. *Stel a, b, c, d, e, enz. de zijden, en y op ééne na de laatste zijde, A, B, C, D....X, de hoeken des veelhoeks, welke aan het begin eener zijde gelegen zijn, (op dezelfde wijze, zoo als de figuur voorstelt,) zij $R = 90°$.*

$$\text{Stel } A = p$$
$$A + B - 2R = q$$
$$A + B + C - 4R = r$$

$$A+B+C+D-6R=s$$
$$A+B+C+D+E-8R=t$$
$$A+B+C+D+E+\text{enz.}+x\;2nR=z$$

dan is, de inhoud = I ſtellende,

$$I = a\times \cos.p \times \tfrac{1}{2} a \sin.p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$
$$+\,b\times \cos.q \times [a\times \sin.p + \tfrac{1}{2} b \times \sin.q]$$
$$+\,c\times \cos.r \times [a\times \sin.p + b\times \sin.q + \tfrac{1}{2} c \times \sin\,r]$$
$$+\,d\times \cos.s \times [a\times \sin.p + b\times \sin.q + c\times \sin.r + \tfrac{1}{2} d \times \sin.s]$$
$$+\,\text{enz.}$$
$$+\,y\times \cos.z \times [a\times \sin.p + b\times \sin.q + c\times \sin.r + \text{enz.} + \tfrac{1}{2} y \times \sin.z]$$

2°. *Behoudt men dezelfde notatie; dan zal, ſtellende*

$$2R-A=p$$
$$4R-(A+B)=q$$
$$6R-(A+B+C)=r$$
$$8R-(A+B+C+D)=s$$
$$2nR-(A+B+C+D+\text{enz.}+x)=z;$$

de inhoud aldus worden voorgeſteld:

$$I = a\times \sin.p \times \tfrac{1}{2} a \times \cos.p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$
$$+\,b\times \sin.q \times [a\times \cos.p + \tfrac{1}{2} b \times \cos.q]$$
$$+\,c\times \sin.r \times [a\times \cos.p + b\times \cos.q + \tfrac{1}{2} c \times \cos.r]$$
$$+\,d\times \sin.s \times [a\times \cos.p + b\times \cos.q + c\times \cos.r + \tfrac{1}{2} d \times \cos.s]$$
$$+\,\text{enz.}$$
$$+\,y\times \sin.z \times [a\times \cos.p + b\times \cos.q + \text{enz.} + \tfrac{1}{2} y \times \cos\,z]$$

moetende de teekens van de termen dezer vergelijkingen veranderd worden, indien de ſinusſen of coſinusſen van p, q, r, s, t, enz. te rekenen naar het quadrant, waarin die hoeken vallen, negatief worden.

§. 1405. IV. Aanmerking. De zijde, welke in deze vergelijkingen, op éénc na, de laatſte genoemd wordt, kan alle waarden hebben, en dus ook gelijk nul zijn. In dit geval, komen alle de zijden en alle de hoeken des veelhoeks in rekening, en dan volgt hieruit: dat, wanneer al de zijden en al de hoeken van eenen veelhoek gegeven zijn, deszelfs inhoud, op onderſcheidene wijzen, kan berekend worden. Want men kan, ééne der zijden uitſluitende, elk der vergelijkingen (14) en (15), op twee onderſcheidene wijzen, of van de linker- naar de regterhand gaande, of omgekeerd, berekenen; hetwelk, voor eenen n-hoek, $2(n-1)$ onderſcheidene wijze van berekenen, door elke formule geeft; en brengt men alle de zijden en hoeken in berekening; dan zal men den inhoud, door $2n$ onderſcheidene berekeningen, voor elke formule vinden kunnen; gevende dit in alles, voor eenen n-hoek, $8n-4$ onderſcheidene wijzen, om door de toepasſing der betoogde vergelijkingen, den inhoud te vinden.

VI.

VI. STELLING.

§. 1406. *De inhoud van elken vlakken veelhoek is (wanneer men ééne der zijden uitzondert, en niet in rekening brengt,) gelijk aan de halve som der producten, die ontstaan, wanneer men al de overige zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee, vermenigvuldigt, en elk dezer producten met de sinus van den hoek, of van de som der hoeken, welke tusschen die zijden gelegen zijn; mits men die producten, welke met de sinus van de som van een even aantal hoeken vermenigvuldigd zijn, negatief neme. Dat is, stellende a, b, c, d.....* enz. *en y, op ééne na, de laatste zijde; B, C, D, E,* enz. *de hoeken, tusschen a en b, b en c, c en, d en e, enz. en I den inhoud; dan is, met uitzondering van a,*

$$\begin{aligned} I = {} & \tfrac{1}{2} bc \times sin.\, C - \tfrac{1}{2} bd \times sin.\,(C+D) + \tfrac{1}{2} be \times sin.\,(C+D \\ & + E) - \tfrac{1}{2} bf \times sin.\,(C+D+E+F) + enz. \\ & + \tfrac{1}{2} cd \times sin.\, D - \tfrac{1}{2} ce \times sin.\,(D+E) + \tfrac{1}{2} cf \times sin.\,(D+E \\ & + F) - enz. \\ & + \tfrac{1}{2} de \times sin.\, E - \tfrac{1}{2} df \times sin.\,(E+F) + enz. \\ & + \tfrac{1}{2} ef \times sin.\, F - enz. \quad \ldots\ldots \quad (16) \end{aligned}$$

BETOOG. Men ontwikkele de vergelijkingen (11) en (12), welke in de IV en V. *Stellingen* betoogd zijn, door de producten dadelijk te vermenigvuldigen; dan zal men verkrijgen:

$$\begin{aligned} I = {} & \tfrac{1}{2} b^2 sin.\,(a,b) \times cos.\,(a,b) + \tfrac{1}{2} c^2 sin.\,(a,c) \times cos.\,(a,c) + \\ & \tfrac{1}{2} d^2 sin.\,(a,d) \times cos.\,(a,d) + \tfrac{1}{2} c^2 sin.\,(a,e) \times cos.\,(a,e) + enz. \\ & + bc \times (a,b) \times cos.\,(a,c) \\ & + bd\, sin.\,(a,b) \times cos.\,(a,d) + cd\, sin.\,(a,c) \times cos.\,(a,d) \\ & + be\, sin.\,(a,b) \times cos.\,(a,e) + ce\, sin.\,(a,c) \times cos.\,(a,e) + \ldots \\ & \quad de\, sin.\,(a,d) \times cos.\,(a,e) \\ & + enz. \quad \ldots\ldots \quad (P) \end{aligned}$$

de ontwikkeling van de vergelijking (12) zal geven:

$$\begin{aligned} I = {} & - \tfrac{1}{2} b^2 sin.\,(a,b) \times cos.\,(a.b) - \tfrac{1}{2} c^2 sin.\,(a,c) \times cos.\,(a,c) \\ & - \tfrac{1}{2} d^2 sin.\,(a,d) \times cos.\,(a,d) - \tfrac{1}{2} e^2 sin.\,(a,e) \times cos.\,(a,e) - enz. \\ & - bc \times cos.\,(a,b) \times sin.\,(a,c) \\ & - bd \times cos.\,(a,b) \times sin.\,(a,d) - cd \times cos.\,(a,c) \times sin.\,(a,d) \\ & - be \times cos.\,(a,b) \times sin.\,(a,e) - ce \times cos.\,(a,c) \times sin.\,(a,e) \ldots \\ & \quad - de \times cos.\,(a,d) \times sin.\,(a,e) \\ & - enz \quad \ldots\ldots \quad (Q) \end{aligned}$$

Men telle nu de vergelijkingen *P* en *Q* bij elkander; dan verkrijgt men:

$$\begin{aligned} 2I = {} & bc\,[sin.\,(a,b) \times cos.\,(a,c) - cos.\,(a,b) \times sin.\,(a,c)] \\ & + bd\,[sin.\,(a,b) \times cos.\,(a,d) - cos.\,(a,b) \times sin.\,(a,d)] \end{aligned}$$

 $+ be$

$$+ be[\sin.(a,b) \times \cos.(a,e) - \cos.(a,b) \times \sin.(a,e)]$$
$$+ bf[\sin.(a,b) \times \cos.(a,f) - \cos.(a,b) \times \sin.(a,f)]$$
$$+ \text{enz.}$$
$$+ cd[\sin.(a,c) \times \cos.(a,d) - \cos.(a,c) \times \sin.(a,d)]$$
$$+ ce[\sin.(a,c) \times \cos.(a,e) - \cos.(a,c) \times \sin.(a,e)]$$
$$+ cf[\sin.(a,c) \times \cos.(a,f) - \cos.(a,c) \times \sin.(a,f)]$$
$$+ \text{enz.}$$
$$+ de[\sin.(a,d) \times \cos.(a,e) - \cos.(a,d) \times \sin.(a,e)]$$
$$+ df[\sin.(a,d) \times \cos.(a,f) - \cos.(a,d) \times \sin.(a,f)]$$
$$+ \text{enz.}$$
$$+ ef[\sin.(a,e) \times \cos.(a,f) - \cos.(a,e) \times \sin.(a,f)]$$
$$+ \text{enz.}$$

Maar nu is (*III. Stell. XI. B.*) $\sin.(a,b) \times \cos.(a,c) - \cos.(a,b) \times \sin.(a,c) = \sin.[(a,b) - (a,c)]$, *enz.*: de laatste vergelijking wordt derhalve;

$$2I = bc \sin.[(a,b) - (a,c)] + bd \sin.[(a,c) - (a,d)] + \ldots$$
$$be \sin.[(a,b) - (a,e)] + bf \sin.[(a,b) - (a,f)] + \text{enz.}$$
$$+ cd \sin.[(a,c) - (a,d)] + ce \sin.[(a,c) - (a,e)] + \ldots$$
$$cf \sin.[(a,c) - (a,f)] + \text{enz.}$$
$$+ de \sin.[(a,d) - (a,e)] + df \sin.[(a,d) - (a,f)] + \text{enz.}$$
$$+ ef \sin.[(a,e) - (a,f)] + \text{enz.}$$

Voorts is (*I. Aanm. V. Stell.*) $(a,b) = B$; $(a,c) = B + C - 180^\circ$; $(a,d) = B + C + D - 2 \times 180^\circ$; $(a,e) = B + C + D + E - 3 \times 180^\circ$; $(a,f) = B + C + D + E + F - 4 \times 180^\circ$; *enz.*; derhalve zal men hebben:

$$(a,b) - (a,c) = 180^\circ - C$$
$$(a,b) - (a,d) = 2 \times 180^\circ - (C + D)$$
$$(a,b) - (a,e) = 3 \times 180^\circ - (C + D + E)$$
$$(a,b) - (a,f) = 4 \times 180^\circ - (C + D + E + F), \text{ enz.}$$
$$(a,c) - (a,d) = 180^\circ - D$$
$$(a,c) - (a,e) = 2 \times 180^\circ - (D + E)$$
$$(a,c) - (a,f) = 3 \times 180^\circ - (D + E + F), \text{ enz.}$$
$$(a,d) - (a,e) = 180^\circ - E \ \ldots \ (a,e) - (a,f) = 180^\circ - F$$
$$(a,d) - (a,f) = 2 \times 180^\circ - (E + F) \quad \text{enz.}$$

en $\sin.[(a,b) - (a,c)] = \sin. C$

$$\sin.[(a,b) - (a,d)] = - \sin.(C + D)$$
$$\sin.[(a,b) - (a,e)] = + \sin.(C + D + E), \text{ enz.}$$

Stelt men eindelijk deze waarden in de laatst gevondene vergelijking, en deelt men alles door *twee*; dan verkrijgt men de vergelijking, die betoogd moest worden.

§. 1407. I. Gevolg. Wij hebben (*I. Aanm. V. Stell.*) gezien: dat *sin.*

C =

$C = (b,c)$; $sin. (C + D) = - sin. (b,d)$; $sin. (C + D + E) = sin. (b,e)$; enz. de betoogde vergelijking verandert dan in deze:

$$I = \tfrac{1}{2} b c \, sin. (b,c) + \tfrac{1}{2} b d \, sin. (b,d) + \tfrac{1}{2} b e \, sin. (b,e) + \ldots\ldots$$
$$\tfrac{1}{2} b f \, sin. (b,f) + enz.$$
$$+ \tfrac{1}{2} c d \, sin. (c,d) + \tfrac{1}{2} c e \, sin. (c,e) + \tfrac{1}{2} c f \, sin. (c,f) + enz.$$
$$+ \tfrac{1}{2} d e \, sin. (d,e) + \tfrac{1}{2} d f \, sin. (d,f) + enz.$$
$$+ \tfrac{1}{2} e f \, sin. (e,f) + enz. \quad (17)$$

waaruit blijkt: dat men deze eigenschap nog aldus kan voorstellen: *De inhoud van eenen vlakken veelhoek is, wanneer men ééne der zijden uitzondert, gelijk aan de halve som der producten van al de andere zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk product vermenigvuldigd met de sinus van den hoek, welke deze twee zijden met elkander maken.* Dan, de wijze, waarop deze eigenschap, in de Stelling, is voorgedragen, schijnt voor de berekening geschikter te zijn.

§. 1408. I. AANMERKING. Voor eenen driehoek verandert de algemeene vergelijking in de wel bekende $I = \tfrac{1}{2} b c \times sin. C$.

§. 1409. II. AANMERKING. Vermits de uitgezonderde zijde a alle waarden kan hebben, kan zij ook $= 0$ gesteld worden, zonder dat deze omstandigheid de gedaante der vergelijking verandert. Wanneer derhalve alle de zijden en hoeken van eenen veelhoek bekend zijn, zal men deszelfs inhoud, even als door de vergelijking (14) en (15), op $8 n - 4$ onderscheidene wijzen, kunnen berekenen.

Toepassing der voorgaande Beschouwingen.

§. 1410. Van de verdere beschouwing dezer rijke stof afstappende, zullen wij kortelijk het nut der betoogde eigenschappen, in het werkdadige, aanwijzen.

I. VRAAGSTUK. *Fig.* 170.

§. 1411. *In een digt bewassen bosch, zijn twee punten A en B gelegen, welker afstand men ten naauwkeurigste noodig heeft te kennen: maar het is niet mogelijk, om de lijn AB dadelijk te meten, noch ergens eene basis te vinden, uit welker uiteinden de punten A en B te gelijk kunnen gezien worden; men kan alleenlijk uit B het punt A, en uit A het punt B zien; en, in eene regte lijn, van B tot C, van C tot D, van D tot E, van E tot F, en van F tot A gaan; en deze afstanden, benevens de hoeken A, B, C, D, E, F, meten: men vraagt nu, door deze gegevens, den afstand AB te vinden?*

OPLOSSING. Volgens het *III. Gev. II. Stell.* is:

$$a = b \times \cos. B - c \times \cos.(B + C) + d \times \cos.(B + C + D) \; . \; . \; - e \times \cos.(B + C + D + E) + f \times \cos.(B + C + D + E + F)$$

Laat nu gegeven zijn $b = 392m$, $c = 281m$, $d = 373m$, $e = 331m$, ... $f = 243m$, $B = 130°$; $C = 145°$; $D = 76°$; $E = 132°$; $F = 142°$; $A = 95°$; dan heeft men;

$B = 130°$	zoek in de Tafel	$50° -$
$B + C = 275°$	. . . . .	$85° +$
$B + C + D = 351°$	. . . . .	$9° +$
$B + C + D + E = 483°$	. . . . .	$57° +$
$B + C + D + E + F = 625°$	. . . . .	$85° -$

In dit Tafeltje zijn de teekens van de cosinusſen der hoeken achter dezelve geſteld. Om de hoeken te vinden, welke, in de tafel, die ſlechts tot het eerſte quadrant loopt, moeten genomen worden, om de goniometriſche lijnen voor bogen, grooter dan 90°, te verkrijgen, *deelt men het getal der graden, grooter dan 360° zijnde, door 360°, en lette alleen op het overſchot: valt dit in het eerſte quadrant; dan zoekt men in de tafel, met dit overſchot, de goniometriſche lijn; valt het overſchot in het tweede quadrant, moet men het van 180° aftrekken; valt het in het derde quadrant, moet men er 180° van aftrekken, en valt het in het vierde quadrant, moet het van 360° afgetrokken worden, en men moet, in elk geval, met het verſchil, dat altijd minder dan 90° zal zijn, de goniometriſche lijn in de tafel opzoeken.*

De bijgebragte vergelijking wordt, in ons bijzonder geval, ten opzigte van de gegevens en de teekens,

$$a = -392 \times \cos. 50° - 281 \times \cos. 85° + 373 \times \cos. 9° + 331 \times \cos. 57° - 243 \times \cos. 85°$$

Elke term dezer vergelijking wordt door de Logarithmen gemakkelijk berekend. Men zal met behulp van dezelve vinden:

$$a = -251^m,973 - 24^m,491 + 368^m,408 + 180^m,275 - 22^m,050$$
$$\text{of } a = +250^m,169.$$

II. VRAAGSTUK. *Fig.* 170.

§. 1412. *Laat alles, als in het voorgaande Vraagſtuk, gegeven zijn, uitgenomen de hoeken B en A, welke de omſtandigheden verhinderd hebben te meten; dan vraagt men de zijde $AB = a$ te vinden?*

OPLOSSING. Volgens de *III. Stelling II. Aanm. V. Stelling*, is:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 - 2bc \cos. C + 2bd \times \cos.(C + D) - 2be \times \cos.(C + D + E) + 2bf \times \cos.(C + D + E + F) - 2cd \times \cos. D + 2ce \times \cos.(D + E) - 2cf \times \cos.(D + E + F) - 2de \times \cos. E + 2df \times \cos.(E + F) - 2ef \times \cos. F.$$

Hier

Hier is nu $C=145^\circ$; $D=76^\circ$; $E=132^\circ$ en $F=140^\circ$; derhalve heeft men:

$$C=145^\circ \text{ zoek in de Tafel } 35^\circ -$$
$$C+D=221^\circ \quad \ldots\ldots \quad 41^\circ -$$
$$C+D+E=353^\circ \quad \ldots\ldots \quad 7^\circ +$$
$$C+D+E+F=495^\circ \quad \ldots\ldots \quad 45^\circ -$$
$$D=76^\circ \quad \ldots\ldots \quad 76^\circ +$$
$$D+E=208^\circ \quad \ldots\ldots \quad 28^\circ -$$
$$D+E+F=350^\circ \quad \ldots\ldots \quad 10^\circ +$$
$$E=132^\circ \quad \ldots\ldots \quad 48^\circ -$$
$$E+F=274^\circ \quad \ldots\ldots \quad 86^\circ +$$
$$F=142^\circ \quad \ldots\ldots \quad 38^\circ -$$

en de vergelijking wordt diensvolgens:

$$a^2=b^2+c^2+d^2+f^2+2bc\times cos.\ 35^\circ-2bd\times cos.\ 41^\circ-2be\times cos.\ 7^\circ-2bf\times cos.\ 45^\circ-2cd\times cos.\ 76^\circ-2ce\times cos.\ 28^\circ-2cf\times cos.\ 10^\circ+2dc\times cos.\ 48^\circ+2df\times cos.\ 86^\circ+2ef\times cos.\ 38^\circ.$$

De berekening dezer vergelijking zal geven: $a=250m$, 169, als boven.

§. 1413. Aanmerking. Men zal nu ook gemakkelijk de hoeken A en B vinden kunnen.

Men heeft, zie *II. Stelling*,

$$b=c\times cos.\ C-d\times cos.(C+D)+e\times cos.(C+D+E)\ \ldots -f\times cos.(C+D+E+F)+a\times cos.(C+D+E+FA)$$
$$f=e\times cos.\ F-d\times cos.(F+E)+c.\times cos.(F+E+D)\ \ldots -b\times cos.(F+E+D+C)+a\times cos.(F+E+D+C+B)$$

waaruit volgt:

$$a\times cos.(C+D+E+F+A)=b-c\times cos.C+d\times cos.(C+D) -e\times(C+D+E)+f\times cos.(C+D+E+F)$$
$$a\times cos.(F+E+D+C+B)=f-e\times cos.F+d\times cos.(F+E) -c\times cos.(F+E+D)+b\times cos.(F+E+D+C)$$

waardoor $C+D+E+F+A$ en $F+E+D+C+B$, en bijgevolg A en B, berekend kunnen worden.

III. Vraagstuk. *Fig.* 173.

§. 1414. *Wanneer van den veelhoek ABCDEEF dezelfde dingen, als in het eerste en tweede Vraagstuk, gegeven zijn, dan begeert men den inhoud te vinden?*

Oplossing. Door de toepassing van elke der formulen (14), (13) en (16), zal men den inhoud vinden.

IV. VRAAGSTUK. *Fig.* 176.

§. 1415. *Drie zijden $AB = a$, $AD = d$, $DC = c$ eens vierhoeks, met de twee ingesloten hoeken A en D, gegeven zijnde, de zijde b, benevens de hoeken B en C, te vinden?*

OPLOSSING. Men heeft (*II. Stell.* en *II. Aanm. V. Stell.*)

$$a = b \times \cos. B - c \times \cos.(B + C) + d \times \cos.(B + C + D)$$

maar $B + C + D = 360° - A$ en $B + C = 360° - (A + B)$ zijnde, is $\cos.(B + C + D) = \cos. A$ en $\cos.(B + C) = \cos.(A + D)$, en de vergelijking wordt derhalve:

$$b \times \cos. B = a + c \times \cos.(A + D) - d \times \cos. A \ldots (\mu)$$

Nog is (*IV. Stell.*)

$$b \times \sin. B = + c \times \sin.(B + C) - d \times \sin.(B + C + D)$$

of $b \times \sin. B = d \times \sin. A - c \times \sin.(A + D)$

deelt men deze vergelijking door de vergelijking (μ); dan verkrijgt men:

$$\text{tang.}\, B = \frac{d \times \sin. A - c \times \sin.(A + D)}{a - d \times \cos. A + c \times \cos.(A + D)}$$

Op dezelfde wijze, zal men vinden:

$$\text{tang.}\, C = \frac{d \times \sin. D - c \times \sin.(A + D)}{a - d \times \cos. D + c \times \cos.(B + D)}$$

Deze hoeken gevonden hebbende, zal de zijde b, door de vergelijking

$$b = \frac{d \times \sin. A - c \times \sin.(A + D)}{\sin. B}$$

berekend worden.

V. VRAAGSTUK. *Fig.* 177.

§. 1416. *Om den inhoud eens vijfhoeks ABCDE te vinden, heeft men gemeten ééne der zijden $AB = a$; aan het hoekpunt A, de hoeken EAB, DAB en CAB, gelijk p, q en r; en, aan het hoekpunt B, de hoeken ABE, ABD en ABC, gelijk aan p', q' en r'. Men vraagt: hoe, door deze gegevens, den inhoud van den veelhoek kan gevonden worden?*

OPLOSSING. Men zal, met behulp van de *II* en *IX. Stell. IX. B.* vinden: (den inhoud $= I$ stellende)

$$I = \tfrac{1}{2} a^2 \times \left\{ \frac{\sin. p' \times \sin. q' \times \sin.(p - q)}{\sin.(p + p') \times \sin.(q + q')} + \frac{\sin. q \times \sin. p' \times \sin.(q' - p')}{\sin.(q + q') \times \sin.(p + p')} + \frac{\sin. r \times \sin. r'}{\sin.(r + r')} \right\}$$

en ook nog deze andere vergelijking:

$I =$

$$I = \tfrac{1}{4}a^2 \times \left\{ \frac{sin.r \times sin.q \times sin.(r'-q)}{sin.(r+r') \times sin.(q+q')} + \frac{sin.q \times sin.r \times sin.(q'-r')}{sin.(q+q') \times sin.(r+r')} + \frac{sin.p \times sin.p'}{sin.(p+p')} \right\}$$

Algemeene Eigenschappen der veelvlakkige Ligchamen (Polyedrometie.)

§. 1417. III. BEPALING. *Fig.* 170. Men kan, bij elke veelhoekige figuur, eene zekere lijn *P Q*, in dit vlak gelegen, en in hetzelve naar welgevallen geplaatst zijnde, aannemen, en alle punten, bepaalde lijnen of zijden der figuur, naar de *V* en *VI. Bep. X. B.*, op deze alzoo aangenomene lijn *P Q*, projecteren. Men noemt dan deze aangenomene lijn *P Q* de *lijn van projectie*, en de lijn *A' B'*, begrepen tusschen de loodlijnen *A A'* en *B B'*, welke uit de uiteinden van eenige lijn *A B* op de lijn van projectie vallen, de *projectie van A B en P Q*, somtijds eenvoudig de *projectie van A B*. De hoek nu, onder welken het verlengde van *A B* de lijn van projectie ontmoet, wordt de *projectiehoek* van de lijn *A B* genoemd. Wij zullen in het vervolg dezen projectiehoek door (*A B*) uitdrukken, of *A B* = *a* stellende door (*a*). — Wanneer, *fig.* 175, eene lijn *A B* op een vlak *P Q* geprojecteerd wordt, (zie *VI. Bep. VIII. B.*) wordt de projectie van die lijn, op het vlak van projectie, volmaakt, op dezelfde wijze, bepaald.

§ 1418. IV. BEPALING. *Fig.* 175. De projectie *A' B' C' D' E'* van eenige vlakke figuur *A B C D E*, op een vlak *P Q*, dat als het vlak van projectie wordt aangenomen, kan begrepen worden, aldus te ontstaan. Men verbeelde zich, op het vlak van projectie, eene onbepaalde loodlijn *Q R*, en dat eene lijn, den omtrek der gegevene figuur volgende, evenwijdig aan deze regtlijn *Q R* bewogen worde; dan wordt er (*I. Bep. XII. B.*) een cilinder vlak geboren, hetwelk, op het vlak van projectie, eene vlakke figuur *A' B' C' D' E'* bepaalt, welke vlakke figuur de *projectie van de gestelde figuur A B C D E, op het vlak P Q*, genoemd wordt. De hoek, onder welken het gegeven vlak het vlak van projectie ontmoet, wordt ook hier de projectiehoek genoemd en door (*A B C D E*) uitgedrukt.

I. HULPSTELLING. *Fig.* 170.

§. 1419. *De projectie A' B' van eenige lijn A B is gelijk aan de-*

deze lijn, vermenigvuldigd met de cosinus van haren projectiehoek. Dat is $A B = A B \times \cos.(A B)$.

Betoog. Want, indien men $A R$ evenwijdig aan $A' B'$ trekt; dan is (*XXIV. Stell. I. B.*) hoek $B A R = (A B)$ en (*I. Stell. III. B.*) $B R = A' B'$; nu is (*II. Stell. IX. B.*) $A R = A B \times \cos. B A R$; dat is, $A' B' = A B \times \cos.(A B)$.

§. 1420. Aanmerking. Indien $A B$ evenwijdig aan $A' B'$ is; dan wordt $(A B) =$ hoek $B A R = 0$; nu is de $\cos. 0^{\circ} = 1$, derhalve $A' B' = A B$. Maar is $A B$ loodregt op de lijn van projectie; dan is $(A B) = 90^{\circ}$, $\cos.(A B) = 0$ en $A' B' = 0$.

II. Hulpstelling. *Fig.* 174 *en* 175.

§. 1421. *De projectie van eenige vlakke figuur, op haar vlak van projectie, is gelijk aan die figuur, vermenigvuldigd met de cosinus van haren projectiehoek.*

Betoog. Men moet deze stelling wel bijzonderlijk van eene vlakke figuur verstaan, en bij de bewoordingen *vlakke* figuur en hare *projectie* aan de inhouden van de figuur en van hare projectie denken.

Laat, *fig.* 174, $P Q$ het vlak van projectie, $A B C$ een driehoek $A' B' C'$ zijne projectie zijn; dan zijn $A A'$, $B B'$ en $C C'$, loodregt op $P Q$. Men brenge door de loodlijn $A A'$ een vlak $A' D' D A$, hetwelk loodregt op het vlak van den driehoek $A B C$ staat; dan staan (*XI. Stell. VIII. B.*) de doorsneden der vlakken van $A B C$ en $A' B' C'$ loodregt op het vlak $A' D' D A$, en de verlengde der lijnen $A D$ en $A' D'$, welke elkander in de doorsnede ontmoeten, maken met dezelve (*IV. Stell. VIII. B.*) een' regten hoek, en de hoek, onder welken deze lijnen elkander snijden, is (*XIV Bep. VIII. B.*) de standhoek der vlakken $A B C$ en $A' B' C'$, en (*III. Bep.*) gevolgelijk de projectiehoek van den driehoek $A B C$. Men denke nu, in het hoekpunt A', het middelpunt van eenen bol, welks oppervlak door de vlakken $A' C' D'$, $A' C' C A$, $A' D' D A$, in de bogen $q r$, $p q$ en $p r$, gesneden wordt: voorts brenge men, door het punt A', een vlak $A' c d$, evenwijdig aan $A C D$: dit vlak bepaalt den boog $c d$, en omdat dit vlak (*XXVIII. Stell. VIII. B.*) regthoekig op $A' D' D A$ staat, is de bolvormige driehoek $p c d$ regthoekig in d; eindelijk is $p q = p r = 90^{\circ}$; $p = q r =$ hoek $D' A' C'$ en $d c =$ hoek $D A C$; $d r$ de projectiehoek van $A B C$, en tevens de projectiehoek van de lijn $A D$, terwijl $c q$ de projectiehoek van $A C$ is. Men heeft dan (*I. Stell.*) $A' D' = A D \times \cos. d r = A D \times \sin. p d$, en $A' C' = A C \times \cos. c q = A C \times \sin. p c$. Nog is (*IX. Stell. XIII. B.*) $\sin. d c = \sin. p \times \sin. p c = \sin. q r \times \sin. p c$; dat is, $\sin. D A C = \sin. D' A' C' \times \sin. p c$. Nog is (*IX. Stell. IX. B.*) *Inh.* $A C D = \frac{1}{2} A D \times A C \times \sin. D A C = \frac{1}{2} A D \times A C \times \sin. D' A' C' \times \sin. p c$: en *Inh.* $A' C' D' = \frac{1}{2} A' D' \times A' C' \times \sin. D' A' C' =$ (zie boven) $= \frac{1}{2} A D \times A C \times \sin. p d \times \sin. p c \times \sin. D' A' C' =$ *Inh.* $A C D \times \sin. p d$

$=$ *Inh.*

$=$ *Inh. ACD* $\times$ *cos. dr.*. Men heeft derhalve, den projectiehoek van *ACD* gelijk *P* stellende,

$$Inh.\ A'B'D' = Inh.\ ABD \times cos\ P$$
$$Inh.\ A'C'D' = Inh.\ ACD \times cos.\ P$$

derhalve zal ook (de tweede van de eerste vergelijking aftrekkende,)

$$Inh.\ A'B'C' = Inh.\ ABC \times cos.\ P$$

moeten zijn.

Laat verder, *fig.* 175, *ABCDE* een veelhoek zijn, welks projectiehoek op het vlak *PQ* door *P* wordt uitgedrukt; dan zal (*bew.*) uit eenig punt *A* de hoekpuntslijnen *AC enz.* trekkende, $A'B'C' = ABC \times cos.\ P$, $A'C'D' = ACD \times cos.\ P$, *enz.* zijn derhalve $A'B'C'D'E' = ABCDE \times cos.\ P$.

Wanneer men eindelijk, in eene kromlijnige vlakke figuur, een veelhoek van een groot aantal zijden beschrijft; dan zal men gemakkelijk bewijzen, dat het gestelde ook voor zulk eene figuur gelden zal.

§. 1422. AANMERKING. Wanneer $P = 0$ is; dan wordt $A'B'C'D'E' = ABCDE$.

VII. STELLING.

§. 1423. *De som der producten van al de zijvlakken van een veevlakkig ligchaam, elk vermenigvuldigd met de cosinus van den hoek, welke dat zijvlak met eenig naar welgevallen aangenomen vlak maakt, is, op welk ééne wijze ook dit vlak geplaatst mogt zijn, gelijk nul.*

BETOOG. Wanneer men, op het aangenomen vlak, eene loodlijn stelt, en, evenwijdig aan dezelve, eene lijn laat bewegen, welke altijd langs de ribben of zijvlakken van het ligchaam loopt, ziet men: dat hetzelve, binnen de zijvlakken van een regt veelhoekig prisma, kan besloten worden, welks grondvlak in het onbepaald aangenomen vlak zal gelegen zijn. Dit grondvlak zal klaarblijkelijk de projectien van al de zijvlakken van het veelvlakkig ligchaam bevatten, welke projectien, daarom, omdat de zijvlakken, in het beloop der ribben, aan elkander sluiten, ook door regte lijnen aan elkander vereenigd, en tot aan de grenzen van de grondvlakte van het regte prisma zullen uitgestrekt zijn. Zonder dat het nu noodig is, een bijzondere figuur te ontwerpen, ziet men duidelijk: dat de zijvlakken, welke, op dit grondvlak, geprojecteerd zijn, ten aanzien van het aangenomen vlak, tweederlei stand kunnen hebben, 1°. zijvlakken, welken, met haar buitenkant, naar dit vlak liggen: 2°. zijvlakken, welker binnenkant naar hetzelve staan, en dat de som der projectien, zoowel van de eerste als van de laatste soort van zijvlakken, gelijk zal moeten zijn aan de basis van het regte prisma. Noemen wij nu de zijvlakken van de eerste soort *a*, *b*, *c*, *d*, *enz.* en die van de tweede soort *a'*, *b'*, *c'*, *enz.* en de hoeken, welke deze zijvlakken met het aange-

genomen vlak maken (*a*), (*b*), *enz.*; dan zullen de projectien van *a*, *b*, *c*, *enz.* op het aangenomen vlak (*II. Halpst.*) door $a \times cos.(a)$, $b \times cos.(b)$, $c \times cos.(c)$, worden uitgedrukt, en omdat (raadpleeg *Betoog I. Stell.* en *I. Aanm.* op dezelve,) de ligging van de eerste met de tweede soort van zijvlakken, ten opzigte van het aangenomen vlak, door het teeken van de cosinus van den projectiehoek wordt aangewezen, zullen de projectien van *a'*, *b'*, *enz.* door $-a' \times cos.(a')$, $-b \times cos.(b')$, *enz.* worden aangewezen; noemende derhalve *B* het grondvlak van het regte prisma; dan zal

$$B = +a \times cos.(a) + b \times cos.(b) + c \times cos.(c) + enz.$$
$$B = -a' \times cos.(a') - b' \times cos.(b') - c' \times cos.(c') - enz.$$

en trekt men de twee van de eerste vergelijking af; dan vindt men:

$$a \times cos.(a) + b \times cos.(b) + c \times cos.(c) + enz. + a' \times cos.(a')$$
$$+ b' \times cos.(b') + c' \times cos.(c') enz. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

§. 1424. GEVOLG. Men zal, (noemende *s* de halve som der zijvlakken,) vinden:

$$s = a \times cos^2.\tfrac{1}{2}(a) + b \times cos^2.\tfrac{1}{2}(b) + c \times cos^2.\tfrac{1}{2}(c) + enz. \quad (19)$$

VIII. STELLING.

§. 1425. *Elk zijvlak van een veelvlakkig ligchaam is gelijk aan de som der producten, die men verkrijgt, wanneer men elk der andere zijvlakken vermenigvuldigt met de cosinus van den hoek, welken dit zijvlak met het eerste maakt. Dat is*, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, enz. *de zijvlakken zijnde; dan zal*

$$a = b \times cos.(a,c) + c \times cos.(a,c) + d \times cos.(a,d) + enz.$$
$$b = a \times cos.(b,a) + c \times cos.(b,c) + d \times cos.(b,d) + enz.$$
$$c = a \times cos.(c,a) + b \times cos.(c,b) + d \times cos.(c,d) + enz.$$
$$enz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

zijn.

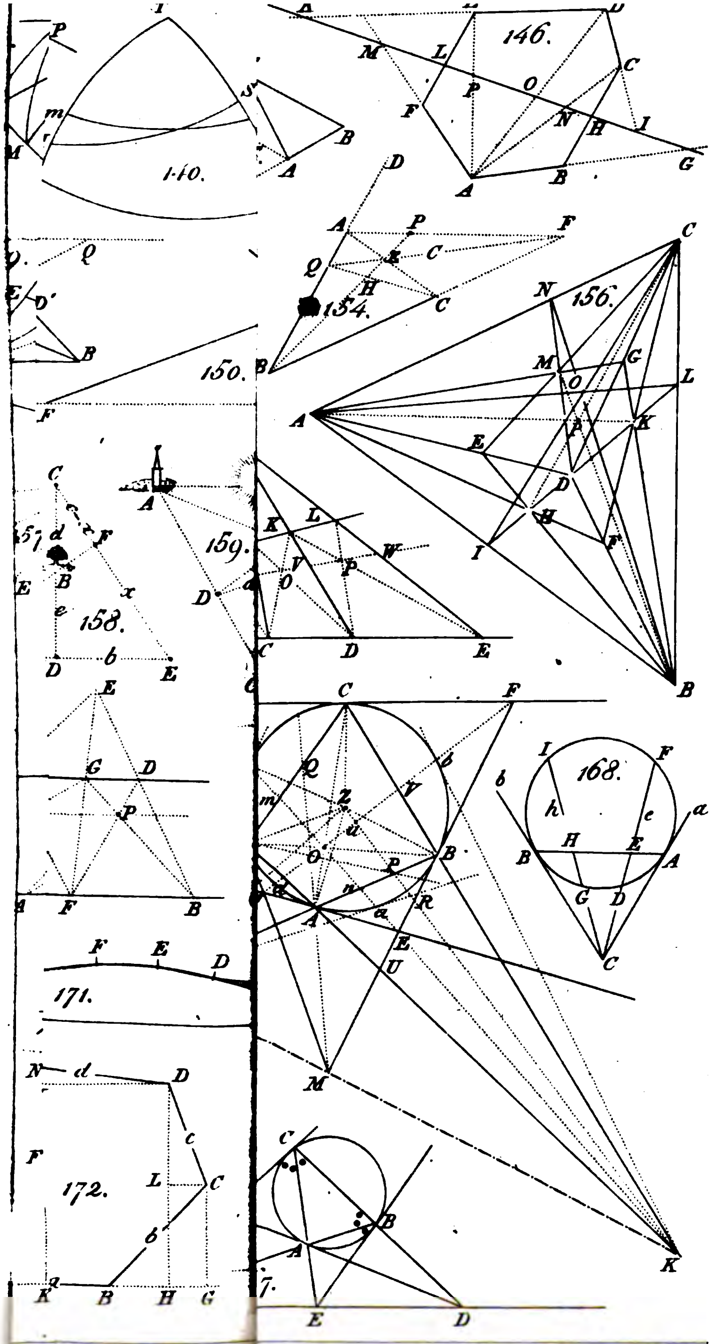
BETOOG. Deze waarheid wordt, op dezelfde wijze, als de *II. Stell.* bewezen.

§. 1426. GEVOLG. Noemende *s* de halve som der zijvlakken; dan heeft men:

$$s = b \times cos^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + c \times cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d)$$
$$+ enz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$
$$(s-a) = b \times sin^2.\tfrac{1}{2}(a,b) + c \times sin^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + d \times sin^2.\tfrac{1}{2}(a,d)$$
$$+ enz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

IX. STELLING.

§. 1427. *De som van de inhouden van de vierkanten der zijvlak-*



L. Schweickhardt sc.

vlakken van een veelvlakkig ligchaam is gelijk aan de dubbele som van de producten der zijden, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, en elk vermenigvuldigd met de cosinus van den standhoek, welken zij met elkander maken. Dat is:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + enz. = 2ab \times \cos.(a,b) + 2ac \times \cos.(a,c) + enz. + 2bc \times \cos.(b,c) + enz. \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

BETOOG. Deze waarheid wordt, uit de voorgaande Stelling, op dezelfde wijze, als de *III.* uit de *II. Stell.*, afgeleid.

§. 1428. I. GEVOLG. Stellende $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c + enz. = s$; dan zal,

$$s^2 = ab \times \cos.\tfrac{1}{2}(a,b) + ac \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(a,c) + ad \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(a,d) + enz. + bc \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(b,c) + bd \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(b,d) + enz. + cd \times \cos^2.\tfrac{1}{2}(c,d) + enz. + enz. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

gevonden worden.

§. 1429. II. GEVOLG. Men zal ook vinden:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + enz. = 2[bc \times \cos.(b,c) + bd \times \cos.(b,d) + enz. + cd \times \cos.(c,d) + enz.] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

§. 1430. III. GEVOLG. Voor eene driehoekige piramide zal dan $a^2 = b^2 + c^2 + d^2 - 2bc \times \cos.(b,c) - 2bd \times \cos.(b,d) - 2cd \times \cos.(c,d)$ zijn. Laten nu de hoeken (b,c), (b,d) en (c,d) regt zijn; dan zijn hunne cosinussen $= 0$, en de vergelijking wordt $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$, hetwelk instemt met de oplossing van het *XXXIX. Vraagst.*, *XIII. B.*

§. 1431. AANMERKING. Het blijkt, uit de drie laatste Boeken, hoe naauw de eigenschappen der figuren met elkander verknocht zijn. Deze overeenstemming opent eene bron van nieuwe waarheden, welke wij, bij eene andere gelegenheid, nader hoopen te leeren kennen.

Einde van het tweede en laatste deel.